МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт Естественнонаучный
Кафедра «Физика»

Утверждено на заседании кафедры
«Физика»
«30 » августа 2019 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой

_________________________ Р.Н. Ростовцев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Введение в физику»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
08.03.01 Строительство

с направленностью (профилем)
Теплогазоснабжение и вентиляция

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-06-20

Тула 2020 год

Разработчики методических указаний

Жигунов В.В., профессор, д.т.н., профессор
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

Жигунов К.В., доцент, к.т.н., доцент
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

Занятие 1.

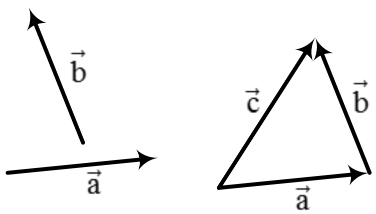
1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

1.1.Основы векторной алгебры

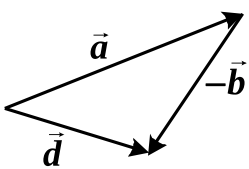
Физические величины, для задания которых необходимо знание их численного значения и направления в пространстве, называют векторами. Численное значение вектора называют его модулем.

Рассмотрим правила сложения, вычитания и умножения векторов.

Чтобы найти вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, необходимо вектор $\vec{b}$ перенести параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Если соединить начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$, мы получим вектор $\vec{c}$.



Разность двух векторов $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ можно представить, как результат сложения вектора $\vec{a}$ с вектором $-\vec{b}$, равным по модулю вектору $\vec{b}$ и противоположным ему по направлению. Чтобы найти вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, необходимо вектор $\left(-\vec{b}\right)$ перенести параллельно

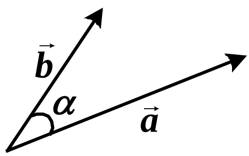


самому себе так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Если соединить начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\left(-\vec{b}\right)$, мы получим вектор $\vec{d}$.

Умножение вектора $\vec{a}$ на скаляр m даёт вектор, модуль которого в m раз отличается от модуля вектора $\vec{a}$, и который направлен в ту же сторону, что и $\vec{a}$, если $m > 0$, и в противоположную, если $m < 0$.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют число (скаляр) c, определяемый выражением

$$c = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos\alpha,$$



где α – наименьший угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Символически скалярное произведение записывают одним из следующих способов:

$$c = \vec{a}\vec{b} \text{ или } c = (\vec{a}, \vec{b}).$$

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}$, модуль которого равен

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен и вектору $\vec{a}$, и вектору $\vec{b}$, и направлен так, что если смотреть из его конца, то поворот на наименьший угол от первого сомножителя (вектора $\vec{a}$) ко второму (вектору $\vec{b}$) будет виден совершающийся против часовой стрелки.

Символически векторное произведение записывают одним из следующих способов:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \text{ или } \vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right].$$

Операция деления вектора на вектор отсутствует.

Проекция вектора на ось равна произведению модуля вектора на косинус угла между направлением оси и направлением вектора. Например, проекция вектора $\vec{v}$ на ось x равна $v_x = v\cos\alpha$, где α – угол между вектором $\vec{v}$ и осью x.

Единичным вектором называют вектор, модуль которого равен единице. Единичные векторы, направленные вдоль координатных осей, называют ортами.

Единичный вектор, направленный вдоль оси x, обозначают как $\vec{i}$ или $\vec{e}_x$, единичный вектор, направленный вдоль оси y, обозначают как $\vec{j}$ или $\vec{e}_y$, а единичный вектор, направленный вдоль оси z, обозначают как $\vec{k}$ или $\vec{e}_z$.

Зная проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси, его можно представить в виде

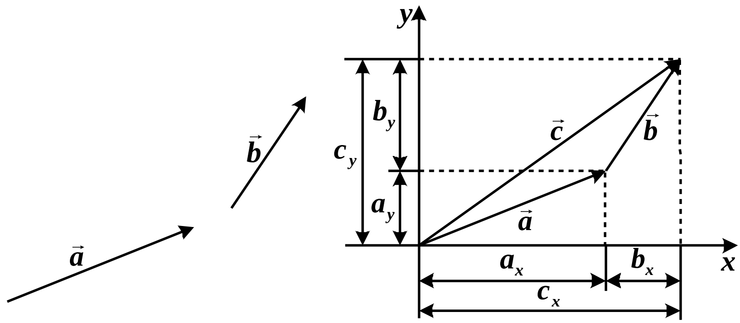
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Чтобы найти модуль вектора, надо извлечь квадратный корень из суммы квадратов его проекций:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

При сложении векторов $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, где $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, складываются их проекции:

$$\vec{c}=\left(a_x+b_x\right)\vec{i}+\left(a_y+b_y\right)\vec{j}+\left(a_z+b_z\right)\vec{k}.$$



Если заданы проекции на координатные оси векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, скалярное произведение этих векторов можно записать в виде:

$$c=\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Векторное произведение этих двух векторов равно:

$$\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.$$

Эту формулу можно записать в более удобной для запоминания форме с помощью определителя:

$$\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Если разложить этот определитель по элементам первой строки, получаем вышеприведённую формулу для векторного произведения.

Радиус-вектором точки называют вектор, начало которого совпадает с началом системы координат, а конец – с данной точкой. Проекции радиус-векторов точек являются координатами этих точек, поэтому радиус-вектор точки с координатами (x, y, z) определяется выражением

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\ .$$

Занятие 2.

1.2. Основы дифференциального исчисления

Физическую величину, принимающую всегда одно и то же численное значение, называют постоянной. Если физическая величина может принимать различные численные значения, её называют переменной.

Изменение одной переменной величины может приводить к изменению другой величины. Переменную y называют *функцией* независимой переменной (аргумента) x, если каждому значению x по определённому закону ставится в соответствие некоторое значение переменной y:

$$y = f(x)\,.$$

Введём понятие предела функции в точке. Число A называют пределом функции $y = f(x)$ в точке x = a, если для любого положительного сколь угодно малого числа ε существует такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех x, отличных от a и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$. Утверждение о том, что число A является пределом функции $y=f(x)$ при x, стремящемуся к a, записывают в виде:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A\,.$$

Пусть x_1 и x_2 – некоторые значения независимой переменной x, а $y_1=f(x_1)$ и $y_2=f(x_2)$ – соответствующие значения функции y. Тогда величину $\Delta x=x_2-x_1$ называют приращением независимой переменной (аргумента), а величину $\Delta y=y_2-y_1$ называют приращением функции.

Пусть $x_1=x$, а $x_2=x+\Delta x$. В этом случае приращение рассматриваемой функции будет равно:

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)\,.$$

Предел, к которому стремится отношение приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении к нулю приращения независимой переменной, имеет специальное название: *производная функции*, или, сокращённо, просто *производная*:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Приращение независимой переменной обозначают как dx и называют *дифференциалом аргумента* x. *Дифференциалом функции* называют линейную относительно Δx часть приращения функции y(x). Дифференциал функции y обозначают как dy.

Можно показать, что

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

В физике принято производную обозначать как $\frac{dy}{dx}$.

Производная $\frac{dy}{dx}$ – это скорость изменения функции y при изменении аргумента x.

Для нахождения производных необходимо, прежде всего, запомнить таблицу производных, которая в случае простейших функций имеет вид:

Таблица производных

1. $\frac{d}{dx}(C) = 0$, $C = \text{const}$	8. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
2. $\frac{d}{dx}\left(x^a\right) = a \cdot x^{a-1}$, a – любое число	9. $\frac{d}{dx}(\text{tg}x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
3. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$	10. $\frac{d}{dx}(\text{ctg}x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$
4. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	11. $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a$	12. $\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$	13. $\frac{d}{dx}(\text{arctg}\, x) = \frac{1}{1+x^2}$
7. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	14. $\frac{d}{dx}(\text{arcctg}\, x) = \frac{-1}{1+x^2}$

В более сложных случаях задача нахождения производных решается последовательным применением правил, перечисленных ниже:

$y = af_1(x) \pm bf_2(x)$ => $\frac{dy}{dx} = a\frac{df_1(x)}{dx} \pm b\frac{df_2(x)}{dx}$,

где a и b – const.;

$y = f_1(x)f_2(x)$ => $\frac{dy}{dx} = \frac{df_1(x)}{dx} f_2(x) + f_1(x)\frac{df_2(x)}{dx}$;

$y = \left(\vec{f}_1(x), \vec{f}_2(x)\right)$ => $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d\vec{f}_1}{dx}, \vec{f}_2\right) + \left(\vec{f}_1, \frac{d\vec{f}_2}{dx}\right)$;

$\vec{y} = \left[\vec{f}_1(x), \vec{f}_2(x)\right]$ => $\frac{d\vec{y}}{dx} = \left[\frac{d\vec{f}_1}{dx}, \vec{f}_2\right] + \left[\vec{f}_1, \frac{d\vec{f}_2}{dx}\right]$;

$y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ => $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{df_1(x)}{dx} f_2(x) - f_1(x)\frac{df_2(x)}{dx}}{f_2^2(x)}$;

$y = y(\varphi(x))$ => $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$.

Если производная функции f – это дифференцируемая функция, то можно найти производную и для неё. Полученную функцию называют второй производной функции f(x) и обозначают как $\frac{d^2f}{dx^2}$. Вторая производная – это скорость изменения производной функции. Если производная

$\frac{df}{dx}$ характеризует скорость изменения функции f(x), то вторая производная характеризует скорость изменения скорости.

Если функциональная зависимость $y = f(x)$ представлена в виде графика, то геометрический смысл производной заключается в том, что она равна тангенсу угла наклона касательной к оси x в той точке графика, в которой определена производная. При этом предполагается, что $y = f(x)$ и x имеют одинаковую размерность и для них при построении графика выбран одинаковый масштаб.

Вычислив производную, можно провести анализ свойств соответствующей ей функции.

Если с ростом аргумента функция растёт, то углы наклона касательной к графику этой функции острые и тангенс угла наклона касательной положительный, поэтому производная функции положительна.

Таким образом, если на некотором интервале значений аргумента производная функции положительна, это означает, что в этом интервале значений аргумента при его увеличении функция растёт. Если производная отрицательна, то функция при росте значений аргумента убывает. В точках максимума и минимума тангенс угла наклона касательной к оси x равен нулю, значит в этих точках производная равна нулю. Другими словами, в точках максимума и минимума функции y = f(x), производная функции f(x) равна нулю. В точках, где функция достигает максимума, вторая производная отрицательна, а в точках минимума вторая производная положительна.

Занятие 3.

1.3. Неопределённый и определённый интегралы

1.3.1. Неопределённый интеграл

Пусть тело движется вдоль оси z. Задача об определении скорости движения v(t) по заданной зависимости координаты z тела от времени $z = z(t)$ (прямая задача) приводит к понятию производной: $v(t) = \dfrac{dz(t)}{dt}$. Обратная задача заключается в определении положения тела z = z(t), если мгновенная скорость v(t) задана как функция времени. Решение обратной задачи приводит к понятию интеграла.

Если $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$, то $F(x)$ называют первообразной функцией для производной функции $f(x)$. Отметим, что функция $F(x) \pm C$, где C – произвольная константа, также является первообразной для функции $f(x)$, поэтому можно говорить о семействе первообразных. Семейство первообразных $F(x) + C$ функции $f(x)$ называют *неопределённым интегралом функции* $f(x)$ и обозначают символом $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $\int$ – знак интеграла; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение; $f(x)$ – подынтегральная функция; x – переменная интегрирования.

Вычисление неопределённого интеграла обычно сводится к такому преобразованию подынтегрального выражения, чтобы можно было воспользоваться таблицей неопределённых интегралов.

Таблица основных неопределенных интегралов

$$\int 0 \cdot dx = C;$$

$$\int A \cdot dx = A \cdot x + C, \quad A = const;$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ \ (0 < a \neq 1), \text{ в частности } \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int tg\, x dx = -\ell n|\cos x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C \ \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ где } n = 0, \pm 1, \ldots\right);$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C \quad (x \neq n\pi, \text{ где } n = 0, \pm 1, \ldots);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C.$$

К основным методам интегрирования относят:

- интегрирование заменой переменной;
- интегрирование по частям.

В методе интегрирования заменой переменной для отыскания интеграла от функции $f(x)$ водят функцию $x = x(t)$. Тогда $dx = \frac{dx}{dt}dt$. Формула замены переменной в интеграле приобретает вид

$$\int f(x)dx = \int f(x(t)) \cdot \frac{dx}{dt}dt.$$

Приём интегрирования путем замены переменной применяют в том случае, когда подынтегральная функция во втором интеграле проще, чем в исходном.

При интегрировании по частям используют следующую формулу

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

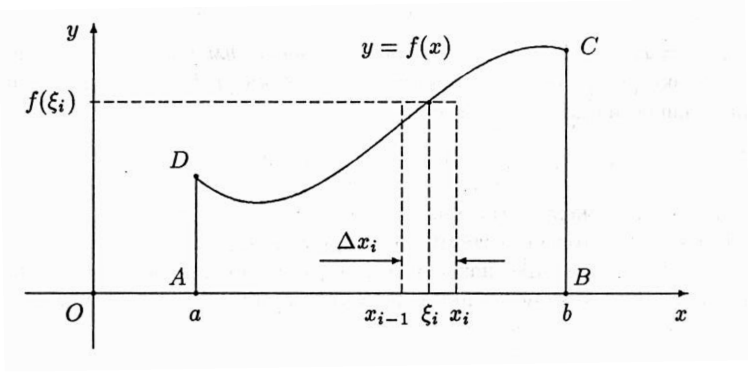
1.3.2. Определённый интеграл

Зададим на отрезке $[a, b]$ (a и b – конечные числа) неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$. Найдём площадь фигуры, ограниченной отрезком [a,b] на оси x, прямыми x = a и x = b и графиком кривой $f(x)$. Эту фигуру называют криволинейной трапецией.

Проведём разбиение отрезка $\left[a,b\right]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Выберем на каждом из полученных отрезков $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ (i = 1, …, n) произвольную точку $\xi_i \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ и, определив значения функции в этих точках $f(\xi_i)$, составим произведения $f(\xi_i)\Delta x_i$, каждое из которых в первом приближении равно площади под кривой $f(x)$ на соответствующем участке Δx_i, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Тогда сумма $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, называемая интегральной суммой, будет приближённо равна площади криволинейной трапеции.

Устремим все Δx_i к нулю. Если при этом интегральная сумма стремится к пределу, не зависящему от способов разбиения и выбора точек ξ_i, то его называют *определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке [a,b] и обозначают символом

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$



При этом числа a и b называют соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Итак, если подынтегральная функция указывает ординаты точек графика y = f(x), то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади фигуры, ограниченной графиком функции y = f(x), осью x и вертикалями x = a и x = b:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Для вычисления определённого интеграла используют формулу Ньютона-Лейбница, называемую также основной формулой интегрального исчисления:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где f(x) – функция, непрерывная на отрезке [a,b], а F(x) – одна из первообразных функций на этом отрезке.

Занятия 4, 5.

3. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Предметом изучения классической механики является *механическое движение* тел, представляющее собой их перемещение в пространстве с течением времени.

Положение движущегося тела определяют относительно некоторого другого тела, называемого телом отсчёта. С телом отсчёта связывают систему координат (обычно – прямоугольную). Для отсчёта времени используют часы того или иного типа. Совокупность системы координат, связанной с телом отсчёта, и набора синхронизированных часов, расположенных в разных точках пространства, образует систему отсчёта.

Описать движение в механике – это значит задать уравнение, позволяющее определить положение тела по отношению к выбранной системе отсчёта в любой момент времени.

В классической механике для упрощения описания движения реальных тел вместо них рассматривают движения идеализированных объектов: материальной точки и абсолютно твёрдого тела.

Материальная точка – это объект бесконечно малых размеров, обладающий массой. Абсолютно твёрдое тело – это совокупность материальных точек, расстояния между которыми при движении не изменяются.

Перейдём к описанию движения материальной точки.

3.1. Кинематические уравнения движения материальной точки

Движение материальной точки может быть описано тремя способами: векторным, координатным и естественным. Этим трём способам описания соответствуют три вида кинематических уравнений движения:

– кинематическое уравнение движения в векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки;

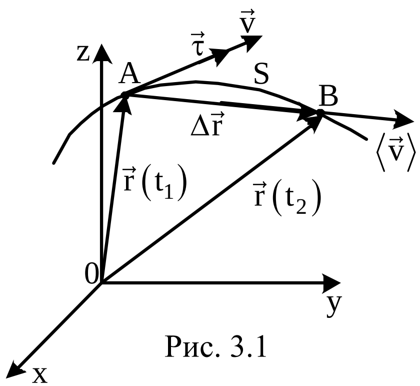


Рис. 3.1

– кинематические уравнения движения в координатной форме; в неподвижной декартовой системе координат они имеют вид:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}.$$

Естественный способ описания движения применяют в том случае, когда задано уравнение траектории материальной точки. На траектории выбирают начало отсчёта. Расстояние, измеренное вдоль траектории от начала отсчёта до положения, занимаемого материальной точкой в некоторый момент времени, называют пройденным <u>путём</u> S (рис. 3.1). Кинематическое уравнение движения при таком способе описания <u>при заданном уравнении траектории</u> будет иметь вид:

$$S = S(t).$$

3.2. Скорость и ускорение материальной точки

Скорость – это векторная величина, которая характеризует быстроту изменения положения материальной точки в пространстве и направление её движения в каждый момент времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Радиус-вектор материальной точки можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \qquad (3.1)$$

Тогда для скорости получаем:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \qquad (3.2)$$

то есть $v_x = \dfrac{dx}{dt}$; $v_y = \dfrac{dy}{dt}$; $v_z = \dfrac{dz}{dt}$.

Модуль скорости может быть тогда определён как:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

При естественном способе описания движения

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

С учётом того, что скорость направлена по касательной к траектории в каждой её точке, будем иметь

$$\vec{v} = \frac{dS}{dt} \cdot \vec{\tau},$$

где $\vec{\tau}$ – вектор, модуль которого равен единице, и который направлен по касательной к траектории в каждой её точке.

Ускорение – это векторная величина, которая характеризует быстроту изменения скорости:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} .$$

С учётом (3.1) и (3.2) можно записать:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \quad \text{или} \quad \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} .$$

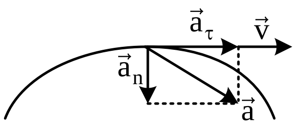
Модуль ускорения найдём из выражения:

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2}$$

или

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} .$$

При естественном способе описания движения ускорение представляют как сумму тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории движения в данной точке, и нормального (центростремительного) ускорения $\vec{a}_n$, направленного по нормали к касательной к центру кривизны траектории в данной точке:



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n , \tag{3.3}$$

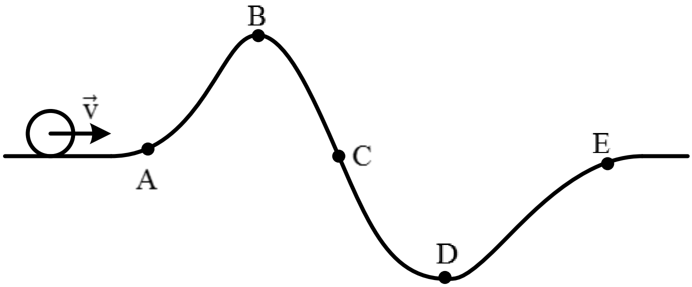
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

Тангенциальное ускорение определяется выражением $\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$, из которого следует, что модуль тангенциального ускорения характеризует быстроту изменения величины скорости ($a_\tau = \frac{dv}{dt}$). Вектор $\vec{\tau}$ в каждой точке траектории направлен по касательной к ней, а его модуль равен единице.

Нормальное ускорение определяется выражением $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}$, где R – радиус кривизны траектории в той её точке, в которой определяют нормальное ускорение. Вектор $\vec{n}$ направлен по нормали к касательной к центру кривизны траектории в каждой её точке, а его модуль равен единице. Модуль нормального ускорения характеризует быстроту изменения направления скорости.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ И ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ ПО РАЗДЕЛУ 3 "КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ"

3.1. Шарик движется без трения через холм и впадину. В какой точке справедливо соотношение $\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{dv}{dt}$?



а) такой точки нет

б) в начале подъёма в точке A

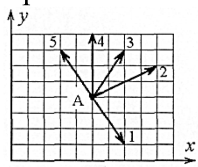
в) в точке наивысшего подъёма B

г) в точке перехода холма во впадину C

д) в самой низкой точке впадины D

е) в точке E в конце подъема

3.2. Радиус-вектор частицы изменяется во времени по закону $\vec{r} = -2 \cdot \vec{i} + 3t^4 \cdot \vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей Ox и Oy. В момент времени t = 1 с частица оказалась в точке A. Выберите правильное направление скорости частицы в этот момент времени.



а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5

3.3. Из точки с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = 18 \cdot \vec{i} - 81 \cdot \vec{j}$

($\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей Ox и Oy) начала своё движение частица. Её скорость изменяется по закону $\vec{v} = 2t^3 \cdot \vec{i} + 9t^2 \cdot \vec{j}$. Через сколько секунд частица пересечёт ось Ox?

а) никогда не пересечёт ось Ox б) 9 с в) 3 с г) 2 с

3.4. Начальная скорость частицы равна $\vec{v}_0 = 54 \cdot \vec{i} - 16 \cdot \vec{j}$ $\overline{v_0} = 54\bar{\imath}$-$16\bar{\jmath}$, а ускорение меняется во времени $\vec{a} = -6t^2 \cdot \vec{i} + 4t^3 \cdot \vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей Ox и Oy$\bar{a} =$ -$6t^2 \cdot \bar{\imath} + 4t^3 \cdot \bar{\jmath}\bar{a} =$ -$6t^2 \cdot \bar{\imath} + 4t^3 \cdot \bar{\jmath}$. Через сколько секунд скорость частицы окажется параллельной оси Oy?

а) 2с б) 3с в) 27с г) никогда не будет параллельной Oy

3.5. Скорость частицы изменяется во времени по закону $\vec{v} = 5t \cdot \vec{i} + 12t \cdot \vec{j}$ ($\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей Ox и Oy)$\bar{v} = 5t \cdot \bar{\imath} + 12t \cdot \bar{\jmath}$. Чему равна величина тангенциального ускорения частицы в момент времени $t_1 = 1$ с$t = 1c$?

а) 26 м/с^{2}м/с^2 б) 13 м/с^{2}м/с^2 в) 17 м/с^{2}м/с^2 г) 34 м/с^{2}м/с^2

3.6. Если $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ – тангенциальная и нормальная составляющие ускорения движущейся материальной точки, то соотношения: $a_\tau = const$, $a_n = 0$ справедливы для … .

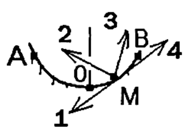
а) равномерного движения по окружности

б) прямолинейного равнопеременного движения

в) прямолинейного равномерного движения

г) равномерного криволинейного движения

3.7. Материальная точка M свободно без трения скользит в поле силы тяжести по гладким стенкам симметричной ямы и в рассматриваемый



момент времени движется вверх по направлению к точке В (А и В – наивысшие точки подъёма). Укажите правильное направление вектора полного ускорения точки М (см. рис.).

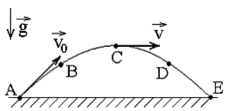
а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

3.8. При движении по окружности пройденный точкой путь описывается уравнением $S = 2t^3$ (S – измеряется в метрах, t – в секундах). Угол между векторами полного ускорения и скорости с течением времени … .

а) уменьшается б) увеличивается в) не изменяется

г) сначала уменьшается, затем увеличивается

3.9. Камень бросили под углом к горизонту со скоростью $\vec{v}_0\ \bar{v} = 5t \cdot \bar{\imath} + 12t \cdot \bar{\jmath}.v_0$ Его траектория в однородном поле силы тяжести изображена на рисунке. Сопротивления воздуха нет. На участке А-В-С … .



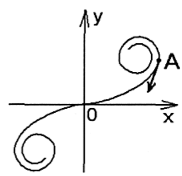
а) модуль нормального ускорения уменьшается, модуль тангенциального ускорения увеличивается

б) модуль нормального ускорения увеличивается, модуль тангенциального ускорения уменьшается

в) модули нормального и тангенциального ускорений увеличиваются

г) модули нормального и тангенциального ускорений уменьшаются

3.10. Точка А движется вдоль спирали в направлении, указанном стрелкой, с постоянной по величине скоростью. При этом величина её полного ускорения при движении к точке О … .



а) постоянна и равна нулю

б) постоянна и не равна нулю

в) увеличивается

г) уменьшается

3.11. Материальная точка движется так, что с течением времени её координаты изменяются по законам: $x = 2t + 6t^2 - 4t^3$, $y = 5t^2 - 4t^3 + 1{,}5t^4$ и $z = 4 + 8t - 2t^2$. Вычислите модуль скорости материальной точки в момент времени $t = 6$ с.

Ответ: 991,06 м/с

3.12. Материальная точка движется так, что с течением времени её координаты изменяются по законам: $x = 2t^2 - t^3$, $y = 4 + t^2 + 5t^3$ и $z = 9t + 7t^2 + 3t^4$. Найдите модуль ускорения материальной точки в момент времени $t = 2$ с.

Ответ: 169,92 м/с^2

3.13. Радиус-вектор частицы в начальный момент времени равен $\vec{r}_0 = \left(\vec{i} + \vec{j}\right) \cdot C$, где C = 8 м. Спустя некоторый промежуток времени модуль скорости частицы, которая изменяется по закону $\vec{v} = \vec{k}\left(A\dfrac{t}{\tau} - B\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4\right)$, оказался равным нулю. Определить на каком расстоянии от начала координат оказалась частица в рассматриваемый момент времени, если A = 16 м/с, B = 2 м/с, $\tau = 2$ с.

Ответ: 40,03 м

3.14. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону $\vec{r}(t)=\vec{i}\cdot\left(C\left(\frac{t}{\tau}\right)^5-B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4\right)+\vec{j}\cdot D\left(\frac{t}{\tau}\right)^7+\vec{k}\cdot E\left(\frac{t}{\tau}\right)$. Через сколько секунд скорость частицы окажется перпендикулярной оси Ox, если τ = 3 с, B = 5 м, C = 3 м, D = 6 м, E = 1 м?

Ответ: 4 с

3.15. В начальный момент времени скорость частицы равна нулю, а её ускорение зависит от времени по закону $\vec{a}(t)=\vec{i}\cdot C\left(\frac{t}{\tau}\right)^5+\vec{j}\cdot D\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$. Через сколько секунд скорость частицы будет направлена под углом 45° к оси Ox, если τ = 2 с, C = 27 м, D = 8 м?

Ответ: 1,3 с

3.16. Частица начала движение из точки с координатами x_0 = 2 м; y_0 = 4 м; z_0 = 6 м с нулевой начальной скоростью. Её скорость зависит от времени по закону $\vec{v}(t)=\vec{i}\cdot At^4+\vec{j}\cdot Bt^3+\vec{k}\cdot Ct^2$. Найти расстояние от начала координат до точки, в которой оказалась частица через 5 с после начала движения, если A = 4 м/с^5, B = 2 м/с^4, C = 12 м/с^3.

Ответ: 2572,2 м

3.17. Частица начала своё движение из начала координат с начальной скоростью $\vec{v}_0=\vec{k}\cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону $\vec{a}(t)=\vec{i}\cdot Ct^2+\vec{j}\cdot Bt^3$. Найти модуль скорости частицы в момент времени t = 4 с, если A = 2 м/с; C = 3 м/с^4; B = 4 м/с^5?

Ответ: 263,89 м/с

3.18. Частица начала движение из начала координат, и её скорость зависит от времени по закону $\vec{v}(t) = \left(\vec{i} \cdot A + \vec{j} \cdot B + \vec{k} \cdot C\right)\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$. Какой путь пройдёт частица за время t = 3 с, τ = 2 с, если A = 2 м/с; B = 3 м/с; C = 4 м/с?

Ответ: 16,36 м

3.19. Скорость частицы изменяется со временем по закону $\vec{v} = \vec{i}A\cos\left(\alpha t^2\right) + \vec{j}A\sin\left(\alpha t^2\right) + \vec{k}Bt^2$, где A = 2 м/с, B = 3 м/с, α = 2 с$^{-2}$. На какую величину увеличится модуль ускорения частицы за промежуток времени от t_1 = 1 с до t_2 = 3 с?

Ответ: 20 м/с^2

3.20. Скорость частицы изменяется со временем по закону $\vec{v} = \left(D - 2Bt\right)\vec{j}$, где D = 4 м/с, B = 2 м/с^2. В момент t = 0 координата y_o = 0. Найти путь, пройденный частицей за промежуток времени, по истечении которого она вернётся в исходную точку.

Ответ: 4 м

3.21. Тело начинает движение вдоль оси x из точки x_o = 1 м так, что его скорость зависит от координаты по закону v_x = 0,4 x. Найти скорость тела в момент времени 5 с.

Ответ: 2,96 м/с

3.22. Частица начинает двигаться вдоль оси x из точки x_o = 1 м так, что её скорость зависит от координаты по закону v_x = Bx, где B = 0,5 с$^{-1}$. Найти ускорение частицы в момент времени t = 3 с.

Ответ:1,12 м/с^2

Занятия 6, 7.

4. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Простейшими видами движения твёрдого тела являются поступательное движение и его вращение вокруг неподвижной оси. Сложные движения твердого тела можно рассматривать как суперпозицию (наложение) вращательного и поступательного движений.

4.1. Поступательное движение твёрдого тела

Поступательным называют такое движение, при котором любая прямая, жёстко связанная с телом, остаётся параллельной самой себе. Скорости и ускорения всех точек тела, движущегося поступательно, одинаковы, а траектории их движения совмещаются при параллельном переносе. Отсюда следует, что для кинематического описания поступательного движения тела достаточно описать движение любой его точки.

4.2. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

Вращательным движением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называют такое его движение, при котором точки тела, находящиеся на этой оси, остаются в процессе движения неподвижными, а остальные его точки описывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, а их центры находятся на этой оси.

При вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси все его точки за одинаковое время поворачиваются на один и тот же угол φ, называемый углом поворота, поэтому для описания вращения всего тела вокруг неподвижной оси достаточно указать угол поворота как функцию времени:

$$\varphi = \varphi(t).$$

Быстроту изменения угла поворота характеризуют заданием угловой скорости:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Угловая скорость твёрдого тела $\vec{\omega}$ одинакова для всех точек тела. Угловая скорость представляет собой аксиальный вектор, не имеющий точки приложения, направленный вдоль оси вращения в сторону, связанную с направлением вращения правилом правого винта.

Аксиальный вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ характеризует быстроту изменения вектора угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Он направлен вдоль оси вращения в ту же сторону, что и угловая скорость, если движение ускоренное, и в противоположную – если замедленное.

4.3. Связь между линейными и угловыми величинами

Прежде всего выявим связь между линейной и угловой скоростями движения:

$$v = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{R d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Так как $R = r\sin\theta$ (рис. 4.1), то $v = \omega \cdot r\sin\theta$. В то же время из рис. 4.1 следует, что вектор $\vec{v}$ перпендикулярен и вектору $\vec{\omega}$, и вектору $\vec{r}$. Согласно определению вектор, равный векторному произведению двух векторов, по величине равен произведению их модулей на синус угла между ними, а по направлению перпендикулярен каждому из них. Это

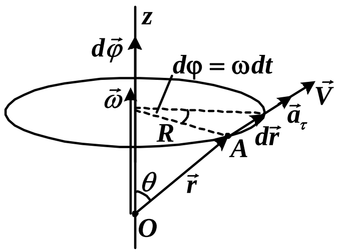


Рис. 4.1

означает, что вектор линейной скорости некоторой точки твёрдого тела равен векторному произведению вектора угловой скорости движения тела на радиус-вектор этой точки. Порядок запи… телей определяется правилом правого винта. Учитывая это, можно записать (см. рис. 4.1):

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

Модуль тангенциального ускорения представим в виде:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\theta$$

или в векторной форме:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор данной точки.

Для модуля нормального ускорения имеем

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ И ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ ПО РАЗДЕЛУ 4 "КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА"

4.1. Точка движется по окружности с угловым ускорением $\varepsilon \sim t$. При $t = 0$ угловая скорость $\omega = 0$. Модуль нормального ускорения точки $a_n \sim t^n$. Значение n равно … .

а) 4 б) 3 в) 2 г) 1 д) 0

4.2. Если $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ – тангенциальная и нормальная составляющие ускорения, то для равномерного движения по окружности справедливы соотношения … .

а) $a_\tau = 0$, $a_n = const$ б) $a_\tau = 0$, $a_n = 0$

в) $a_\tau = const$, $a_n = 0$ г) $a_\tau = const$, $a_n \neq const$

4.3. Вращательное движение тела вокруг неподвижной оси описывается уравнением $\varphi = 2t - 4t^3$ (φ – в радианах, t – в секундах). Вращение начинается в момент времени $t = 0$. Положительные углы поворота отсчитываются по часовой стрелке. В момент времени $t = 0{,}5$ с … .

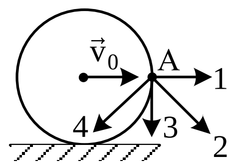
а) тело поворачивается по часовой стрелке, ускоряясь

б) тело остановилось

в) тело поворачивается по часовой стрелке, замедляясь

г) тело поворачивается против часовой стрелки

4.4. Диск катится равномерно по горизонтальной поверхности со скоростью $\vec{v}_0$ без проскальзывания. Вектор скорости в точке А, лежащей на боковой поверхности диска, ориентирован в направлении … .

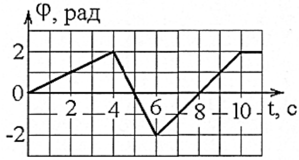


а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

4.5. Частица движется вдоль окружности с радиусом 1 м в соответствии с уравнением $\varphi(t)=2\pi(t^2-4t+6)\varphi(t) = 2\pi(t^2-4t+6)$, где φ φ– угол в радианах, t – время в секундах. Отношение величины её нормального ускорения к величине тангенциального (касательного к траектории) ускорения $a_n/a_\tau a_n/a_\tau$ в момент времени $t = 2$ с$t = 2$с равно … .

а) 0 б) 4π в) 8π г) 16π

4.6. Лёгкий диск радиуса R начинает вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси Z, проходящей перпендикулярно его плоскости через его центр. Зависимость угла поворота от времени показана на графике. Во сколько раз отличаются величины нормальных ускорений точки на краю диска в моменты времени $t_1 = 5$ с и $t_2 = 8$ с?



а) в 2 раза

б) в 4 раза

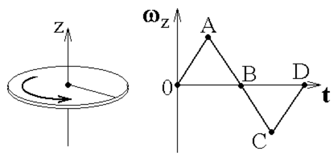
в) не отличаются, так как равны нулю в обоих случаях

г) равны друг другу и отличны от нуля

4.7. Частица движется вдоль окружности радиусом 1 м в соответствии с уравнением $\varphi(t) = 2\pi(t^2 - 6t + 12)$, где φ – угол в радианах, t – время в секундах. Угловое ускорение частицы через 3 с после начала движения равно … $с^{-2}$.

а) 4π б) 2π в) 0 г) 6π

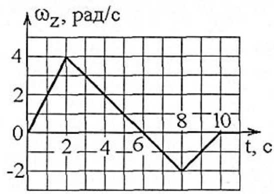
4.8. Диск вращается вокруг своей оси, изменяя проекцию своей угловой скорости так, как показано на рисунке. На каких участках графика зависимости $\omega_z(t)\omega_z(t)$ вектор угловой скорости $\vec{\omega}\vec{\omega}$ и вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлены в одну сторону?



а) 0-A и A-B б) 0-A и B-C

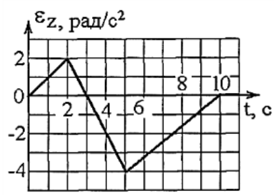
в) B-C и C-D г) всегда направлены в одну сторону

4.9. Твёрдое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется во времени, как показано на графике. На какой угол относительно начального положения окажется повёрнутым тело через 10 секунд?



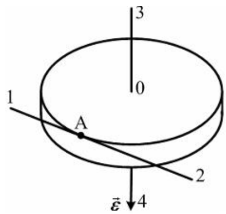
а) 12 рад б) 16 рад в) 8 рад г) 32 рад

4.10. Твёрдое тело из состояния покоя начинает вращаться вокруг оси Z с угловым ускорением, проекция которого изменяется во времени, как показано на графике. В какой момент времени угловая скорость вращения тела достигнет максимальной величины?



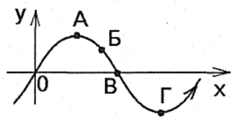
а) 2 с б) 3 с в) 5 с г) 10 с

4.11. Диск радиуса R вращается вокруг вертикальной оси равноускоренно с заданным направлением вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$. Укажите направление вектора линейной скорости $\vec{v}$.



а) 2 б) 1 в) 4 г) 3

4.12. Материальная точка движется вдоль плоской кривой, образующей синусоиду y = sin(kx), где k = const (см. рисунок) в направлении возрастания координаты x с постоянной по величине скоростью. При этом величина полного ускорения материальной точки будет минимальной в следующей точке траектории … .



а) А б) Б в) В г) Г

4.13. Тело вращается вокруг неподвижной оси. Изменение угла поворота со временем определяется уравнением $\omega = At^2 - Bt^4 + Ct^6$, где A = 7 рад/с^3, B = 5 рад/с^5, C = 2 рад/с^7. Найти модуль тангенциального ускорения точки тела, находящейся на расстоянии R = 0,2 м от оси вращения, в момент времени t = 2 с.

Ответ: 50,4 м/с^2

4.14. Тело вращается вокруг неподвижной оси. Изменение угла поворота со временем определяется уравнением $\varphi = At + Bt^2 - Ct^3$, где A = 2 рад/с, B = 2,5 рад/с^2, C = 0,2 рад/с^3. Найти модуль нормального ускорения точки тела, находящейся на расстоянии R = 0,5 м от оси вращения, в момент времени t = 3 с.

Ответ: 67,28 м/с^2

4.15. Тело вращается вокруг неподвижной оси. Изменение линейной скорости тела от времени определяется уравнением v = A – Bt, где A = 0,7 м/с, B = 0,5 м/с^2. Найти модуль полного ускорения точки тела, находящейся на расстоянии R = 0,1 м от оси вращения, в момент времени t = 4 с.

Ответ: 16,91 м/с^2

4.16. Точка движется по дуге окружности так, что угол поворота зависит от времени по закону φ = At + Bt^2, где A = 0,2 рад/с, B = 0,01 рад/с^2. Найти тангенс угла между векторами скорости и полного ускорения точки в момент времени t = 4 с.

Ответ: 3,92

4.17. Диск радиусом 2 м вращается так, что зависимость от времени линейной скорости некоторой точки C, лежащей на ободе диска, задается уравнением v = At^3 + Bt^2, где A = 4 м/с^4, B = 2 м/с^3. Определить тангенс угла между вектором полного ускорения точки C и радиусом диска, проведённым в эту точку, через 3 с после начала движения.

Ответ: 0,015

4.18. Точка движется по окружности радиусом R = 0,5 м так, что её дуговая координата L, отсчитываемая вдоль окружности от некоторой начальной точки, лежащей на этой окружности, изменяется с течением времени по закону L = At – Bt^3, где A = 15 м/с, B = 2 м/с^3. Найти нормальное ускорение точки в момент времени t = 1,5 с.

Ответ: 4,5 м/с^2

4.19. Точка движется по окружности радиусом R = 10 м так, что проходимый ею путь зависит от времени по закону $S = At^2 + Bt^3$, где A = 2 м/с^2, B = 1,5 м/с^3. Найти отношение нормального ускорения точки к её тангенциальному ускорению в момент времени t = 2 с.

Ответ: 3,07

4.20. Материальная точка движется по окружности радиусом R = 1 м. Закон её движения выражается уравнением $S = Bt^3$, где B = 6 м/с^3, а S – пройденный путь. Найти момент времени t, в который тангенциальное ускорение точки a_τ = 9 м/с^2. Ответ записать с точностью до сотых.

Ответ: 0,25 с

4.21. Точка движется по окружности так, что проходимый ею путь зависит от времени по закону $S = Bt^3$, где B = 0,5 м/с^3. В момент времени t = 2 с полное ускорение точки будет равно 10 м/с^2. Найти радиус окружности.

Ответ: 4,5 м

4.22. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задаётся уравнением $\varphi = At^2$, где A = 0,1 рад/с^2. Определить полное ускорение точки на ободе диска к концу второй секунды после начала движения, если линейная скорость этой точки в этот момент v = 0,4 м/с. Ответ записать с точностью до сотых.

Ответ: 0,26 м/с^2

4.23. Однородный диск начинает вращение из состояния покоя вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его геометрический центр, с угловым ускорением ε = βt, где β = 3 рад/с^3. Найти угол поворота диска за время t = 4 с.

Ответ: 32 рад

4.24. Однородный диск начинает вращение из состояния покоя вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его геометрический центр, с угловым ускорением $\varepsilon = A - Bt$, где $A = 12$ рад/с^2, $B = 4$ рад/с^3. Найти угол поворота диска за то время, пока диск не остановится.

Ответ: 72 рад

Занятие 8 – КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1
Пример контрольного задания

1. Частица движется так, что её радиус-вектор зависит от времени по закону $\vec{r}(t) = \vec{i}A\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \vec{j}B + \vec{k}C\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, где A, B, C – постоянные величины, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты в декартовой системе координат. Найдите модуль скорости в момент времени $t = 1$ с, если $\tau = 1$ с, A=5 м, B=4 м, C=3 м.

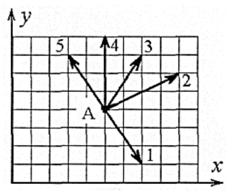
а) 17,2 м/с б) 18,2 м/с в) 19,2 м/с г) 20,2 м/с

2. Начальная скорость частицы равна $\vec{v}_0 = 16\vec{i} - 6\vec{j}$, а ускорение меняется во времени по закону $\vec{a} = -6t^2 \cdot \vec{i} + 4t^3 \cdot \vec{k}$. Через сколько секунд скорость частицы окажется перпендикулярной оси OX?

а) 1,33 с б) 2 с в) 4 с

г) никогда не будет перпендикулярной OX

3. Радиус-вектор частицы изменяется во времени по закону $\vec{r} = -2\vec{i} + 3t^4 \cdot \vec{j}$. В момент времени t = 1 с частица оказалась в точке А. Выберете правильное направление скорости частицы в этот момент времени.



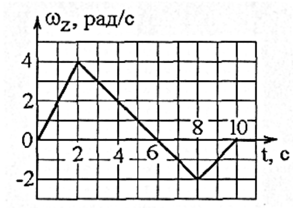
а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5

4. Скорость частицы изменяется во времени по закону $\vec{v} = 5t\vec{i} + 12t\vec{j}$ $\bar{v} = 5t \cdot \bar{\imath} + 12t \cdot \bar{\jmath}$. Чему равна величина тангенциального ускорения частицы в момент времени t_1 = 1 с$t = 1$с?

а) 26 м/с^2$м/с^2$ б) 13 м/с^2$м/с^2$ в) 17 м/с^2$м/с^2$

г) 34 м/с^{2}м/с^2

5. Твёрдое тело начинает вращаться вокруг оси Z с угловой скоростью, проекция которой изменяется во времени, как показано на графике. На какой максимальный угол относительно начального положения сможет повернуться тело за все время вращения?



а) 8 рад б) 4 рад в) 24 рад г) 12 рад

6. Материальная точка М движется по окружности со скоростью $\vec{V}$. На рис.1 показан график зависимости проекции скорости V_τ от времени ($\vec{\tau}$ – единичный вектор положительного направления, V_τ – проекция $\vec{V}$ на это направление). При этом вектор полного ускорения на рис.2 имеет направление … .

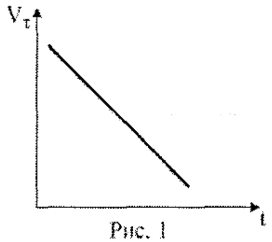


Рис. 1

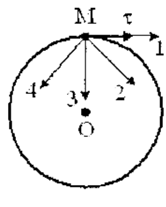


Рис. 2

а) 2 б) 1 в) 3 г) 4

7. Скорость материальной точки при различных способах описания положения материальной точки.

Занятия 9 – 12

5. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

5.1. Динамика движения материальной точки. Законы Ньютона

В динамике рассматривают взаимодействия между телами, которые являются причиной изменения движения этих тел.

Векторную величину, являющуюся количественной мерой действия тел друг на друга, называют **силой**.

Опыт показывает, что одинаковое силовое воздействие, оказываемое на разные тела, приводит к тому, что они в общем случае будут двигаться с различными ускорениями. Способность тела приобретать определённое ускорение под действием силы называют инертностью. Количественной характеристикой инертности является величина, называемая массой.

Для характеристики движения тела вводят векторную величину, называемую импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$.

В основу классической механики положены три постулата, называемые законами Ньютона.

Согласно первому закону Ньютона:

Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, по отношению к которым свободная материальная точка покоится или движется равномерно и прямолинейно.

Свободной называют материальную точку, на которую либо силы не действуют, либо их векторная сумма равна нулю.

Согласно втором закону Ньютона:

В инерциальных системах отсчёта скорость изменения импульса материальной точки пропорциональна силе, действующей на эту точку:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \qquad (5.1)$$

где $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, то есть предполагается, что совокупность нескольких сил, одновременно действующих на материальную точку, вызывает тот же эффект, что и действие одной силы $\vec{F}$, равной векторной сумме этих сил. Силу $\vec{F}$ называют результирующей системы сил $\vec{F}_i$.

Если масса материальной точки не изменяется (m=const), то, так как $\vec{p} = m\vec{v}$, из (5.1) следует:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \vec{F} = m\vec{a}. \qquad (5.2)$$

Формулу (5.2) можно представить в виде:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \qquad (5.3)$$

или в проекциях на координатные оси:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x;\, m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y;\, m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \qquad (5.4)$$

Уравнение (5.3) и систему уравнений (5.4) называют динамическими уравнениями движения материальной точки.

В соответствии с третьим законом Ньютона:

В инерциальной системе отсчёта силы, с которыми действуют друг на друга две материальных точки, равны по величине, направлены в противоположные стороны и имеют общую линию действия.

Если взаимодействуют материальные точки с номерами i и j, то в соответствии с третьим законом Ньютона

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}\,.$$

5.2. Уравнение движения системы материальных точек

Пусть механическая система состоит из n материальных точек, каждая из которых может взаимодействовать с любой другой силами, которые называют внутренними. Кроме того, на материальные точки системы могут действовать силы со стороны тел, не входящих в рассматриваемую систему. Эти силы называют внешними. Закон движения для k-ой материальной точки принимает вид:

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k^{(\text{внутр})} + \vec{F}_k^{(\text{внеш})}\,,$$

где $\vec{F}_k^{(\text{внутр})}$ – результирующая всех внутренних сил, действующих на k-ую материальную точку; $\vec{F}_k^{(\text{внеш})}$ – результирующая всех внешних сил, действующих на k-ую материальную точку.

В результате суммирования по всем материальным точкам получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{(\text{внеш})}\,. \tag{5.5}$$

В (5.5) учтено, что в соответствии с третьим законом

Ньютона $\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{(\text{внутр})}=0$. Операции дифференцирования и суммирования можно поменять местами, поэтому левую часть уравнения (5.5) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d\vec{p}_k}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\vec{p}_k=\frac{d\vec{P}}{dt},$$

где $\vec{P}=\sum_{k=1}^{n}\vec{p}_k=\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{v}_k$ – называют импульсом механической системы. Правую часть уравнения (5.5) обозначим как:

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{(\text{внеш})}=\vec{F}^{\text{внеш}}.$$

Тогда из (5.5) получаем уравнение движения системы материальных точек:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}^{\text{внеш}}, \tag{5.6}$$

то есть ***скорость изменения импульса механической системы равна векторной сумме внешних сил, действующих на материальные точки, составляющие систему***.

Векторному уравнению (5.6) соответствуют три скалярных уравнения:

$$\begin{cases}\dfrac{dP_x}{dt}=F_x^{\text{внеш}};\\[2mm] \dfrac{dP_y}{dt}=F_y^{\text{внеш}};\\[2mm] \dfrac{dP_z}{dt}=F_z^{\text{внеш}}.\end{cases}$$

5.3. Центр масс механической системы. Уравнение движения центра масс

Для упрощения описания движения системы пользуются законами, позволяющими судить о её движении в целом. Именно с этой целью вводят понятие центра масс (или центра инерции).

Центром масс системы, состоящей из n материальных точек, называют геометрическую точку, радиус-вектор которой определяется следующим выражением:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \qquad (5.7)$$

где $\sum_{k=1}^{n} m_k = M$ – масса всей системы.

После дифференцирования выражения (5.7) по времени получаем:

$$M\vec{v}_c = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k$$

или

$$M\vec{v}_c = \vec{P},$$

где $\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$ – скорость движения центра масс.

После повторного дифференцирования с учётом уравнения (5.6) будем иметь:

$$M\frac{dv_c}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}. \qquad (5.8)$$

Уравнение (5.8) называют уравнением движения центра масс механической системы.

Согласно этому уравнению центр масс механической системы движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе всей системы, под действием векторной суммы внешних сил, действующих на все материальные точки, составляющие систему.

Такой способ описание движения системы применим, если допустима потеря информации о движении отдельных материальных точек системы.

5.4. Движение тела с переменной массой

Имеется много случаев, когда масса тела изменяется в процессе движения за счёт непрерывного отделения или присоединения вещества (ракета, реактивный самолет, платформа, нагружаемая на ходу, и т. п.). Рассмотрим описание такого движения для материальной точки, называя её для краткости телом. Пусть в некоторый момент времени t $\vec{v}$ – скорость тела, m – его масса, $\vec{v}_o$ – скорость отделяемого или присоединяемого вещества относительно рассматриваемого тела, dm – приращение массы тела (dm берётся со знаком "+" в случае присоединения вещества и со знаком "–" в случае его отделения). Изменение импульса системы за время dt (случай отделяемой массы) равно:

$$d\vec{P} = \vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v}_o + \vec{v}) - m\vec{v} =$$
$$= -dm\vec{v} + md\vec{v} - dmd\vec{v} + dm\vec{v}_o + dm\vec{v} = md\vec{v} + \vec{v}_o dm$$

или

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}_o\frac{dm}{dt},$$

отсюда с учётом того, что $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{внеш}$, имеем

$$\frac{md\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{внеш} - \frac{dm}{dt}\vec{v}_o.$$

Обобщая случаи присоединения и отделения массы, получаем:

$$\frac{md\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{внеш} \pm \frac{dm}{dt}\vec{v}_o \qquad (5.9)$$

Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского)

Последнее слагаемое в уравнении (5.9) $\vec{R} = \frac{dm}{dt}\vec{v}_o$ называют ***реактивной силой***. Если масса присоединяется, то $\frac{dm}{dt} > 0$ и $\vec{R}$ совпадает по направлению с $\vec{v}_o$.

При $\vec{F}_{внеш} = 0$, спроектировав на направление движения, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$m\frac{dv}{dt} = -v_o\frac{dm}{dt}; \quad \frac{dm}{m} = -\frac{dv}{v_o} \quad \Rightarrow \quad \ln m + \frac{v}{v_o} = const$$

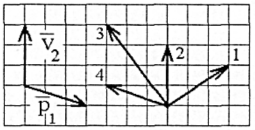
Для определения константы примем, что при v = 0, $m = m_o$, тогда $const = \ln m_o$ и окончательно получим:

$$v = v_o \ln\frac{m_o}{m} \qquad (5.10)$$

Формула Циолковского

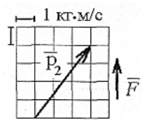
ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ И ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ ПО РАЗДЕЛУ 5 "ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК"

5.1. Импульс тела $\vec{p}_1$ $\overline{p_1}$изменился под действием короткого удара и скорость тела стала равной $\vec{v}_2$ $\overline{v_2}$, как показано на рисунке. В каком направлении могла действовать сила?



а) только 3 б) 3, 4 в) 2, 3, 4 г) только 1

5.2. На теннисный мяч, который летел с импульсом $\vec{p}_1$ $\overline{p_1}$, на короткое время Δt = 0,1 с$\Delta t = 0{,}1$с подействовал порыв ветра с постоянной силой F = 40 Н, и импульс мяча стал равным $\vec{p}_2$ $\overline{p_2}$ (масштаб и направление указаны на рисунке). Величина импульса p_1 $\overline{p_1}$= … кг·м/с.



а) 0,5 б) 43 +кг · м/с в) 5 кг · м/сг) 8,5 **Ошибка! Ожидалась цифра.** д) 3————————————кг · м/с

5.3. Материальная точка М движется по параболе (рис. 1) в направлении, указанном стрелками. График изменения величины (модуля) её скорости приведён на рис. 2. На рис. 1 показано положение точки М в момент времени t_1. Укажите на этом рисунке направление силы, действующей на точку М в момент времени $t_1$$t_1$.

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

5.4. Материальная точка М движется по окружности со скоростью $\vec{v}\vec{v}$. На рис. 1 показан график зависимости проекции скорости $v_\tau v_\tau$ на орт $\vec{\tau}\vec{\tau}$, направленный вдоль скорости $\vec{v}\vec{v}$. На рис. 2 укажите направление силы, действующей на точку М в момент времени t_2.

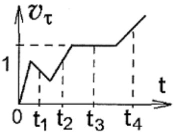
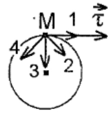
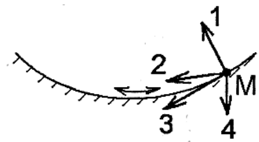
Рис.1


Рис.2


а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

5.5. Материальная точка М скользит без трения по гладкой сферической поверхности, совершая незатухающие колебания, и находится в верхней точке своей траектории (см. рисунок). Укажите направление силы, действующей на точку М в этой точке.



а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

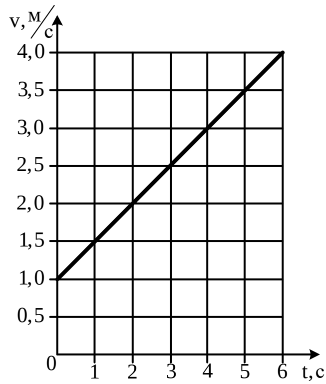
5.6. Импульс материальной точки изменяется по закону $\vec{p} = 10t \cdot \vec{i} + 3t^2 \cdot \vec{j}$. Модуль силы, действующей на точку в момент времени t = 4 с, равен … Н.

а) 34 б) 26 в) 22 г) 2 д) 1,75

5.7. Система состоит из трёх частиц, массы которых m_1 = 0,1 г, m_2 = 0,2 г, m_3 = 0,3 г. Первая частица находится в точке с координатами (1,2,0), вторая – в точке (0,2,1), третья – в точке (1,0,1) (координаты даны в сантиметрах). Тогда y_C – координата центра масс, равна … см.

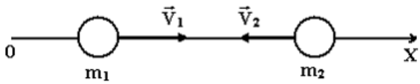
а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

5.8. На рисунке приведён график зависимости скорости тела v от времени t. Если масса тела 2 кг, то сила, действующая на тело, равна … Н.



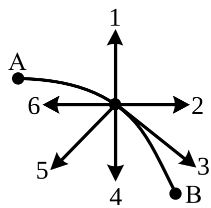
а) 1 б) 2 в) 4/3 г) нет правильного ответа

5.9. Вдоль оси Ох навстречу друг другу движутся две частицы с массами m_1=2 г, m_2=6 г, и скоростями v_1=9 м/с, v_2 = 3 м/с соответственно. Проекция скорости центра масс на ось Ох равна … м/с.



а) 0 б) 4,5 в) 6 г) 7,5

5.10. Материальная точка движется по криволинейной траектории АВ под действием некоторой силы. Во всех точках траектории $v \neq 0$. Какие направления силы невозможны?



а) 1,2,3 б) 1,2,4,6 в) 1,2 г) 1,2,4,5,6

д) возможны все направления

5.11. Движение материальной точки задано уравнениями $x = \alpha t^3$, $y = \beta t$. Сила, действующая на материальную точку …

а) изменяется только по направлению

б) изменяется только по модулю

в) изменяется и по модулю, и по направлению

г) не изменяется ни по модулю, ни по направлению

5.12. Тело массой m = 2 кг движется прямолинейно по закону $S(t) = A(1 - e^{-Bt})$, где A = 12 м, B = 0,5 с$^{-1}$. Определить проекцию действующей силы на направление движения тела в момент времени t = 2 с.

Ответ: – 2,21 Н

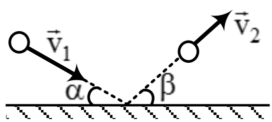
5.13. На частицу массой 1 кг действует сила, зависящая от времени по закону $F = \frac{B}{t^3}$, где B = 5 Н·с^3. Найти путь, пройденный частицей за первые пять секунд. Начальную скорость принять равной 2 м/с.

Ответ: 10,5 м

5.14. Частица движется в плоскости так, что её импульс зависит от времени по закону $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot At^4 + \vec{j} \cdot Bt^2$. Найти угол между осью y и вектором силы, действующей на частицу в момент времени t = 2 с, если A = 0,5 кг·м/с, B = 4 кг·м/с.

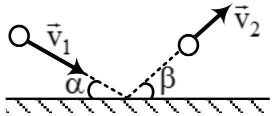
Ответ: 45°

5.15. Небольшой шарик массы m = 1 кг летит со скоростью v_1 = 5 м/с под углом α = 30° к горизонтальной плоскости. После неупругого удара он отскакивает со скоростью v_2 = 4 м/с под углом β = 45° к плоскости. Время соударения τ = 0,2 с. Найти модуль средней силы трения шарика о плоскость, действовавшей во время удара.



Ответ: 7,5 Н

5.16. Небольшой шарик массы m = 1 кг летит со скоростью v_1 = 5 м/с под углом α = 30° к горизонтальной плоскости. После неупругого удара он отскакивает со скоростью v_2 = 4 м/с под углом β = 45° к плоскости. Время соударения τ = 0,2 с. На сколько модуль средней силы нормальной реакции опоры, действовавшей во время удара, больше силы тяжести?



Ответ: 26,6 Н

5.17. Парашютист, масса которого равна 80 кг, совершает затяжной прыжок. Считая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости, определить, через какой промежуток времени скорость движения парашютиста будет равна 0,9 от скорости установившегося движения. Коэффициент сопротивления r = 10 кг/с. Начальная скорость парашютиста равна нулю.

Ответ: 18,4 с

5.18. Начальная скорость пули равна 800 м/с. При движении в воздухе за время 0,8 с её скорость уменьшилась до 200 м/с. Масса пули равна 10 г. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определить коэффициент сопротивления воздуха. Действием силы тяжести пренебречь.

Ответ: $47 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}}$

5.19. Лодка под парусом движется по озеру со скоростью v_o = 3 м/с. Найти скорость движения этой лодки через две минуты после того как был убран парус, если сопротивление воды движению лодки пропорционально квадрату скорости. Масса лодки m = 100 кг, коэффициент сопротивления r = 0,5 кг/м.

Ответ: 1,07 $\frac{м}{с}$

5.20. Масса ракеты в начальный момент времени была равна 0,3 кг. Расход горючего 0,1 кг/с, скорость продуктов сгорания относительно ракеты 200 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешнем силовым полем, определить, за какой промежуток времени скорость ракеты станет равной 50 м/с.

Ответ: 0,66 с

5.21. Ракета перед стартом имела массу 120 кг. Какую скорость будет иметь ракета через 15 с после начала работы её двигателей? Считать расход топлива μ = 4 кг/с и скорость истечения газов относительно ракеты u = 1000 м/с постоянными. Задачу решить, пренебрегая полем тяготения Земли.

Ответ: 693 $\frac{м}{с}$

5.22. На краю стола лежит верёвка массой m = 1 кг и длиной ℓ = 1 м. Верёвка удерживается внешней силой в положении, когда одна из её половин свешивается. Затем верёвку отпускают и она начинает соскальзывать. Найти скорость верёвки в момент её отрыва от стола. Коэффициент трения μ = 0,1.

Ответ: 2,69 $\frac{м}{с}$

Занятия 13 - 16

6. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

6.1. Момент импульса материальной точки и момент силы относительно центра. Уравнение моментов

Для динамического описания движения материальной точки и систем материальных точек относительно некоторого центра вводят величины, называемые моментом силы и моментом импульса.

Моментом силы относительно некоторого центра O называют векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы, проведённого из центра O, на эту силу:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$

Учитывая, что $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, а $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, получаем:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(yF_z - zF_y\right) + \vec{j}\left(zF_x - xF_z\right) + \vec{k}\left(xF_y - yF_x\right)$$

.

Моментом сил, действующих на систему, называют векторную сумму моментов сил, приложенных к материальным точкам системы. При этом и момент сил, действующих на систему, и каждый из моментов сил, действующих на материальные точки, составляющие систему, определяют относительно центра О:

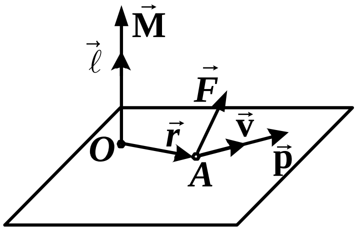


Рис. 6.1

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i \right].$$

Моментом импульса материальной точки А относительно центра О называют векторное произведение радиус-вектора точки А на вектор её импульса:

$$\vec{\ell} = [\vec{r}, \vec{p}] \quad \text{или} \quad \vec{\ell} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}.$$

Момент импульса системы материальных точек относительно некоторого центра О равен векторной сумме моментов импульса всех точек системы, определённых относительного того же центра:

$$\vec{L} = \sum \vec{\ell}_i .$$

Выясним, какая механическая величина ответственна за изменение момента импульса материальной точки в данной системе отсчёта, для чего продифференцируем по времени выражение для момента импульса:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt}=\frac{d}{dt}[\vec{r},\vec{p}]=\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\vec{p}\right]+\left[\vec{r},\frac{d\vec{p}}{dt}\right].$$

Вектор $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$ и вектор $\vec{p}=m\vec{v}$ направлены одинаково, поэтому $\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\vec{p}\right]$ = 0.

Учитывая, что в соответствии со вторым законом Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$, имеем $\left[\vec{r},\frac{d\vec{p}}{dt}\right]=\left[\vec{r},\vec{F}\right]=\vec{M}$. Тогда получаем, что

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt}=\vec{M}. \qquad (6.1)$$

Уравнение моментов для материальной точки

6.2. Динамика вращательного движения системы материальных точек относительно центра

Выясним, какая физическая величина определяет изменение момента импульса <u>системы</u>. Для этого найдём скорость изменения во времени момента импульса системы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_i\vec{L}_i=\sum_i\frac{d\vec{L}_i}{dt};$$

так как $\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\vec{M}_i$, то $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$, где $\vec{M}=\sum_i\vec{M}_i$.

На частицы системы в общем случае действуют как внутренние, так и внешние силы, поэтому момент $\vec{M}$ равен сумме моментов внутренних $\vec{M}_{внутр}$ и внешних $\vec{M}_{внеш}$ сил.

Из третьего закона Ньютона следует, что суммарный момент всех внутренних сил относительно любой точки равен нулю. Тогда

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш}. \quad (6.2)$$

Это уравнение называют <u>уравнением моментов для системы материальных точек</u>:

Скорость изменения момента импульса механической системы, определённого относительно некоторой точки О, равна моменту внешних сил, действующих на систему, определённому относительно той же точки.

6.3. Момент инерции. Теорема Штейнера. Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси

Рассмотрим вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Введём понятия моментов импульса и силы относительно оси вращения.

Моментом силы M_z ***относительно оси вращения Z называют проекцию на эту ось полного момента сил, действующих на тело, определённого относительно произвольной точки О данной оси.***

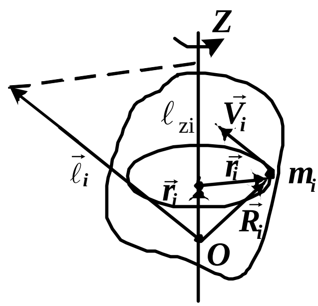


Рис. 6.2

Моментом импульса материальной точки относительно оси называют проекцию на эту ось момента импульса данной материальной точки, определённого

относительно произвольной точки О, лежащей на оси вращения (рис 6.2):

$$\ell_{zi} = m_i r_i v_i \sin\left(\widehat{\vec{r}_i \vec{v}_i}\right) = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega,$$

где $m_i r_i^2$ – момент инерции i-ой материальной точки относительно оси Z.

Моментом импульса тела L_z ***относительно оси вращения Z называют проекцию на эту ось полного момента импульса тела, определённого относительно произвольной точки О данной оси***.

Момент импульса тела относительно оси равен сумме моментов импульса всех элементов m_i тела относительно этой оси:

$$L_z = \sum_i \ell_{zi} = \omega \sum_i m_i r_i^2 = J_z \omega,$$

где $J_z = \sum_i m_i r_i^2$ – момент инерции твёрдого тела относительно оси Z (при дискретном распределении массы тела).

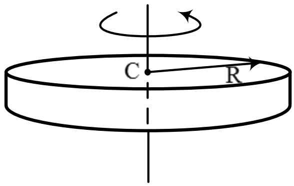
Если распределение массы задают указанием плотности как непрерывной функции координат, момент инерции может быть рассчитан по формуле:

$$J_z = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV,$$

где dm и dV – масса и объём элемента тела, находящегося на расстоянии r от оси вращения, ρ – плотность тела в данной точке.

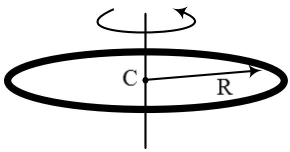
Рассмотрим моменты инерции однородных тел простой геометрической формы.

Момент инерции диска массой m и радиусом R относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр масс, равен:

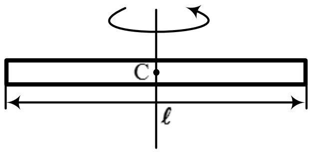


$$J = \frac{mR^2}{2}.$$

Момент инерции тонкого кольца массой m и радиусом R относительно оси, перпендикулярной к плоскости кольца и проходящей через его центр масс, равен:

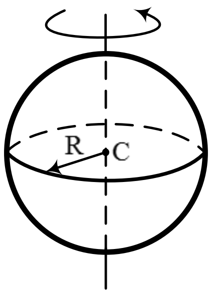


$$J = mR^2.$$



Момент инерции тонкого стержня массой m и длиной ℓ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс, равен:

$$J = \frac{m\ell^2}{12}.$$



Момент инерции шара массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через его центр масс, равен:

$$J = \frac{2}{5}mR^2.$$

Вычисление момента инерции твёрдого тела относительно произвольной оси в некоторых случаях можно упростить, воспользовавшись <u>теоремой Штейнера</u>:

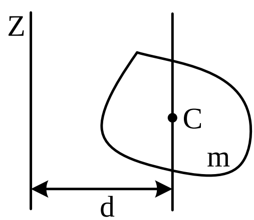


Рис. 6.3

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния d между осями:

$$J_z = J_c + md^2.$$

Момент инерции – величина аддитивная. Это означает, что если тело состоит из нескольких частей, то момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции частей этого тела относительно той же оси.

<u>Момент инерции тела является мерой его инертности при вращательном движении</u>.

В проекции на ось вращения Z уравнение моментов (6.2) записывают в виде:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{внеш} \tag{6.3}$$

Учитывая, что $L_z = J_z\omega$, уравнение (6.3) запишем в виде

$$\frac{d(J_z\omega)}{dt} = M_z.$$

Момент инерции <u>твёрдого</u> тела J_z при его вращении вокруг неподвижной оси Z не изменяется, следовательно J_z можно вынести за знак производной

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = M_z$$

или

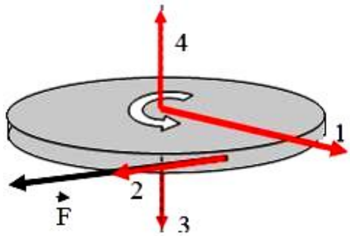
$$J_z\varepsilon = M_z.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения

твёрдого тела

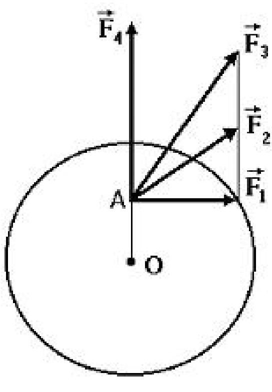
ЗАДАНИЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ И ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ ПО РАЗДЕЛУ 6 "ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА"

6.1. Диск равномерно вращается вокруг вертикальной оси в направлении, указанном на рисунке белой стрелкой. В некоторый момент времени к ободу диска была приложена сила, направленная по касательной. При этом правильно отображает направление углового ускорения диска вектор … .



а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

6.2. Диск может вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. В точке А прикладывают одну из сил – $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, лежащих в плоскости диска. Верным соотношением между моментами этих сил, относительно рассматриваемой оси, является … .



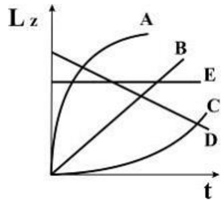
а) $M_1 = M_2 = M_3$, $M_4 = 0$

б) $M_1 < M_2 < M_3 < M_4$

в) $M_1 > M_2 > M_3$, $M_4 = 0$

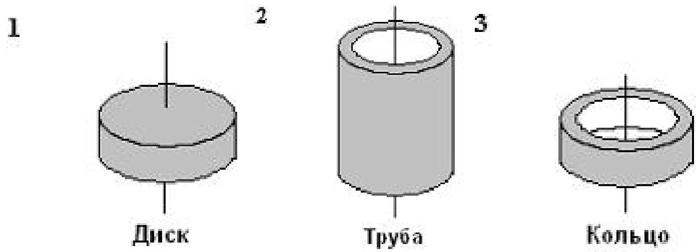
г) $M_1 < M_2 < M_3$, $M_4 = 0$

6.3. Диск начинает вращаться вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением. Зависимость момента импульса диска от времени представлена на рисунке линией … .



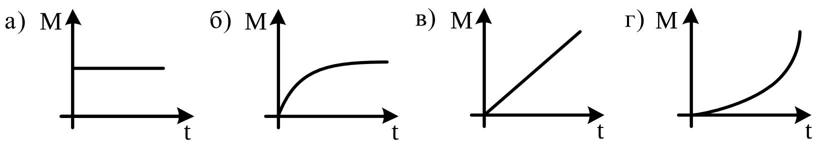
а) A б) B в) C г) D д) E

6.4. Рассматриваются три тела: диск, тонкостенная труба и тонкостенное кольцо, причём массы m и радиусы R их боковых поверхностей одинаковы. Верным соотношением для моментов инерции рассматриваемых тел относительно указанных осей является … .

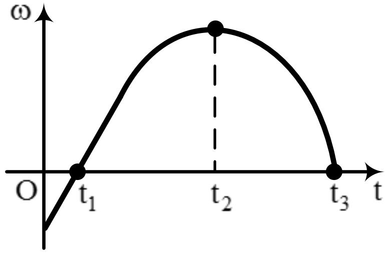


а) $J_3<J_1<J_2$ б) $J_1<J_2=J_3$ в) $J_1<J_3<J_2$ г) $J_1=J_3<J_2$

6.5. Момент импульса тела относительно неподвижной оси изменяется по закону L = αt, где α – постоянная величина. Укажите график, правильно отражающий зависимость от времени величины момента сил, действующих на тело.



6.6. Зависимость угловой скорости вращающегося тела представлена на рисунке. Вращающий момент, действующий на тело, равен нулю в момент времени … .

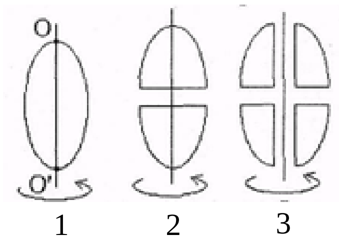


а) t_1 и t_3 б) t_1 в) t_2 г) t_3

6.7. Снаряд вылетел из ствола пушки с угловой скоростью $\omega = 100$ с$^{-1}$ под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Момент инерции снаряда относительно его продольной оси $J = 10$ кг·м^2, расстояние между колёсами пушки $\ell = 2$ м, время движения снаряда в стволе $t = 10^{-2}$ с. Силы давления земли, действующие на колёса пушки во время выстрела, отличаются на … кН.

а) 50 б) 35 в) 25 г) 10

6.8. Из жести вырезали три одинаковые детали в виде эллипса. Две детали разрезали: одну – пополам вдоль оси симметрии, а вторую – на четыре одинаковые части. Затем все части отодвинули друг от друга на одинаковое расстояние и расставили симметрично относительно оси OO' (см. рис.). Выберите правильное соотношение между моментами инерции этих деталей относительно оси OO'.



а) $J_1 < J_2 = J_3$ б) $J_1 < J_2 < J_3$ в) $J_1 = J_2 < J_3$ г) $J_1 > J_2 > J_3$

6.9. Твердый однородный тонкий диск вращается относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр масс. При этом точка, лежащая на боковой поверхности диска, движется с нормальным ускорением $a_n \sim t^4$. В этом случае момент силы, действующий на диск относительно оси вращения, зависит от времени по закону $M \sim t^n$. Значение n равно … .

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

6.10. Твердый однородный тонкий диск вращается относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр масс. При этом точка, лежащая на боковой поверхности диска, движется с нормальным ускорением $a_n \sim t^4$. В этом случае момент импульса диска относительно оси вращения зависит от времени по закону $L \sim t^k$. Значение k равно … .

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

6.11. Момент инерции однородного твердого тела зависит:

1) от момента приложенных к телу сил при заданной оси;

2) от выбора оси;

3) от формы тела;

4) от массы тела;

5) от углового ускорения тела.

Из приведенных утверждений необходимо выбрать все правильные.

а) 1, 2 и 5 б) 2, 4 и 5 в) 2, 3 и 4 г) 3, 4 и 5

6.12. В каких случаях справедливо выражение для момента инерции $J = mR^2$? Необходимо выбрать <u>все</u> правильные ответы.

1) для материальной точки массой m, находящейся на расстоянии R от оси вращения;

2) для однородного шара массой m и радиусом R, центр масс которого находится на расстоянии R до оси вращения;

3) для тонкого кольца массой m и радиусом R, если ось проходит через центр масс кольца перпендикулярно его плоскости;

4) для тонкого диска массой m и радиусом R, если ось проходит через центр масс диска перпендикулярно его плоскости.

а) 1 и 4 б) 2 и 3 в) 1 и 3 г) 3 и 4

6.13. Однородный диск массой m и радиусом R вращается под действием постоянного момента сил относительно оси, проходящей через его центр масс и перпендикулярной плоскости диска. Если при неизменном моменте сил ось вращения перенести параллельно на край диска, то для момента инерции J и углового ускорения ε диска справедливы соотношения … .

а) $J_2 > J_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ б) $J_2 > J_1, \varepsilon_2 > \varepsilon_1$

в) $J_2 < J_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ г) $J_2 < J_1, \varepsilon_2 > \varepsilon_1$

6.14. Найти момент инерции равностороннего проволочного треугольника со стороной b = 0,5 м и массой, равномерно распределённой по периметру треугольника и равной 0,4 кг, относительно оси, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через его вершину параллельно стороне, противоположной этой вершине. Толщиной проволоки пренебречь.

Ответ: 0,042 кг·м^2

6.15. Найти момент инерции равностороннего проволочного треугольника со стороной b = 0,5 м и массой, равномерно распределённой по периметру треугольника и равной 0,4 кг, относительно оси, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через его вершину. Толщиной проволоки пренебречь.

Ответ: 0,05 кг·м^2

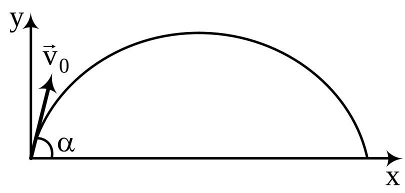
6.16. Диск радиусом R = 0,5 м и толщиной h = 0,01 м изготовлен из материала, плотность которого изменяется с расстоянием r от оси диска, проходящей через его геометрический центр перпендикулярно плоскости диска, по закону $\rho = a + br + cr^2$, где a = 10^3 кг/м^3, b = $5 \cdot 10^3$ кг/м^4, c = $6 \cdot 10^3$ кг/м^5. Вычислить момент инерции диска относительно этой оси. Ответ записать с точностью до десятых.

Ответ: 3,9 кг·м^2

6.17. Найти момент инерции тонкого однородного диска относительно оси, совпадающей с его диаметром. Масса диска 0,3 кг, радиус 0,4 м.

Ответ: 0,012 кг·м^2

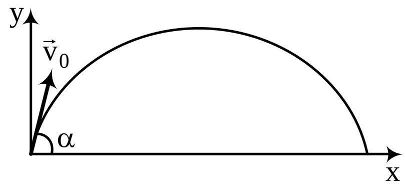
6.18. Частице массой m = 2 кг сообщена начальная скорость v_o = 60 м/с, направленная под углом α =30° к горизонту. Траектория полёта частицы лежит в



плоскости xy. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти модуль момента силы, действующей на частицу, относительно точки бросания в момент времени t = 2 с. $g = 9{,}8\frac{м}{с^2}$.

Ответ: 2034,5 Н·м

6.19. Частице массой m = 3 кг сообщена начальная скорость v_o =30 м/с под углом $\alpha = 60^o$ к горизонту. Траектория полёта частицы лежит в плоскости xy. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти модуль момента импульса частицы относительно точки бросания в момент времени t = 2 с. $g = 9{,}81\frac{м}{с^2}$.



Ответ: $882{,}9\ \frac{кг \cdot м^2}{с}$

6.20. Однородный шар массой m = 0,2 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс так, что угол поворота со временем меняется по закону $\varphi = \alpha t^3 + \beta t + \gamma$, где α = 2 рад/с^3, β = 4 рад/с, γ = 10 рад. Найти момент сил относительно оси вращения, который действует на тело в момент времени t = 10 с, если радиус шара R = 10 см.

Ответ: 0,096 Н·м

6.21. Однородный диск массой 2 кг и радиусом 0,5 м вращается относительно оси z, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр масс, под действием момента сил $M_z = A\,t^3$, где A = 5 кг·м²/с⁵. Найти угловую скорость диска через 2 с после начала движения.

Ответ: 80 рад/с

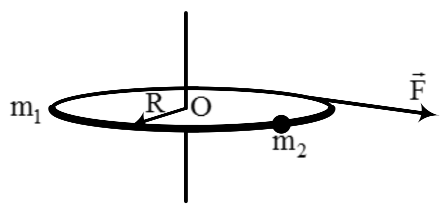
6.22. В начальный момент времени на покоившийся однородный диск массой 2 кг и радиусом 2 м, который может вращаться без трения вокруг неподвижной оси z, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр масс, начинает действовать момент сил, изменяющийся со временем по закону $M_z = M_{oz}\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, где M_{oz} = 3 Н·м; τ = 5 с. Определить среднюю величину угловой скорости диска за интервал времени от t_1 = 1 с до t_2 = 4 с.

Ответ: 0,055 рад/с

6.23. Момент импульса частицы относительно начала отсчета меняется с течением времени по закону $\vec{L} = \vec{i}a + \vec{j}bt^2$, где a = 12 $\frac{кг \cdot м^2}{с}$, b = 3 $\frac{кг \cdot м^2}{с^3}$. Найти момент силы, действующей на частицу, относительно начала координат в момент времени, когда угол между векторами $\vec{L}$ и $\vec{M}$ становится равным 45°.

Ответ: 12 Н·м

6.24. Однородный горизонтальный диск массой m_1 = 0,5 кг и радиусом 0,6 м может вращаться без трения вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. На краю диска закрепили небольшой груз массой



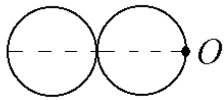
m_2 = 0,1 кг. Первоначально диск покоился. Затем нить, намотанную на обод диска, начинают тянуть в горизонтальном направлении с силой F = 2 Н. За какое время t диск повернётся на угол φ = 2,4 рад?

Ответ: 0,71 с

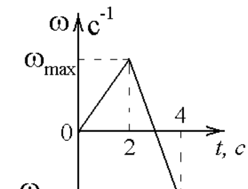
Занятие 17 – КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2
Пример контрольного задания

1. Частица движется в плоскости так, что её импульс зависит от времени по закону $\vec{p}(t) = \vec{i} \cdot A\frac{t}{\tau} + \vec{j} \cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^3$, где A, B – постоянные величины, $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные орты в декартовой системе координат. Найти модуль силы, действующей на частицу в момент времени t = 1 с, если τ = 1 с. A = 1 кг·м/с, B = 1 кг·м/с.

2. Два одинаковых диска массой m и радиусом R каждый положили на плоскость и приварили друг к другу. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости дисков через точку O (см. рис.). R = 1 м, m = 1 кг.



3. Тело вращается вокруг закрепленной оси с угловой скоростью, зависимость от времени которой задается графиком. Момент инерции тела относительно оси вращения равен I. На сколько отличаются модули моментов сил, действующих на тело в моменты времени t_1 = 1 с и t_2 = 3 с. ω_{max} = 1 $с^{-1}$, I = 1 кг·$м^2$



4. Материальная точка М движется по параболе (рис.1) в направлении, указанном стрелками. График изменения величины (модуля) её скорости приведён на рис. 2. На

рис. 1 показано положение точки М в момент времени t_1. Укажите на этом рисунке направление силы, действующей на точку М в этот момент времени $t_1 t_1$.

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

5. Дайте определение понятия "центр инерции". Как найти положение центра инерции? Чему равна скорость движения центра инерции? Получите уравнение движения центра инерции. В чём отличие этого уравнения от динамического уравнения движения системы материальных точек?

6. Что такое "момент импульса материальной точки"? Дайте определение момента силы, действующей на материальную точку. Получите уравнение моментов для материальной точки. Запишите, как оно читается.

Пример задания промежуточной аттестации

1. Частица движется так, что её скорость зависит от времени по закону $\vec{v}(t)=\vec{i}\cdot A\frac{t}{\tau}+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^2$, где A, B – постоянные величины, $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные орты в декартовой системе координат. Чему станет равна величина полного ускорения частицы в момент времени $t=1$ с, если $\tau=1$ с. A = 3 м/с, B = 5 м/с.

а) 8,4м/с^2 б) 10,4м/с^2 в) 12,4м/с^2 г) 14,4м/с^2 д) 16,4м/с^2

2. Частица начала своё движение из начала координат с начальной скоростью $\vec{v}_0=-\vec{j}\cdot A$ и с ускорением, которое зависит от времени по закону $\vec{a}(t)=\vec{i}\cdot B\frac{t}{\tau}$, где A, B – постоянная величина, $\vec{i}$, $\vec{j}$ – единичные орты в декартовой системе координат. Каков модуль скорости частицы в момент времени $t=1$ с, если $\tau=1$ с? A = 2 м/с, B = 3 м/с^2.

а) 1,5 м/с б) 2,0 м/с в) 2,5 м/с г) 3,0 м/с д) 3,5 м/с

3. Скорость частицы изменяется во времени по закону $\overline{v}=5t\cdot\overline{i}+12t\cdot\overline{j}$.Чему равна величина тангенциального ускорения частицы в момент времени t = 1 с?

а) 26 м/с^2 б) 13 м/с^2 в) 17 м/с^2 г) 34 м/с^2

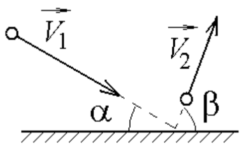
4. Частица движется вдоль окружности с радиусом 1 м в соответствии с уравнением $\varphi(t)=2\pi\left(t^2-6t+12\right)$, где φ – угол в радианах, t – время в секундах. В момент $t=3$ с величина тангенциального (касательного к траектории) ускорения частицы (в $\text{м}/\text{с}^2$), равна … .

а) 0 б) 4π в) 6π г) 2π

5. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R = 1$ м так, что угол поворота зависит от времени по закону $\varphi = A \cdot \left(\dfrac{t}{\tau}\right)^6$. Найти тангенциальное ускорение частицы через время $t = 1$ с, если $\tau = 1$ с. $A = 2$ рад.

а) 20 м/с^2 б) 40 м/с^2 в) 60 м/с^2 г) 80 м/с^2 д) 90 м/с^2

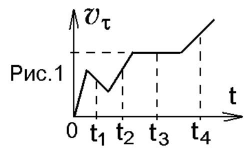
6. Небольшой шарик массы m летит со скоростью $\vec{V}_1$ под

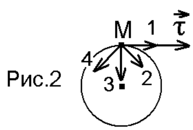


углом α =30° к горизонтальной плоскости. После неупругого удара он отскакивает со скоростью $\vec{V}_2$ под углом β =60° к плоскости. Время соударения τ. Найти модуль средней силы трения шарика о плоскость. $V_1 = 10$ м/с, $V_2 = 6$ м/с, $\tau = 0{,}01$ с, $m = 4$ кг.

а) 64 Н б) 164 Н в) 264 Н г) 2264 Н д) 1264 Н

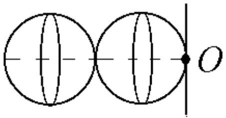
7. Материальная точка М движется по окружности со скоростью $\vec{v}$. На рис.1 показан график зависимости проекции скорости v_τ на орт $\vec{\tau}$, направленный вдоль скорости $\vec{v}$. На рис.2 укажите направление силы, действующей на точку М в момент времени t_3.





а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

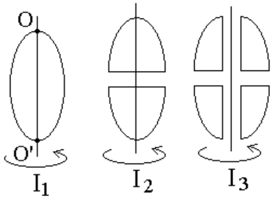
8. Два одинаковых шара массой m и радиусом R каждый



приварили друг к другу. Касательная к шару ось O проходит перпендикулярно линии, проходящей через центры шаров. Найти момент инерции получившейся детали относительно оси O. $R = 2$ м, $m = 3$ кг.

а)130 кг·м^2 б)230 кг·м^2 в)330 кг·м^2 г)430 кг·м^2 д)530 кг·м^2

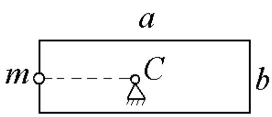
9. Из жести вырезали три одинаковые детали в виде эллипса. Две детали разрезали: одну – пополам вдоль оси сим-



метрии, а вторую – на четыре одинаковые части. Затем все части отодвинули друг от друга на одинаковое расстояние и расставили симметрично относительно оси OO' (см. рис.). Выберите правильное соотношение между моментами инерции этих деталей относительно оси OO'.

а) $I_1 < I_2 = I_3$ б) $I_1 < I_2 < I_3$ в) $I_1 = I_2 < I_3$ г) $I_1 > I_2 > I_3$

10. Тонкая однородная прямоугольная пластина со сторо-



нами b и a может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр масс C. Момент инерции пластины относительно оси C равен I. К середине стороны пластины приклеили маленький грузик массы m и отпустили без толчка. В начальный момент сторона пластины была вертикальна. Найдите угловое ускорение получившейся фигуры в начальный момент времени. $m = 2$ кг, $I = 3\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$, $b = 4$ м, $a = 6$ м.

а)2,86рад/с^2 б)3,86рад/с^2 в)4,86рад/с^2 г)5,86рад/с^2 д)6,86рад/с^2

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

Раздел 3

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
вариант ответа	г	г	в	б	б	б	б	б	б	г

Раздел 4

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
вариант ответа	а	а	г	б	а	б	а	б	в	г	б	в

Раздел 5

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
вариант ответа	а	д	г	б	в	б	а	а	а	а	б

Раздел 6

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
вариант ответа	в	а	б	б	а	в	в	в	а	б	в	в	а

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жигунов В. В., Ростовцев Р. Н., Жигунов К. В. Введение в физику [Электронный ресурс]: учебн. пособие/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2016.— 259 с. .— ISBN 978–5–7679–3311–2. - Режим доступа: https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2016012714490180121900001778 – ЭБС "БиблиоТех", по паролю.

2. Колмаков Ю. Н., Лагун И. М. Введение в физику. Основы механики: учеб. пособие [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2017.— 156 с.— ISBN 978–5–7679–3862–9. - Режим доступа: https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2017071011432687318100003056 – ЭБС "БиблиоТех", по паролю.

3. Жигунов В.В., Жигунов К.В. Физика. Практикум по механике. Тула: ТулГУ, 2015.– 304 с.

4. Кинематика. Задачи для самостоятельной работы 1.1с - 1.6с. http://physics.tsu.tula.ru/students/metodich_files/zadachi-vvedenie-v-fiziku.pdf

5. Динамика. Задачи для самостоятельной работы 2.1с - 2.8с. http://physics.tsu.tula.ru/students/metodich_files/zadachi-vvedenie-v-fiziku.pdf.

6. Жигунов В.В. Основные законы физики. / В.В. Жигунов, К.В. Жигунов. – Тула: ТулГУ, 2014. – 385 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИСТАВКИ

Наименование	Обозначение	Множитель
экса	Э	10^{18}
пета	П	10^{15}
тера	Т	10^{12}
гига	Г	10^{9}
мега	М	10^{6}
кило	к	10^{3}
гекто	г	10^{2}
дека	да	10^{1}
деци	д	10^{-1}
санти	с	10^{-2}
милли	м	10^{-3}
микро	мк	10^{-6}
нано	н	10^{-9}
пико	п	10^{-12}
фемто	ф	10^{-15}
атто	а	10^{-18}

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Правила действия со степенями

$$a^x \cdot a^y = a^{(x+y)} \qquad \frac{1}{a^x} = a^{-x} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \qquad \left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

Тождества сокращённого умножения

Квадрат двучлена	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Куб двучлена	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

Основные свойства логарифмов

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

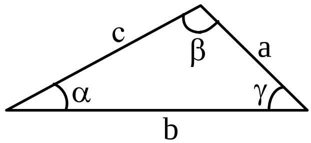
Формулы корней квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + px + q = 0 \qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Теорема косинусов

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos\alpha$$



Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

$\alpha,^{\circ}$	0°	30°	45°	60°	90°	180°
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
ctg α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\infty$

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

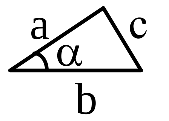
$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Длина окружности радиусом R (диаметром D)

$$\ell = 2\pi R = \pi D$$

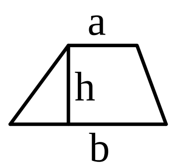
Площадь треугольника

$$S = \frac{ab}{2}\sin\alpha$$



Площадь трапеции

$$S = \frac{a+b}{2}h$$



Площадь поверхности сферы радиусом R (диаметром D)

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2$$

Площадь круга радиусом R (диаметром D)

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

Объём шара радиусом R (диаметром D)

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$$

Объём прямого кругового цилиндра высотой H с радиусом основания R

$$V = \pi R^2 H$$

Объём конуса высотой H с радиусом основания R

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Греческая буква	*Русское название буквы*
Α α	альфа
Β β	бета
Γ γ	гамма
Δ δ	дельта
Ε ε	эпсилон
Ζ ζ	дзета
Η η	эта
Θ θ	тета
Ι ι	йота
Κ κ	каппа
Λ λ	ламбда
Μ μ	мю
Ν ν	ню
Ξ ξ	кси
Ο ο	омикрон
Π π	пи
Ρ ρ	ро
Σ σ	сигма
Τ τ	тау
Υ υ	ипсилон
Φ φ	фи
Χ χ	хи
Ψ ψ	пси
Ω ω	омега

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Латинская буква	*Русское название буквы*
A a	а
B b	бэ
C c	цэ
D d	дэ
E e	е
F f	эф
G g	жэ
H h	аш
I i	и
J j	жи
K k	ка
L l	эль
M m	эм
N n	эн
O o	о
P p	пэ
Q q	ку
R r	эр
S s	эс
T t	тэ
U u	у
V v	вэ
W w	дубль-вэ
X x	икс
Y y	игрек
Z z	зед