

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
14 января 2020 г., протокол № 6

Заведующий кафедрой

 В.И. Иванов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по самостоятельной работе студентов
по дисциплине (модулю)
«Теория вероятностей и математическая статистика»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

с направленностью (профилем)
Механика деформируемого твёрдого тела

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-20

Тула 2020 год

Разработчик методических указаний

Кочетыгов А.А., профессор каф. ПМИИ, к.т.н., доцент
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

Самостоятельная работа по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» выполняются в 5–м и 6–м семестрах и имеют целью закрепление знаний по всем трём разделам (частям):

- «Теория вероятностей»,
- «Случайные процессы»,
- «Математическая статистика».

Для успешного освоения курса и приобретения навыков решения практических задач целесообразно использовать лекции и следующую литературу:

1. Кочетыгов А.А. Теория вероятностей: учеб. пособие / – Тула, Изд–во ТулГУ, 2016. – 234 с.

2. Кочетыгов А.А. Математическая статистика: учеб. пособие / – Тула, Изд–во ТулГУ, 2017. – 274 с.

3. Кочетыгов А.А. Математическая статистика. Решение задач с использованием пакета SPSS: учеб. пособие / Тула: Изд–во ТулГУ, 2011. – 156 с.

4. Кочетыгов А.А. Случайные процессы: учеб. пособие / – Тула, Изд–во ТулГУ, 2020. – 300 с.

**Задачи, предлагаемые для самостоятельного решения
по первому разделу курса
«Теория вероятностей»**

1.1. В лотерее 10 билетов, из которых 4 выигрышных. Какова вероятность выиграть, имея 3 билета?

1.2. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.

1.3. Какова вероятность вытащить два разноцветных шара, если в ящике 8 белых и 12 черных шаров?

1.4. У первого акционера имеется 9 акций вида A и 12 акций вида B . У второго, соответственно, 5 и 9. В результате операции купли/продажи 7 акций первого перешли ко второму держателю акций. Найти вероятность того, что случайно выбранная акция второго акционера окажется вида A .

1.5. Устройство состоит из 12 независимых блоков, помеченных $B1, B2, \dots, B12$. Вероятность того, что неисправность может произойти в одном из блоков $B1, B2, B3, B4$ составляет 0,6. При поиске появившейся неисправности обследованы блоки $B1, B2, B3$, но неисправность не обнаружена. Какова вероятность того, что неисправность будет обнаружена в блоке $B4$?

1.6. Определить вероятность того, что трехзначный номер первой встретившейся автомашины не содержит одинаковых цифр и цифры шесть.

1.7. Из чисел 1, 2, 3, ..., 15 одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым числом будет не меньше числа 3?

1.8. Стержень разламывается на две части в случайной точке, равномерно распределенной по всей длине стержня. Найти вероятность того, что меньший обломок имеет длину, не превосходящую одной трети длины стержня.

1.9. Для повышения надежности прибора он дублируется тремя такими же приборами. Надежность каждого прибора равна 0,6. Найти надежность системы. Сколько надо взять приборов, чтобы надежность системы стала 98%?

1.10. Из колоды в 32 карты берутся 4. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одна дама.

1.11. При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 30,7% имеют первую, 39,5% – вторую, 21,9% – третью и 7,9% – четвертую группы крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

1.12. Какова вероятность того, что при игре в преферанс (32 карты раздаются трем игрокам) в прикупе окажутся два туза?

1.13. Четыре поздравительные открытки случайно разложены по четырем

конвертам с адресами. Найти вероятность того, что хотя бы одна открытка попала в свой конверт.

1.14. Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна 4.

1.15. Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный.

1.16. Устройство состоит из 5 элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

1.17. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

1.18. Два игрока по очереди бросают игральную кость. Каждый по одному разу. Выигравшим считается тот, кто получит большее число очков. Найти вероятность выигрыша первого игрока.

1.19. В коробке 5 одинаковых изделий, 3 из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажется одно окрашенное изделие.

1.20. Среди 10 электрических лампочек три нестандартные. Найти вероятность того, что две одновременно лампочки окажутся нестандартными.

1.21. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из пяти первых покупателей обувь этого размера будет необходима одному.

1.22. Вероятность того, что монета диаметром d не пересечет ни одну сторону квадратной сетки равна p . Определить размер сетки.

1.23. Два корабля должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих кораблей независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из кораблей придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого корабля составляет два часа, а второго – три часа.

1.24. На обслуживающее устройство в промежуток времени $[0, 12]$ должны поступить 2 заявки. Если разность между моментами поступления заявок меньше 2, то вторая заявка теряется. Найти вероятность потери заявки.

1.25. Найти вероятность того, что сумма двух случайных чисел из отрезка $[-1, 2]$ больше единицы, а их произведение меньше единицы.

1.26. На пол, разграфленный параллельными прямыми на полосы шириной a , бросается наугад игла длины l ($l < a$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

1.27. На плоскости отрезок длиной 10 см закреплен в одном конце и вращается вокруг точки закрепления так, что все направления отрезка равновероятны. Найти среднюю проекцию отрезка на заданную ось.

1.28. Вероятность того, что посетитель страховой компании заключит с ней какой-либо договор, равна 0,4. Сколько посетителей надо обслужить, что-

бы с вероятностью не меньшей, чем 0,9, можно было утверждать, что будет заключен договор?

1.29. Стрельба заканчивается после третьего попадания по мишени. Найти вероятность того, что при этом будет 5 промахов, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,3.

1.30. Производится залп из шести орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,6. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее четырех попаданий.

1.31. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

1.32. Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 80%. Консультационная фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтвердила предположение о росте спроса. Положительные прогнозы консультационной фирмы сбываются с вероятностью 95%, а отрицательные – с вероятностью 99%. Какова вероятность того, что рост спроса действительно произойдет?

1.33. 2 автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность 1–го автомата вдвое больше производительности 2–го. 1–й автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а 2–й – 84% деталей отличного качества. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена 1–м автоматом.

1.34. Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно: выиграть 2 партии из 4 или 3 партии из 6? Ничьи не рассматриваются.

1.35. Два баскетболиста делают по 3 броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча в корзину при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Насколько вероятнее того, что у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

1.36. Известно, что в среднем 60% всего числа изготавливаемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Чему равна вероятность того, что в изготовленной партии окажется 6 аппаратов первого сорта, если партия содержит 10 аппаратов?

1.37. Рабочий обслуживает три станка. Каждый из станков может выходить из строя независимо друг от друга с вероятностями соответственно $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,5$. Стало известно, что вышел из строя один станок. Какова вероятность того, что это первый станок.

1.38. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества. 40% приборов собирается из высококачественных деталей. Если прибор собран из высококачественных деталей, то его надежность за время t равна 0,95, если из деталей обычного качества – его надежность 0,7. Прибор испытывали в течение времени t и он отработал безотказно.

Какова вероятность того, что он был собран из высококачественных деталей?

1.39. Найти вероятность того, что при случайной расстановке трех ладей на шахматной доске они не будут угрожать друг другу.

1.40. Разрыв электрической цепи происходит в том случае, когда выходит из строя хотя бы одно из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что не будет разрыва цепи, если элементы выходят из строя соответственно с вероятностями 0,3; 0,4 и 0,6.

1.41. Студент пришел на экзамен, зная 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает эти вопросы.

1.42. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,15$; $p_3 = 0,2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

1.43. Оптовая база обслуживает 12 магазинов. От каждого из них заявка на товары на следующий день может поступить с вероятностью 0,3. Найти наивероятнейшее число заявок на следующий день.

1.44. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно 0,2, 0,3 и 0,5. Вероятности того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равны: для первой кассы 0,2, для второй 0,3, для третьей 0,4. Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрел билет. Какова вероятность того, что это была первая касса?

1.45. Имеется две партии деталей, причем известно, что в одной партии все детали удовлетворяют техническим условиям, а в другой партии $1/4$ деталей недоброкачественные. Деталь, взятая из наудачу выбранной партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что деталь взята из второй партии.

1.46. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Проводится испытание прибора в трех независимых опытах. Вероятность отказа прибора при одной опасной перегрузке равна 0,2; при двух перегрузках равна 0,5; при трех перегрузках равна 0,8. Определить вероятность отказа прибора в испытании.

1.47. В квадрат с вершинами $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(1;1)$ наудачу брошена точка $M(a; b)$. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$ будут действительными.

1.48. Станок–автомат штампует детали. Вероятность того, что за смену не будет выпущено ни одной нестандартной детали, равна 0,93. Найти вероятность того, что не будет выпущено ни одной нестандартной детали: а) за две смены; б) за три смены.

1.49. На факультете обучаются 650 студентов. Найти вероятность того, что ровно 4 студента имеют день рождения 1 апреля.

1.50. Вероятность наступления события в каждом опыте равна 0,2. Опыты производятся последовательно до наступления события. Найти вероятность того, что придется производить четвертый опыт.

1.51. В круг радиуса R вписан квадрат. Чему равна вероятность того, что поставленные наудачу внутри круга две точки окажутся внутри квадрата?

1.52. Имеются две партии изделий по 15 и 10 штук, причем в каждой партии есть одно бракованное изделие. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

1.53. В ящике содержится 16 деталей завода № 1, 20 деталей завода № 2, 24 детали завода № 3. Вероятность того, что детали завода № 1 отличного качества, равна 0,9; для деталей заводов № 2 и № 3 она соответственно равна 0,65 и 0,92. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

1.54. Вероятность того, что во время работы ЭВМ возникают сбои в процессоре, оперативной памяти и в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятность обнаружения сбоя в процессоре, оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,84, 0,78 и 0,93. Найти вероятность того, что возникший в ЭВМ сбой будет обнаружен.

1.55. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый выпускает 22%, второй – 30%, третий – 48% деталей данного типа. Первый автомат дает 0,26% брака, второй – 0,13%, третий – 0,18%. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали.

1.56. Шар $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ помещен внутри эллипсоида $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$. Найти вероятность того, что брошенная наудачу внутрь эллипсоида точка окажется внутри шара.

1.57. Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Студент может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на дополнительный вопрос из другого билета.

1.58. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента A_1 или двух элементов A_2 и A_3 , которые выходят из строя независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,35, 0,24 и 0,12. Найти вероятность разрыва электрической цепи.

1.59. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

1.60. Из последовательности чисел 1,2,3,...,10 наудачу выбираются два числа. Какова вероятность, что одно из них меньше 6, а другое больше 7?

2.1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ 0,5x - 1 & \text{при } 2 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значения, заключенные в промежутке $(2,5; 3,6)$.

2.2. При каких значениях параметров A и B функция $F(x) = A + Be^{-x}$ может быть функцией распределения для неотрицательных значений случайной величины X .

2.3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно 3 раза примет значение, принадлежащее интервалу $(0,25; 0,75)$.

2.4. Вероятность попадания мячом в корзину при одном броске равна 0,3. Составить закон распределения числа попаданий при трех бросках.

2.5. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5, вторым – 0,4. Составить закон распределения числа попаданий в мишень.

2.6. Испытываются 3 элемента, работающих независимо друг от друга. Длительности времени (в часах) безотказной работы элементов имеют функции плотности распределения: для первого: $F_1(t) = 1 - e^{-0,1t}$, для второго: $F_2(t) = 1 - e^{-0,2t}$, для третьего: $F_3(t) = 1 - e^{-0,3t}$. Найти вероятность того, что в интервале времени от 0 до 5 часов: откажет только один элемент; откажут только два элемента; откажут все три элемента.

2.7. Дана плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \cos x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

2.8. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

2.9. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

2.10. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b); \\ \frac{2}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2} \left| x - \frac{b+a}{2} \right| & x \in (a, b). \end{cases}$$

причем a и b не известны, но $b > a$, а $m_x = 5$ и $D_x = 6$. Найдите a и b .

2.11. В среднем по 10% договоров страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая. Вычислить математическое ожидание и дисперсию числа таких договоров среди наудачу выбранных четырех.

2.12. Из пяти роз две белые. Составить закон распределения случайной величины, выражающей число белых роз среди двух одновременно взятых.

2.13. Среди 15 собранных агрегатов 6 нуждаются в дополнительной смазке. Составить закон распределения числа агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке, среди пяти наудачу выбранных из общего числа.

2.14. Из поступивших в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Найти математическое ожидание и дисперсию числа просмотренных часов.

2.15. Абонент забыл последнюю цифру нужного ему номера телефона, однако помнит, что она нечетная. Найти математическое ожидание и дисперсию числа сделанных им наборов номера телефона до попадания на нужный номер, если последнюю цифру он набирает наудачу, а набранную цифру в дальнейшем не набирает.

2.16. Вероятность отказа за время испытаний на надежность для каждого прибора серии равна p . Определить математическое ожидание числа приборов, давших отказ, если испытанию подверглись N приборов.

2.17. Дискретная случайная величина X принимает 3 возможных значения: $X_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0,5$; $X_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и X_3 с вероятностью p_3 . Найти X_3 и p_3 , зная, что $M(X) = 8$.

2.18. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. В каждой партии содержится 5 изделий. Найти математическое ожидание случайной величины X – числа партий, в каждой из которых содержится ровно 4 стандартных изделия, если проверке подлежат 50 партий.

2.19. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X) = 0,9$.

2.20. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15; 25).

2.21. Дана функция:
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ Cxe^{-x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

При каком значении параметра C эта функция является плотностью распределения некоторой непрерывной случайной величины X ? Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

2.22. Величина X задана плотностью вероятности $f(x) = C(x^2 + 2x)$ в интервале $(0;1)$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти: постоянный параметр C ; математическое ожидание величины X .

2.23. Случайная величина X в интервале $(0;1)$ задана плотностью вероятности $f(x) = 0,5 \sin x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию X .

2.24. Устройство состоит из N элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени t равна p . Необходимо найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.25. Производится три независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.25. Определить среднее квадратическое отклонение числа попаданий при трех выстрелах.

2.26. Среднее число клиентов, посещающих страховую компанию за 10 мин., равно трем. Найти вероятность того, что в ближайшие 5 минут придет хотя бы один клиент.

2.27. Среднее время настройки прибора составляет 5 минут и подчинено показательному распределению. Мастер уже потратил 5 минут на настройку очередного прибора. Найти вероятность того, что он затратит еще не менее трех минут на настройку этого прибора.

2.28. В отдел заказов в среднем приходит 18 клиентов в час. Определить вероятность того, что за две текущие минуты в отдел заказов придет хотя бы один клиент.

2.29. Время ожидания заявки в очереди на процессор подчиняется показательному закону распределения со средним значением 20 секунд. Найти вероятность того, что очередная (произвольная) заявка будет ожидать процессор более 35 секунд.

2.30. Группа студентов в количестве 15 человек проводит собрание в зале, в котором 20 рядов по 10 мест в каждом. Каждый студент занимает место в зале случайным образом. Какова вероятность того, что не более трех человек будут находиться на седьмом месте ряда?

2.31. В партии из 10 деталей имеется 3 нестандартных. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди трех отобранных и найти ее математическое ожидание.

2.32. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью $f(x) = 0,7e^{-0,7x}$ ($x \geq 0$). Найти вероятность того, что она примет значения из интервала $(2; 6)$.

2.33. Найти математическое ожидание и дисперсию числа выигранных

лотерейных билетов, если их приобрели 20 штук, а вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

2.34. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа отказов элемента некоторого устройства в десяти независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,15.

2.35. Для какого из указанных интервалов функция $\sin x$ может являться функцией распределения случайной величины X : $(0; \pi/2)$, $(0; \pi)$? Найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\pi/6; \pi/2)$.

2.36. Функция распределения величины X имеет вид: $F(x) = A + B \arctg 0,5x$; $-\infty < X < +\infty$. Определить: а) постоянные A и B ; б) плотность распределения вероятностей $f(x)$; в) $P(2/\sqrt{3} \leq X \leq 2\sqrt{3})$.

2.37. Длина изготавливаемой станком–автоматом детали представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с параметрами $a = 15$ см, $\sigma = 0,2$ см. Найти вероятность брака, если допустимые размеры детали должны быть $15 \pm 0,3$ см. Какую точность длины изготавливаемой детали можно гарантировать с вероятностью 0,97?

2.38. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных. Найти математическое ожидание и этой случайной величины.

2.39. Плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид $f(x) = A e^{-x^2 + 2x + 3}$. Найти значение параметра A , $M(X)$, $D(X)$, функцию распределения $F(X)$, вероятность $P(-1/3 \leq X \leq 4/3)$.

2.40. Найти дисперсию диаметра втулок, представляющего собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, если отклонение от математического ожидания, не превосходящее 0,15 см, имеет место с вероятностью 0,8.

2.41. Имеются 4 ключа, из которых только один подходит к замку. Найти математическое ожидание и дисперсию числа попыток открывания замка, если испробованный ключ в последующих попытках не участвует.

2.42. В отдел заказов в среднем приходит 12 клиентов в час. Определить вероятность того, что за три текущие минуты в отдел заказов придет хотя бы один клиент.

2.43. Дискретная случайная величина X принимает значение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Известно также $M(X) = 2,3$ и $M(X^2) = 5,9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям величины X .

2.44. При установившемся технологическом процессе 70 % всей производимой продукции станок–автомат выпускает первым сортом, 30 % – вторым. Составить закон распределения числа изделий первого сорта среди 4 изделий, отобранных случайным образом. Найти математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой случайной величины.

3.1. Условная плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y , равна

$$f(x|y) = \frac{2}{\pi} e^{-(4x+y)^2/4}. \text{ Найти условную дисперсию } D_{x|y}.$$

3.2. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в квадрате с вершинами $(0,0), (0,1), (1,0)$ и $(1,1)$. Найдите вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в круг $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1/2$.

3.3. Распределение двумерного вектора (X, Y) задано в таблице:

X	Y		
	0,1	0,15	0,2
0,3	0,25	0,15	0,32
0,6	0,1	0,05	0,13

Найти условное распределение случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение $x_i, i = 1, 2$.

3.4. Совместная плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x-3)^2 + (y-2)^2 > 4; \\ C \left(2 - \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \right), & (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 4. \end{cases}$$

Найдите постоянную C .

3.5. Двумерный случайный вектор (X, Y) распределен равномерно в треугольнике с вершинами в точках $(0;0), (0;2), (1;0)$. Найти условную плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y .

3.6. Задана функция распределения двумерной СВ (X, Y) :

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0, x = \pi/4, y = \pi/6, y = \pi/3$.

3.7. Совместная плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ C e^{-4x-2y}, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найти постоянную C .

3.8. Условная плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y , равна

$$f(x|y) = \begin{cases} 1/6, & |x| \leq 3 \text{ и } |y| \leq 10; \\ 0, & |x| > 3 \text{ и } |y| \leq 10. \end{cases}$$

Найти условное математическое ожидание $m_{x|y}$.

3.9. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} (4 \operatorname{arctg} x \operatorname{arctg} y + 2\pi \operatorname{arctg} x + 2\pi \operatorname{arctg} y + \pi^2).$$

Найти вероятность события $\left\{ -1 \leq X \leq 1, 1 \leq Y < \sqrt{3} \right\}$.

3.10. Непрерывный двумерный случайный вектор (X, Y) имеет плотность распределения

$$f(x, y) = \begin{cases} Cy, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

где D – область, определения, ограниченная линиями $y = x^2$ и $y = 1$. Найдите условную плотность распределения случайной величины X , при условии, что случайная величина Y приняла значение y .

3.11. Найти плотность распределения случайной величины (X, Y) , если функция распределения $F(x, y) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y})$ при $x \geq 0, y \geq 0$.

3.12. Задана дискретная двумерная СВ (X, Y) :

Y	X		
	$x_1 = 2$	$x_2 = 5$	$x_3 = 8$
$y_1 = 0.4$	0.15	0.30	0.35
$y_2 = 0.8$	0.05	0.12	0.03

Найти условное значение математического ожидания составляющей Y при условии, что составляющая X приняла значение $X = x_2 = 5$.

3.13. Дискретные независимые СВ заданы своими распределениями:

X	5	8	Y	1	7
P	0.2	0.8	P	0.56	0.44

Найти коэффициент вариации величины $Z = X + Y$.

3.14. Двумерный случайный вектор (X, Y) имеет нормальное распределение с плотностью распределения $f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} e^{-4x^2 - 2xy - y^2}$. Найти условную плотность распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x .

3.15. В круге $x^2 + y^2 \leq R^2$ двумерная плотность вероятности $f(x, y) = C(R - \sqrt{x^2 + y^2})$ вне круга $f(x, y) = 0$. Найти постоянную C .

3.16. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной СВ (X, Y) : $f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(1/2)(x^2 + 2xy + 5y^2)}$. Найти плотность распределения величины X .

3.17. Функция распределения СВ X имеет вид $F(x) = a - b \operatorname{arctg} x$. Найти плотность распределения вероятностей, определив постоянные a и b .

3.18. В продукции завода брак вследствие дефекта A составляет 12 %, причём среди забракованной по признаку A продукции в 4 % случаев встречается дефект B , а в продукции свободной от дефекта A дефект B встречается в 2% случаев. Найти коэффициент корреляции дефектов A и B .

3.19. Система двух случайных величин подчинена закону распределения с плотностью: $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$. Найти функцию распределения $F(x, y)$:

3.20. Случайные величины X, Y независимы и нормально распределены с параметрами $M(X) = M(Y) = 0, D(X) = D(Y) = 1$. Найти вероятность того, что случайная точка (X, Y) попадет в кольцо $2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3$.

4.1. Из накопителя перед первой технологической операцией детали забираются на обработку регулярно через каждые 10 минут. Из накопителя перед второй технологической операцией детали забираются на обработку регулярно через каждые 30 минут. Найти в процентах коэффициент вариации суммарного времени ожидания детали в накопителях (при случайном ее попадании туда).

4.2. Известно, что $X \square N(a, \sigma^2), Y = e^X$. Найти закон распределения Y .

4.3. На окружности радиуса r случайным образом располагаются две точки, которые затем соединяются между собой и с центром окружности. Найти математическое ожидание площади полученного треугольника.

4.4. Пусть X, Y, Z – случайные величины: X – выручка фирмы, Y – ее затраты, $Z = X - Y$ – прибыль.

X :

x_i	3	4	5
p_i	1/3	1/3	1/3

Y :

y_j	1	2
p_j	1/2	1/2

Найти распределения прибыли Z .

4.5. Вес гайки и болта являются нормально распределенными величинами с математическими ожиданиями 15 и 40 гр. и средними квадратическими отклонениями 2 и 5 гр., соответственно. Ковариационный момент этих величин равен 7 гр.². Найти среднее квадратическое отклонение веса всего узла «гайка + болт».

4.6. Дискретные независимые СВ заданы своими распределениями:

X	2	3	Y	4	5
P	0.3	0.7	P	0.6	0.4

Найти коэффициент вариации величины $Z = X + Y$.

4.7. Независимые СВ X и Y заданы плотностью распределения:

$$f_1(x) = e^{-x} \quad (0 \leq x < \infty); \quad f_2(y) = \frac{1}{2} e^{-y/2} \quad (0 \leq y < \infty).$$

Найти плотность распределения СВ $Z = X + Y$.

4.8. Ошибка прибора выражается функцией $U = 3X - 2Y + 4Z - 5$, где X, Y, Z – так называемые первичные ошибки, представляющие собой систему случайных величин, которая характеризуется математическими ожиданиями

$m_x = -1, m_y = 7, m_z = 6$ и корреляционной матрицей $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 3 & 2 \\ & & 4 \end{vmatrix}$. Найти сред-

нее квадратическое отклонение ошибки прибора.

4.9. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения, представленный в таблице.

X	1	2	3	4
P	0,1	0,4	0,3	0,2

Найдите математическое ожидание и дисперсию величины $Y = X^2 + 1$.

4.10. Связь между нормально распределенными показателями X и Y выражается зависимостью $Y = 1,3x + 0,5$. При этом дисперсия Y в 4 раза выше дисперсии X . Найти степень тесноты связи величин X и Y .

4.11. Показатель Y выражается формулой $Y = 6X_1 + 3.5X_2X_3 + 5$, где X_1, X_2, X_3 представляют собой величины с математическими ожиданиями $m_{x_1} = 60, m_{x_2} = 2, m_{x_3} = 10$ и средними квадратическими отклонениями $\sigma_{x_1} = 3, \sigma_{x_2} = 0.1, \sigma_{x_3} = 2$ Нормированная корреляционная матрица системы

имеет вид: $\begin{vmatrix} 1 & 0.4 & 0.5 \\ & 1 & 0.3 \\ & & 1 \end{vmatrix}$. Найти среднее квадратическое отклонение СВ Y .

4.12. Случайные величины X_1 и X_2 имеют математические ожидания $m_{x_1} = 2, m_{x_2} = -1$, дисперсия $D_{x_1} = 3, D_{x_2} = 4$ и ковариацию $\text{cov}(X_1, X_2) = -1$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2X_1 - 3X_2 - 5$.

4.13. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют экспоненциальное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = X_1 X_2$.

4.14. Два стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для каждого из стрелков равна 0,6. Пусть случайные величины X и Y означают число попаданий в мишень для первого и для второго стрелка соответственно. Построить закон распределения и найти математическое ожидание для случайной величины: $Z_2 = X^Y$.

4.15. СВ X задана плотностью распределения $f(x) = (1/2)\sin(x)$ в интервале $(0, \pi)$; вне интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию величины $Y = X^2$.

4.16. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = x + 0,5$ в интервале $(0; 1)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание функции $Y = X^3$.

4.17. Две случайные величины (X и Y) имеют характеристики: $m_x = 2$; $m_y = 3$; $\sigma_x^2 = 1$; $\sigma_y^2 = 4$; $r_{xy} = 0,5$. Определить дисперсию суммы и разности этих величин.

4.18. Две независимые случайные величины (X и Y) распределены равномерно: X на интервале $[-5; 1]$, Y на интервале $[3; 6]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $7X - 9Y + 8$.

4.19. Ребро куба измерено приближенно, причем $a \leq x \leq b$. Рассматривая ребро куба как случайную величину X , распределенную равномерно в интервале (a, b) , найти математическое ожидание объема куба.

4.20. Дискретные независимые СВ заданы своими распределениями:

X	1	3	Y	2	4
P	0.3	0.7	P	0.6	0.4

Найти коэффициент вариации величины $Z = 2X + 3Y$.

4.21. Предприятие состоит из двух подразделений. Месячная прибыль каждого подразделения является нормально распределенной величиной с математическими ожиданиями 550 и 400 тыс. руб. и средними квадратическими отклонениями 60 и 50 тыс. руб., соответственно. Ковариационный момент этих величин равен 70 тыс. руб.² Найти коэффициент вариации прибыли всего предприятия.

4.22. Один станок дает в среднем 3% брака, другой – 5%. Производительности станков одинаковы. Каков коэффициент вариации числа бракованных изделий в общей продукции из 100 деталей?

4.23. Две СВ (X и Y) имеют характеристики:

$$m_x = 2; m_y = 3; \sigma_x^2 = 1; \sigma_y^2 = 4; r_{xy} = 0,5.$$

Определить дисперсию суммы этих величин.

4.24. Вес гайки и болта являются нормально распределенными величинами с математическими ожиданиями 10 и 40 гр. и средними квадратическими отклонениями 2 и 5 гр., соответственно. Ковариационный момент этих величин

равен 7 гр.². Найти среднее квадратическое отклонение веса всего узла «гайка + болт».

4.25. Погрешность в изготовлении детали образуются в результате суммарного воздействия трех факторов A , B и C . Их характеристики известны:

$$\sigma_A = \sigma_B = 0,1; \quad \sigma_C = 0,2; \quad m_A = 0,9; \quad m_B = 2,0; \quad m_C = 3;$$

$$r_{AB} = 0,4; \quad r_{AC} = 0,1; \quad r_{BC} = 0,2.$$

Найти среднее квадратичное отклонение погрешности изготовления детали.

4.26. Даны законы распределения двух независимых случайных величин X и Y

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,3	0,1	0,4

Найти характеристики $M(XY - 5X + 2Y - 7)$, $D(8X - 3Y + 4)$.

4.27. Независимые СВ X и Y заданы плотностью распределения:

$$f_1(x) = e^{-x} \quad (0 \leq x < \infty); \quad f_2(y) = \frac{1}{2} e^{-y/2} \quad (0 \leq y < \infty).$$

Найти плотность распределения СВ $Z = X + Y$.

5.1. Среднее потребление электроэнергии в мае в некотором населенном пункте составляет 360 000 кВтч. Оцените с помощью первого неравенства Чебышева вероятность того, что потребление электроэнергии в мае текущего года в этом населенном пункте превысит 10^6 кВтч.

5.2. Средний ежедневный расход воды в некотором населенном пункте составляет 50 000 л. Оценить с помощью первого Чебышева вероятность того, что в произвольно выбранный день расход воды в этом пункте превысит 150 000 л.

5.3. Среднее квадратическое отклонение погрешности изменения курса самолета равно 2^0 . Считая математическое ожидание погрешности измерения равным нулю, оцените с помощью второго неравенства Чебышева вероятность того, что погрешность одного измерения курса самолета превысит 5^0 .

5.4. Вероятность появления события A в одном опыте равна 0,5. Можно ли с вероятностью, большей 0,97, утверждать, что число появлений события A в 1000 независимых опытов будет в пределах от 400 до 600?

5.5. Средний расход воды в населенном пункте составляет 50000 литров в день. Оценить вероятность того, что в этом населенном пункте в данный день расход воды не превысит 150000 литров.

5.6. Вероятность наступления события A в каждом испытании равна $2/3$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что в 10000 испытаний отклонение относительной частоты события A от вероятности его появлений не превзойдет 0,01.

5.7. Вопрос#19: Среднее квадратическое изменение курса акции компа-

нии в течение одних биржевых торгов составляет 0,3%. Оценить вероятность того, что на ближайших торгах курс изменится более чем на 3%.

5.8. Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено не более 200 клиентов.

5.9. Электростанция обслуживает сеть на 1600 электроламп, вероятность включения каждой из которых равна 0,9. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что число ламп, включенных в сеть вечером, отличается от своего математического ожидания не более чем на 100 (по абсолютной величине).

5.10. Вероятность того, что акции, переданные на депозит, будут востребованы, равна 0,08. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 1000 клиентов от 70 до 90 востребуют свои акции.

5.11. Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия – 0,1. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не менее 49,5 см и не более 50,5 см. Уточнить вероятность того же события, если известно, что длина случайно взятой детали имеет нормальный закон распределения.

5.12. В течение времени t эксплуатируются 500 приборов. Каждый прибор имеет надежность 0,98 и выходит из строя независимо от других. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что доля надежных приборов отличается от 0,98 не более чем на 0,1 (по абсолютной величине).

5.13. Вероятность сдачи в срок всех экзаменов студентом факультета равна 0,7. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что доля сдавших в срок все экзамены из 2000 студентов заключена в границах от 0,66 до 0,74.

5.14. В среднем 10% работоспособного населения некоторого региона – безработная. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что уровень безработицы среди обследованных 10000 работоспособных жителей города будет в пределах от 9 до 11% включительно.

5.15. Сколько нужно провести измерений, чтобы с вероятностью, равной 0,9973, утверждать, что погрешность средней арифметической результатов этих измерений не превысит 0,01, если измерение характеризуется средним квадратическим отклонением, равным 0,03?

5.16. Случайная величина X является средним арифметическим из n независимых одинаково распределенных случайных величин, дисперсия каждой из которых равна 5. Оцените, какое число слагаемых n нужно взять для того, чтобы с вероятностью не менее 0,9973 случайная величина X отклонялась от своего среднего не более чем на 0,01.

5.17. Среднее квадратическое отклонение погрешности изменения курса самолета равно 2^0 . Считая математическое ожидание погрешности измерения равным нулю, оцените с помощью второго неравенства Чебышева вероятность того, что погрешность одного измерения курса самолета превысит 5^0 .

5.18. Случайная величина X является средним арифметическим из 3200

независимых случайных величин, причем каждое слагаемое имеет математическое ожидание 3 и дисперсию 2. Оценим вероятность того, что X попадает в интервал $(2,925, 3,075)$.

5.19. Производится выборочное обследование большой партии электрических лампочек. Среднее квадратическое отклонение времени горения лампочки равно $\sigma_x = 80$ ч. Из всей партии наудачу выбирается 400 лампочек. Оценить вероятность того, что среднее время горения лампочки будет отличаться от наблюдаемого среднего времени горения выбранных 400 лампочек не более чем на 10 ч.

5.20. Три станка, производительности которых соотносятся как 3:2:1, производят детали на общий конвейер. Определить вероятность того, что из 200 деталей, взятых случайным образом с конвейера, деталей, произведенных вторым станком будет от 50 до 70.

5.21. 3 станка производят детали из стали марки A , 7 других – из стали марки B . Определить вероятность того, что из 400 взятых деталей количество деталей из стали марки A будет заключено в пределах от 100 до 130.

5.22. Отделение банка обслуживает в среднем 100 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в отделении банка будет обслужено более 150 клиентов.

5.23. Три станка, производительности которых соотносятся как 5:3:2, производят детали на общий конвейер. Определить вероятность того, что из 200 деталей, взятых случайным образом с конвейера, деталей, произведенных вторым станком будет от 50 до 65.

5.24. Найти вероятность того, что при 720 бросаниях игральной кости «шестерка» выпадает от 100 до 130 раз.

5.25. Вероятность появления некоторого события в каждом из 800 независимых испытаний равна $1/4$. Воспользовавшись вторым неравенством Чебышева, оцените вероятность того, что число X появлений этого события заключено в пределах от 150 до 250.

6.1. Ряд распределения случайной величины X представлен таблицей:

X	-2	0	2
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Найти характеристическую функцию случайной величины X .

6.2. Найдите характеристическую функцию непрерывной случайной величины X , имеющей плотность распределения $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi(1+x^4)}$

6.3. Найдите характеристическую функцию случайной величины X , ряд распределения которой представлен в таблице:

X	0	1	2	3
P	$1/2$	$1/8$	$1/4$	$1/8$

6.4. Найти характеристическую функцию случайной величины X , имеющей равномерное на интервале (a, b) распределение:

6.5. Найдите плотность распределения случайной величины, имеющей характеристическую функцию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq 1, \\ 1 - |t|, & |t| < 1. \end{cases}$$

6.6. Найдите характеристическую функцию непрерывной случайной величины X , имеющей плотность распределения

6.7. Независимые случайные величины X_1 и X_2 распределены по экспоненциальному закону с параметрами λ_1 и λ_2 . Найти характеристическую функцию случайной величины $Y = X_1 + X_2$.

6.8. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$.

Найти характеристическую функцию случайной величины X .

6.9. Найдите характеристическую функцию случайной величины X , ряд распределения которой представлен в таблице:

X	0	1	2	3
P	1/2	1/8	1/4	1/8

6.10. Найдите характеристическую функцию непрерывной случайной величины X , имеющей плотность распределения $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1; \\ \frac{3(1-x^2)}{4}, & |x| < 1. \end{cases}$

6.11. Найдите характеристическую функцию неотрицательной целочисленной случайной величины X , распределение которой задается вероятностями

$$p\{X = n\} = (1+n)p^2(1-p)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad 0 < p < 1$$

6.12. Случайная величина X_1 распределена равномерно на интервале $(0, 1)$, а случайная величина X_2 имеет стандартное нормальное распределение. Найдите характеристическую функцию случайной величины $Y = X_1 + X_2$, если известно, что X_1 и X_2 являются независимыми.

6.13. Найти закон распределения случайной величины, характеристическая функция которой равна $f(t) = \frac{1 + \cos t}{2}$.

6.14. Найдите характеристическую функцию случайной величины $Y = aX + b$, где X – случайная величина, имеющая плотность распределения

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi(1+x^4)}.$$

6.15. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , имеющей характеристическую функцию

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0; \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

6.16. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , имеющей характеристическую функцию $f(t) = \frac{1}{1 + 2it}$.

6.17. Найти закон распределения случайной величины X , характеристическая функция которой равна $f(t) = e^{-|t|}$.

Задачи, предлагаемые для самостоятельного решения по второму разделу курса «Случайные процессы»

2.1. Являются ли периодическими процессы

$$X(t) = a_1 \sin(2t + \Theta_1) + a_2 \sin(3t + \Theta_2) + a_3 \sin(7t + \Theta_3);$$

$$Y(t) = a_1 \sin(2t + \Theta_1) + a_2 \sin(3t + \Theta_2) + a_3 \sin(\sqrt{50}t + \Theta_3) ?$$

2.2. Периодический процесс формируется в результате сложения трех синусоидальных волн с частотами 60, 75, 100 Гц. Определить основной период этого процесса. Как будет выглядеть ряд Фурье этого процесса?

2.3. Элементарная случайная функция имеет вид $Y(t) = aX + t$, где X – случайная величина с характеристиками m и σ , a – неслучайная величина. Требуется найти характеристики $Y(t)$.

2.4. Случайная функция имеет вид $Y(t) = Xe^{-t}$; ($t > 0$), где X – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами m и σ . Найти основные характеристики функции $Y(t)$.

2.5. Мощность угольного пласта с математическим ожиданием (средним значением) 3,4 м является нормальной стационарной случайной функцией по направлению отработки с АКФ $R_x(r) = ae^{-b|r|} \cos(cr)$ (r – в метрах). Скорость продвижения забоя равна 1,5 м/ч. В текущий момент обработки пласта его мощность равна 4 м. Определить вероятность того, что через 2 часа работы мощность пласта будет больше 4,4 м, если $a = 2 \text{ м}^2$; $b = 0,1 \text{ м}^2$; $c = 0,2 \text{ м}^{-1}$.

2.6. На вход дифференцирующего механизма поступает случайный сигнал $X(t)$ с математическим ожиданием

$$m_x(t) = \sin(t)$$

и корреляционной функцией

$$R_x(t_1, t_2) = \sigma_x^2 e^{-a(t_2 - t_1)^2}.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию сигнала на выходе системы.

2.7. Может ли быть при каких-либо значениях аргументов:

- 1) Функция распределения процесса больше единицы?
- 2) Плотность распределения процесса больше единицы?
- 3) Функция распределения процесса отрицательной?
- 4) Плотность распределения процесса отрицательной?
- 5) Дисперсия процесса больше единицы?
- 6) Среднеквадратичное отклонение процесса меньше нуля?
- 7) Корреляционная функция процесса отрицательной?
- 8) Спектральная плотность процесса отрицательной?
- 9) Нормированная корреляционная функция процесса равна нулю?

2.8. Как изменятся основные характеристики случайного процесса, если:

- 1) его значения умножить на постоянную величину a ; 2) к процессу добавить постоянную величину a ?

2.9. Какова размерность: 1) функции распределения случайного процесса; 2) плотности распределения; 3) математического ожидания; 4) дисперсии; 5) среднеквадратического отклонения; 6) корреляционной функции; 7) спектральной плотности; 8) нормированной корреляционной функции; 9) нормированной спектральной плотности; 10) взаимной корреляционной функции?

2.10. Корреляционная функция процесса определяется выражением

$$R_x(r) = \sigma_x^2 e^{-a|r|}, \text{ где } a > 0. \text{ Определить спектральную плотность процесса.}$$

2.11. Нормированная АКФ процесса убывает по линейному закону от единицы до нуля. Определить нормированную спектральную плотность процесса.

2.12. Спектральная плотность изменения температуры воздуха в летний период (температура фиксировалась ежедневно в 12.00 часов) выражается

зависимостью
$$S_x(\omega) = \frac{a\sigma_x^2}{\pi(\omega^2 + a^2)}.$$

Определить корреляционную функцию этого процесса.

2.13. Найти корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$, если ее спектральная плотность $S_x(\omega)$ постоянна на интервале (ω_1, ω_2) и равна c , а вне этого интервала равна нулю:

$$S_x(\omega) = \begin{cases} c, & \omega \in (\omega_1, \omega_2), \\ 0, & \omega \notin (\omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

2.14. Найти спектральную плотность процесса $X(t)$, представляющего собой случайную телеграфную волну с корреляционной функцией

$$R_x(\tau) = a^2 e^{-2\lambda|\tau|}.$$

2.15. Показать, что не существует никакой стационарной случайной функции $X(t)$, корреляционная функция которой $R_x(\tau)$ постоянна в каком-то интервале $(-\tau, \tau)$ и равна нулю вне его.

2.16. Показать, что стационарный «белый шум» $X(t)$ имеет постоянную спектральную плотность.

2.17. Система описывается диф. уравнением:

$$2 \frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = 4 \frac{dx(t)}{dt} + x(t).$$

Найти частотные характеристики системы.

2.18. Найти переходную функцию $h(t)$ элемента, описываемого уравнением $(a_1P + a_0) \cdot y(t) = b_0 \cdot x(t)$.

2.19. Определить реакцию элемента, описываемого уравнением $(a_1P + a_0) \cdot y(t) = b_0x(t)$, на воздействие $x(t) = at1(t)$.

Задачи, предлагаемые для самостоятельного решения по третьему разделу курса «Математическая статистика»

3.1. Исследовалась взаимосвязь между тремя показателями: производительностью труда (X_1), возрастом (X_2), и производственным стажем (X_3). По выборке из 100 рабочих одной и той же специальности вычислены парные коэффициенты корреляции: $r_{12} = 0,2$, $r_{13} = 0,41$, $r_{23} = 0,82$. Вычислить множественные и частные (парциальные) коэффициенты корреляции. Оценить значимость этих коэффициентов.

3.2. На конкурсе инвестиционных проектов 11 участников получили следующие оценки (по столбальной системе) за экологичность (экологическую безопасность) и экономическую обоснованность расчетов:

№ проекта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Экологичность	70	66	89	60	75	78	53	52	55	59	90
Экономическая обоснованность	73	53	85	55	78	89	63	64	65	51	75

Связаны ли между собой экологичность и экономическая обоснованность расчетов?

3.3. Группа из 5 экспертов оценивает качество однотипной продукции, выпускаемой на 7 предприятиях. Предпочтения экспертов (их ранги) представлены в таблице:

Эксперт	Предприятия						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	4	2	6	7	5
2	1	2	5	3	6	4	7
3	2	1	7	5	6	4	3
4	1	2	4	6	3	5	7
5	3	1	5	4	2	6	7

Взаимосвязаны (согласуются) ли мнения экспертов? Рассчитать коэффициент конкордации и оценить его значимость.

3.4. Исследовалось влияние индивидуальных качеств (особенностей, заслуг) продавцов на объемы выручки магазина. Получены следующие данные:

Номера продавцов	Число отработанных дней	Дневная выручка магазина (тыс. долл.)
1	8	16.5; 15.0; 16.2; 18.9; 20.1; 19.3; 10.1; 12.8
2	13	16.7; 16.3; 14.0; 15.0; 16.7; 12.4; 7.9; 9.8; 14.4; 10.8; 11.1; 13.0; 10.7
3	9	10.7; 9.0; 13.9; 11.3; 9.4; 11.9; 10.5; 9.7; 7.4

Определить, влияют ли индивидуальные качества продавцов на объемы выручки магазина?

3.5. Катализатор для химической реакции получался четырьмя различными способами. В экспериментах проверялась активность катализатора, причем для каждого уровня (способа получения) было сделано по пять наблюдений.

Получены следующие данные:

Способы получения катализатора	Активность катализатора
A1	56; 55; 62; 59; 60
A2	64; 61; 50; 55; 56
A3	45; 46; 45; 39; 43
A4	42; 39; 45; 43; 41

Необходимо проверить независимость качества (активности) катализатора от способа получения

3.6. Четыре различных типа покрышек испытывались на автомобилях четырех различных марок. Измерялся износ шин в мм после пробега 40 тысяч км. Получены следующие результаты:

Тип покрышек	Марка автомобиля (фактор B на 4 уровнях)			
	ВОЛГА	ЖИГУЛИ	ШКОДА	МОСКВИЧ
1	14	11	9	10
2	11	11	9	8
3	10	10	7	8
4	10	5	6	6

Влияет ли тип покрышек и марка автомобиля на износ шин?

3.7. За прошедший год собраны данные о затратах на рекламу (X , долл./нед.) и объеме реализации продукции (Y , долл./нед.).

Получили следующие данные:

$x_i \backslash y_j$	1200 – 1300	1300 – 1400	1400 – 1500	1500 – 1600	1600 – 1700
40 – 45	1				
45 – 50	3	2	3		
50 – 55	2	4	4	3	
55 – 60		4	5	6	2
60 – 65			3	4	2
65 – 70					2

Есть ли взаимосвязь между вложениями в рекламу и объемом продаж? Если взаимосвязь есть, то найти уравнение связи.

Спрогнозировать объем продаж, если вложения в рекламу составят 80 долл./нед.

Сколько средств надо вкладывать в рекламу, чтобы получить объем реализации продукции в 1000 долл.?

3.8. Месячные объемы продаж ткани (X , тыс.м.) и величины премиального фонда (Y , тыс. руб.) в девяти филиалах торговой фирмы характеризовались следующими данными:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2,3	2,8	1,9	3,4	2,6	3,3	4,2	3,0	1,7
y_i	6,1	8,2	7,1	14,9	9,1	9,0	15,8	8,2	7,7

Исследовать зависимость премиального фонда от объема продаж. Получить прогноз объема премиального фонда при продажах 3,4 тыс. м ткани. Оценить качество прогноза. Продавцы полагают, что если объем продаж составит 5 тыс. метров, то их премия будет свыше 18 тыс. руб. в месяц. Какова вероятность этого?

3.9. Исследовать зависимость урожайности капусты Y (ц/га) от количества использованной воды при искусственном поливе X (м³/га) в период роста культур.

Опытные данные по 9 полям представлены ниже в таблице:

№ поля	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кол-во воды при поливе x_i (м ³ /га)	18,2	16,3	17,0	19,4	20,4	22,1	23,2	24,3	25,1
Урожайность y_i (ц/га)	25,3	23,1	24,2	30,5	35,6	33,7	30,8	28,2	22,5

Выполнить регрессионный анализ исследуемых переменных.

3.10. По семи предприятиям легкой промышленности региона получена информация, характеризующая зависимость объема выпуска продукции (Y , млн. руб.) от объема капиталовложений (X , млн. руб.):

Предприятие i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	152	148	146	134	137	136	134
x_i	86	94	100	96	93	104	122

Для характеристики связи объема выпуска продукции от объема капиталовложений построить следующие модели: линейную, степенную, показательную, гиперболическую. Оценить качество каждой модели, определив индекс корреляции, среднюю относительную ошибку, коэффициент детерминации, F -критерий Фишера.