

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
14 января 2020 г., протокол № 6

Заведующий кафедрой

_____ В.И. Иванов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Многокритериальная оптимизация»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-20

Тула 2020 год

Разработчик методических указаний

Горбачев Д.В., профессор каф. ПМиИ, д.ф.-м.н.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

Список тем

1. Вычисление производных и дифференциалов, решение одномерной прикладной гладкой экстремальной задачи
2. Решение прикладных гладких задач
3. Решение типовых гладких задач
4. Решение гладких задач с равенствами
5. Решение гладких задач с равенствами и неравенствами
6. Решение выпуклых задач
7. Решение задачи Конторовича, другие задачи линейного программирования прикладного характера
8. Решение задач симплекс-методом
9. Решение разных задач симплекс-методом
10. Решение задач двойственным симплекс-методом
11. Решение транспортной задачи
12. Решение задач квадратичного программирования, применение одномерных численных методов
13. Применение многомерных численных методов нелинейной оптимизации

Далее приводятся примеры с решениями основных задач и необходимые теоретические сведения.

Введение

Целью освоения дисциплины «Методы оптимизации» является изучение теории конечномерных экстремальных (оптимизационных) задач на нахождение максимумов и минимумов (включая гладкие и выпуклые задачи, задачи линейного и квадратичного программирования), знакомство с численными методами их решения и приложениями, в том числе при помощи современных математических пакетов и открытых библиотек [1–12].

Задачами освоения дисциплины являются:

- изучение теории и методов решения конечномерных экстремальных задач;
- освоение базовых численных методов оптимизации;
- знакомство с прикладными задачами экстремального характера.

Глава 1

Основные типы экстремальных задач. Методы их решения

Экстремальными (или оптимизационными) называются задачи на нахождение минимумов (\min) и максимумов (\max), объединяемых общим термином экстремум (extr) (оптимальных решений). Подобные задачи настолько часто встречаются на практике, что термин «Оптимизация» (Optimization), наряду с терминами «Анализ» (Analysis) и «Геометрия» (Geometry), является основными математическими «брендами».

В этом практическом занятии повторяем уже изученные на курсе методов оптимизации приемы решения конечномерных задач.

Приведем простые примеры экстремальных задач.

1. Найти $xe^{-x^2} \rightarrow \min$. *Указание:* $f' = 0$, $f'' > 0$.

2. Найти $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \rightarrow \min$, $0 \leq x_1 + x_2 \leq 1$. *Указание:* свести к задаче внутри D и на ее границе.

3. Найти форму пожарного ведра максимального объема с заданной образующей. *Указание:* формализовать задачу и решить методом Лагранжа.

4. Найти расстояние между двумя треугольниками на плоскости, в пространстве. *Указание:* взять случайные треугольники и формализовать задачу.

5. Найти $f(x) = -6x_1 - 8x_2 \rightarrow \min$ при условиях $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 4$,

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \quad 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72.$$

Указание: решить как задачу линейного программирования.

Глава 2

Основные типы экстремальных задач. Matlab/Maple

В этом практическом занятии вспоминаем основные численные методы решения конечномерных экстремальных задач, изучаемые в курсе «Методы оптимизации», выполняем простейшие примеры в пакетах Matlab и Maple. Примеры взять из предыдущего занятия.

1. Найти $xe^{-x^2} \rightarrow \min$.
2. Найти $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \rightarrow \min$, $0 \leq x_1 + x_2 \leq 1$.
3. Найти форму пожарного ведра максимального объема с заданной образующей.
4. Найти расстояние между двумя треугольниками на плоскости, в пространстве.
5. Найти $f(x) = -6x_1 - 8x_2 \rightarrow \min$ при условиях $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 4$,

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \quad 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72.$$

Прямые методы решения конечномерных экстремальных задач. Одномерный случай

Рассматривается конечномерная экстремальная задача

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n.$$

Прямые методы используют только значения целевой функции. На практике они применяются, когда больше информации о f неизвестно или вычислить производные проблематично.

Для гарантированной сходимости в окрестности решения $\hat{x} \in (a, b)$ целевая функция $f(x)$ должна быть унимодальной, когда она слева точки \hat{x} невозрастает, а справа не убывает. Например, выпуклая в окрестности решения функция является унимодальной.

Пример: $f(x) = x^2 + 3x(\ln x - 1)$, $x \in [0.5, 1]$.

Метод половинного деления. Полагаем

$$a'_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1} - \delta}{2}, \quad b'_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1} + \delta}{2},$$

и

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [a_{k-1}, b'_k], & \text{если } f(a'_k) < f(b'_k), \\ [a'_k, b_{k-1}] & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $[a_0, b_0] = [a, b]$, $\delta > 0$ — малый параметр метода.

Критерий окончания следующий: $x^* = (a_N + b_N)/2$, если $\varepsilon_N = (b_N - a_N)/2 \leq \varepsilon$, где ε — точность метода.

За N вычислений функции f интервал неопределенности уменьшается как $O(2^{N/2}) = O((0.71)^N)$.

Метод золотого сечения. Этот метод основан на понятии золотого сечения и является более эффективным в плане скорости уменьшения интервала неопределенности. Золотым сечением называется такое разбиение отрезка, когда отношение большей части к меньшей равно отношению длины отрезка к большей части. Нетрудно посчитать, что это отношение равно $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Золотое сечение отрезка $[a, b]$ осуществляют две точки:

$$\alpha = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (b - a), \quad \beta = a + b - \alpha,$$

причем α одновременно является второй точкой золотого сечения отрезка $[a, \beta]$, а β — первой точкой отрезка $[\alpha, b]$.

Перед началом итерации полагаем $[a_0, b_0] = [a, b]$, $A_0 = f(\alpha_0)$, $B_0 = f(\beta_0)$. Далее

$$[a_k, b_k] = \begin{cases} [a_{k-1}, \beta_{k-1}], & \text{если } A_{k-1} < B_{k-1}, A_k = f(\alpha_k), B_k = A_{k-1}, \\ [\alpha_{k-1}, b_{k-1}] & \text{иначе, } A_k = B_{k-1}, B_k = f(\beta_k). \end{cases}$$

Здесь на каждом шаге требуется только одно вычисление функции f . Критерий окончания можно использовать такой же, как и в методе половинного деления.

За N вычислений функции f интервал неопределенности уменьшается как $O(\varphi^{-N}) = O((0.62)^N)$.

Оптимальным одномерным прямым методом в отмеченном выше плане является метод, основанный на последовательности чисел Фибоначчи. Его предлагается рассмотреть самостоятельно.

Примеры решения задач при помощи Matlab и Maple. Основные функции Matlab: `fminsearch`, `fminbnd`, `fminunc`; Maple: `Minimize/Maximize`.

На Maple реализовать методы деления пополам и золотого сечения.

Прямые методы решения конечномерных экстремальных задач. Многомерный случай

Рассмотрим многомерный случай функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Пример: найти

$$\min 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Эта функция называется банана-функцией Розенброка.

Метод покоординатного спуска. Пусть x_k — текущее приближение. Тогда j -ю координату $x_{k+1,j}$ точки x_{k+1} , $j = 1, \dots, n$, находят из решения одномерной задачи

$$f(x_{k1}, \dots, x_{k,j-1}, t, x_{k,j+1}, \dots, x_{kn}) \rightarrow \min_t, \quad x_{kj} = t^*.$$

Метод деформируемого многогранника (Нелдера–Мида). В этом случае вначале задаются $n + 1$ векторов x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, так что векторы $x_i - x_0$ при $i > 0$ линейно независимы. Тогда точки x_i будут вершинами невырожденного многогранника (симплекса). Обычно берется правильный симплекс.

Пусть теперь $\{x_i\}_{i=0}^n$ — текущий симплекс. Считаем, что точки x_i отсортированы в порядке неубывания значений $f(x_i)$: $f(x_0) \leq f(x_1) \leq \dots \leq f(x_n)$. Опишем очередную итерацию.

Точка x_n отбрасывается как самая неудачная. Далее вычисляем центр тяжести оставшихся точек $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i \neq n} x_i$ и строим при помощи отражения пробную точку $y = 2\bar{x} - x_n$.

Возможны три случая.

1. Если $f(x_0) \leq f(y) \leq f(x_n)$, то пробная точка «удачная» и она заносится в новый набор вершин симплекса вместо x_n .

2. Если $f(y) < f(x_0)$ (значение функции уменьшилось), тогда направление отражения считается «удачным» и выполняется попытка еще больше уменьшить значение за счет растяжения симплекса: $y' = \bar{x} + \alpha(\bar{x} - x_n)$ ($\alpha \approx 2$). Если $f(y') < f(y)$, то в набор вместо x_n добавляют y' , иначе y .

3. Если $f(y) > f(x_{n-1})$, то симплекс сжимают: при $f(y) > f(x_n)$ точку вершину x_n заменяют точкой $y' = \bar{x} - \beta(\bar{x} - x_n)$ ($\beta \approx 1/2$), иначе точкой $y' = \bar{x} + \beta(\bar{x} - x_n)$.

Чтобы устранить накопление излишних деформаций после определенного числа итераций текущий симплекс заменяют правильным симплексом (операция восстановления), сохраняя при этом две лучшие точки текущего набора вершин.

Примеры решения задач при помощи Matlab и Maple.
Основные функции Matlab: fminsearch, fminbnd, fminunc; Maple: Minimize/Maximize.

Возьмем пример из справки Matlab.

```
banana = @(x) 100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2;  
[x,fval] = fminsearch(banana, [-1.2, 1])  
x =  
    1.0000    1.0000  
fval =  
    8.1777e-010
```

Глава 5

Методы решения при помощи производных. Градиентные методы

Рассматривается безусловная конечномерная экстремальная задача

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n,$$

где f — гладкая функция и D — открытое множество. Например,

$$e^{x_1} (4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1) \rightarrow \min.$$

Общей чертой рассматриваемых далее методов является то, что итерации в них записываются следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \tau_k e_k,$$

где e_k — вектор-направление спуска, τ_k — шаг. Критерием окончания обычно является условие

$$|e_k| = O(\varepsilon) \Leftrightarrow |x_{k+1} - x_k| = O(\varepsilon).$$

Градиентные методы. Гладкая функция убывает наискорейшим образом в направлении антиградиента $-f'$. Таким образом, получаем, что

$$x_{k+1} = x_k - \tau_k g_k, \quad g_k = f'(x_k).$$

Такой способ организации итераций называется градиентным спуском. Критерием окончания итераций обычно является близость к нулю градиента: $|g_k| \leq \varepsilon$.

Метод наискорейшего спуска. В этом случае шаг определяется из решения одномерной экстремальной задачи

$$\tau_k = \operatorname{argmin}_{\tau > 0} f(x_k - \tau g_k).$$

Например, если f — квадратичная функция, то

$$\tau_k = \frac{(g_k, g_k)}{(Ag_k, g_k)}.$$

В общем случае для нахождения τ_k можно воспользоваться одномерными численными методами поиска минимума.

Метод сопряженных градиентов. Этот метод связан с градиентным спуском, однако лишен некоторых отмеченных выше недостатков. В этом случае шаг τ_k определяется как и выше, а направление спуска выбирается следующим образом:

$$e_k = g_k + \alpha_k e_{k-1}, \quad \alpha_k = \frac{g_k^2}{g_{k-1}^2}, \quad e_0 = g_0.$$

Название метода обусловлено тем, что в случае квадратичной функции направления e_k и e_l сопряжены относительно матрицы A : $(Ae_k, e_l) = 0$ при $k \neq l$.

Метод сопряженных градиентов для системы линейных уравнений. Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$ с положительно определенной матрицей A . Ее решение совпадает с точкой минимума квадратичной функции $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - bx$. Если применить к последней метод сопряженных градиентов, то получаем известный одноименный итерационный способ решения системы линейных уравнений. Предлагается выписать его самостоятельно.

Примеры решения задач при помощи Matlab и Maple.

Основные функции Matlab: `fminsearch`, `fminbnd`, `fminunc`, `pcg`, `cgs`, `bicg`; Maple: `Minimize/Maximize`, для аналитического решения в простых случаях можно использовать функцию `extrema`.

Приведем пример решения системы уравнений методом сопряженных градиентов и стандартные функции минимизации.

```
A = [2 1; 1 2];
b = [1; 1];
norm(A\b - pcg(A, b))
ans =
    2.0015e-016

function f = objfun(x)
f = exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1);

x0 = [-1, 1];
[x, fval, exitflag, output] = fminunc(@objfun, x0)
x =
    0.5000    -1.0000
fval =
    3.6609e-015
exitflag =
    1
output =
    iterations: 8
    funcCount: 66
    stepsize: 1
    firstorderopt: 1.2284e-007
    algorithm: 'medium-scale: Quasi-Newton line search'
```

```

.....message: [1x441 char]

> f:=exp(x[1])*(4*x[1]^2+2*x[2]^2+4*x[1]*x[2]+2*x[2]+1);
> Digits:=20:
> Optimization[Minimize](f,initialpoint={x[1]=-1,x[2]=1});
.. [.27104977449742243528e-15, [x[1] = .499999999112458726133,
.. x[2] = -.999999998926842954843]]

```

Методы решения при помощи производных. Метод Ньютона

В методе Ньютона используется гессиан функции $f \in C^2$. Итерации записываются следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \tau_k e_k, \quad H e_k = g_k,$$

где $H = f''(x_k)$ — гессиан.

В окрестности решения метод сходится очень быстро, а именно квадратично (сверхлинейно): $\varepsilon_k = O(q^{2^k})$, $q < 1$, что гораздо быстрее любого из градиентных методов. Поэтому используют простые критерий окончания итераций, например, $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$.

Шаг τ_k необходим для сходимости метода, когда текущие приближения далеко от решения. Его можно выбирать как и в методе наискорейшего спуска.

Основной сложностью в методе Ньютона является необходимость на каждом шаге вычислять гессиан H и решать с ним систему линейных уравнений. Для упрощения вычислений часто применяют так называемые квази-методы Ньютона, в которых либо матрицу H вычисляют с пропусками итераций, либо для H применяются приближения, не использующие вторых производных, либо как-то аппроксимируют матрицу H^{-1} .

Примеры решения задач при помощи Matlab и Maple. Основные функции Matlab: `fminsearch`, `fminbnd`, `fminunc`, `pcg`, `cgs`, `bicg`; Maple: `Minimize/Maximize`, для аналитического решения в простых случаях можно использовать функцию `extrema`.

Приведем пример решения системы уравнений методом сопряженных градиентов и стандартные функции минимизации.

```
function f = objfun(x)
f = exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1);

x0 = [-1,1];
[x,fval,exitflag,output] = fminunc(@objfun,x0)
x =
    0.5000    -1.0000
fval =
    3.6609e-015
exitflag =
    1
```

```

output.=
.....iterations: 8
.....funcCount: 66
.....stepsize: 1
.....firstorderopt: 1.2284e-007
.....algorithm: 'medium-scale: Quasi-Newton line search'
.....message: [1x441 char]

> f:=exp(x[1])*(4*x[1]^2+2*x[2]^2+4*x[1]*x[2]+2*x[2]+1);
> Digits:=20:
> Optimization[Minimize](f,initialpoint={x[1]=-1,x[2]=1});
.. [.27104977449742243528e-15, [x[1] = .499999999112458726133,
.. x[2] = -.999999998926842954843]]

```

Задача линейного программирования. Симплекс-метод

Задача линейного программирования (LP-задача) заключается в нахождении экстремума линейной функции при линейных ограничениях. В векторном каноническом виде она записывается следующим образом:

$$f(x) = cx \rightarrow \min, \quad Ax = b, \quad x \in \mathbb{R}_+^n \quad (\text{или просто } x \geq 0),$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица ограничений. К этому виду можно привести любую задачу линейного программирования.

Пример. Найти $f(x) = -6x_1 - 8x_2 \rightarrow \min$ при условиях $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 4$,

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \quad 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72.$$

Здесь $c = (-6, -8, 0, 0)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = (20, 72)^T$.

Симплекс-метод. Симплекс-метод подробно изучается в курсе методов-оптимизации, поэтому здесь для напоминания решим пример выше. Вначале применим метод искусственного базиса для нахождения начальной точки x_0 . Для этого составляем вспомогательную задачу линейного программирования

$$x'_1 + x'_2 \rightarrow \min,$$

$$x'_1 + 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \quad x'_2 + 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72.$$

с начальной симплекс-таблицей

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x'_1	2	5	1	0	20
x'_2	12	6	0	1	72
	-14	-11	-1	-1	-92

Дальнейшие преобразования стандартны:

	x_1	x_2	x_4		\Rightarrow		x_1	x_2	
x_3	2	5	0	20		x_3	2	5	20
x'_2	12	6	1	72		x_4	12	6	72
	-12	-6	-1	-72			0	0	0

Возвращаемся к исходной задаче:

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_1 & x_2 & \\ \hline x_3 & 2 & 5 & 20 \\ x_4 & 12 & 6 & 72 \\ \hline & -6 & -8 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|cc|c} & x_4 & x_2 & \\ \hline x_3 & -1/6 & 4 & 8 \\ x_1 & 1/12 & 1/2 & 6 \\ \hline & 1/2 & -5 & 36 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & x_4 & x_3 & \\ \hline x_2 & -1/24 & 1/4 & 2 \\ x_1 & 5/48 & -1/8 & 5 \\ \hline & 7/24 & 5/4 & 46 \end{array} \Rightarrow \hat{x} = (5, 2, 0, 0), \quad S_{\min} = -46.$$

Примеры решения задач при помощи Matlab и Maple.

Основные функции Matlab: linprog; Maple: minimize/maximize (пакет simplex), LPSolve.

Решим пример выше на Maple.

```

> obj:=-6*x[1]-8*x[2];
> cs:={2*x[1]+5*x[2]+x[3]=20, 12*x[1]+6*x[2]+x[4]=72};
> v:=simplex[minimize](obj,cs,NNNEGATIVE);
> v:={x[1]=5, x[2]=2, x[3]=0, x[4]=0}
> assign(v); obj;
>>-46

```

Задача линейного программирования. Метод Кармаркара

Метод внутренней точки (Кармаркара) записывается для задачи в общей форме на максимум: $cx \rightarrow \max, Ax \leq b$.

Пусть $x_0 \in D = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b\}$ — начальная допустимая точка (в задаче линейного программирования D — выпуклый многогранник, возможно неограниченный или пустой). Ее определение в общем случае является нетривиальной задачей. Есть вариации метода, когда точка x_0 произвольная и после нескольких начальных итераций она попадает в D .

Очередная k -я итерация выглядит следующим образом:

$$v_k = b - Ax_k, \quad D_v = \text{diag}(v_k),$$

$$Mh_x = c, \quad M = A^T D_v^{-2} A, \quad h_v = -Ah_x.$$

Если $h_v \geq 0$, то $S_{\min} = -\infty$, решений нет. Иначе полагаем

$$\alpha = \gamma \cdot \min \{-v_{kj}/h_{vj} : h_{vj} < 0, j = 1, \dots, n\},$$

где $\gamma \in (0, 1]$ — параметр метода, и $x_{k+1} = x_k + \alpha h_x$.

Критерием остановки может случить выполнение неравенства $|c(x_{k+1} - x_k)| / \max\{1, |cx_k|\} \leq \varepsilon$.

Примеры решения задач при помощи Matlab и Maple.
Основные функции Matlab: linprog; Maple: minimize/maximize (пакет simplex), LPSolve.

Решим пример выше на Matlab.

```
f = [-6; -8; 0; 0];
Aeq = [2.5 1 0; 12.6 0 1];
beq = [20; 72];
lb = zeros(4,1);
[x,fval,exitflag,output] = linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb)
x =
    5.0000
    2.0000
    0.0000
    0.0000
fval =
   -46.0000
exitflag =
     1
```

```
output :=  
.....iterations: 6  
.....algorithm: 'large-scale: interior point'  
.....cgiterations: 0  
.....message: 'Optimization terminated.'  
.....constrviolation: 1.0658e-014
```

Еще задание: сгенерировать задачу для 500 переменных и сравнить скорости решения в Matlab и Maple.

Задачи нелинейного программирования. Разные методы решения

Рассматриваются условные конечномерные непрерывные экстремальные задачи. Еще их называют задачами математического программирования. Общая такая задача ставится следующим образом:

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad x \in A \subset \mathbb{R}^n, \\ f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m', \quad f_i(x) = 0, \quad i = m' + 1, \dots, m.$$

Здесь A задается, как правило, геометрически. Множество допустимых элементов D является его пересечением A множеством решений неравенств и равенств. Если множество A — выпуклый многогранник, а функции f_i линейны, то получаем задачу линейного программирования.

В гладком случае необходимые условия экстремума в задаче математического программирования даются теоремой Лагранжа. В выпуклой задаче локальные экстремумы всегда являются глобальными. Необходимые и, что важно, одновременно достаточные условия глобального экстремума даются теоремой Куна–Таккера (или Каруша–Куна–Таккера).

Примеры. 1. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \text{extr}, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$
2. $x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \min, x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0.$

Разные методы решения. Разработано множество методов условной оптимизации, например, методы возможных направлений, условного и проекции градиента, штрафных и барьерных функций.

Особняком стоят задачи линейного, квадратичного и полуопределенного программирования, для которых известны относительно эффективные методы решения, использующие идеи из указанных методов (например, в SDP используется метод внутренней точки с логарифмическим барьером).

Кратко опишем некоторые из упомянутых методов. В большинстве из них используются стандартные итерации вида: $x_{k+1} = x_k + \tau_k e_k$. Только теперь новое приближение x_{k+1} для направления e_k может «выскочить» из области допустимых элементов D . Собственно, в зависимости от того, как корректируется точка x_{k+1} или направление e_k , чтобы $x_{k+1} \in D$, и получаются разные способы.

Наиболее интересен из них метод возможных направлений и его варианты (например, применяемый в Matlab алгоритм active-set). Однако его здесь сложно описать, он предлагается в качестве самостоятельного изучения.

В методе проекции градиента, используют направление $e_k = f'(x_k)$, и если точка $x_{k+1} \notin D$, то ее заменяют ближайшей к ней точкой из D . Задача определения ближайшей точки: $|x - x_{k+1}| \rightarrow \min_{x \in D}$, не является простой. Однако, если D относительно просто устроено, например, определяются линейными ограничениями (выпуклый многогранник) или является шаром, то ее можно решить достаточно эффективно.

Методу условного градиента применяется для задачи выпуклого программирования. Пусть $\bar{x} = \operatorname{argmin}_{x \in D} f'(x_k)(x - x_k)$ и $x_{k+1} = x_k + \tau_k(\bar{x} - x_k)$, где $\tau_k \in (0, 1)$. В силу выпуклости D имеем $x_{k+1} \in D$. Шаг τ_k берется как в методе наискорейшего спуска, только сверху обрезается единицей.

В методах штрафных и барьерных функций условная задача модифицируется специальным образом и решается как безусловная:

$$f_k(x) = f(x) + \varphi_k(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где вспомогательные функции φ_k с ростом k «заставляют» очередное приближение попасть в область D или не выходить из него. При этом их значения при $x_k \in D$ стремятся к нулю для $k \rightarrow \infty$.

В методе штрафных φ_k выбираются таким образом, чтобы $\varphi_k(x) \rightarrow +\infty$ при $x \notin D$. Например,

$$\varphi_k(x) = k \left(\sum_{i=1}^{m'} [f_i(x)]_+^2 + \sum_{i=m'+1}^m f_i^2(x) \right),$$

где $[t]_+ = \max\{0, t\}$.

В методе барьерных функций φ_k выбираются таким образом, чтобы при приближении точек x_k к границе области D значения φ_k росли к $+\infty$. Например,

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^m |f_i(x)|^{-2}.$$

Примеры решения задач при помощи Matlab и Maple.

Основные функции Matlab: fmincon, fminbnd, linprog, quadprog, lsqlin, lsqnonlin, lsqnonneg; Maple: Minimize/Maximize, LPSolve, LSSolve, NLPsolve, QPSolve, extrema (для аналитического решения).

Решим примеры.

```
f = @(x) (x(1)^2 - x(2)^2);
A = [1 1]; b = [1];
x0 = [1; 1];
[x, fval] = fmincon(f, x0, A, b, [], [], zeros(2, 1))
```

```

Active inequalities (to within options.TolCon:=1e-006):
...lower.....upper.....ineqlin...ineqnonlin
.....1.....1
x:=
.....0
.....1
fval:=
.....-1

>.Optimization[Minimize](x[1]-2*x[2]+3*x[3],
...{x[1]^2+x[2]^2+x[3]^2=1});
...[-3.74165738677860560, . [x[1] := -0.267261244906314,
...x[2] := 0.534522478094199, . x[3] := -0.801783728561298]]
>.Optimization[Maximize](x[1]-2*x[2]+3*x[3],
...{x[1]^2+x[2]^2+x[3]^2=1});
...[3.74165738677767390, . [x[1] := 0.267261241912691,
...x[2] := -0.534522483825382, . x[3] := 0.801783725738073]]

>.v:=extrema(x[1]-2*x[2]+3*x[3], .{x[1]^2+x[2]^2+x[3]^2=1},
...{x[1],x[2],x[3]}, . 's'):
...latex(v);
...latex(s);

```

$$\left\{ \sqrt{14}, -\sqrt{14} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ x_1 = -1/14 \sqrt{14}, x_2 = 1/7 \sqrt{14}, x_3 = -3/14 \sqrt{14} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ x_1 = 1/14 \sqrt{14}, x_2 = -1/7 \sqrt{14}, x_3 = 3/14 \sqrt{14} \right\} \right\}$$

```

>.Optimization[Minimize](x[1]^2-x[2]^2, .{x[1]+x[2]<=1},
...assume:=nonnegative);
...[-1.00000000206520, . [x[1] := 0., . x[2] := 1.00000000103260]]

```

Задачи квадратичного программирования

Задача квадратичного программирования заключается в нахождении минимума квадратичной функции при линейных ограничениях:

$$f(x) = \frac{1}{2} (Qx, x) + rx \rightarrow \min, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Здесь Q — положительно определенная матрица. Тогда задача будет выпуклой и при невырожденности ограничений имеет абсолютный экстремум. Его можно найти из теоремы Куна–Таккера, которая приводит к следующей системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^n q_{ij}x_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} - \mu_j = 0, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,$$

$$\lambda_i x_{n+i} = 0, \quad \mu_j x_j = 0, \quad x, \lambda, \mu \geq 0,$$

где $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Эту систему можно решить методом искусственного базиса при помощи симплекс-метода. При этом в силу условий дополняющей нежесткости нельзя включать в базисные переменные одновременно λ_i и x_{n+i} с одинаковым индексом i , а также μ_j и x_j с одинаковым индексом j .

Пример. Найти расстояние от точки $q = (1, 1, 2)$ до треугольника с вершинами $p_0 = (-1, -1, -1)$, $p_1 = (1, -2, 1)$, $p_2 = (-2, 1, 0)$.

Формализуем этот пример. Запишем произвольную точку внутри треугольника в барицентрических координатах:

$$p = (1 - t_1 - t_2)p_0 + t_1p_1 + t_2p_2, \quad t_1, t_2 \geq 0, \quad t_1 + t_2 \leq 1.$$

Отсюда следует, что

$$p = p_0 + t_1p_{10} + t_2p_{20}, \quad p_{i0} = p_i - p_0,$$

и квадрат расстояния от точки q до p будет равен

$$|p - q|^2 = |t_1p_{10} + t_2p_{20} + e|^2, \quad e = p_0 - q.$$

Раскрывая квадрат, получаем задачу квадратичного программирования

$$\frac{1}{2} (Qt, t) + rt + e^2 \rightarrow \min, \quad t = (t_1, t_2) \geq 0, \quad t_1 + t_2 \leq 1,$$

где $Q = 2 \begin{pmatrix} p_{10}^2 & p_{10}p_{20} \\ p_{10}p_{20} & p_{20}^2 \end{pmatrix}$, $r = 2(p_{10}e, p_{20}e)$. Матрица ограничений $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, вектор $b = (1)$ и не забываем про условие неотрицательности $t \geq 0$.

Примеры решения задач при помощи Matlab и Maple.

Функция Matlab: quadprog; Maple: QPSolve.

Решим пример.

```
q = [1, 1, 2];
p0 = [-1, -1, -1];
p1 = [1, -2, 1];
p2 = [-2, 1, 0];
p10 = p1 - p0;
p20 = p2 - p0;
e = p0 - q;
Q = [dot(p10,p10) dot(p10,p20); dot(p10,p20) dot(p20,p20)];
r = 2*[dot(p10,e) dot(p20,e)];
A = [1 1]; b = [1];
[x,fval] = quadprog(Q,r,A,b,[],[],zeros(2,1));
x
sqrt(fval+dot(e,e))
x =
    0.7368
    0.2632
ans =
    2.2005

> Q:=[[9,-2],[-2,6]]:
> r:=[-16,-10]:
> e2:=17:
> f:=1/2*(Q[1,1]*t1^2+2*Q[1,2]*t1*t2+Q[2,2]*t2^2)+
>   r[1]*t1+r[2]*t2+e2:
> v:=Optimization[QPSolve](f,{t1+t2<=1,t1>=0,t2>=0});
> v := [4.8421052631579,
> [t1:=0.736842105263158,t2:=0.263157894736842]]
> sqrt(v[1]);
> 2.200478417
```


Разные задачи.

Дискретные экстремальные задачи

В дискретных задачах множество допустимых элементов D и функция f обладают свойством дискретности. Например, задача линейного программирования $cx \rightarrow \max, Ax \leq b$ превращается в дискретную, если искать только целочисленные решения ($D \subset \mathbb{Z}^n$).

Например, к задаче целочисленного линейного программирования сводится известная задача о рюкзаке: имеется n золотых слитков, j -й из которых имеет объем w_j и стоимость c_j . Также дан рюкзак объемом W . Спрашивается, как нужно упаковать рюкзак слитками, чтобы его стоимость была наибольшей. Если через x_j обозначить бинарную переменную, равную 0, если предмет не помещается и 1, если помещается, то получаем следующую экстремальную задачу:

$$cx \rightarrow \max, \quad wx \leq W, \quad x \in \{0, 1\}^n.$$

Задача о рюкзаке является NP-полной. Это означает, что несмотря на простоту формулировки, лучшие из алгоритмов (перебор, метод ветвей и границ, динамическое программирование), работают за экспоненциальное время.

Упомянем еще задачу об упаковке в контейнеры: имеется n предметов, каждый объемом w_j . Требуется упаковать их в минимальное число контейнером, каждый из которых имеет вместимость W . Она также является NP-сложной. Тем не менее можно предложить следующий приближенный алгоритм (FFD): отсортировать предметы в порядке убывания объемов, для текущего предмета попытаться найти место в текущем наборе контейнеров, если это невозможно, то взять для этого новый контейнер. Оказывается это простой подход позволяет найти 0.22-приближенное решение.

Примеры решения задач при помощи Matlab и Maple.

Основная функция Matlab: `bintprog`; Maple: `LPSolve`.

Примеры задачи о рюкзаке и целочисленного программирования.

```
W = [15];
w = [6 4 3 2 5];
c = [5 3 1 3 6];
x = bintprog(-c, w, W);
```

```

x
c*x
x.=
.....1
.....0
.....0
.....1
.....1
ans.=
.....14

>.restart;.with(Optimization):
>.LPSolve(2*x+5*y, {3*x-y=1, x-y<=5}, assume={nonnegative});
.. [0.6666666666666667, [x.=0.3333333333333333, y.=0.]]
>.LPSolve(2*x+5*y, {3*x-y=1, x-y<=5},
.. assume={nonnegative, integer});
.. [12, [x.=1, y.=2]]

W:=15:
>.w:=[6,4,3,2,5]:
>.c:=[5,3,1,3,6]:cost:=add(c[j]*x[j],j=1..5):
>.LPSolve(cost, {add(w[j]*x[j],j=1..5)<=W},
.. assume={nonnegative},maximize);
.. [22.50000000000000, [x[1].=.0., x[2].=.0., x[3].=.0.,
.. x[4].=.7.500000000000000, x[5].=.0.]]
>.LPSolve(cost, {add(w[j]*x[j],j=1..5)<=W},
.. assume={binary},maximize);
.. [14, [x[1].=.1, x[2].=.0, x[3].=.0, x[4].=.1, x[5].=.1]]

```

Разные задачи. Задачи вариационного типа

В экстремальных задачах вариационного типа экстремум ищется среди функций $x \in D \subset X$, где X — нормированное пространство, например C^r или L_p .

Задачи вариационного исчисления. Классической задачей вариационного исчисления является задача нахождения экстремума интегрального функционала

$$f(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, x') dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(t_j) = x_j, \quad x \in C^1.$$

Необходимое условие экстремума заключается в выполнении на кривой $\hat{x} \in \text{locextr}$ уравнения Эйлера

$$-\frac{d}{dt} L_{x'} + L_x = 0.$$

Например,

$$\int_0^1 t^2 (x'^2 + x^2) dt \rightarrow \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \text{sh } 1.$$

Имеем

$$L_{x'} = 2t^2 x', \quad L_x = 2t^2 x$$

и уравнение Эйлера

$$-2(t^2 x')' + 2t^2 x = 0 \Leftrightarrow t^2 x'' + 2tx' - t^2 x = 0.$$

Решение этого уравнения

$$x(t) = \frac{C_1 \text{ch } t + C_2 \text{sh } t}{t}.$$

Из граничных условий находим

$$\hat{x}(1) = \frac{\text{sh } t}{t}.$$

Основывать численную реализацию на приближенном решении уравнения Эйлера достаточно сложно, поскольку имеем дело с граничной задачей, а не начальной задачей Коши (для которой есть эффективные методы, например, Рунге–Кутта). Поэтому применяют следующие прямые методы.

В методе Рунге приближенно полагают

$$x \approx x^n(t) = \sum_{i=0}^n c_i x_i, \quad c_0 = 1,$$

где $x_0(t_j) = x_j$, x_i для $i > 0$ — первые n функций полной линейно независимой полной на отрезке $[t_0, t_1]$ системы функций, $x_i(t_j) = 0$. Тогда

$$I(x^n) = F(c_1, c_2, \dots, c_n) \rightarrow \min, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Это конечномерная безусловная задача, которую можно решить одним из изученных методов. Тогда

$$x^*(t) = \sum_{i=0}^n c_i^* x_i(t).$$

Например, для задачи выше можно взять

$$x_0(t) = 1 + t(\operatorname{sh} 1 - 1), \quad x_i(t) = t^i(1 - t).$$

В методе Галеркина приближенное решение x^n ищется в таком же виде, как и для метода Рунге. Для него вычисляется невязка

$$F(t) = L(x^n),$$

где L — линейный оператор, отвечающий уравнению Эйлера. Далее требуется ортогональность невязки базисным функциям:

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t) x_i(t) dt = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

В силу линейности уравнения Эйлера (оператора L) имеем:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} F(t) x_i(t) dt = (e_0, x_i) + \sum_{i=1}^n c_i (e_i, x_i),$$

где

$$e_i = L(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Получили систему линейных уравнений, из которых находим c^* и затем по ним строим x^* .

Задачи теории приближений. Среди всего многообразия задач теории приближений рассмотрим задачи о наилучшем приближении в C и L_2 :

$$\|f - p\|_C \rightarrow \min_{\deg p \leq n}, \quad \|f - p\|_2 \rightarrow \min_{\deg p \leq n},$$

где p — полиномы (например, алгебраические или тригонометрические).

Примеры. 1. Найти $p^*(x)$ и погрешность приближения S_{\min}^* в задаче

$$\min_{\deg p \leq 5} \|\sin x - p(x)\|_{C[0, \pi/2]}.$$

2. Решить пример 1 для нормы $L_2[-1, 1]$.

Приведем алгоритм Ремеза решения задачи

$$\|f(x) - p(x)\|_{C[a, b]} \rightarrow \min,$$

где

$$p(t) = \sum_{j=0}^n p_j \varphi_j(t),$$

где φ_j — базисные функции. Он основан на теоремах об альтернансе и Валле Пуссена.

Пусть

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$$

— начальное приближение альтернанса (выбираемое, например, случайно или как нули многочленов Чебышева). Решаем относительно p_j и d систему линейных уравнений

$$p(x_j) + (-1)^i d = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Находим

$$x^* = \operatorname{argmax}_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)|, \quad D = S_{\max}^*.$$

Заменяем одну из точек x_i точкой x^* так, чтобы знак $f(x) - p(x)$ в точках новой последовательности чередовался. Критерий окончания: $|d| \approx D$.

В случае L_2 имеем

$$p = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j$$

и

$$\|f - p\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|p\|_2^2 - 2(f, p) = \sum_{i, j=0}^n c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j) - 2 \sum_{j=0}^n c_j (f, \varphi_j) + \|f\|_2^2.$$

Отсюда получаем следующую квадратичную задачу для определения оптимальных коэффициентов c_j :

$$(Qc, c) - 2rc \rightarrow \min.$$

Здесь матрица Q , составленная из скалярных произведений (φ_i, φ_j) положительно определена, если система базисных функций φ_j линейно независима.

Если дополнительных ограничений на коэффициенты c_j нет, то они находятся из линейной системы уравнений $Qc = r$ (в данном

случае необходимого и достаточного условия глобального экстремума). Оно наиболее просто решается в случае ортонормированного базиса φ_j , когда Q будет единичной матрицей. Сложнее решаются случаи, когда на c_j ставятся дополнительные ограничения, например, условие неотрицательности $c_j \geq 0$. Тогда получаем задачу квадратичного программирования.

Примеры решения задач при помощи Matlab и Maple.
Основные функции Matlab: fminimax, lsqlin, lsqnonlin, lsqnonneg; Maple: LPSolve, LSSolve, пакет numapprox: minimax, remez.

```
L:=t^2*(x1^2+x^2): Lx1:=diff(L,x1): Lx:=diff(L,x):
> eq:=-diff(subs({x1=diff(x(t),t),x=x(t)},Lx1),t)+
..subs({x1=diff(x(t),t),x=x(t)},Lx);
..dsolve({eq,x(0)=1});
```

$$-4t \frac{d}{dt}x(t) - 2t^2 \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2t^2x(t)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sinh(t)}{t} & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
n:=3:
> x:=1+t*(sinh(1)-1)+add(c[i]*t^i*(1-t),i=1..n):
> x:=unapply(x,t):
> x(0); x(1);
.. 1
.. sinh(1)
> F:=simplify(evalf(int(t^2*(diff(x(t),t)^2+x(t)^2),t=0..1)));
.. F:=.5327968159e-1*c[1]+.3996934187e-1*c[2]+
... .3051607398e-1*c[3]+.6551226620e-1*c[3]^2+
... .1428571429*c[1]^2+.2119047616*c[1]*c[2]+
... .8968254030e-1*c[2]^2+.1603174611*c[1]*c[3]+
... .1484126972*c[2]*c[3]+.4373048414
> v:=Optimization[Minimize](F);
.. v:= [0.432332358616673, [c[1]=-0.175327828640891,
... c[2]=-0.00790819512851335,
... c[3]=-0.00942025924841215]]
> assign(v[2]);
> Optimization[Maximize](abs(x(t)-sinh(t)/t),t=0..1);
.. [.675349482581744e-5, [t=.126431670888261]]

> eq;
.. -4*t*(sinh(1)-1+c[1]*(1-t)-c[1]*t+2*c[2]*t*(1-t)-
.. c[2]*t^2+3*c[3]*t^2*(1-t)-c[3]*t^3)
.. -2*t^2*(-2*c[1]+2*c[2]*(1-t)-4*c[2]*t+6*c[3]*t*(1-t)-
.. 6*c[3]*t^2)+2*t^2*(1+t*(sinh(1)-1)+
.. c[1]*t*(1-t)+c[2]*t^2*(1-t)+c[3]*t^3*(1-t))
> sys:=evalf({seq(int(eq*t^i*(1-t),t=0..1),i=1..3)});
> v:=solve(sys);
```

```

..{c[1] == -.1753278897, c[2] == -.7908013149e-2,
..c[3] == -.9420391124e-2}

>.numapprox[minimax](x.->.sin(x), .0..Pi/2, .[5, .0], .x.->.1,
... 'maxerror');
..x.->.706460e-5+(.9996899312+(.21935459e-2+
..(-.1722387625+(.609741353e-2+.5721696436e-2*x)*x)*x)*x
>.maxerror;
.. .7072293573e-5

```

Литература

- [1] Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации : учеб. пособие / А.Г.Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. — 2-е изд. — М. : Физмат, 2005. — 368с. : ил. — (Классический университетский учебник). — Библиогр. в конце кн. — ISBN 5-9221-0559-0 /в пер./ : 259.60.
- [2] Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие для вузов / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. — 2-е изд., испр. — М. : Высш. шк., 2005. — 544с. : ил. — (Прикладная математика для ВТУЗов). — Библиогр. в конце кн. — ISBN 5-06-004137-9 /в пер./ : 235.98.
- [3] Измаилов, А.Ф. Численные методы оптимизации : учеб. пособие для вузов / А.Ф. Измаилов, М.В. Солодов. — М. : Физматлит, 2005. — 304с. — Библиогр. в конце кн. — ISBN 5-9221-0045-9 /в пер./ : 145.20.
- [4] Алексеев, В.М. Оптимальное управление : учебник для вузов / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С. В. Фомин. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 408 с. : ил. — (Классический университетский учебник). — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-9221-0589-7 (в пер.) : 452.76.
- [5] Алексеев, В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи : задачник для вузов / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров ; МГУ им. М. В. Ломоносова. — 3-е изд., испр. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 256 с. — (Классический университетский учебник). — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-9221-0992-5 (в пер.) : 311.85.
- [6] Струченков, В.И. Методы оптимизации. Основы теории, задачи, обучающие программы : учеб.пособие / В.И.Струченков. — М. : Экзамен, 2005. — 256с. : ил. — Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-472-00465-9 : 72.20.
- [7] Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач : учеб. пособие для вузов / Ф. П. Васильев. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1988. — 549 с. : ил. — Библиогр. в конце кн. — ISBN /В пер./ : 1.60.
- [8] Дьяконов, В.П. MAPLE 9.5/10 в математике, физике и образовании / В.П.Дьяконов. — М. : СОЛОН-Пресс, 2006. — 720с. : ил. + 1опт.диск (CD ROM). — (Библиотека профессионала). — Библиогр. в конце кн. — ISBN 5-98003-258-4 : 448.35.
- [9] Алексеев, Е.Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9 / Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. — М. : NT Press, 2006. — 496с. : ил. — (Самоучитель). — Библиогр. в конце кн. — ISBN 5-477-00208-5 : 135.15.
- [10] Журнал вычислительной математики и математической физики. — М.: Наука.
- [11] Прикладная математика и механика : журнал. — М.: Наука.
- [12] Библиотека численного анализа НИВЦ МГУ: http://num-anal.srcc.msu.ru/lib_na/libnal.htm