МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра ВММ

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 11» января 2019 г., протокол № 5
Заведующий кафедрой

__ ________В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакавлариата
по направлению подготовки
07.03.01 Архитектура

Форма обучения: очная
Идентификационный номер образовательной программы: 070301-01-19

Тула - 2019

Разработчик методических указаний

Бакулин Н.В., доцент, к.т.н., доцент ______________

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

1-ый семестр

Задачи векторной алгебры

Некоторые сведения из теории

Вектор – направленный отрезок.

Равенство

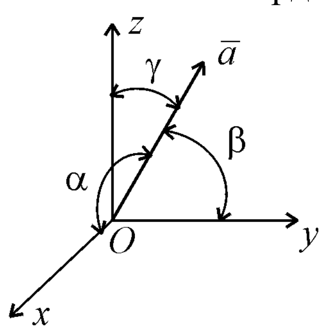
$$\vec{a} = (x,\, y,\, z) \qquad (1)$$

означает, что x, y, z – проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (2)$$

позволяет по координатам вектора определить его модуль.



Если α, β, γ – углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то $cos\alpha,\ cos\beta,\ cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

$$x = |\,\vec{a}\,| cos\alpha, \quad y = |\,\vec{a}\,| cos\beta, \quad z = |\,\vec{a}\,| cos\gamma, \qquad (3)$$

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1. \qquad (4)$$

Если известны начало вектора $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и конец $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$, то координаты вектора находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1. \qquad (5)$$

Если $\vec{a} = (x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2,\, y_2,\, z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2,\, y_1 \pm y_2,\, z_1 \pm z_2) \qquad (6)$$

и $\alpha\vec{a} = (\alpha x_1,\, \alpha y_1,\, \alpha z_1)$, где α – любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Признак коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (7)$$

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом:

$$\left|\,\vec{i}\,\right| = \left|\,\vec{j}\,\right| = \left|\,\vec{k}\,\right| = 1.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по осям соответственно Ox, Oy, Oz в положительную сторону.

Любой вектор $\vec{a}=(x,\ y,\ z)$ может быть представлен в виде

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}. \qquad (8)$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\varphi, \qquad (9)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}, \qquad (10)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2, \qquad (11)$$

т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (12)$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \qquad (13)$$

$$cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}\cdot\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2}}. \qquad (14)$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа этой силы определяется

$$W=\vec{F}\cdot\vec{S}. \qquad (15)$$

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sin\varphi$, где $\varphi -$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3. вектор $\vec{c}$ образует с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}. \qquad (16)$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|, \qquad (17)$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (18)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a}\times\vec{b}=0$, в частности, $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (19)$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке M, а вектор $\vec{a}$ идет из некоторой точки O в точку M, то вектор $\vec{a}\times\vec{F}$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки O:

$$m_{\circ}\vec{F}=\vec{a}\times\vec{F}. \qquad (20)$$

<u>Смешанным произведением</u> трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a}\times\vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right). \qquad (21)$$

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$$V=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}. \qquad (22)$$

Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0. \qquad (23)$$

Для векторов $\vec{a}=\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2, y_2, z_2\right)$, $\vec{c}=\left(x_3, y_3, z_3\right)$ смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (24)$$

<u>**Задача 1**</u>. На материальную точку действуют силы:

$$\vec{F}_1=\left(2, -1, 1\right), \quad \vec{F}_2=\left(-1, 2, 2\right), \quad \vec{F}_3=\left(1, 1, -2\right).$$

Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

<u>Решение.</u> Найдем равнодействующую

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\left(2-1+1, -1+2+1, 1+2-2\right)=\left(2, 2, 1\right).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S}=\overrightarrow{AB}=\left(4-2, 1+1, -1-0\right)=\left(2, 2, -1\right).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W=\vec{R}\cdot\vec{S}=2\cdot2+2\cdot2+1\cdot(-1)=7.$$

Задача 2. Дана сила $\vec{F} = (3,\ 4,\ -2)$ и точка ее приложения $A(2,\ -1,\ 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. По формуле (20) $m_{\circ}\vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$. Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ по формуле (5) имеет координаты $\vec{r} = (2,\ -1,\ 3)$, по формуле (19)

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 13\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Итак, $m_{\circ}\vec{F} = (-10,\ 13,\ 11)$. Модуль момента находим по формуле (2):

$$\left| m_{\circ}\vec{F} \right| = \sqrt{(-10)^2 + (13)^2 + (11)^2} = \sqrt{390} \approx 19{,}748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$cos\,\alpha = \frac{-10}{19{,}748} = -0{,}506,\quad cos\,\beta = \frac{13}{19{,}748} = 0{,}658,\quad cos\,\gamma = \frac{11}{19{,}748} = 0{,}557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha = 120^{\circ}24',\qquad \beta = 48^{\circ}51',\qquad \gamma = 56^{\circ}9'.$$

Контроль: должно быть $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$. У нас:

$$(-0{,}506)^2 + (0{,}658)^2 + (0{,}557)^2 = 0{,}999.$$

Задача 3. Написать разложение вектора $\vec{x} = (5,\ 16,\ 2)$ по векторам $\vec{p} = (2,\ 1,\ 0)$, $\vec{q} = (0,\ -2,\ 0)$, $\vec{r} = (-1,\ 5,\ 2)$.

Решение.

1. Разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{p} + \alpha_2\vec{q} + \alpha_3\vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 q_1 + \alpha_3 r_1 \\ x_2 = \alpha_1 p_2 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 r_2 \\ x_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 q_3 + \alpha_3 r_3. \end{cases}$$

2. С учетом числовых значений координат векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ и $\vec{x}$ получим систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} 2\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 - 1\cdot\alpha_3 = 5 \\ 1\cdot\alpha_1 - 2\cdot\alpha_2 + 5\cdot\alpha_3 = 16 \\ 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 5 + \alpha_3 \\ 2\alpha_2 = \alpha_1 + 5\alpha_3 - 16 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

3. Разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид:

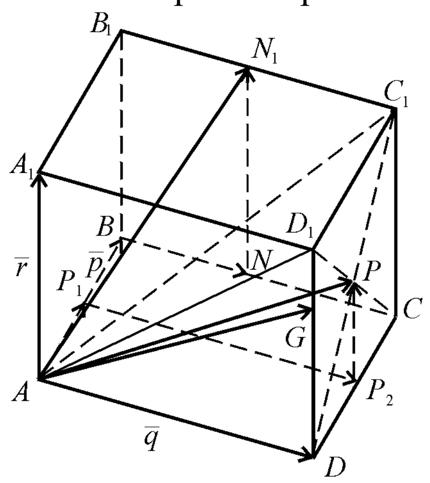
$$\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}$.

<u>Задача 4</u>. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$ образуют базис. Разложить векторы $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN_1}$ по выбранному базису, если точка G делит ребро DD_1 в отношении 1:2; точка P – точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C; точка N_1 – середина ребра B_1C_1.

<u>Решение.</u>

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r}$,

$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}$.

<u>Плоскость. Ее уравнения</u>

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad – \tag{25}$$

общее уравнение плоскости.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) + C(z - z_\circ) = 0 \quad – \tag{26}$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad – \tag{27}$$

уравнение плоскости «в отрезках». Здесь a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad – \tag{28}$$

нормальное уравнение плоскости.

$$d=\frac{|Ax_\circ+By_\circ+Cz_\circ+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} - \qquad (29)$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 - \qquad (30)$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

<u>Прямая в пространстве. Ее уравнения</u>

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} - \qquad (31)$$

общее уравнение прямой (прямая задана пересечением двух плоскостей).

$$\frac{x-x_\circ}{m}=\frac{y-y_\circ}{n}=\frac{z-z_\circ}{p} - \qquad (32)$$

каноническое уравнение прямой, где $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ – точка, принадлежащая прямой, $\vec{a}=(m, n, p)$ – направляющий вектор прямой (вектор, параллельный прямой).

$$\begin{cases} x=x_\circ+mt \\ y=y_\circ+nt \\ z=z_\circ+pt \end{cases} - \qquad (33)$$

параметрические уравнения прямой.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} - \qquad (34)$$

уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\cdot\sqrt{m_2{}^2+n_2{}^2+p_2{}^2}} - \qquad (35)$$

угол между двумя прямыми, где $\vec{a}_1=(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{a}_2=(m_2, n_2, p_2)$ – направляющие векторы прямых.

$$sin\psi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+c^2}} - \qquad (36)$$

угол между прямой и плоскостью, где $\vec{n}=(A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{a}=(m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\left| \overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} \right| \text{ – объем пирамиды } A_1A_2A_3A_4,$$

где $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ – координаты вершин пирамиды.

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \qquad (37)$$

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, $A_4(0, 8, 0)$. Найти:

1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

3) объем пирамиды V;

4) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$;

5) точку A_4', симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$;

6) точку A_4'', симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3.

Решение.

1) Угол между ребрами находим по формуле (35).

$\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = (3-2,\ 0-1,\ 1-(-1)) = (1, -1, 2)$ – направляющий вектор прямой A_1A_2;

$\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_4} = (0-2,\ 2-1,\ 0-(-1)) = (-2,\ 7,\ 1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4.

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot(-2) - 1\cdot 7 + 2\cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}} = -\frac{7}{18}.$$

2) Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через три точки $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, по формуле (30)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & 0-1 & 1+1 \\ 2-2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot 0 - (y-1)\cdot 4 + (z+1)\cdot(-2) = 0,$$

$$-4y + 4 - 2z - 2 = 0,$$

$4y + 2z - 2 = 0$ – уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

$\vec{n} = (0,\ 2,\ 1)$ – нормальный вектор плоскости;

$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_4} = (-2,\ 7,\ 1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4.

Находим угол ψ между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ по формуле (36)

$$sin\psi = \frac{0\cdot(-2) + 2\cdot 7 + 1\cdot 1}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{54}} = 0{,}9114.$$

3) Находим объем пирамиды по формуле (37)

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1,\ -1,\ 2);\quad \overrightarrow{A_1A_3} = (0,\ -2,\ 4);\quad \overrightarrow{A_1A_4} = (-2,\ 7,\ 1).$$

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(-2 + 8 - 8 - 28) = -\frac{1}{6}(-30) = 15.$$

4) Расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$ находим по формуле (29).

$$d = \frac{|2\cdot 8 + 0 - 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}69.$$

5) Чтобы найти точку A_4', симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, сделаем следующее.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через точку A_4 по формуле (32). За направляющий вектор прямой $\vec{a} = \vec{n} = (0,\ 2,\ 1)$ берем нормальный вектор плоскости, т.к. прямая перпендикулярна плоскости:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-0}{1},\qquad \frac{x}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{1}.$$

Составим параметрические уравнения этой прямой по формуле (33):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t. \end{cases}$$

Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью $A_1A_2A_3$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 + 8 = 2 \\ z = t \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 2(2t + 8) + t - 1 = 0,$$

$$5t + 15 = 0,\qquad t = -3.$$

Получаем точку $M(0,\ 2,\ -3)$; т.к. точка A_4' симметрична точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, то точка M является серединой отрезка A_4A_4', поэтому

$$x_M=\frac{x_4+x_4'}{2},\qquad 0=\frac{0+x_4'}{2},\qquad x_4'=0;$$

$$y_M=\frac{y_4+y_4'}{2},\qquad 2=\frac{8+y_4'}{2},\qquad y_4'=-4;$$

$$z_M=\frac{z_4+z_4'}{2},\qquad -3=\frac{0+z_4'}{2},\qquad z_4'=-6.$$

$A_4'(0,\ -4,\ -6)$.

6) Чтобы найти точку A_4'', симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3, составим уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_1A_3 по формуле (26). За нормальный вектор плоскости $\vec{n}=\vec{a}=(0,\ -2,\ 4)$ берем направляющий вектор прямой A_1A_3, т.к. плоскость перпендикулярна прямой.

$$0\cdot(x-0)-2\cdot(y-3)+4\cdot(z-0)=0,\quad -2y+16+4z=0,\quad y=2z-8=0.$$

Уравнение прямой A_1A_3 составляем по формуле (34).

$$\frac{x-2}{2-2}=\frac{y-1}{-1-1}=\frac{z+1}{3+1},\qquad \frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{4}.$$

Параметрические уравнения прямой A_1A_3:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-2t+1 \\ z=4t-1. \end{cases}$$

Находим точку N пересечения прямой A_1A_3 и плоскости:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-2t+1 \\ z=4t-1 \\ y-2z-8=0, \end{cases}$$

$$-2t+1-2(4t-1)-8=0,\qquad -10t-5=0,\qquad t=-\frac{1}{2},$$

$$x=2,\quad y=-2\left(-\frac{1}{2}\right)+1=2,\quad z=4\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-3.$$

Итак, точка $N(2,\ 2,\ -3)$. Так как точка A_4'' симметрична точке A_4 относительно прямой A_1A_3, то точка N является серединой отрезка A_4A_4'', тогда

$$x_N = \frac{x_4 + x_4''}{2}, \qquad 2 = \frac{0 + x_4''}{2}, \qquad x_4'' = 4,$$

$$y_N = \frac{y_4 + y_4''}{2}, \qquad 2 = \frac{8 + y_4''}{2}, \qquad y_4'' = -4,$$

$$z_N = \frac{z_4 + z_4''}{2}, \qquad -3 = \frac{0 + z_4''}{2}, \qquad z_4'' = -6, \quad \text{точка} \quad A_4''(4, -4, -6).$$

Аналитическая геометрия на плоскости

Прямая линия. Ее уравнение

$$Ax + By + C = 0 \ - \tag{38}$$

общее уравнение прямой.

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} \ - \tag{39}$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$, $\vec{a} = (m, n) -$ вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) = 0 \ - \tag{40}$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с перпендикулярным вектором $\vec{n} = (A, B)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \ - \tag{41}$$

уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ - \tag{42}$$

уравнение прямой в «отрезках», где $a, b -$ величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \ - \tag{43}$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\varphi$ и отрезком $b -$ отсекаемым на оси Oy.

$$y - y_\circ = k(x - x_\circ) \ - \tag{44}$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с угловым коэффициентом k.

$$d = \frac{|Ax_\circ + By_\circ + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ - \tag{45}$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

$$\delta = \frac{Ax_\circ + By_\circ + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \; - \qquad (45а)$$

отклонение точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} \; - \qquad (46)$$

угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$.

$$k_1 = k_2 \; - \qquad (47)$$

условие параллельности прямых.

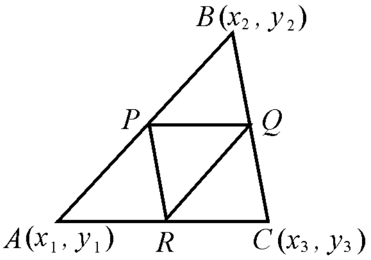
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \; - \qquad (48)$$

условие перпендикулярности прямых.

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \; - \qquad (49)$$

угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2.

<u>Задача 6.</u> Даны середины сторон треугольника $P(1,\ 2),\ Q(5,\ 1),\ R(-4,\ 3)$. Составить уравнения его сторон.



<u>1 способ.</u> Так как точки $P,\ Q,\ R$ являются серединами отрезков $AB,\ AC,\ BC$, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 6, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{array}{lll} x_1 = -8 & y_1 = 6 & \\ x_2 = 0 & y_2 = 0 & A(-8,\ 6), \quad B(10,\ -2), \quad C(0,\ 0). \\ x_3 = 10, & y_3 = -2, & \end{array}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение AB:

$$\frac{x+8}{10+8} = \frac{y-6}{-2-6}, \qquad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC:

$$\frac{x-10}{0-10}=\frac{y+2}{0+2}, \qquad x+5y=0.$$

Уравнение AC:

$$\frac{x+8}{0+8}=\frac{y-6}{0-6}, \qquad 3x+4y=0.$$

<u>2 способ.</u> Не определяя координат точек A, B, C, составим уравнение каждой из сторон треугольника ABC, как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника PQR параллельно противолежащей стороне.

<u>Уравнение</u> AB: прямая AB проходит через точку P параллельно вектору $\overrightarrow{QR}=(-9, 4)$. Используем уравнение (39).

$$\frac{x-1}{-9}=\frac{y-2}{4} \quad \Rightarrow \quad 4x+9y-22=0.$$

<u>Уравнение</u> BC: прямая BC проходит через точку Q параллельно вектору $\overrightarrow{PR}=(-5, 1)$.

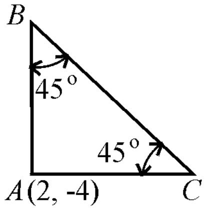
$$\frac{x-5}{-5}=\frac{y+1}{1} \quad \Rightarrow \quad x+5y=0.$$

<u>Уравнение</u> AC: прямая AC проходит через точку R параллельно вектору $\overrightarrow{PQ}=(4, -3)$.

$$\frac{x+4}{4}=\frac{y-3}{-3} \quad \Rightarrow \quad 3x+4y=0.$$

Ответ: $4x+9y-22=0, \quad x+5y=0, \quad 3x+4y=0.$

<u>Задача 7.</u> Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x+3y-5=0$ и вершину прямого угла $(2, -1)$.



$AB=BC$ (по условию), поэтому $\angle ABC=\angle ACB=45^\circ$, $k_{BC}=-\frac{2}{3}$ (по формуле (46)). Уравнения катетов AB и BC составляем по формуле (44): $y+1=k(x-2)$.

$$tg45^\circ=\left|\frac{k+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}k}\right|, \tag{49}$$

$$\frac{k+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}k}=\pm 1.$$

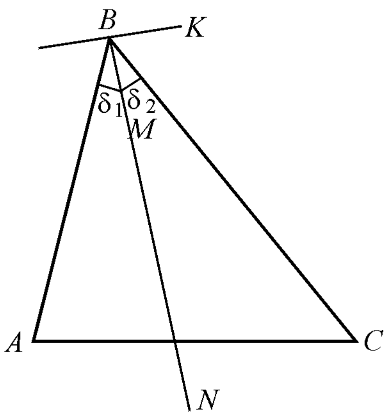
Решая эти уравнения, получим:

$$k=\frac{1}{5},\quad y+1=\frac{1}{5}(x-2),\quad 5y+5=x-2,\qquad x-5y-7=0.$$

$$k=-5,\quad y+1=-5(x-2),\quad y+1=-5x+10,\quad 5x+y-9=0.$$

Ответ: $x-5y-7=0,\qquad 5x+y-9=0.$

Задача 8. В треугольнике с вершинами $A(3,-2),\ B(-1,1),\ C(5,-7)$ найти биссектрису внутреннего угла $\angle ABC$.



1) Составим уравнения сторон угла $\angle ABC$, воспользовавшись формулой (41).

Сторона BA:

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-1}{-2-1},\qquad -3x-4y+1=0.$$

Сторона BC:

$$\frac{x+1}{5+1}=\frac{y-1}{-4-1},\qquad -8x-6y-2=0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Приравняем расстояния от произвольной точки биссектрисы $M(x,y)$ до сторон угла BA и BC, вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-8x-6y-2|}{\sqrt{8^2+6^2}},\qquad \frac{|-3x-4y+1|}{5}=\frac{|-8x-6y-2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x-4y+1)=-8x-6y-2\quad\text{и}\quad 2(-3x-4y+1)=-(-8x-6y-2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине B треугольника ABC:

$$x-y+3=0 \qquad \text{(а)}$$

и

$$x+y=0. \qquad \text{(б)}$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника BN отклонения вершин треугольника A и C имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла BK – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек A и C от прямой (а) по формуле (40,а):

$$\delta_A=\frac{3-(-2)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}>0,\qquad \delta_C=\frac{5-(-7)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{2}}>0,$$

следовательно, уравнение (а) – это уравнение прямой BK. Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника ABC при вершине B:

$$x+y=0.$$

Ответ: $x+y=0$.

Линии второго порядка

Окружность. Уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \tag{50}$$

определяет окружность радиуса R с центром $C(a,\,b)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $a=b=0$, то уравнение окружности примет вид

$$x^2+y^2=R^2. \tag{51}$$

Общее алгебраическое уравнение второй степени

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

есть уравнение окружности, если $A=C\neq 0,\quad B=0,$ т.е.

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{52}$$

Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ - \tag{53}$$

уравнение эллипса (канонический вид).

$$b^2=a^2-c^2,\qquad a>b. \tag{54}$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1(-c,\,0)\ \text{ и }\ F_2(c,\,0). \tag{55}$$

Начало координат $O-$ центр симметрии эллипса, а оси координат – оси симметрии эллипса. Точки $A_1(-a,\,0),\ A_2(a,\,0),\ B_1(0,\,-b),\ B_2(0,\,b)$ называются вершинами эллипса, a и $b-$ большая и малая полуоси. Величина

$$\varepsilon=\frac{c}{a}<1 \tag{56}$$

называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, т.к. выражается через отношение его полуосей

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,. \tag{57}$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a=b$, т.е. $\varepsilon=0$.

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}\ - \tag{58}$$

уравнения директрис.

Если фокусы эллипса расположены на оси Oy, то уравнение эллипса имеет тот же вид (58), но $b > a$. Фокусы имеют координаты: $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$. Уравнения директрис

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}. \tag{59}$$

<u>Гипербола.</u>

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ - \tag{60}$$

каноническое уравнение гиперболы.

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad a < c. \tag{61}$$

Фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка $O -$ центр симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, которые называются ее действительными вершинами, а величина $a -$ действительной полуосью гиперболы. Точки $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ называются мнимыми вершинами, а $b -$ мнимая полуось. Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{62}$$

являются асимптотами гиперболы, т.е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1. \tag{63}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{64}$$

Если $a = b$, гипербола называется равносторонней. В этом случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \ - \tag{65}$$

директрисы гиперболы.

Если уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ , \qquad (66)$$

то асимптоты гиперболы:

$$x=\pm\frac{b}{a}y, \qquad (67)$$

фокусы $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$.

$$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}\ - \qquad (68)$$

уравнения директрис.

<u>Парабола.</u>

Каноническое уравнение параболы

$$y^2=2px \qquad (p>0), \qquad (69)$$

где $p-$ расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2},$ координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2},\,0\right)$. Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы $\varepsilon=1$.

В ряде случаев рассматривают параболы:

а) $y^2=-2px,\ \ F\left(-\frac{p}{2},\,0\right)-$фокус, $x=\frac{p}{2}-$уравнение директрисы; (70)

б) $x^2=2py,\ \ F\left(0,\,\frac{p}{2}\right)-$фокус, $y=-\frac{p}{2}-$ уравнение директрисы; (71)

в) $x^2=-2py,\ \ F\left(0,-\frac{p}{2}\right)-$фокус, $y=\frac{p}{2}-$уравнение директрисы. (72)

Для всех случаев $p>0$.

<u>Задача 9.</u> Среди прямых параллельных прямой $2x+y=0$, выделить касательные к окружности $x^2+y^2=1$.

<u>Решение.</u> Уравнение всякой прямой, параллельной данной, можно записать в виде

$$2x+y+c=0.$$

Касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку, поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно иметь только один ответ.

Из уравнения прямой $y=-2x-c$.

$$\begin{cases} y=-2x-c \\ x^2+y^2=1, \end{cases} \qquad x^2+(-2x-c)^2=1, \qquad 5x^2+4cx+c^2-1=0.$$

Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда дискриминант равен нулю: $(4c)^2 - 4\cdot 5\cdot\left(c^2 - 1\right) = 0,$ откуда $c = \pm\sqrt{5}$.

Итак, искомые касательные имеют уравнения

$$2x + y + \sqrt{5} = 0, \qquad 2x + y - \sqrt{5} = 0.$$

<u>**Задача 10.**</u> Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225.$ Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

<u>Решение.</u> Делим на 225, получаем

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отсюда следует по формуле (53), что $a = 5,\ b = 3.$ Из формулы (54):

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, \quad c = \pm 4.$$

По формуле (55): $F_1(-4,\ 0),\ \ F_2(4,\ 0).$

Эксцентриситет (56): $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}.$

Уравнения директрис согласно (58): $x = \pm\dfrac{5}{4/5} = \pm\dfrac{25}{4}.$

Ответ: $a = 5,\ b = 3$; $F_1(-4,\ 0),\ \ F_2(4,\ 0)$; $\varepsilon = \dfrac{4}{5}$; $x = \pm\dfrac{25}{4}.$

<u>**Задача 11.**</u> Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая полуось $2\sqrt{6}$, а расстояние между фокусами $F_1F_2 = 8$.

<u>Решение.</u> $b = 2\sqrt{6},\quad F_1F_2 = 2c = 8,\quad c = 4.$

По формуле (54): $a^2 = b^2 + c^2,\ \ a^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 + 4^2 = 40,\ \ a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$

Уравнение эллипса согласно (53): $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{24} = 1.$

<u>**Задача 12.**</u> Асимптоты гиперболы имеют уравнения $4y \pm 3x = 0$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать ее каноническое уравнение.

<u>Решение.</u> Уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{3}{4}x$, согласно формуле (62): $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4}.$ Кроме того $F_1F_2 = 2c = 20,\ c = 10.$ По формуле (61): $c^2 = a^2 + b^2,$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4} \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $a=8,\ b=6$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1.$

<u>Задача 13.</u> Дана гипербола $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{1}=-1.$ Найти координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

<u>Решение.</u> Фокусы данной гиперболы расположены на оси Oy.

$$a=1,\ b=3,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}. \qquad (61)$$

Значит фокусы имеют координаты $F_1\left(0,-\sqrt{10}\right),\quad F_2\left(0,\ \sqrt{10}\right)$. Вершины $A_1(0,-1),\ A_2(0,1),\ B_1(-3,0),\ B_2(3,0)$. Эксцентриситет по формуле (64):

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3},\quad \varepsilon=\sqrt{10}.$$

Уравнения асимптот: $x=\pm\dfrac{b}{a}y \quad\Rightarrow\quad x=\pm 3y.$

Уравнения директрис: $y=\pm\dfrac{b}{c} \quad\Rightarrow\quad y=\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}.$

<u>Задача 14</u>. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(1,-2)$ и симметрична относительно оси Oy. Написать ее уравнение. Найти фокус и директрису.

<u>Решение.</u> Уравнение искомой параболы по формуле (72) имеет вид $x^2=-2py$. Точка $A(1,-2)$ лежит на параболе. Подставляем координаты точки A в уравнение: $1=-2p\cdot(-2) \quad\Rightarrow\quad p=\dfrac{1}{4}$. Следовательно, искомое уравнение будет $x^2=-\dfrac{1}{2}y$ или $y=-2x^2$.

Фоку параболы: $F\left(0,-\dfrac{1}{8}\right)$. Уравнение директрисы согласно (72): $y=\dfrac{1}{8}.$

<u>Задача 15</u>. На параболе $y^2=4x$ найти точки, расстояния которых от директрисы равно 5.

<u>Решение.</u> Уравнение директрисы данной параболы $x=-\dfrac{p}{2}$, $2p=4,\ p=2,\ x=-1$. Тогда расстояние от оси Oy до искомой $\ell=4-\dfrac{p}{2}=5-1=4$ точки и это расстояние определит координату x данной точки, т.е. $x=4$. Координату y найдем из уравнения параболы:

$$y^2=4x,\quad y^2=4\cdot4=16,\quad y=\pm4.$$

Итак, $M_1(4,4)$, $M_2(4,-4)$.

Введение в математический анализ
1. Пределы

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \ldots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число u_n. Тогда говорят, что определена последовательность чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots$ или, короче, последовательность $\{u_n\}$. Отдельные числа u_n называются ее элементами.

Определение 1.1. Число a называется пределом последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется зависящее от него натуральное число N такое, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство: $|u_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Определение 1.2. Говорят, что функция $f(x)$ стремится к A $(f(x) \to A)$ при стремлении к a $(x \to a)$, где A и a – числа, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta(M)$, где M – произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.
1. Если существуют конечные $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

$$а)\ \lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x)$$

$$б)\ \lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x),$$

в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a}f_2(x)}\qquad \left(\lim\limits_{x\to a}f_2(x)\neq 0\right).$

2. Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\neq 0,\quad \lim\limits_{x\to a}f_2(x)=0$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\infty,$$

если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\quad \lim\limits_{x\to a}f_2(x)=\infty$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взять соответственно две последовательности: $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения. Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности: $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 0^0; 1^∞; ∞^0.

<u>Пример 1.1.</u> При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x\to\infty$ или n при $n\to\infty$ для последовательностей (неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$) оба члена соотношения полезно предварительно разделить на x^m или, соответственно, n^mгде m – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-1}{5x^4+3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(5+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}{5+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^4}}=\frac{3+0+0}{5+0+0}=\frac{3}{5},$$ старшая степень $m=4,$

делится на x^4.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{9n^4-2n^3+2}+4\sqrt[3]{8n^3+21}}{\sqrt[4]{n^4-3}+2\sqrt{4n^4+9n}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{n^4\left(9-\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^4}\right)}+4\cdot\sqrt[3]{n^3\left(8+\dfrac{21}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^4\left(1-\dfrac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{n^4\left(4+\dfrac{9}{n^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2\cdot\sqrt{\left(9-\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^4}\right)}+4n\cdot\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{21}{n^3}\right)}}{n\cdot\sqrt[4]{\left(1-\dfrac{3}{n^4}\right)}+2n^2\cdot\sqrt{\left(4+\dfrac{9}{n^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{\left(9-\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^4}\right)}+\dfrac{4}{n}\cdot\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{21}{n^3}\right)}}{\dfrac{1}{n}\cdot\sqrt[4]{\left(1-\dfrac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{\left(4+\dfrac{9}{n^3}\right)}}=\frac{3\cdot\sqrt{9-0+0}+0\cdot\sqrt[3]{8+0}}{0\cdot\sqrt[4]{1-0}+2\cdot\sqrt{4+0}}=\frac{9}{4}$$

(неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$, старшая степень $m=2,$ делится на n^2).

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x+7}\right]=\left[\infty\cdot(\infty-\infty)\right]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x-7}\right]\cdot\left[\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}\right]}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\left(x^2+4x+5-x^2-4x+7\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\cdot 12}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}}\left(\frac{:x}{:x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{x^2}}}=\frac{12\cdot 3}{1+1}=18.$$

<u>Пример 1.2.</u> Если $P(x)$ и $Q(x)$ − целые многочлены $x,$ $P(a)\neq 0$ или $Q(a)\neq 0,$ то предел рациональной дроби P/Q при $x\to a$ находится непосредственно. Если же $P(a)=Q(a)=0$ (неопределенность $\frac{0}{0}$), то дробь P/Q рекомендуется сократить один или несколько раз на $(x-a)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)\left(x^3+x^2+x-3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1+2}{1+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

<u>Пример 1.3</u>. Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность $\frac{0}{0}$).

а) $$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt[3]{5-x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{9-5-x}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{1}{3+\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{1-5+x}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{x-4}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}(1+1+1)=-\frac{1}{2}.$$

б) $$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(x^2-7x-8\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 8} \frac{x-8}{(x-8)(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)} = \lim_{x\to 8} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)} =$$

$$= \frac{1}{9\cdot 12} = \frac{1}{108}.$$

<u>Пример 1.4.</u> При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin\,x}{x} = 1,$$

следствием которого являются пределы:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{arcsin\,x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{arxtgx}{x} = 1.$$

$$а)\ \lim_{x\to 0}\left[ctg^2 3x - ctg^2 5x\right]\cdot \frac{tg^2 4x \cdot arcsin^2 x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{cos^2 3x}{sin^2 3x} - \frac{cos^2 5x}{sin^2 5x}\right]\cdot \frac{\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2 \cdot 16x^2 \cdot \left(\frac{arcsin\,x}{x}\right)^2 \cdot x^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 16x^2 \cdot \left[\frac{cos^2 3x}{sin^2 3x} - \frac{cos^2 5x}{sin^2 5x}\right]\cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{arcsin\,x}{x}\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{cos^2 3x \cdot 16x^2}{\left(\frac{sin\,3x}{3x}\right)^2 \cdot 9x^2} - \frac{cos^2 5x \cdot 16x^2}{\left(\frac{sin\,5x}{5x}\right)^2 \cdot 25x^2}\right]\cdot 1^2 \cdot 1^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{16}{9} cos\,3x - \frac{16}{25} cos^2 5x\right] = \frac{16}{9}\cdot 1 - \frac{16}{25}\cdot 1 = \frac{256}{225}.$$

$$б)\ \lim_{x\to 0} \frac{tg^2 2x \cdot \sqrt{1-cos\,4x}}{x^2 \cdot arcsin\,3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2 \cdot 4x^2 \cdot \sqrt{2\,sin^2 2x}}{x^2 \cdot \left(\frac{arcsin\,3x}{3x}\right)\cdot 3x} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsin\,3x}{3x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt{2}\,sin\,2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt{2}\left(\frac{sin\,2x}{2x}\right)\cdot 2x}{3x} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Пример 1.5. При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда $x \to a$ и $a \neq 0,$ рекомендуется предварительно провести замену $x - a = y$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cos\frac{\pi\cdot x}{6}}{x-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = (x-3=y,\ y\to 0 \text{ при } x\to 3) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\cos\frac{\pi\cdot(y+3)}{6}}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot y}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}} =$$

$$= -\frac{\pi}{6}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}} = -\frac{\pi}{6}\cdot 1 = -\frac{\pi}{6}.$$

Пример 1.6. При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = c$ необходимо иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы $A = \lim\limits_{x\to a} f(x),\ B = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x),$ то $c = A^B\ (A > 0)$;
2) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 1,\ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty,$ то вопрос о нахождении предела c решается непосредственно;
3) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty,$ то следует воспользоваться «вторым замечательным пределом»: $\lim\limits_{x\to a}\left(1+g(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}} = e,$ где $g(x)\to 0$ при $x\to a$ и $e = 2{,}718\ldots$.

$$a)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}} = 0, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1} = \frac{3}{2},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

$$б)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{x+3} = 4^3 = 64, \text{ т.к. } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\cdot 4 = 4,$$

$$\lim_{x\to 0}(x+3)=3.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{3x-6}\right)^{2x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}\cdot\frac{7}{3x-6}\cdot 2x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x}{3x-6}}=e^{14/3}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{3}{x-3}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{3}{x-3}}=$

$$=\lim_{x\to 3}\left\{\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{1}{6-2x}}\right\}^{\frac{(6-2x)\cdot 3}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{18-6x}{x-3}}=e^{-6}.$$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

<u>Определение 2.1.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,$ то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в окрестности точки $x=a$ (при $x\to a$).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ есть также бесконечно малая при $x\to a$.

<u>Определение 2.2.</u> Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x\to a$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c,$ где c – некоторое число, отличное от нуля, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x\to a$, если $c=0,$ то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $g(x)$ при $x\to a$.

Бесконечно малая $f(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с $g(x)$ при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g^{n}(x)}=c,\qquad 0<|c|<+\infty.$$

<u>**Пример 2.1**</u>. При $x\to 0$ определить порядок малости функции $tgx-sinx$ относительно x.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^n\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^n\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2}}{x^n\cos x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\dfrac{x}{2}}{x^n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos\dfrac{x}{2}}{\cos x}=$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\dfrac{x}{2}}{x^n}\cdot 1=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\cdot 2^n}=\frac{4}{2^n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n}.$$

Этот предел будет равен константе $c\neq 0$ при $n=3,$ следовательно, функция $tgx-\sin x$ имеет порядок малости $n=3$ относительно x при $x\to 0$.

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

<u>Пример 2.2.</u> Определить порядок малости относительно x при $x\to 0$ суммы $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^3}$.

Слагаемое $\sqrt[3]{x^2}$ имеет порядок малости $\dfrac{2}{3}$ относительно x, а слагаемое $\sqrt{x^3}$ – порядок $\dfrac{3}{2}$, следовательно, сумма имеет порядок малости $\dfrac{2}{3}$ относительно x при $x\to 0$.

<u>Определение 2.3.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1,$ то бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x\to a$: $f(x)\sim g(x)$.

Например, при $x\to 0$ будем иметь:

$$\sin x\sim x,\quad tgx\sim x,\quad \arcsin x\sim x, arctgx\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad \cos x\sim 1-\frac{x^2}{2},\quad e^x-1\sim x,\quad a^x-1\sim x\cdot\ln a\ (a\neq 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

<u>Пример 2.3.</u>

$$а)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{3^{4tg^2x}-5^{3arcsin^2 3x}}{3sin^2 4x+7arctg^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(3^{4tg^2x}-1\right)-\left(5^{3arcsin^2 x}-1\right)}{3\cdot(4x)^2+7\cdot(x)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4tg^2x\cdot ln3-3arcsin^2 3x\cdot ln5}{55x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\,ln3\cdot x^2-3\,ln5\cdot(3x)^2}{55x^2}=$$

$$=\frac{4\,ln3-27\,ln5}{55}.$$

$$б)\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{4\,arcsin2x}{3tg8x}\right)^{\frac{ln(1+3x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot 2x}{3\cdot 8x}\right)^{\frac{3x}{x}}=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

$$в)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{ln(3-5x)-ln(3+7x)}{2\,sinx}=\lim_{x\to 0}\frac{ln\left[3\left(1-\frac{5}{3}x\right)\right]-ln\left[3\left(1+\frac{7}{3}x\right)\right]}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ln3+ln\left(1-\frac{5}{3}x\right)-ln3-ln\left(1+\frac{7}{3}x\right)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}x}{2x}=-2.$$

<u>Определение 2.4.</u> Если $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$.

Подобно тому, как .то сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

<u>Пример 2.4</u>. Пусть $x\to\infty$. Определить порядок бесконечно большой $f(x)=\dfrac{x^5}{x+2}$ по сравнению с x.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^5}{x+2}:x^n\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^n(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}+x^n\cdot 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}}=1$$

при $n=4$.

<u>Определение 2.5.</u>

1) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x\to\infty$ и $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{c\cdot x^{\alpha}}=1$, где c и α – константы, тогда функция $y=cx^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x\to\infty$.

2) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x \to a$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{c\cdot(x-a)^{\alpha}} = 1,$ где c и α – константы, тогда функция $y = c(x-a)^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x \to a$.

Пример 2.5.

а) Найти асимптотику (асимптотическое представление) функции $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ при $x \to \infty$.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\cdot x^{1/2}},$$

следовательно, асимптотикой функции $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ при $x \to \infty$ является функция $\dfrac{1}{2}x^{-1/2}$; $c = \dfrac{1}{2}$; $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

б) Найти асимптотику функции $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x \to 1$.

При $x \to 1$ функции $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ является бесконечно большой: $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{3(1-x)}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}(1-x)^{1/3}}$.

Асимптотикой в данном случае является функция $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}(1-x)^{-1/3}$.

в) Найти асимптотику функции $f(x) = x^3 - 3x + 2$ при $x \to 1$.

В данном случае при $x \to 1$ функция $f(x)$ является бесконечно малой; $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \sim 3(x-1)^2$.

Получаем асимптотику $y = 3(x-1)^2$; $c = 3$; $\alpha = 2$.

3. Непрерывность функции

Определение 3.1. Если $x < a$ и $x \to a,$ то условно пишут $x \to a - 0,$ аналогично, если $x > a$ $x \to a,$ то $x \to a + 0.$ Числа

$f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называют соответственно пределом слева функции $f(x)$ в точке a и пределом справа функции $f(x)$ в точке a (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство: $f(a-0)=f(a+0)$.

<u>Определение 3.2.</u> Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке a, если

1) она определена в этой точке;

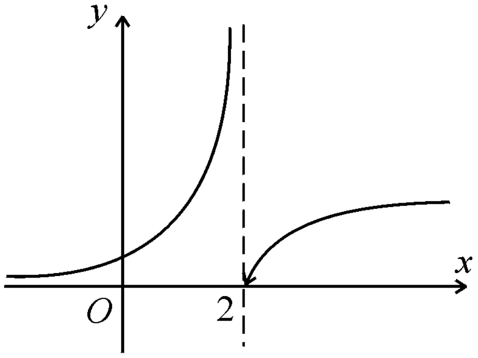
2) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются точками разрыва.

<u>Пример 3.1.</u>

а) Найти точки разрыва функции $y=3^{\frac{1}{2-x}}$, пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.

Функция $y=3^{\frac{1}{2-x}}$ имеет разрыв в точке $x=2$, т.к. она в этой точке не определена. При этом:



$$\lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}}=3^{\frac{1}{+0}}=3^{+\infty}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}}=3^{\frac{1}{-0}}=3^{-\infty}=\frac{1}{3^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

б) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y=\frac{2^{\frac{1}{x+3}}+4x-8}{2^{\frac{1}{x+3}}+4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка $x=-3$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to -3-0}\frac{2^{1/(x+3)}+4x-8}{2^{1\backslash(x+3)}+4}=\frac{2^{-\infty}-12-8}{2^{-\infty}+4}=\frac{0-20}{0+4}=-5;$$

$$\lim_{x\to -3+0} \frac{2^{1/(x+3)}+4x-8}{2^{1\backslash(x+3)}+4}=1,$$ т.к. при $x\to -3+0$ имеем:

$$2^{1/(x+3)}+4x-8\sim 2^{1/(x+3)}; \qquad 2^{1/(x+3)}+4\sim 2^{1/(x+3)}.$$

Величина скачка $\Delta = 1-(-5)=6.$

в) Найти точки разрыва, величину скачка Δ и построить график функции $y=\begin{cases} -3x, & x\le 0 \\ 4\sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2} \\ x^2+1, & \dfrac{\pi}{2}<x. \end{cases}$

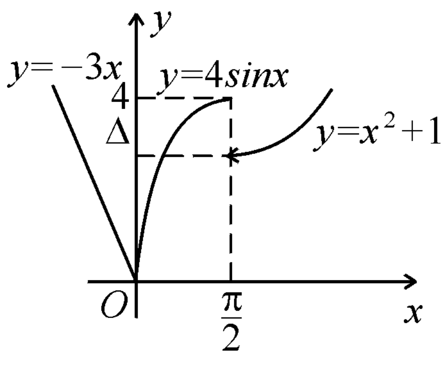
Данная функция непрерывна для $x\in(-\infty;\ 0)\cup\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2};\ +\infty\right).$

Исследуем только точки $x_1=0$ и $x_2=\dfrac{\pi}{2},$ т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}(-3x)=0; \qquad \lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}(4\sin x)=0;$$

$f(0)=-3x\big|_{x=0}=0,$ следовательно, в точке $x=0$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(4\sin x)=4; \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\frac{\pi}{2}=4;$$



$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\left(x^2+1\right)=\frac{\pi^2}{4}+1=3{,}467,$$

следовательно, точка $x=\dfrac{\pi}{2}$ – точка разрыва. Величина скачка

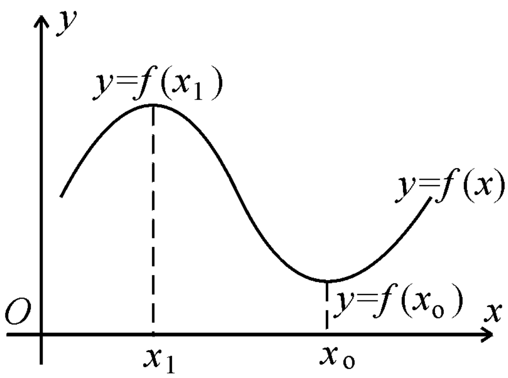
$$\Delta=4-\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)=3-\frac{\pi^2}{4}\approx 0{,}533.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек $x_1,\ x_2$, принадлежащих данному интервале (отрезку), из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ $\left(f(x_1)>f(x_2)\right)$. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ при $a<x<b,$ то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a;\ b]$.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками x (где $f'(x)=0$ или же $f'(x)$ не существует).



Если существует такая двусторонняя окрестность точки x_o, что для всякой точки $x\neq x_o$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x)>f(x_o)$, то точка x_o называется точкой минимума функции $y=f(x)$, а число $f(x_o)$ – минимумом функции $y=f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x\neq x_1$ некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x)<f(x_1)$, то x_1 называется точкой максимума функции $y=f(x)$, а $f(x_1)$ – максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции – экстремумом функции. Если x_o – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_o)=0$ или же $f'(x_o)$ не существует (*необходимое условие существования экстремума*). Обратное утверждение не верно: точки, в которых $f'(x_o)=0$ или $f'(x_o)$ не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$.

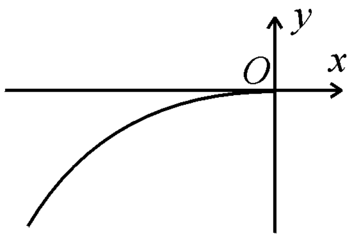
Достаточный признак существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ следующий: если существует такая окрестность $(x_o-\delta, x_o+\delta)$ критической точки x_o, что $f'(x)>0$ при $x_o-\delta<x<x_o$ и $f'(x)<0$ при $x_o<x<x_o+\delta$, то x_o – точка максимума функции $f(x)$; если же $f'(x)<0$ при $x_o-\delta<x<x_o$ и $f'(x)>0$ при $x_o<x<x_o+\delta$, то x_o – точка минимума функции $f(x)$.

Если, наконец, найдется такое положительное число δ, что $f'(x)$ сохраняет неизменный знак при $x_o - \delta < x < x_o + \delta$, то точка x_o не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Наименьшее (*наибольшее*) *значение* непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a;\, b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a;\, b]$.

<u>Пример 1.1.</u> Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = x \cdot \sqrt{-5x}.$$



Область существования: $-5x \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x \le 0.$

Находим критические точки:

$$y' = \sqrt{-5x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{-5x}} \cdot (-5) = \sqrt{-5x} - \frac{5x}{2\sqrt{-5x}} =$$

$$= \frac{-10x - 5x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{-15x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3 \cdot (-5x)}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{-5x} \ge 0.$$

При $x \le 0$ функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке $x = 0$: $\quad y(0) = 0.$

<u>Пример 1.2.</u> Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = \sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}.$$

Область существования: $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Находим критические точки:

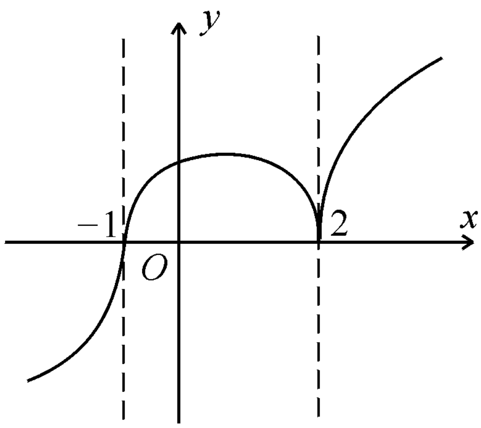
$$y' = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)(x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2 (2-x)^4}} = \frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2 (2-x)^4}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2 (2-x)}},$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,$

y' не существует $\Rightarrow x_2 = -1;\ x_3 = 2.$ Получили три критические точки.

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ +\infty)$
y'	+	не сущ.	+	0	–	не сущ.	+
y	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\lim_{x \to 2+0} y'(x) = \lim_{x \to 2+0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2 (2-x)}} = +\infty; \quad \lim_{x \to 2-0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2 (2-x)}} = -\infty.$$



$$\lim_{x\to 1-0} y'(x) = \lim_{x\to 1+0} y'(x) = +\infty.$$

Так как $y'(x) = k$, где $k -$ угловой коэффициент касательной, то при $x = -1$ и $x = 2$ касательная к графику функции перпендикулярна оси Ox.

$$y(-1) = 0; \quad y(0) = \sqrt[3]{4}; \quad y(2) = 0.$$

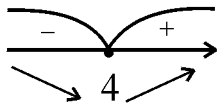
Пример 1.3. Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом 256 м ^{3} такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть $a -$ сторона квадрата основания, $h -$ глубина бассейна;

$$a^2h = 256 \;\Rightarrow\; a^2 = \frac{256}{h}, \quad a = \frac{16}{\sqrt{h}}, \quad h > 0;$$

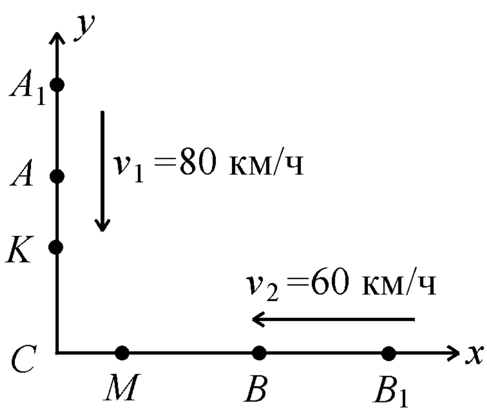
$$S = S_{бок} + S_{дна} = 4ah + a^2 = 4\cdot\frac{16}{\sqrt{h}}\cdot h + \frac{256}{h} = 64\sqrt{h} + \frac{256}{\sqrt{h}} = F(h);$$

$$F'(h) = \frac{64}{2\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32}{\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32h^{3/2} - 256}{h^2} = \frac{32}{h^2}\left(h^{3/2} - 8\right);$$



$F'(h) = 0 \;\Rightarrow\; h^{3/2} = 8; \quad h = 4$. При $h = 4$ величина $F(h) = S$ будет наименьшей.

Пример 1.4. Две прямые железные дороги AA_1 и BB_1 перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте C, причем $AC = 800$ км и $BC = 700$ км. Из пунктов A и B по направлению к C одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно 80 км/ч и 60 км/ч. Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим ?



Отметим положение поездов в момент $t > 0$ точками K и M.

$AK = 80t; \quad BM = 60t;$

$CK = AC - AK = 800 - 80t;$

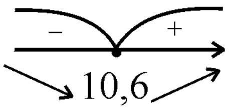
$CM = CB - BM = 700 - 60t;$

$(KM)^2 = (CK)^2 + (CM)^2 =$

$= (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2$; KM минимально, если минимальна величина

$$(KM)^2 = F(t) = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2;$$

$F(t)=2(800-80t)\cdot(-80)+2(700-60t)\cdot(-60)=$
$=-128000+12800t-84000t+7200t=20000t-212000=0;\quad t=10{,}6;$



$t=10{,}6$ – точка минимума функции $F(t)$. Через 10,6 часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.

2. АСИМПТОТЫ

Если точка $(x;\ y)$ непрерывно перемещается по кривой $y=f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Если существует число a такое, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-k_1x\right]=b_1$, то прямая $y=k_1x+b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_2$ и $\lim\limits_{x\to-2}\left[f(x)-k_2x\right]=b_1$, то прямая $y=k_2x+b_2$ будет асимптотой (*левая наклонная асимптота*).

График функции $y=f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

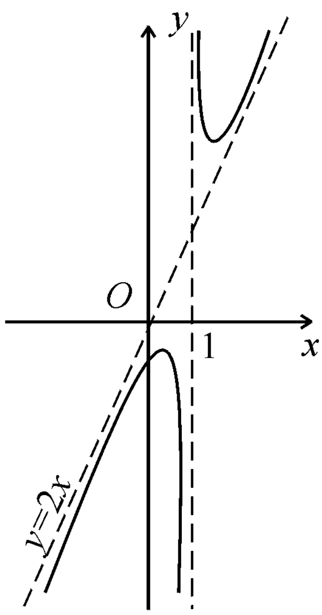
<u>Пример 2.1.</u> Найти асимптоты и построить график функции
$y=2x+\dfrac{3\cos(x-1)}{x-1}$.

Область существования: $x\neq 1$.
Ищем вертикальные асимптоты.
Функция имеет разрыв в точке $x=1$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to1-0}\left(2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}\right)=2+\frac{3\cdot1}{-0}=2-\infty=-\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0}\left(2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}\right)=2+\frac{3\cdot1}{+0}=2+\infty=+\infty;$$

следовательно, $x=1$ – вертикальная асимптота.
Ищем наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$.



$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\left(2x+\frac{3cos(x-1)}{x-1}\right) =$$

$$= 2+0 = 2; \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[2x+\frac{3cos(x-1)}{x-1}-2x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3cos(x-1)}{x-1} = 0.$$

Следовательно, при $x\to\pm\infty$ существует асимптота $y=2x$.

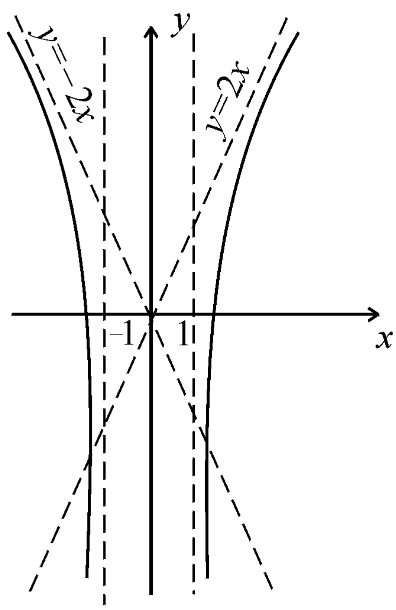
Пример 2.2. Найти асимптоты и построить график функции

$$y=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Область существования: $x^2-1>0;\quad x^2>1;\quad x>1$ и $x<-1.$

$$y=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}};\qquad y(-x)=\frac{2(-x)^2-9}{\sqrt{(-x)^2-1}}=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}\quad\Rightarrow\quad y(x)=y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при $x>1,$ а затем отразить его симметрично относительно оси Oy.



$$\lim_{x\to1+0}\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2-9}{+0}=-\infty\quad\Rightarrow\quad x=1-$$

вертикальная асимптота при $x\to1+0.$

Пусть $x\to1+\infty.$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x^2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{9}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=2.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9-2x\cdot\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2-9\right)^2-4x^2\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(2x^2-9+2x\cdot\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-32x^2+81}{x^3\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(2-\frac{9}{x^2}+2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=0.$$

При $x\to+\infty$ получаем асимптоту $y=2x$. График данной функции пересекает ось Ox при $2x^2-9=0$, т.е. в точках $x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$.

<u>Пример 2.3</u>. Найти асимптоты и построить график функции

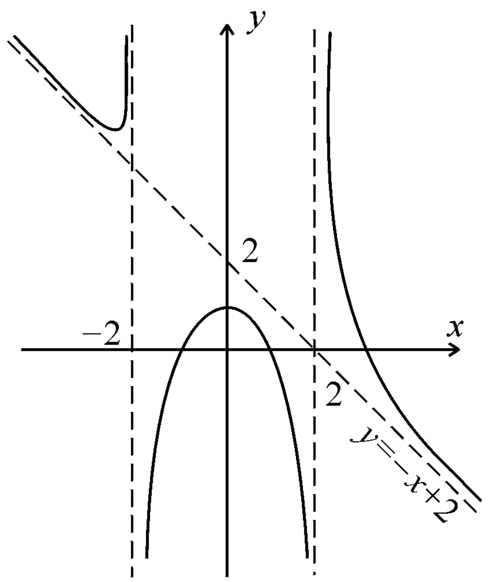
$$y=\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}.$$

Область существования: $4-x^2\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq 2$ и $x\neq -2$.

В точках $x_1=-2$ и $x_2=+2$ функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{-8-8+6+2}{-0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{-8-8+6+2}{+0}=-\infty;$$



$x=-2$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{8-8-6+2}{+0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{8-8-6+2}{-0}=+\infty;$$

$x=2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x\to\pm\infty$ ищем в виде: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{x\left(4-x^2\right)}=$$

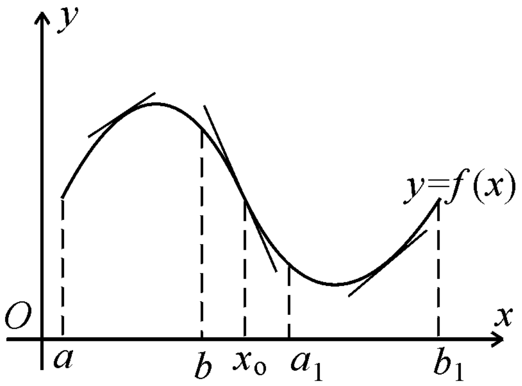
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{1}{-1}=-1; \qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}+x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+x+2}{4-x^2} = 2.$$

При $x \to \pm\infty$ получаем асимптоту $y = -x + 2$.

3. НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ *вогнут вниз* на интервале $(a;\ b)$ (*вогнут вверх* на интервале $(a_1;\ b_1)$), если при $a < x < b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при $a_1 < x < b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала $(a;\ b)$ (или интервала $(a_1;\ b_1)$). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y = f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства $f'(x) < 0 \quad (f'(x) > 0)$.



Точка $(x_o,\ f(x_o))$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба.* Для абсциссы точки перегиба x_o графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_o) = 0$ или $f''(x_o)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками 2-го рода.* Критическая точка 2-го рода x_o является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_o - \delta < x < x_o$ и $x_o < x < x_o + \delta$, где δ – некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

Пример. Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

Имеем: $y' = -2xe^{-x^2}$; $\quad y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода:

$x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают всю область существования функции $(-\infty;\ \ +\infty)$ на три интервала.

x	$\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$
y''	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$\cup$	перегиб	$\cap$	перегиб	$\cup$

Получили: кривая вогнута вверх при $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$

и вогнута вверх при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба.

4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область существования этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области существования. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются): четность, периодичность и т.д.

Далее нужно найти точки разрыва, асимптоты, точки экстремума функции, точки перегиба и т.д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции.

<u>Пример 4.1</u>. Провести полное исследование и построить график функции $y = x\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Область существования: $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

Так как функция определена при всех x, и у нее нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} = +\infty,$ следовательно, наклонных асимптот также нет.

Исследуем функцию по первой производной.

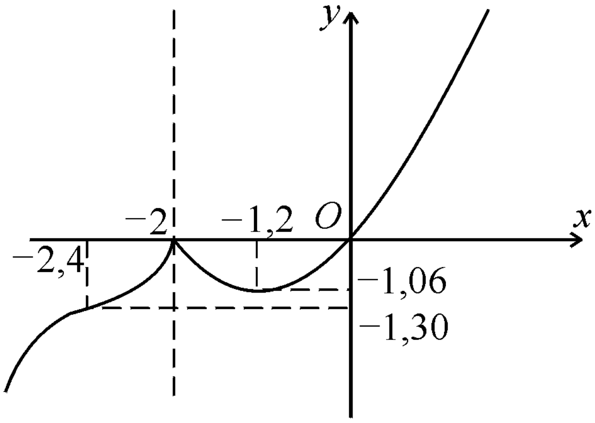
$$y' = \left[x\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}\right] = (x+2)^{2/3} + x\cdot\frac{2}{3}\cdot(x+2)^{-1/3} = \frac{3(x+2)+2x}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x+6=0, \quad x=-1{,}2;$

y' не существует $\quad \Rightarrow \quad x+2=0, \quad x=-2.$

x	$(-\infty;\ -2)$	-2	$(-2;\ \ -1{,}2)$	$-1{,}2$	$(-1{,}2;\ \ +\infty)$
y'	+	не сущ.	–	0	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$y_{max} = y(-2) = 0$ (касательная в этой точке перпендикулярна оси Ox).



$y_{min} = y(-1{,}2) = -1{,}2 \cdot \sqrt[3]{0{,}64} \approx -1{,}06$ (касательная в этой точке параллельна оси Ox).

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = \left[\frac{5x+6}{(x+2)^{2/3}}\right]' = \frac{5\cdot\sqrt[3]{x+2} - (5x+6)\cdot\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{15(x+2) - (5x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{10x+24}{3\cdot\sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

$y'' = 0$ при $x = -2{,}4$; $\quad y''$ не существует при $x = -2$.

x	$(-\infty;\ -2{,}4)$	$-2{,}4$	$(-2{,}4;\ \ -2)$	-2	$(-2;\ \ +\infty)$
y''	–	0	+	не сущест.	+
y	$\cap$	перегиб	$\cup$		$\cup$

$y_{перегиба} = y(-2{,}4) = -2{,}4 \cdot \sqrt[3]{(-2{,}4)^2} \approx -1{,}30; \qquad y(0) = 0.$

Пример 4.2. Провести полное исследование и построить график функции $y = \left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^2$.

Область существования: $x \neq -2$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

$x = -2$ – точка разрыва, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to 2-0}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2=\left(\frac{4+1}{-0}\right)^2=+\infty;\qquad \lim_{x\to 2+0}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2=\left(\frac{4+1}{+0}\right)^2=+\infty$$

$\Rightarrow\quad x=2\ -$ вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x\to\pm\infty$ ищем в виде: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2=4.$$

При $x\to\pm\infty$ получаем асимптоту $y=4$.

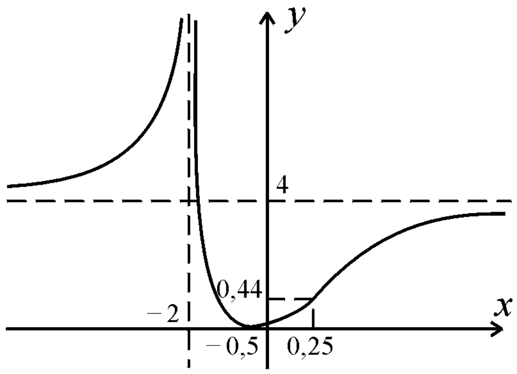
Исследуем функцию по первой производной.

$$y'=2\cdot\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)\cdot\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2}=\frac{6(2x+1)}{(x+2)^2};$$

$y'=0\quad\Rightarrow\quad 2x+1=0,\quad x=-0{,}5;$

y' не существует $\quad\Rightarrow\quad x=-2.$

x	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ \ -0{,}5)$	$-0{,}5$	$(-0{,}5;\ \ +\infty)$
y'	+	–	0	+
y	↗	↘	min	↗



$y_{min}=y(-0{,}5)=0.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y''=6\cdot\frac{2(x+2)^3-3(x+2)^2\cdot(2x+1)}{(x+2)^6}=$$

$$=6\cdot\frac{2(x+2)-3(2x+1)}{(x+2)^4}=\frac{6(1-4x)}{(x+2)^4};$$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 4x = 0; \qquad x = 0{,}25;$

y'' не существует $\quad \Rightarrow \quad x = -2.$

x	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\quad 0{,}25)$	$0{,}25$	$(0{,}25;\quad +\infty)$
y''	$+$	$+$	0	$-$
y	$\cup$	$\cup$	перегиб	$\cap$

$$y_{перегиба} = y(0{,}25) = \left(\frac{1{,}5}{2{,}25}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

__**Пример 4.3.**__ Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{e^{x-3}}{x-3}$.

Область существования: $x - 3 \neq 0; \qquad x \neq 3.$

$y(x) \neq y(-x)$ – функция общего вида.

В точке $x = 3$ функция терпит разрыв, т.к. в ней она не определена.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{e^{x-3}}{x-3} = -\infty, \\ \lim\limits_{x \to 3+0} \dfrac{e^{x-3}}{x-3} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = 3 \text{ – вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

1) $x \to +\infty,$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{\left(x^2 - 3x\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{2x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{(2x-3)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{2} = +\infty, \text{ следовательно, при } x \to +\infty$$

наклонных асимптот нет.

2) $x \to -\infty,$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \frac{0}{+\infty} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x-3}}{x-3} = 0,$$

при $x \to -\infty$ получаем асимптоту $y = 0$.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left(\frac{e^{x-3}}{x-3}\right)' = \frac{e^{x-3}\cdot(x-3) - e^{x-3}}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-3-1}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2},$$

$y' = 0 \;\Rightarrow\; x - 4 = 0,\; x = 4;$ $\qquad y'$ не существует $\;\Rightarrow\; x = 3.$

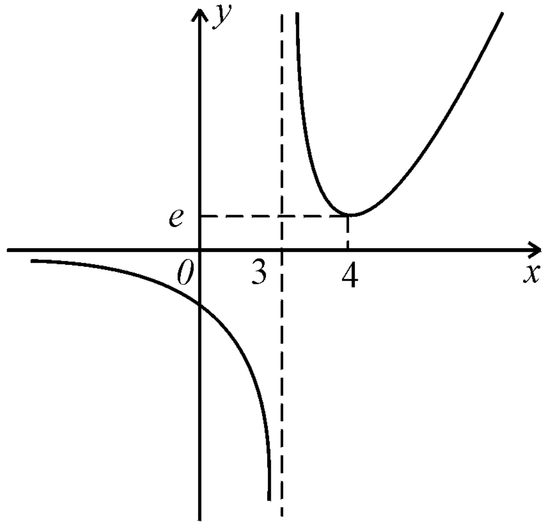
x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ \ 4)$	4	$(4;\ \ +\infty)$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$y_{min} = y(4) = e \approx 2{,}72.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = e^{x-3}\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2} + e^{x-3}\cdot\frac{(x-3)^2 - (x-4)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{e^{x-3}}{(x-3)^2}\cdot\frac{x^2 - 7x + 12 - x + 5}{x-3} = \frac{e^{x-3}\cdot\left(x^2 - 8x + 17\right)}{(x-3)^3}; \qquad y'' \neq 0;$$



y'' не существует $\;\Rightarrow\; x = 3.$

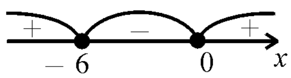
x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ \ +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

$$y(0) = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \approx \text{––},02.$$

Пример 4.4. Провести полное исследование и построить график функции $y = ln\dfrac{x+6}{x} - 1.$

Область существования: $\dfrac{x+6}{x} > 0.$

$x > 0,\;\; x < -6.$



Функция общего вида.

$$\lim_{x\to -6-0}\left[ln\frac{x+6}{x}-1\right]=-\infty \quad \Rightarrow \quad x=-6 \; - \text{ вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x\to -+0}\left[ln\frac{x+6}{x}-1\right]=+\infty \quad \Rightarrow \quad x=-0 \; - \text{ вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ln\frac{x+6}{x}-1}{x}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[ln\frac{x+6}{x}-1\right]=-1.$$

При $x\to\pm\infty$ получаем асимптоту $y=-1$.

Исследуем функцию по первой производной.

x	$(-\infty;\ -6)$	$(0;\ +\infty)$
y'	$-$	$-$
y	$\searrow$	$\searrow$

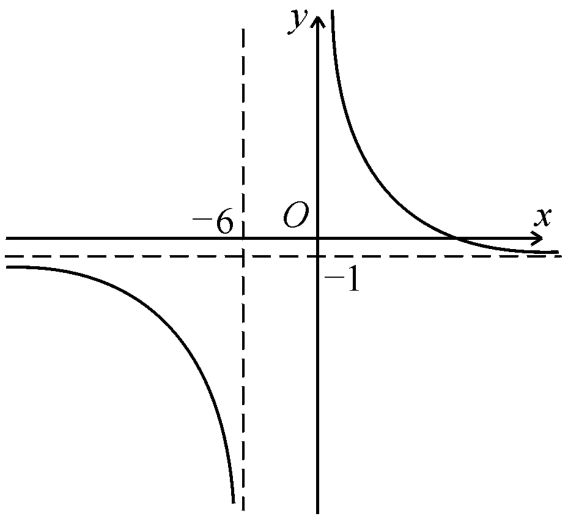
$$y'=\frac{x}{x+6}\cdot\frac{x-x-6}{x^2}=\frac{-6}{x(x+6)}\neq 0.$$

Экстремумов у функции нет.

Исследуем функцию по второй производной.

$$y''=-6\cdot\frac{-(x+6+x)}{x^2(x+6)^2}=\frac{6(2x+6)}{x^2(x+6)^2}=\frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2};$$

$$y''=0 \quad \Rightarrow \quad x+3=0; \qquad x=-3 \; - \text{ не входит в область существования.}$$



x	$(-\infty;\ -6)$	$(0;\ +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

Точек перегиба нет.

$$ln\frac{x+6}{x}-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{6}{e-1};$$

$$y\left(\frac{6}{e-1}\right)=0.$$

2-ой семестр

ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определенный и неопределенный интегралы

Теоретические сведения.

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ .$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ − подынтегральным выражением, $F(x)$ − результат интегрирования, C − произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$.
2. $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$, где A − постоянная.
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица простейших интегралов:

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $\quad \int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0)$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C, (A \neq 0)$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

Основные методы интегрирования:

1. Подведение под знак дифференциала:

а) под знаком дифференциала можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) + A)$;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель: $df(x) = \frac{1}{A} d(Af(x))$; в) под знак дифференциала подводится функция по правилу: $f'(x)dx = df(x)$.

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$\int udv = uv - \int vdu$, где $u = u(x), v = v(x)$.

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а) $\int a^x \cdot P_n(x)dx,\ \ u = P_n(x),\qquad dv = a^x dx$.

б) $\int \sin ax \cdot P_n(x)dx,\ \ u = P_n(x),\quad dv = \sin axdx$.

в) $\int \cos ax \cdot P_n(x)dx,\ \ u = P_n(x),\quad dv = \cos axdx$,

где $P_n(x)$ − многочлен *n*-ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \text{ где } x = \varphi(t).$$

***Пример выполнения задания*.**

Найти неопределенные интегралы:
а) $\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3}dx$; в) $\int (3x+4)e^{3x}dx$.

Решение.

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \left(-0{,}5\right)\int (1-x^2)^{-0{,}5} d(1-x^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - 0{,}5 \cdot \frac{(1-x^2)^{0{,}5}}{0{,}5} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3(\arcsin x)^2 \cdot (\arcsin x)' - 0{,}5(1-x^2)^{-0{,}5}(1-x^2)' + C' =$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) в этом случае подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 17 & \underline{x^2 - 4x + 3} \\
\underline{x^3 - 4x^2 + 3x} & x + 4 \\
4x^2 - 3x - 17 & \\
\underline{4x^2 - 16x - 12} & \\
13x - 29 &
\end{array}
$$

Тогда

$$\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \left(x + 4 + \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} \right) dx = \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x - 29}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}, \quad 13x - 29 = A(x-3) + B(x-1).$$

При $x = 3$ имеем $13 \cdot 3 - 29 = B(3-1)$, откуда $B = 5$;

при $x = 1$ имеем $13 \cdot 1 - 29 = A(1-3)$, откуда $A = 8$.

Получаем $\dfrac{13x - 29}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{8}{x-1} + \dfrac{5}{x-3}$ и интегрируем

$$\int \frac{13x - 29}{(x-1)(x-3)} dx = \int \frac{8}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-3} dx = 8 \int \frac{dx}{x-1} + 5 \int \frac{dx}{x-3} = 8 \ln|x-1| + 5 \ln|x-3| + C$$

и окончательно получаем

$$\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 8 \ln|x-1| + \ln|x-3| + C.$$

Проверим результаты дифференцированием:

$$\left(\frac{x^2}{2} + 4x + 8 \ln|x-1| + \ln|x-3| + C \right)' = \frac{2x}{2} + 4 + \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3} = \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Замечание.

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$\int \frac{A_1}{x-a}dx = A_1 \ln|x-a| + C$; $\int \frac{A_k}{(x-a)^k}dx = \frac{A_k}{(-k+1)}(x-a)^{-k+1} + C$,

($k = 2,3,...$);

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

в) этот интеграл находим методом интегрирования по частям.

Примем $u = 3x+4$, $dv = e^{3x}dx$, тогда $du = 3dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int (3x+4)e^{3x}dx = (3x+4)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 3dx = \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3}e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C.$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1)+C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}(3x+4),$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Определенный интеграл

В общем виде определенный интеграл записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Нижний предел интегрирования стандартно обозначается буквой a.
Верхний предел интегрирования стандартно обозначается буквой b.
Отрезок $[a;b]$ называется *отрезком интегрирования*.

формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>Пример 1</u>

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3-1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

<u>Пример 2</u>

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x}$$

<u>Пример 3</u>

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8+2x-x^2)dx$$

Решение:

$$\int_{-2}^4 (8+2x-x^2)dx \overset{(1)}{=} 8\int_{-2}^4 dx + 2\int_{-2}^4 xdx - \int_{-2}^4 x^2dx \overset{(2)}{=} 8(x)\Big|_{-2}^4 + 2\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^4 - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^4 \overset{(3)}{=}$$

$$= 8(4-(-2)) + (4^2-(-2)^2) - \frac{1}{3}(4^3-(-2)^3) = 8\cdot 6 + (16-4) - \frac{1}{3}(64+8) =$$

$$= 48+12-24 = 36$$

<u>Пример 4</u>

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-3}^1 (2x^2+3x-1)dx$$

Замена переменной в определенном интеграле

Новизна состоит в вопросе, **как поменять пределы интегрирования при замене**.

<u>Пример 5</u> Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$$

Главный вопрос здесь вовсе не в определенном интеграле, а в том, как правильно провести замену. Смотрим в **таблицу интегралов** и прикидываем, на что у нас больше всего похожа подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2)^2+16}} = (*)$$

Из вышеуказанных соображений совершенно естественно напрашивается замена: $t = x^2$

Таким образом, в знаменателе будет всё хорошо: $\sqrt{t^2+16}$.

$dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$

Находим новые пределы интегрирования.

Это достаточно просто. Смотрим на нашу замену $t = x^2$ и старые пределы интегрирования $a = 0$, $b = \sqrt{3}$.

Сначала подставляем в выражение замены $t = x^2$ нижний предел интегрирования, то есть, ноль:

$$t_1 = 0^2 = 0$$

Потом подставляем в выражение замены $t = x^2$ верхний предел интегрирования, то есть, корень из трёх:

$$t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

Продолжаем решение.

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left|t+\sqrt{t^2+16}\right|\right)\Big|_0^3 \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left(3+\sqrt{25}\right) - \ln\left(0+\sqrt{0+16}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}35$$

Пример 6

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin xdx}{\cos^2 x+1}$$

(подвести множитель под знак дифференциала)

Пример 7

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$$ (подвести множитель под знак дифференциала)

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Пример 8

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/4} xtg^2xdx$$

Решаем.

$$\int_0^{\pi/4} xtg^2xdx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = tg^2xdx \Rightarrow v = \int tg^2xdx = tgx - x$

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

$$(*) \overset{(1)}{=} (x(tgx - x))\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}(tgx - x)dx \overset{(2)}{=} \frac{\pi}{4}\cdot\left(tg\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 0\cdot(tg0 - 0) - \int_0^{\pi/4} tgxdx + \int_0^{\pi/4} xdx \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}(x^2)\Big|_0^{\pi/4} \overset{(4)}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - 0^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Пример 9

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2xdx$$

Домашнее задание:

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int_0^2 (5x^3+6)\,dx$

2. $\int_{-1}^1 (x^3+2x)\,dx$

3. $\int_0^{\pi/4} \frac{4\,dx}{\cos^2 x}$

4. $\int_{-0,5}^{0,5} 3\,(1+z^2)\,dz$

5. $\int_3^6 \frac{dx}{x}$

6. $\int_0^1 \frac{3\,dx}{x+3}$

7. $\int_4^5 (4-x)^3\,dx$

8. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos(2x-\frac{\pi}{6})\,dx$

9. $\int_0^{\pi} \cos 4x\,dx$

10. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

11. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$

12. $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$

13. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$

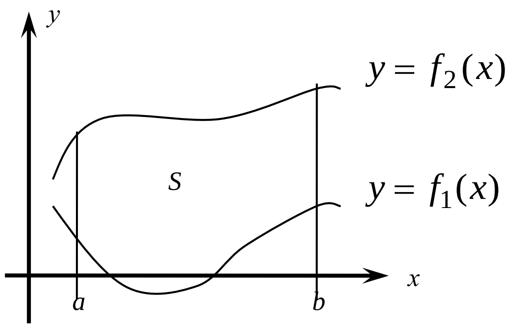
14. $\int_0^1 x e^{-x}\,dx$

15. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4-x\sin x}{x}\,dx$

16. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}}$

Приложения определенных интегралов

Теоретические сведения.



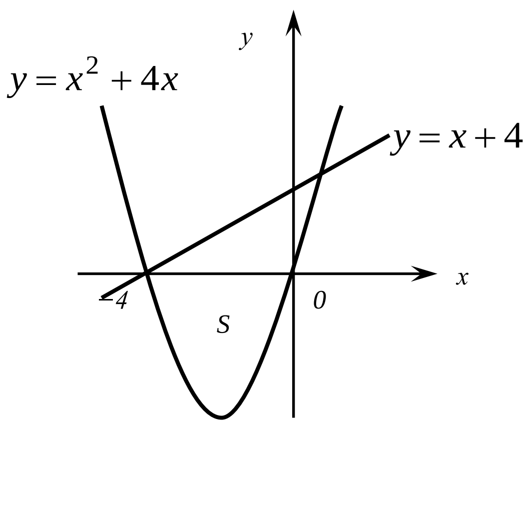
Если на плоскости Oxy задана фигура, ограниченная двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь S такой фигуры может быть вычислена по формуле $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$.

***Пример выполнения задания*.**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение.

Заданные линии ограничивают на плоскости Оху криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \ x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{-4}^{1}(x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int(4 - 3x - x^2)dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \ (\text{кв. ед.}).$$

Теоретические сведения.

Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью *Ox* и прямыми $x = a$, $x = b$,

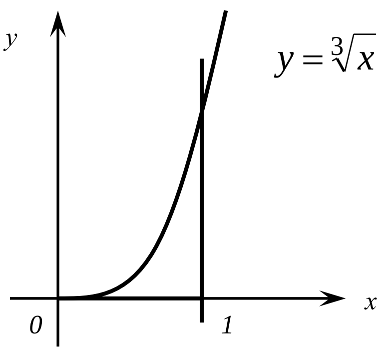
1) вокруг оси *Ox*, вычисляются по формуле $V_x = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$;

2) вокруг оси *Oy*, вычисляются по формуле $V_y = 2\pi\int\limits_a^b xf(x)dx$.

***Пример выполнения задания*.**

Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей *Ox* и *Oy* криволинейного треугольника, образованного кривой $y = \sqrt[3]{x}$, осью *Ox* и прямой $x = 1$.

Решение.



1) объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox*, равен

$$V_x = \pi\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \pi\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \ (\text{куб. ед.})$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy, равен

$$V_y = 2\pi\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{x}dx = 2\pi\left.\frac{x^{7/3}}{7/3}\right|_0^1 = \frac{6\pi}{7}\ (\text{куб. ед.}).$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнения вида $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ или

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{1.1}$$

где $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ и $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ известные функции, а $y = y(x)$ − искомая функция, называется ***дифференциальным уравнением n-го порядка.*** Уравнение (1.1) называется уравнением, разрешенным относительно старшей производной.

Функция

$$y = y(x, C_1, C_2, .., C_n), \tag{1.2}$$

содержащая n независимых произвольных постоянных и удовлетворяющая уравнению (1.1), называется ***общим решением*** уравнения (1.1). Придавая в соотношении (1.1) постоянным $C_1, C_2, .., C_n$ определенные значения, получаем ***частное решение*** уравнения (1.1).

Если для искомого частного решения дифференциального уравнения заданы ***начальные условия*** **(*задача Коши*)**

$$y(x_o) = y_o,\quad y'(x_o) = y'_o,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}, \tag{1.3}$$

и известно общее решение уравнения, то произвольные постоянные $C_1, C_2, .., C_n$ определяются, если это возможно, из системы уравнений

$$\begin{cases} y_o = y(x_o, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y'_o = y(x_o, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_o{}^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_o, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases}$$

□ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

I. Виды дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка с неизвестной функцией $y(x)$, разрешенное относительно y', имеет вид

$$y' = f(x, y), \tag{2.1}$$

где $f(x, y)$ – заданная функция. В некоторых случаях выгодно за искомую функцию считать переменную x и записывать уравнение (2.1) в виде

$$x' = g(x, y), \tag{2.1'}$$

где $g(x, y) = 1/f(x, y)$.

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и $x' = \dfrac{dx}{dy}$, дифференциальные уравнения (2.1) и (2.1’) можно записать в симметричной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{2.2}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – известные функции.

Начальные условия (1.3) в этом случае принимают вид

$$y(x_o) = y_o \text{ или } y(x)\Big|_{x=x_o} = y_o.$$

Общим решением является функция $y = y(x, C)$, где C – произвольная постоянная, удовлетворяющая условию (2.1) или (2.2).

2.Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{2.3}$$

а так же в виде

$$M(x) \cdot N(y)dx = P(x) \cdot Q(y)dy. \tag{2.4}$$

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, а в другую только y, и затем проинтегрировать обе части.

(2.3) $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(x), \quad \dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad \int\dfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$

(2.4) $\Rightarrow \dfrac{M(x)}{P(x)}dx = \dfrac{Q(y)}{N(y)}dy, \quad \int\dfrac{M(x)}{P(x)}dx = \int\dfrac{Q(y)}{N(y)}dy.$

<u>Замечание.</u> При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие эти выражения в ноль.

<u>Пример 2.1.</u> Решить уравнение $x^2y^2y' + 1 = y.$

<u>Решение.</u> Приводим это уравнение к виду (2.4):

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1; \quad x^2y^2dy = (y-1)dx.$$

Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y^2}{y-1}dy = \int\frac{dx}{x^2}; \quad \int\left(y + 1 + \frac{1}{y-1}\right)dy = \int\frac{dx}{x^2};$$

$$\frac{y^2}{2} + y + ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y - 1 = 0$, т.е. $y = 1$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение этих функций убеждаемся, что $y = 1$ – решение уравнения, а $x = 0$ – нет.

3.Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения Бернулли.

Уравнения вида

$$y' + p(x)\cdot y = q(x) \tag{2.5}$$

называется линейным, заметим, что при $q(x) = 0$ линейное уравнение становится уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение вида

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^{\alpha}$$

(2.6) при $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ называется уравнением Бернулли (при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ получаем линейное уравнение).

Оба эти уравнения можно решить с помощью подстановки

$$y(x) = u(x)\cdot v(x).$$

Тогда уравнение (2.5), например, примет вид

$$u'\cdot v+u\cdot v'+p(x)\cdot u\cdot v=q(x) \text{ или}$$

$$u'\cdot v+u\cdot\left[v'+p(x)\cdot v\right]=q(x). \qquad (2.7)$$

Если потребовать, чтобы

$$v'+p(x)\cdot v=0, \qquad (2.8)$$

то из (2.8) найдем v, а затем из (2.7) получим $u'\cdot v=q(x)$ и найдем u, а, следовательно, и $y=u\cdot v$.

<u>Пример 2.3</u>. Найти частное решение уравнения

$$y'-y\cdot tgx=\frac{1}{cos\,x}, \qquad y(0)=1.$$

<u>Решение.</u> Используем подстановку $y=u\cdot v,\quad y'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Тогда уравнение принимает вид

$$u'\cdot v+u\cdot v'-u\cdot v\cdot tgx=\frac{1}{cos\,x}, \quad u'\cdot v+u\cdot\left(v'-v\cdot tgx\right)=\frac{1}{cos\,x},$$

отсюда

$$\begin{cases} v'-v\cdot tgx=0 \\ u'\cdot v=\dfrac{1}{cos\,x}. \end{cases} \qquad (2.9)$$

Решаем первое из уравнений (2.9):

$$v'=v\cdot tgx; \qquad \frac{dv}{v}=tgx\cdot dx; \qquad \int\frac{dv}{v}=\int tgx\cdot dx; \qquad ln|\,v\,|=-ln|\,cos\,x\,|,$$

(при вычислении этих интегралов произвольная постоянная не пишется), откуда

$$v=\frac{1}{cos\,x}.$$

Из второго уравнения (2.9) находим $u(x)$:

$$u'\cdot\frac{1}{cos\,x}=\frac{1}{cos\,x}, \qquad u'=1, \qquad \int du=\int dx, \qquad u=x+C.$$

Следовательно,

$$y=u\cdot v=(x+C)\cdot\frac{1}{cos\,x}.$$

Найдем частное решение. Так как $y(0)=1$, то

$$1=(0+C)\cdot\frac{1}{1} \quad\Rightarrow\quad C=1.$$

Подставляем это значение в общее решение:

$$y=(x+1)\cdot\frac{1}{cos\,x}.$$

Это и есть искомое частное решение.

<u>Пример 2.4.</u> Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{4}{x} \cdot y = x \cdot \sqrt{y}.$$

<u>Решение.</u> Это уравнение Бернулли $(\alpha = 1/2)$. Заметим, что данное уравнение имеет решение $y = 0$. Чтобы найти решение, отличное от нулевого, проведем замену $y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{4}{x} \cdot u \cdot v = x\sqrt{u \cdot v} \text{ или}$$

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' - \frac{4}{x} \cdot v \right) = x\sqrt{u \cdot v}.$$

Для определения u и v имеем:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{4}{x} \cdot v = 0 \\ u' \cdot v = x\sqrt{u \cdot v}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Из первого уравнения (2.10) находим:

$$\frac{dv}{v} = \frac{4}{x} dx; \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{4}{x} d\,x; \qquad ln|\,v\,| = 4\,ln|\,x\,|; \qquad v = x^4,$$

тогда из второго уравнения (2.10):

$$u' \cdot x^4 = x \cdot \sqrt{u \cdot x^4}; \quad u' \cdot x = \sqrt{u}; \quad \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{d\,x}{x}; \quad 2\sqrt{u} = ln|\,x\,| + 2C;$$

$$\sqrt{u} = \frac{1}{2} ln|\,x\,| + C; \qquad u = \left(\frac{1}{2} ln|\,x\,| + C \right)^2,$$

следовательно, общее решение получим в виде:

$$y = 0; \qquad y = x^4 \cdot \left(\frac{1}{2} ln|\,x\,| + C \right)^2.$$

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

I. Уравнение вида

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \tag{4.1}$$

где p, q – постоянные, $y(x)$ – неизвестная функция, называется ***линейным однородным*** дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Если $k_1,\ k_2$ – корни ***характеристического уравнения***

$$k^2 + p \cdot k + q = 0, \tag{4.2}$$

то общее решение уравнения (4.1) записывается в одном из следующих трех видов:

1) $y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$, если k_1, k_2 −вещественны и $k_1 \neq k_2$;

2) $y = e^{kx}\left(C_1 + xC_2\right)$, если $k_1 = k_2 = k$;

3) $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$, если $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$,

$\beta \neq 0$, i − мнимая единица $\left(i^2 = -1\right)$.

C_1, C_2 − произвольные постоянные.

Пример 4.1. Найти общие решения уравнений:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

б) $y'' + 2y' + 5y = 0$;

в) $y'' + 2y' + y = 0$.

Решение.

а) Решаем характеристическое уравнение: $k^2 - 3k + 2 = 0$,

$$k_{1,2} = 1{,}5 \pm 0{,}5; \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2,$$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ − общее решение.

б) Решаем характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$,

$$k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i; \quad k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i,$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2.$$

$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$ − общее решение.

в) Решаем характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 1 = 0$,

$$k_1 = k_2 = k = -1.$$

$y = e^{-x}\left(C_1 + xC_2\right)$ − общее решение.

II. Общее решение ***линейного неоднородного*** дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \tag{4.3}$$

можно записать в виде

$$y = y_o + y_*,$$

где y_o − общее решение соответствующего однородного уравнения (4.1), определяемое по формулам 1) – 3), а y_* − какое-либо частное решение данного неоднородного уравнения (4.3).

1). Функция y_* может быть найдена методом вариации произвольных постоянных, если решение y_o записано в виде $y_o = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Согласно этому методу решение y_* ищется в виде:

$$y_* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x), \quad C_1' = \dfrac{dC_1}{dx}, \quad C_2' = \dfrac{dC_2}{dx}. \end{cases}$$

<u>Пример 4.2.</u> Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

<u>Решение</u> Решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

$$k^2 + 1 = 0; \quad k = \pm i \Rightarrow \alpha = 0, \ \beta = 1, \text{ следовательно,}$$

$$y_o = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

тогда $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, и частное решение заданного неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_* = C_1(x) \cdot \cos x + C_2(x) \cdot \sin x.$$

Относительно функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \cos x + C_2'(x) \cdot \sin x = 0 \\ C_1'(x) \cdot (-\sin x) + C_2'(x) \cdot \cos x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Из первого уравнения $C_2' = -C_1' \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x}$, подставляя это выражение для C_2' во второе уравнение, получим

$$-C_1' \cdot \sin x - C_1' \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} \quad \text{или} \quad -C_1' \cdot \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x},$$

$$C_1' = -1 \Rightarrow C_1 = -x,$$

$$C_2' = 1 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow C_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x|.$$

Решение y_* принимает вид:

$$y_* = -x \cdot \cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|.$$

Получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = y_o + y_* = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x - x \cdot \cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x| =$$

$$= (C_1 - x) \cdot \cos x + (C_2 + \ln|\sin x|) \cdot \sin x.$$

2). Частное решение y_* может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в случаях, когда $f(x)$ имеет специальный вид.

$a)$ $f(x) = P_m(x)$, где

$$P_m(x) = A_o x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m \quad - \tag{4.4}$$
заданный многочлен степени $m \left(A_o \neq 0\right)$.

Частное решение y_* в этом случае следует искать в виде:

$$y_* = Q_m(x) = b_o x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m, \tag{4.5}$$
если число $k = 0$ не является корнем характеристического уравнения (4.2);

$$y_* = x \cdot Q_m(x),$$
если число $k = 0$ является один раз корнем характеристического уравнения (4.2) и

$$y_* = x^2 \cdot Q_m(x),$$
если число $k = 0$ является два раза корнем характеристического уравнения (4.2).

Коэффициенты $b_o,\ b_1, \ldots, b_m$ находятся методом неопределенных коэффициентов.

__Пример 4.3__. Решить уравнение $y'' + y' = 2x + 3$.

<u>Решение.</u> Находим сначала общее решение соответствующего однородного уравнения.

$$y'' + y' = 0, \quad k^2 + k = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -1,$$
$$y_o = C_1 + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Так как число $k = 0$ является один раз корнем характеристического уравнения, и $f(x) = 2x + 3$ – многочлен степени $m = 1$, то частное решение y_* ищем в виде

$$y_* = x \cdot \left(b_o x + b_1\right) = b_o x^2 + b_1 x.$$

Подставляя y_* в исходное уравнение, получим:

$$2b_o + 2b_o x + b_1 = 2x + 3 \quad \text{или} \quad 2b_o x + \left(2b_o + b_1\right) = 2x + 3 \quad \Rightarrow$$
$$2b_o = 2 \quad \text{и} \quad 2b_o + b_1 = 3,$$
следовательно, $b_o = 1$ и $b_1 = 1$, тогда $y_* = x(x+1)$.

Общее решение исходного уравнения

$$y = y_o + y_* = C_1 + C_2 \cdot e^{-x} + x(x+1).$$

б) $f(x) = e^{ax} \cdot P_m(x)$, где $a = const$, $P_m(x)$ определяется соотношением (4.4).

В этом случае

$$y_* = e^{ax} \cdot Q_m(x),$$
если число $k = a$ не является корнем характеристического уравнения (4.2),

$$y_* = e^{ax} \cdot Q_m(x) \cdot x,$$

если число $k = a$ является один раз корнем характеристического уравнения (4.2) и

$$y_* = e^{ax} \cdot Q_m(x) \cdot x^2,$$

если число $k = a$ является два раза корнем характеристического уравнения (4.2).

Многочлен $Q_m(x)$ имеет вид (4.5).

<u>Пример 4.4.</u> Решить уравнение $y'' - 2y' + y = x \cdot e^x$.

<u>Решение.</u> Находим сначала y_o.

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad k^2 - 2k + 1 = 0, \quad k_1 = k_2 = 1,$$

$$y_o = e^x \cdot \left(C_1 + xC_2\right).$$

Так как $a = 1$ является два раза корнем характеристического уравнения, и $m = 1$, то решение y_* ищем в виде

$$y_* = e^x \cdot \left(b_o x + b_1\right) x^2 = e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2\right).$$

Тогда $y_*' = e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2 + 3b_o x^2 + 2b_1 x\right),$

$$y_*'' = e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2 + 6b_o x^2 + 4b_1 x + 6b_o x + 2b_1\right),$$

из исходного уравнения получим

$$e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2 + 6b_o x^2 + 4b_1 x + 6b_o x + 2b_1\right) -$$

$$-2e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2 + 3b_o x^2 + 2b_1 x\right) + e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2\right) = x \cdot e^x,$$

$$b_o x^3 + b_1 x^2 + 6b_o x^2 + 4b_1 x + 6b_o x + 2b_1 - 2b_o x^3 - 2b_1 x^2 - 6b_o x^2 -$$

$$-4b_1 x + b_o x^3 + b_1 x^2 = x,$$

$$6b_o x + 2b_1 = x,$$

$$6b_o = 1, \quad 2b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_o = \frac{1}{6}, \quad b_1 = 0.$$

Следовательно, $y_* = \frac{1}{6} x^3 \cdot e^x$, и общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = y_o + y_* = e^x \cdot \left(C_1 + xC_2\right) + \frac{1}{6} x^3 \cdot e^x.$$

в) $f(x) = e^{ax} \cdot \left[P_m(x) \cos bx + R_s(x) \sin bx\right]$, где $P_m(x)$ и $R_s(x)$ – многочлены степени m и s соответственно. Тогда

$$y_* = e^{ax} \cdot \left[S_N(x) \cos bx + T_N(x) \sin bx\right],$$

если число $k = a + ib$ не является корнем характеристического уравнения (4.2), и

$$y_* = x \cdot e^{ax} \cdot \left[S_N(x) \cos bx + T_N(x) \sin bx\right],$$

если число $k = a + ib$ является корнем характеристического уравнения (4.2), при этом $N = max(m, s)$, $S_N(x)$ и $T_N(x)$ – многочлены степени N с неопределенными коэффициентами.

<u>Пример 4.5</u>. Решить уравнение $y'' + 4y = 4(sin\,2x + cos\,2x)$.

<u>Решение.</u> решаем соответствующее однородное уравнение.

$$y'' + 4y = 0, \quad k^2 + 4 = 0, \quad k = \pm 2i, \quad k_1 = 2i, \quad k_2 = -2i,$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2,$$

$$y_o = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Так как $P_m(x) = R_s(x) = 4$, то $m = s = 0$, $N = 0$, $a = 0$, $b = 2 \Rightarrow$ $a + ib = 2i$ – один раз корень характеристического уравнения, частное решение y_* ищем в виде

$$y_* = x \cdot (b_o \cos 2x + c_o \sin 2x).$$

$$y_*' = b_o \cos 2x + c_o \sin 2x + 2x \cdot (-b_o \sin 2x + c_o \cos 2x),$$

$$y_*'' = 4 \cdot (-b_o \sin 2x + c_o \cos 2x) - 4x \cdot (b_o \cos 2x + c_o \sin 2x).$$

Подставляем в уравнение:

$$4 \cdot (-b_o \sin 2x + c_o \cos 2x) - 4x \cdot (b_o \cos 2x + c_o \sin 2x) +$$
$$+ 4x \cdot (b_o \cos 2x + c_o \sin 2x) = 4(\sin 2x + \cos 2x),$$

$$-b_o \sin 2x + c_o \cos 2x = \sin 2x + \cos 2x, \text{ откуда}$$

$$b_o = -1, \quad c_o = 1 \quad \text{и}$$

$$y_* = x \cdot (\sin 2x - \cos 2x).$$

Выписываем общее решение:

$$y = y_o = y_* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x \cdot (\sin 2x - \cos 2x).$$

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

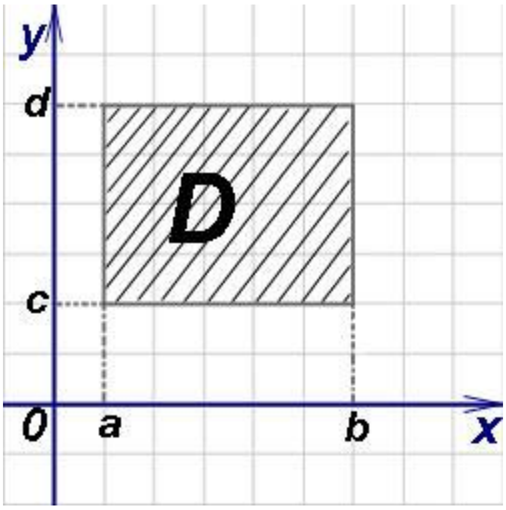
Двойные интегралы – это обобщение понятия определённого интеграла для функции двух переменных, заданной как $z = f(x, y)$.

Записывается двойной интеграл так:

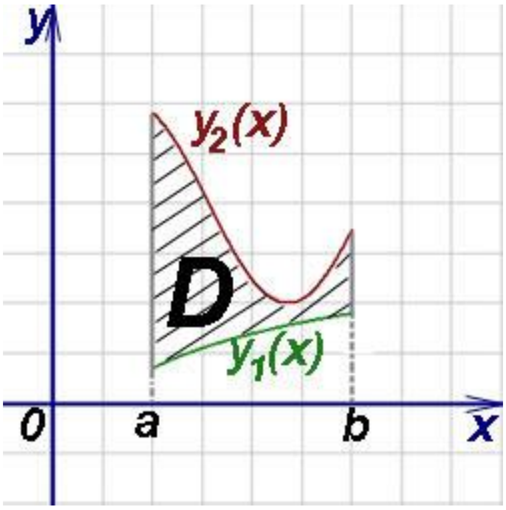
$$\iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy$$
.

Здесь D – плоская фигура, ограниченная линиями, выражения которых (равенства) даны в задании вычисления двойного интеграла. Слева и справа – равенствами, в которых слева переменная x, а сверху и снизу – равенствами, в которых слева переменная y. Это место и далее – одно из важнейших для понимания техники вычисления двойного интеграла.

Случай прямоугольной области:



Случай криволинейной области:



Сведение двойного интеграла к повторному

Случай прямоугольной области

Пусть дана функция двух переменных $f(x, y)$ и ограничения для D: $D = \{(x; y) \mid a \le x \le b;\ c \le y \le d\}$, означающие, что фигуру D слева и справа ограничивают прямые $x = a$ и $x = b$, а снизу и сверху - прямые $y = c$ и $y = d$. Здесь *a*, *b*, *c*, *d* - числа.

Пусть для такой функции существует двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$$.

Чтобы ***вычислить этот двойной интеграл***, нужно свести его к повторному интегралу, который имеет вид

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\ y)\,dy$$.

Здесь пределы интегрирования *a*, *b*, *c*, *d* - числа, о которых только что упоминалось.

Сначала нужно вычислять внутренний (правый) определённый интеграл, затем - внешний (левый) определённый интеграл.

Можно и поменять ролями *x* и *y*. Тогда повторный интеграл будет иметь вид

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx.$$

Такой повторный интеграл нужно решать точно так же: сначала - внутренний (правый) интеграл, затем - внешний (левый).

Пример 1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D xy\ \mathrm{d}x\ \text{ф}y,$$

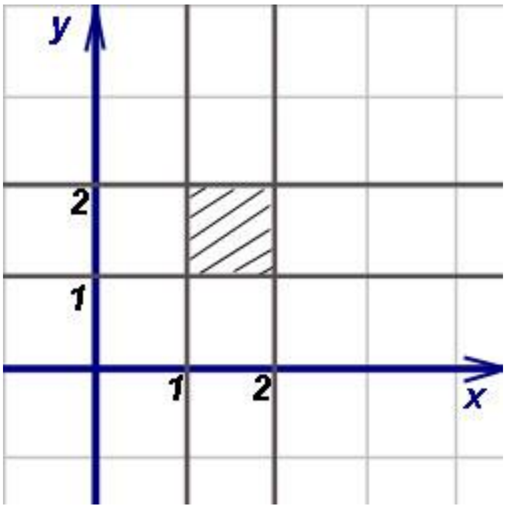
где

$$D = \{(x;\ y) \mid 1 \le x \le 2;\ 1 \le y \le 2\}.$$

Решение. Сводим данный двойной интеграл к повторному интегралу

$$\int\limits_1^2 dy \int\limits_1^2 xy\ dx.$$

На чертеже строим область интегрирования:



Вычисляем внутренний (правый) интеграл, считая игрек константой. Получаем.

$$\int\limits_1^2 xy\ dx = y \bullet \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = 2y - \frac{y}{2}.$$

Теперь вычисляем внешний (левый) интеграл от вычисленного только что внутреннего (правого):

$$\int\limits_1^2 \left(2y - \frac{y}{2}\right) dy = \left.\left(\frac{2y^2}{2} - \frac{y^2}{4}\right)\right|_1^2 = \left.\frac{3}{4}y^2\right|_1^2 =$$

$$= \frac{3}{4} \bullet (4-1) = \frac{9}{4}.$$

Результат и будет решением данного двойного интеграла.

Пример 2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{D} \frac{1}{(x-y)^2}\,dx\,dy$$,

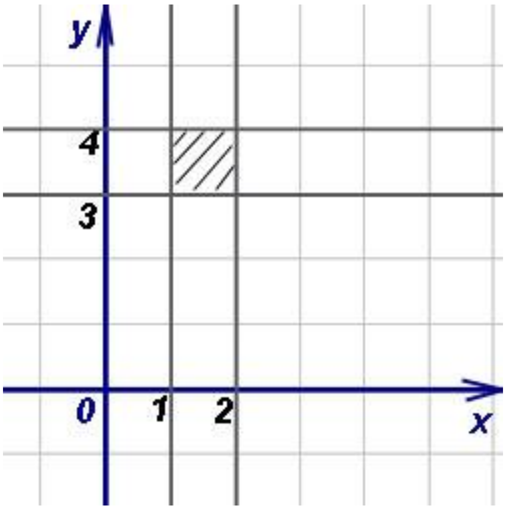
где

$$D = \{(x;\ y) \mid 1 \le x \le 2;\ 3 \le y \le 4\}$$.

Решение. Сводим данный двойной интеграл к повторному интегралу

$$\int_1^2 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x-y)^2}$$.

На чертеже строим область интегрирования:



Вычисляем внутренний (правый) интеграл, считая икс константой. Получаем.

$$\int_3^4 \frac{dy}{(x-y)^2} = \int_3^4 (x-y)^{-2}\,dy = \frac{1}{x-1}\Bigg|_4^4 =$$

$$= \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3}.$$

Теперь вычисляем внешний (левый) интеграл от вычисленного только что внутреннего (правого):

$$\int_1^2\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}\right)dx=\int_1^2\frac{dx}{x-4}-\int_1^2\frac{dx}{x-3}=$$
$$=\left[\ln(x-4)-\ln(x-3)\right]\Big|_1^2=$$
$$=\left[\ln(2-4)-\ln(2-3)\right]-$$
$$-\left[\ln(1-4)-\ln(1-3)\right]=$$
$$=\left[\ln(-2)-\ln(-1)\right]-\left[\ln(-3)-\ln(-2)\right]=$$
$$=\ln(2)-\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}:\frac{3}{2}\right)=$$
$$=\ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Результат и будет решением данного двойного интеграла.

Случай криволинейной или треугольной области

Пусть снова дана функция двух переменных $f(x, y)$, а ограничения для D: уже несколько другого вида:

$$D=\left\{(x;\ y)\mid a\le x\le b;\ \ y_1(x)\le y\le y_2(x)\right\}.$$

Эта запись означает, что фигуру D слева и справа ограничивают, как и в случае прямолинейной области - прямые $x = a$ и $x = b$, но снизу и сверху - кривые, которые заданы уравнениями $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Иными словами, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - функции.

Пусть для такой функции также существует двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x;\ y)\,dx\,dy.$$

Чтобы вычислить этот двойной интеграл, нужно свести его к повторному интегралу, который имеет вид

$$\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy.$$

Здесь пределы интегрирования *a* и *b* - числа, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - функции. В случае треугольной области одна из функций $y_1(x)$ или $y_2(x)$ - это уравнение прямой линии. Такой случай будет разобран в примере 3.

Как и в случае прямолинейной области, сначала нужно вычислять правый определённый интеграл, затем - левый определённый интеграл.

Точно так же можно поменять ролями *x* и *y*. Тогда повторный интеграл будет иметь вид

$$\int_c^d dy \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dx$$
.

Такой повторный интеграл нужно решать точно так же: сначала - внутренний (правый) интеграл, затем - внешний (левый).

Пример 3. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \left(x^2 + xy + 2y^2\right) dx\ dy$$
,

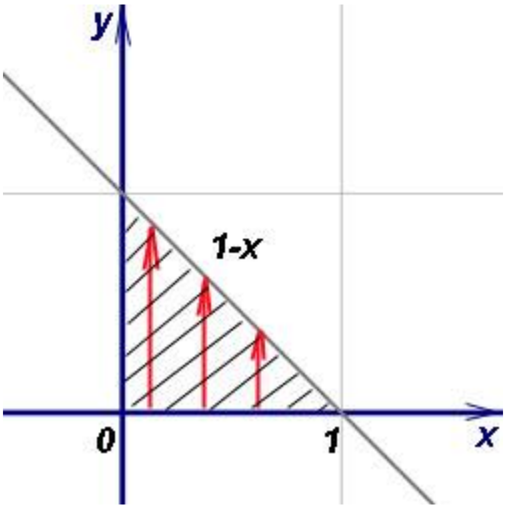
где

$$D = \left\{(x;\ y) \mid 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le x-1\right\}$$
.

Решение. Сводим данный двойной интеграл к повторному интегралу

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x^2 + xy + 2y^2\right) dy$$
.

На чертеже строим область интегрирования и видим, что она треугольная:



Вычисляем внутренний (правый) интеграл, считая икс константой. Получаем.

$$\int_0^{1-x} \left(x^2 + xy + 2y^2\right) dy =$$

$$= x^2(1-x) + \frac{1}{2}x(1-x)^2 + \frac{2}{3}(1-x)^3.$$

Теперь вычисляем внешний (левый) интеграл от вычисленного только что внутреннего (правого). Сначала представляем этот интеграл в виде суммы интегралов:

$$\int_0^1 x^2(1-x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^3\,dx$$
.

Вычисляем первое слагаемое:

$$\int_0^1 x^2\left(1-x\right)dx=\int_0^1\left(x^2-x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{12}.$$

Вычисляем второе слагаемое:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(1-x\right)^2dx=\int_2^1\left(\frac{1}{2}x-x^2+\frac{1}{2}x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}x^2\Big|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{1}{8}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{24}.$$

Вычисляем третье слагаемое:

$$\frac{2}{3}\int_0^1\left(1-x\right)^3dx=\int_0^1\left(\frac{2}{3}-2x+2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)dx=$$

$$=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{1}{6}x^4\Big|_0^1-x^2\Big|_0^1+\frac{2}{3}x\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

Получаем сумму, которая и будет решением данного двойного интеграла:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}.$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D dx\,dy,$$

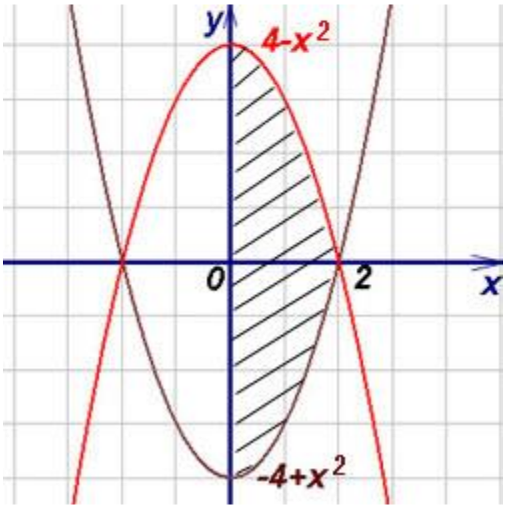
где

$$D=\left\{\left(x;\ y\right)|\,0\le x\le 2;\ -4+x^2\le y\le 4-x^2\right\}.$$

Решение. Сводим данный двойной интеграл к повторному интегралу

$$\int_0^2 dx\int_{-4+x^2}^{4-x^2}dy.$$

На чертеже строим область интегрирования:



Вычисляем внутренний (правый) интеграл, считая икс константой. Получаем.

$$\int_{-4+x^2}^{4-x^2} dy = 4 - x^2 - \left(-4 + x^2\right) = 8 - 2x^2$$
.

Теперь вычисляем внешний (левый) интеграл от вычисленного только что внутреннего (правого):

$$\int_0^2 \left(8 - 2x^2\right) dx = \left(8x - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

Результат и будет решением данного двойного интеграла.

Приложения двойного интеграла

Масса плоской фигуры

масса плоской пластинки D с переменной плотностью $\gamma = \gamma(x;y)$ находится по формуле

$$m = \iint\limits_D \gamma(x;y)\,dx\,dy.$$

Статические моменты и координаты центра тяжести плоской фигуры

Статические моменты фигуры D относительно осей Ox и Oy могут быть вычислены по формулам

$$S_x = \iint\limits_D y \cdot \gamma(x;y)\,dx\,dy \quad \text{и} \quad S_y = \iint\limits_D x \cdot \gamma(x;y)\,dx\,dy;$$

а координаты центра масс фигуры — по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{S_x}{m}.$$

Моменты инерции плоской фигуры

Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси l называется произведение массы m на квадрат расстояния d точки до оси, т. е. $M_l = m \cdot d^2$. Моменты инерции плоской фигуры относительно осей Ox и Oy могут быть вычислены по формулам:

$$M_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \gamma(x;y)\,dx\,dy, \qquad M_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \gamma(x;y)\,dx\,dy.$$

Момент инерции фигуры относительно начала координат — по формуле $M_O = M_x + M_y$.

Замечание. Приведенными примерами не исчерпывается применение двойного интеграла. Далее мы встретим приложение двойного интеграла к вычислению площадей поверхностей фигур .

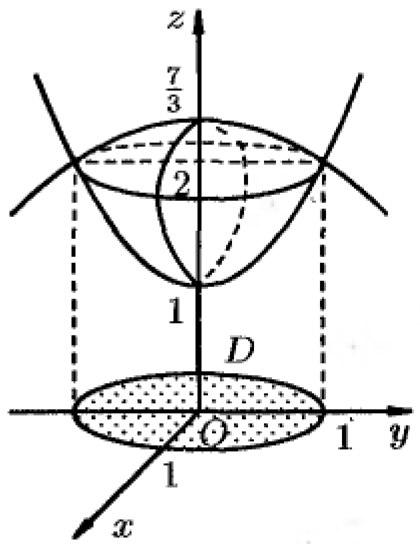


Рис. 223

Пример 1.

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ и $x^2 + y^2 + 3z - 7 = 0$.

Решение:

Данное тело ограничено двумя параболоидами . Решая систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z - 1, \\ x^2 + y^2 = -3z + 7, \end{cases}$$

находим уравнение линии их пересечения: $x^2 + y^2 = 1,\ z = 2$.

Искомый объем равен разности объемов двух цилиндрических тел с одним основанием (круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$) и ограниченных сверху соответственно поверхностями $z = \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2)$ и $z = 1 + x^2 + y^2$. имеем

$$V = V_1 - V_2 = \iint\limits_D \frac{1}{3}(7 - x^2 - y^2)\,dx\,dy - \iint\limits_D (1 + x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам, находим:

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_D (7 - r^2)r \cdot dr\,d\varphi - \iint\limits_D (1 + r^2)r \cdot dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (7r - r^3)\,dr - \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (r + r^3)\,dr =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{13}{12} \cdot 2\pi - \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

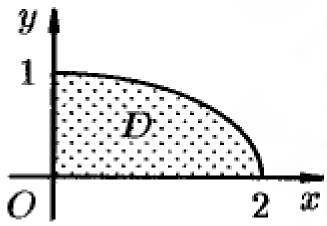


Рис. 224

Пример 2.

Найти массу, статические моменты S_x и S_y и координаты центра тяжести фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ и координатными осями (см. рис. 224). Поверхностная плотность в каждой точке фигуры пропорциональна произведению координат точки.

Решение:

По формуле (53.6) находим массу пластинки. По условию, $\gamma = \gamma(x; y) = k \cdot xy$, где k — коэффициент пропорциональности.

$$m=\iint_D kxy\,dx\,dy=k\int_0^2 x\cdot dx\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y\,dy=\frac{k}{2}\int_0^2 x\,dx\cdot y^2\Big|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}=$$

$$=\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^2 x(4-x^2)\,dx=\frac{k}{8}\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2=\frac{k}{2}.$$

Находим статические моменты пластинки:

$$S_x=\iint_D y\cdot kxy\,dx\,dy=k\int_0^2 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y^2\,dy=\cdots=\frac{4}{15}k,$$

$$S_y=\iint_D x\cdot kxy\,dx\,dy=k\int_0^2 x^2\,dx\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y\,dy=\cdots=\frac{8}{15}k.$$

Находим координаты центра тяжести пластинки, используя формулы

$$x_c=\frac{S_y}{m}\text{ и }y_c=\frac{S_y}{m}\text{: }x_c=\frac{16}{15},\ y_c=\frac{8}{15}.$$

Криволинейные интегралы

Криволинейные интегралы - обобщение понятия **определённого интеграла** на случай, когда областью интегрирования является отрезок некоторой кривой, лежащий в плоскости. Общая запись криволинейного интеграла первого рода следующая:

$$\int_L f(x,y)\,dl$$

где $f(x, y)$ - функция двух переменных, а L - кривая, по отрезку AB которой происходит интегрирование. ***Если подынтегральная функция равна единице, то криволинейный интеграл равен длине дуги AB***.

Криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L P(x;y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

Вычисление криволинейных интегралов первого рода. Кривая дана в декартовых прямоугольных координатах

Вычисление криволинейных интегралов первого рода сводится к вычислению определённых интегралов.

Пусть на плоскости задана кривая $y = y(x)$ и отрезку кривой AB соответствует изменение переменной x от a до b. Тогда в точках кривой подынтегральная функция $f(x, y) = f(x, y(x))$ ("игрек" должен быть выражен через "икс"), а дифференциал дуги $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ и криволинейный интеграл можно вычислить по формуле

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl = \int_a^b f\left(x, y(x)\right)\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB}\left(x^2+3y\right)dl,$$

где AB - отрезок прямой между точками $A(1; -1)$ и $B(2; 1)$.

Решение. Составим уравнение прямой AB, используя формулу $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$):

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y+1}{1+1},$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2}.$$

Из уравнения прямой выразим y через x: $y+1 = 2x-2 \Rightarrow y = 2x-3$

Тогда $y' = 2$ и теперь можем вычислять интеграл, так как у нас остались одни "иксы":

$$\int_{AB}\left(x^2+3y\right)dl =$$

$$= \int_1^2\left(x^2+3(2x-3)\right)\sqrt{1+2^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{5}\int_1^2\left(x^2+6x-9\right)dx =$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{x^3}{3}+3x^2-9x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{8}{3}+12-18-\frac{1}{3}-3+9\right) =$$

$$= \sqrt{5}\bullet\frac{7}{3} = \frac{7\sqrt{5}}{3}.$$

Вычисление криволинейных интегралов второго рода. Кривая дана в декартовых прямоугольных координатах

Так же, как и в случае криволинейных интегралов первого рода, вычисление интегралов второго рода сводится к вычислению определённых интегралов.

Пусть дана кривая на плоскости уравнением функции "игрек", выраженной через "икс": $y = y(x)$ и дуге кривой AB соответствует изменение x от a до b. Тогда в подынтегральную функцию подставим выражение "игрека" через "икс" и определим дифференциал этого выражения "игрека" по "иксу": $dy = y'dx$. Теперь, когда всё выражено через "икс", криволинейный интеграл второго рода вычисляется как определённый интеграл:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_a^b \left(P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \bullet y' \right) dx.$$

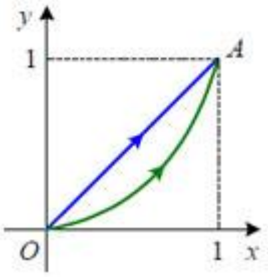
Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (6x^2 + y)dx + (x - 2y)dy$$

, если

а) L - отрезок прямой OA, где $O(0; 0)$, $A(1; -1)$;

б) L - дуга параболы $y = x^2$ от $O(0; 0)$ до $A(1; -1)$.



Решение.

а) Вычислим криволинейный интеграл по отрезку прямой (на рисунке - синяя). Напишем уравнение прямой и выразим "игрек" через "икс":

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0} \Rightarrow y = x$$

. Получаем $dy = dx$. Решаем данный криволинейный интеграл:

$$\int_L (6x^2 + y)dx + (x - 2y)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(6x^2 + x + x - 2x\right)dx = 6\int_0^1 x^2 dx =$$

$$= 6 \bullet \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 2.$$

б) если L - дуга параболы $y = x^2$, получим $dy = 2xdx$. Вычисляем интеграл:

$$\int\limits_L \left(6x^2+y\right)dx+\left(x-2y\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(6x^2+x^2+\left(x-2x^2\right)\bullet 2x\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(9x^2-4x^3\right)dx = \left(9\bullet\frac{x^3}{3}-4\bullet\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

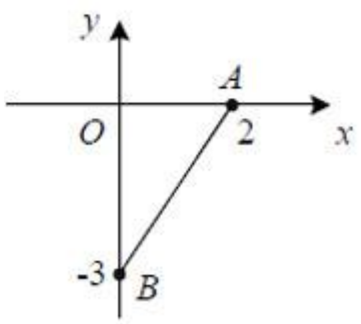
$$= 3-1 = 2.$$

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{dl}{5x-2y},$$

где L - отрезок прямой $3x-2y-6=0$ между точками её пересечения с осями координат.

Решение. Определим точки пересечения прямой с осями координат. Подставив в уравнение прямой $y = 0$, получим $3x-6=0$, $x=2$. Подставив $x = 0$, получим $-2y-6=0$, $y=-3$. Таким образом, точка пересечения с осью Ox - $A(2;\,0)$, с осью Oy - $B(0;\,-3)$.



Из уравнения прямой выразим y:

$$2y = 3x-6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x-3.$$

Поэтому

$$y' = \frac{3}{2},\quad dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+\frac{9}{4}}dx = \frac{\sqrt{13}}{2}dx.$$

Теперь можем представить криволинейный интеграл в виде определённого интеграла и начать вычислять его:

$$\int_L \frac{dl}{5x-2y} = \int_0^2 \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}dx}{5x-2\bullet\left(\frac{3}{2}x-3\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2}\int_0^2 \frac{dx}{5x-3x+6} = \frac{\sqrt{13}}{2}\int_0^2 \frac{dx}{2x+6}.$$

В подынтегральном выражении выделяем множитель $\frac{1}{2}$, выносим его за знак интеграла. В получившемся после этого подынтегральном выражении применяем **подведение под знак дифференциала** и окончательно получаем:

$$\frac{\sqrt{13}}{2}\int_0^2 \frac{dx}{2x+6} = \frac{\sqrt{13}}{4}\int_0^2 \frac{d(x+3)}{x+3} =$$

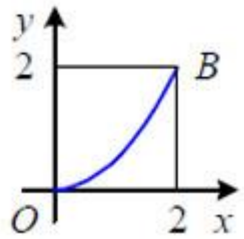
$$= \frac{\sqrt{13}}{4}\ln|x+3|\Big|_0^2 = \frac{\sqrt{13}}{4}(\ln 5 - \ln 3) =$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{4}\ln\frac{5}{3}.$$

Пример 6. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \left(x+\sqrt{2y}\right)dl,$$

где L - дуга параболы $y=\frac{x^2}{2}$ между точками $O(0;\ 0)$ и $B(2;\ 2)$.



Решение. Так как $y' = x$, то $dl = \sqrt{1+x^2}dx$.

Теперь можем представить криволинейный интеграл в виде определённого интеграла и вычислить его:

$$\int_L \left(x+\sqrt{2y}\right)dl = \int_0^2 \left(x+\sqrt{2\bullet\frac{x^2}{2}}\right)\bullet\sqrt{1+x^2}dx =$$

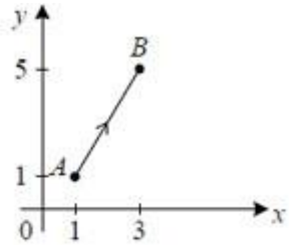
$$= \int_0^2 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int_0^2 \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(1+x^2\right) =$$

$$= \frac{2\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Пример 7. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L ydx + xdy,$$

где L - отрезок прямой от точки $A(1;\ 1)$ до точки $B(3;\ 5)$.



Решение. Составим уравнение прямой AB:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{5-1} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4}.$$

Из полученного уравнения прямой выразим "игрек":

$$4x-4 = 2y-2,$$
$$2y = 4x-2,$$
$$y = 2x-1.$$

Поэтому $dy = 2dx$ и теперь можем вычислить данный криволинейный интеграл:

$$\int_L ydx + xdy = \int_1^3 \left(\left(2x-1\right)dx + x\bullet 2dx\right) =$$

$$= \int_1^3 \left(4x-1\right)dx = \left(2x^2 - x\right)\Big|_1^3 =$$

$$= 18-3-\left(2-1\right) = 14.$$