МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Вычислительной механики и математики»

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительной механики и математики»
« 14 » января 2020 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_________________________В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
**по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Теория вероятностей и математическая статистика
/Математика - 5»**

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
12.03.02 Оптотехника

с направленностью (профилем)
«Оптико-электронные приборы и системы»

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 120302-01-20

Тула 2020 год

Разработчики методических указаний

Боницкая О.В., доцент, к.ф-м.н.______________________ ____________________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

Чукова О.В., доцент, к.т.н.___________________________ ____________________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

Данные методические указания написаны в помощь студентам очной формы обучения при выполнении контрольных и расчетных работ по теории вероятности. В указаниях приведены примеры решения задач различных типов, а также даны необходимые теоретические сведения и ссылки на литературу.

1. Комбинаторика. Непосредственный подсчет вероятностей

Для повторения приводим основные определения и формулы комбинаторики и теории вероятностей.

Общим термином «соединения» называют три типа комбинаций, составленных из некоторого числа предметов (элементов).

Размещения. Если составлять из n различных элементов группы по m элементов в каждой, располагая взятые m элементов в различном порядке, то такие комбинации называются размещениями из n элементов по m. Общее число размещений из n элементов по m

$$(A_n^m)_{без\ повт.} = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Перестановки являются частными случаями размещений (из n элементов по n). Число размещений с повторениями:

$$(A_n^m)_{с\ повт.} = n^m.$$

Перестановки. Если взять n элементов и переставлять их всевозможными способами, сохраняя неизменным их число, то каждая такая комбинация будет называться перестановкой. Общее число перестановок из n элементов $(P_n)_{без\ повт.} = A_n^n = n!$

Если в перестановках из общего числа n элементов есть k различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент повторяется n_2 раз, k-й элемент повторяется n_k раз, при этом n= $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, то такие перестановки называют *перестановки с повторениями*:

$$(P_n)_{с\ повт.} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Сочетания. Если из n различных элементов составлять группы по m элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то такие комбинации называются сочетаниями из n элементов по m. Общее число сочетаний

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Под событием в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате испытаний может произойти или не произойти. Несколько событий в данном испытании образуют *полную группу,* если в результате испытания непременно должно появиться хотя бы одно из них. Несколько событий называются попарно *несовместными* в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Несколько событий в данном испытании называются *равновозможными*, если есть основание считать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другое.

Случайные события, образующие полную группу несовместных и равновозможных событий, называются *случаями* (исходами или шансами).

Классическое определение вероятности: если результаты испытания можно представить в виде полной группы N равновозможных несовместных случаев и если событие A появляется только в M случаях, то вероятность события A равна отношению числа случаев, благоприятствующих событию, к общему числу всех случаев, т. е. $P(A) = \frac{M}{N}$.

Гипергеометрическое распределение. Пусть в урне N шаров, из них K белых, N- K черных. Наудачу из урны взято n шаров. Тогда вероятность того, что среди них будет ровно k белых шаров, равна:

$$P(A) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Занятие 1.

Пример:

Из чисел 1, 2, 3, …, 100 наугад выбирают 70 чисел. Какова вероятность того, что наибольшим из них окажется число 98?

Решение:

Для выбора семидесяти чисел из ста существует C_{100}^{70} способов. Максимальное число 98 в выборке обеспечивают те из них, которые предписывают выбрать само это число и 69 чисел, меньших, чем 98. Таких способов будет C_{97}^{69}. Тогда

$$P(A) = \frac{C_{97}^{69}}{C_{100}^{70}} = \frac{97!}{69!\cdot 28!} : \frac{100!}{70!\cdot 30!} = \frac{70 \cdot 29 \cdot 30}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{29}{462}$$

Пример:

В партии 100 изделий, из которых 4 – бракованные. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Какова вероятность того, что все бракованные изделия достанутся: а) одному потребителю; б) обоим потребителям поровну?

Решение:

а) Пусть событие А – все бракованные изделия достанутся одному потребителю. Общее число способов, какими можно выбрать 50 изделий из 100, равно C_{100}^{50}. Событию А благоприятствуют случаи, когда из 50 изделий отправленных одному потребителю будет либо 46 стандартных из 96 и все бракованные 4 из 4, либо 50 стандартных из 96 и 0 бракованных из 4. Тогда

$$P(A)=\frac{C_{96}^{46}C_4^4+C_{96}^{50}C_4^0}{C_{100}^{50}}=\frac{C_{96}^{46}\cdot 1+C_{96}^{46}\cdot 1}{C_{100}^{50}}=\frac{2C_{96}^{46}}{C_{100}^{50}}=\frac{2\cdot 96!50!50!}{46!50!100!}=$$

$$=\frac{2\cdot 47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}=0.117$$

б) Пусть в каждой партии по 2 бракованных изделия. Событию В будут благоприятствовать случаи, когда из 50 изделий, отправленных одному потребителю, будут 48 стандартных из 96 и 2 бракованных из 4.

$$P(B)=\frac{C_{96}^{48}C_4^2}{C_{100}^{50}}=\frac{96!4!50!50!}{48!48!2!2!100!}=\frac{49^2\cdot 50^2\cdot 6}{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}=0.383$$

Пример:

Задача о днях рождения. Найти вероятность того, что в группе из 25 человек ни у кого не совпадают дни рождения.

Решение:

В рамках урновой системы задачу можно интерпретировать так: в урне имеется 365 шаров, занумерованных числами от 1 до 365. Из урны случайным образом выбирается 25 шаров. Легко заметить, что искомая вероятность определяется по формуле

$$P(A)=\frac{A_n^m}{A_{n\ \text{повт}}^m}=\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-25+1)}{365^{25}}=(1-\frac{1}{365})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{24}{365}).$$

Точное вычисление этой вероятности довольно утомительно, но легко получить для нее хорошую приближенную формулу. Действительно, при малых значениях x $\ln(1\text{-}x)\approx\text{-}x$. Поэтому

$$\ln P(A)\approx-\frac{1+2+\ldots+24}{365}=-\frac{25\cdot 24}{2\cdot 365}=-0{,}822.$$

Откуда

$$P(A)=e^{-0{,}822}=0{,}4396.$$

Пример:

На отдельных карточках написаны буквы Т, Е, О, Р, И, Я. Карточки перемешаны. Найти вероятность того, что прикладывая карточки одну к другой, в случайном порядке, не глядя, получится слово «теория»?

Решение:

Число благоприятных событий равно 1, всего же число комбинаций равно числу перестановок:

$$P(A)=\frac{1}{P_6}=\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}.$$

Пример:

Используя условие предыдущей задачи, найти вероятность того, что получится слово «ананас», если на отдельных карточках написаны три буквы А, две Н и одна С?

Решение:

$$P(A) = \frac{1}{P_{6\ \text{повт}}} = \frac{3!\cdot 2!}{6!} = \frac{1}{60}.$$

Задача 1.

В группе 25 студентов, из них 5 получили на экзамене отличные оценки, 12 – хорошие, 6- удовлетворительные и 2 – неудовлетворительные. Определить вероятность того, что произвольно выбранный студент получил: а) удовлетворительную оценку; б) оценку не ниже хорошей.

Ответ: а) P(A)=0,24; б) P(A)=0,68.

Задача 2.

Для контроля наудачу взята партия деталей, среди которых n доброкачественных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые К проверенных деталей доброкачественны. Определить вероятность того, что следующая деталь будет также доброкачественной.

Ответ: $P(A) = \frac{n-k}{n+m-k}$.

Задача 3.

Четырехтомное сочинение расположено на полке в произвольном порядке. Найти вероятность того, что тома окажутся в возрастающем или убывающем порядке.

Ответ: P(A)=$\frac{1}{12}$.

Задача 4.

Пять книг на одной полке расставляются наудачу. Определить вероятность того, что две определенные книги окажутся: а) поставленными рядом; б) поставленными рядом с правого края.

Ответ: а) P(A)=0,4; б) P(A)=0,1.

Задача 5.

Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, причем номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

Ответ: P(A)$\approx 0{,}302$

Задача 6.

Прибор имеет пятизначный номер. Найти вероятность правильного определения номера прибора для каждого из следующих условий: а) стерта последняя цифра; б) стерты три последние цифры, причем известно, что они неодинаковые.

Ответ: а) P(A)=0,1; б) P(A)$\approx 0{,}0014$.

Задача 7.

В ящике имеются 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что они окажутся окрашенными.

Ответ: P(A)$\approx 0{,}264$.

Задача 8.

В ящике содержится 20 деталей, из них 3 бракованные. Найти вероятность того, что среди 4 наудачу извлеченных деталей не окажется бракованных.

Ответ: $P(A) \approx 0{,}491$.

Задача 9.

На складе имеется 15 кинескопов, из которых 10 со знаком качества. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 5 кинескопов, 3 из них окажутся со знаком качества.

Ответ: $P(A) \approx 0{,}4$.

Задача 10.

В студенческой группе 15 юношей и 10 девушек. На концерт группа получила пять пригласительных билетов, которые разыгрываются по жребию. Какова вероятность того, что на концерт пойдут 2 девушки и 3 юноши?

Ответ: $P(A) \approx 0{,}385$.

Задание на дом

Задача 11.

Участники жеребьевки берут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

Ответ: $P(A)=0{,}81$.

Задача 12.

В коробке содержится 5 одинаковых карточек с записанными на них буквами ш, к, о, л, а. Найти вероятность того, что в порядке поступления карточек образуется слово «школа».

Ответ: $P(A)=\frac{1}{120}$.

Задача 13.

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры: а) если они различны; б) если они могут быть и одинаковыми.

Ответ: а) $P(A)=\frac{1}{90}$; б) $P(A)=0{,}01$.

Задача 14.

Устройство содержит 5 элементов, из которых 2 изношены. При включении устройства включаются 2 элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

Ответ: $P(A)=0{,}3$.

Задача 15.

В урне находятся 13 белых и 17 чёрных шаров. Вынимают 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них будут два белых шара.

Ответ: $P(A)=0{,}37$.

Задача 16.

Для проведения лабораторных занятий студенческая группа из 26 человек, в которой 8 девушек и 18 юношей, произвольным образом делиться на 2 равные группы. Найти вероятность того, что в каждой группе окажется по одинаковому числу девушек и юношей.

Ответ: $P(A)= 0{,}327$.

2. Основные теоремы теории вероятностей.

Суммой двух событий А и В (А+В) называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий. Если события А и В несовместны, то сумма событий А и В сводиться к появлению или события А, или события В.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них.

Произведением двух событий А и В (АВ) называется событие, состоящее в совместном появлении события А и события В.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении этих событий.

Теорема сложения вероятностей

Если А и В несовместные события, то Р(А+В)=Р(А)+Р(В).

Если $A_1, A_2, ... A_n =$ попарно несовместные события, то $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... P(A_n)$. В случае двух совместных событий Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(АВ). Два совместных события, образующих полную группу, называются противоположными. Событие, противоположное событию А, обозначается $\bar{A}$. На практике для определения вероятности одного из противоположных событий используется формула:

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

Когда требуется вычислить вероятность появления хотя бы одного из нескольких независимых событий $A_1, A_2, ..., A_n$, Удобно пользоваться формулой:

$$P(A) = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2)...(1 - P_n).$$

Теорема умножения вероятностей

Если А и В независимые события, то Р(АВ)=Р(А)*Р(В).

Аналогично $P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) ... P(A_n)$

Если А и В зависимые события, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Аналогично $P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) ... P(A_n/A_1 A_2 ... A_{n-1})$.

Занятие 2

Сумма несовместных событий и произведение независимых событий

Пример:

Два игрока поочередно бросают игральную кость. Выигрывает тот, у которого первым выпадет 6 очков. Какова вероятность выигрыша для игрока, бросающего игральную кость первым? Вторым?

<u>Решение:</u>

Обозначим события: A_i – выпадение 6 очков при i – том бросании игральной кости (i = 1, 2, 3 …); В - выигрыш игры игроком, бросающим игральную кость первым.

Тогда $P(A_i)=\dfrac{1}{6}$, $P(\overline{A}_i)=\dfrac{5}{6}$ при любом i – том бросании игральной кости. Событие И можно представить в виде суммы вариантов: $\mathrm{B}=\mathrm{A}_1+\overline{\mathrm{A}}_1\overline{\mathrm{A}}_2\mathrm{A}_3+\overline{\mathrm{A}}_1\overline{\mathrm{A}}_2\overline{\mathrm{A}}_3\overline{\mathrm{A}}_4\mathrm{A}_5+\ldots$ Поэтому

$$\mathrm{P(B)}=\mathrm{P(A_1)}+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_1\overline{\mathrm{A}}_2\mathrm{A}_3)+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_1\overline{\mathrm{A}}_2\overline{\mathrm{A}}_3\overline{\mathrm{A}}_4\mathrm{A}_5)+\ldots=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}+\ldots$$

Можно заметить, что перед нами геометрическая прогрессия с первым членом $a=\dfrac{1}{6}$ и множителем $q=\left(\dfrac{5}{6}\right)^2<1$. Тогда вероятность выигрыша первым игроком равна сумме геометрической прогрессии:

$$\mathrm{P(B)}=\frac{a}{1-q}=\frac{1/6}{1-\left(5/6\right)^2}=\frac{6}{11}=0.545.$$

Вероятность выигрыша игроком, бросающим игральную кость вторым, равна

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}})=1-\mathrm{P(B)}=1-0.545=0.455.$$

Пример:

Три стрелка, попадающие в цель независимо друг от друга с вероятностями 0.5, 0.4 и 0.3 соответственно, выстрелили по мишени одновременно. Какова вероятность того, что в мишени:

а) не образовалось ни одной пробоины (событие A);

б) образовалось две пробоины (событие B);

в) образовалось не менее двух пробоин (событие C);

г) образовалась хотя бы одна пробоина (событие D).

Решение:

Пусть A_i – i-ый стрелок попал в цель, $\overline{\mathrm{A}}_i$ - i-ый стрелок не попал в цель. Тогда $P(A_1)=0.5$, $P(A_2)=0.4$, $P(A_3)=0.3$, причем A_i – независимые события.

а) Случай, когда каждый из стрелков промахнулся:

$P(\mathrm{A})=P(\overline{\mathrm{A}}_1\overline{\mathrm{A}}_2\overline{\mathrm{A}}_3)=P(\overline{\mathrm{A}}_1)P(\overline{\mathrm{A}}_2)P(\overline{\mathrm{A}}_3)=0.5\cdot0.6\cdot0.7=0.21$.

б) Попали два из трех стрелков:

$\mathrm{P(B)}=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3+\mathrm{A}_1\overline{\mathrm{A}}_2\mathrm{A}_3+\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\overline{\mathrm{A}}_3)=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)+\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\overline{\mathrm{A}}_2\mathrm{A}_3)+\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\overline{\mathrm{A}}_3)=\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}_3)+\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_2)\mathrm{P}(\mathrm{A}_3)+\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}_3)=$
$=0.5\cdot0.4\cdot0.3+0.5\cdot0.6\cdot0.3+0.5\cdot0.4\cdot0.7=0.29$

в) Образование не менее двух пробоин означает, что попадут либо два стрелка, либо все три:

$\mathrm{P(C)}=\mathrm{P(B)}+\mathrm{P}(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3)=0.29+0.5\cdot0.4\cdot0.3=0.35$

г) Так как противоположное событие к событию «хотя бы одна» является «ни одного попадания», то

$\mathrm{P(D)}=1-\mathrm{P(A)}=1-0.21=0.79$

Задача 17.

При сборке механизма рабочий должен устанавливать в него определённую деталь. В некоторых случаях её приходится подгонять путём дополнительной обработки. Вероятность того, что деталь будет установлена без подгонки с первой пробы, равна 0,38 и с подгонкой при второй пробе 0,26, при третьей 0,20, при четвёртой 0,14, при пятой 0, 02. Какова вероятность того, что для подгонки этой детали потребуется: а)более двух проб; б)четыре или пять проб; в)нечётное число проб.

Ответ: а) 0,36; б) 0,16; в) 0,6.

Задача 18.

Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно равны 0,20; 0,15; и 0,10. Определить вероятность непопадания в мишень.

Ответ: 0,55.

Задача 19.

На стеллаже библиотеки в произвольном порядке расставлены 15 учебников, причём 5 из них по математике. Библиотекарь берёт наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников был по математике.

Ответ: $\text{P(A)} \approx 0{,}736$.

Задача 20

В ящике содержится 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

Ответ: $P(A) = \frac{5}{6}$

Задача 21

На трёх токарных станках изготовлены метчики следующих размеров.

Номер станка	Количество метчиков со средним диаметром резьбы, мм	
	От 11,15 До 11,18	От 11,18 До 11,21
1	40	20
2	5	50
3	90	100

Определить вероятность того, что взятые наудачу по одному от каждого станка метчики будут со средним диаметром резьбы от 11,15 до 11,18мм.

Ответ: 0,286.

Задача 22.

Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

Ответ: 0,251.

Задача 23.

Вероятность наступления события в каждом опыте равна 0,2. Опыты производятся последовательно до наступления события. Определить вероятность того, что придется производить четвертый опыт.

Ответ: 0,512.

Задача 24.

В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 1 черных и 8 красных, а во второй урне соответственно 10,8 и 6 шаров. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?

Ответ: 0,323.

Задача 25.

Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

Ответ: 0,7.

Задача 26.

Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение одного часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,9, для второго станка она равна 0,8 и для третьего 0,85. Найти вероятность того, что в течение некоторого часа: а) один станок потребует внимания рабочего; б) два станка потребуют внимания рабочего; в) хотя бы один станок потребует внимания рабочего.

Ответ: а) 0,329; б) 0,56; в) 0,388.

Задание на дом

Задача 27.

В магазин поступила партия обуви одного фасона: 40 пар черного цвета, 26 коричневого, 22 красного и 12 пар синего цвета. Коробки с обувью оказались не рассортированными по цвету. Какова вероятность того, что наудачу взятая коробка окажется с обувью красного или синего цвета?

Ответ: 0,34.

Задача 28.

В группе 25 студентов. Из них отлично успевают по математике 5 человек, хорошо – 12, удовлетворительно – 6, слабо – 2. Преподаватель, не знакомый с группой, вызывает по списку одного из студентов. Определите вероятность того, что вызванный студент будет отлично или хорошо успевающим?

Ответ: 0,68.

Задача 29.

В двух ящиках находятся детали: в первом 10 (из них 3 стандартных), во втором 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Ответ: 0,12.

Задача 30.

Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что за смену не будет выпущено ни одной нестандартной детали, равна 0,9. Определить вероятность того, что не будет выпущено ни одной нестандартной детали: а) за две смены; б) за три смены.

Ответ: а) 0,81; б) 0,729.

Задача 31.

Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95, для второго она равна 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Ответ: 0,14.

Задача 32.

В студии телевидения имеются три телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера.

Ответ: 0,936.

Занятие 3

Сумма совместных событий и произведение зависимых событий

Пример:

Из чисел 1, 2, 3, …,100 наугад выбирают одно число. Вычислить вероятность того, что выбранное число делится хотя бы на одно из чисел: 4 и 6.

Решение:

Пусть событие А – выбранное число делится на 4, В – выбранное число делится на 6. Нужно отыскать вероятность Р(А+В). Нетрудно подсчитать, что всего чисел, делящихся на 4 будет 25, а на 6 будет 16. При этом события А и В совместные (числа, кратные 12 делятся и на 4, и на 6). Всего чисел, делящихся на 12 будет 8.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{25}{100} + \frac{16}{100} - \frac{8}{100} = \frac{33}{100}.$$

Пример:

Студент выучил 41 из 50 вопросов предлагающихся на экзамене. Найти вероятность того, что он ответит верно на 3 вопроса и получит отличную оценку (событие А), не ответит ни на один вопрос и получит неудовлетворительную оценку (событие В).

Решение:

1) Пусть A_1 – студент отвечает верно на первый вопрос, A_2 – то же, но на второй вопрос, A_3 – то же, но на третий вопрос. Очевидно, что $A = A_1A_2A_3$, ибо студент должен ответить верно на все три вопроса.
   По теореме умножения вероятностей:
   $P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1A_2)$,
   $P(A_1) = 41/50$, $P(A_2/A_1) = 40/49$, $P(A_3/A_1A_2) = 39/48$.
   $P(A) = (41/50) \cdot (40/49) \cdot (39/48) = 0{,}544$.
2) Пусть B_i – студент не ответит на i – ый вопрос, $i = 1, 2, 3$.
   $P(B) = P(B_1 B_2 B_3) = P(B_1)\, P(B_2/B_1)\, P(B_3/B_1B_2) = 9/50 \cdot 8/49 \cdot 7/48 = 0{,}004$.

Ответ: P(A) = 0,544, P(B) = 0,004.

Задача 33.

Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

Ответ: а) 0,188; б) 0,452; в)0,336.

Задача 34.

Игрок поочередно играет по две партии с игроками В и С. Вероятности выигрыша у В и С первой партии равны 0,1 и 0,2, вероятность выиграть во второй партии 0,3; 0,4 соответственно. Определить вероятность: а) того, что первым выиграет В; б) того, что первым выиграет С.

Ответ: а) 0,316; б) 0,3816.

Задача 35.

В мастерскую по ремонту радиоприемников поступили две партии радиоламп определенного типа. В первой партии ламп в 2 раза больше, чем во второй. Из большого числа нерассортированных ламп мастер берет произвольно 2 штуки. Чему равна вероятность того, что обе лампы окажутся: а) из одной партии; б) из различных партий?

Ответ: а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{4}{9}$.

Задача 36.

Предприятие изготовляет 95% стандартных изделий, причем из них 86% первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие, изготовленное на первом предприятии, окажется первого сорта.

Ответ: 0,817.

Задача 37.

В урне находятся 5 белых и 20 черных шаров. Из урны последовательно без возвращения вынимают шары до тех пор, пока не будет вынут белый шар. Вычислить вероятность того, что при этих условиях будет произведено: а) три попытки (т. е. до первого белого будут вынуты два черных); б) пять попыток.

Ответ: а) 0,138; б) 0,091.

Задача 38.

На отдельных карточках написаны буквы и, н, с, т, и, т, у, т. Карточки перемешаны. Какова вероятность получить слово «институт» в порядке появления карточек при их произвольном выборе.

Ответ: 0,0029.

Задача 39.

В обществе из 2n человек одинаковое число мужчин и женщин. Места за столом занимаются произвольно. Определить вероятность того, что два лица одного пола не займут места рядом.

Ответ: $p = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$.

Задача 40.

Вероятность получения билета, у которого одинаковые суммы первых и последних трех цифр номера, равна 0,05525. Какова вероятность иметь такой билет среди взятых наудачу, если оба билета: а) имеют последовательные номера; б) получены независимо один от другого.

Ответ: а) 0,1105; б) 0,1075.

Задача 41.

Два стрелка, для которых вероятность попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень. *Указание.* Задачу решить тремя различными способами.

Ответ: 0,94.

Задача 42.

Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна *P*. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

Указание. Задачу решить тремя различными способами.

Ответ: $p(2\text{-}p)$.

Задание на дом

Задача 43.

Производятся три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,4; 0,5; 0,7. Найти вероятности того, что в результате этих трех выстрелов в мишень будет: а) 1 попадание; б) 2 попадания; в) 3 попадания; г) хотя бы одно попадание; д) хотя бы два попадания.

Ответ: а) 0,36; б) 0,41; в)0,14; г) 0,91; д)0,55.

Задача 44.

Три исследователя производят измерения некоторой физической величины независимо друг от друга. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

Ответ: 0,388.

Задача 45.

Из 25 вопросов программы студент знает 20. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему три вопроса.

Ответ: $\frac{57}{115}$.

Задача 46.

В урне 5 белых и 3 черных шара. Найти вероятность: а) того, что 3 последовательно вынутых наудачу шара окажутся белыми, б) того, что шары поступят в следующем порядке: черный, белый, черный.

Ответ: а) 0,178; б) 0,089.

Задача 47.

Произведен залп по мишени из двух орудий. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85, из второго 0,91. Найти вероятность поражения цели. *Указание.* Задачу решить тремя различными способами.

Ответ: 0,9865.

III. Формула полной вероятности. Вероятности гипотез (формула Бейеса)

Если событие А может наступить лишь с одним из событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, попарно несовместных и образующих полную группу событий, то вероятность события А определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Если событие А наступило, то условные вероятности гипотез вычисляются по формулам Бейеса:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Пример:

В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй 8 белых и 4 черных, в третьей 2 белых и 13 черных. Из урн наугад выбирается одна. Какова вероятность того, что: а) шар, взятый наугад из выбранной урны, окажется белым? б) из трех урн была выбрана первая урна, если шар, взятый наугад, оказался белым?

Решение:

а) Пусть H_i – гипотезы о том, что из урн выбрали первую, вторую или третью урну соответственно. Гипотезы попарно несовместны. Тогда

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Условные вероятности доставания из соответствующей урны белого шара: $P(A/H_1) = \frac{7}{10}$, $P(A/H_2) = \frac{8}{12}$, $P(A/H_3) = \frac{2}{15}$.

Тогда по формуле полной вероятности найдем вероятность появления в результате белого шара:

$$P(A) = P(A/H_1)\, P(H_1) + P(A/H_2)\, P(H_2) + P(A/H_3)\, P(H_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10} + \frac{8}{12} + \frac{2}{15}\right) = 0.5$$

б) По формуле Бейеса найдем вероятность того, что из трех урн была выбрана первая урна, если шар, взятый наугад, оказался белым:

$$P(H_1/A) = \frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + P(A/H_3)P(H_3)} =$$

$$= \frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{8}{12}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{7}{15}$$

Пример:

Два игрока поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадет герб. Какова вероятность выигрыша для игрока, бросающего монету первым? Вторым?

Решение:

Пусть А и В - случайные события, состоящие в том, что выигрывает первый и, соответственно, второй игрок, а x и (1- x) – вероятности этих событий. Введем две гипотезы:

H_1 – при первом подбрасывании монеты выпадет герб,

H_2 – при первом подбрасывании монеты выпадет решка.

Тогда $P(H_1) = P(H_2) = 0.5$, а $P(A/H_1) = 1$, $P(A/H_2) = P(B) = 1\text{-}x$.

По формуле полной вероятности имеем

$P(A) = P(A/H_1)\, P(H_1) + P(A/H_2)\, P(H_2)$

Или

$x = 1\cdot 0.5 + (1\text{-}x)\cdot 0.5$, откуда $x = \dfrac{2}{3}$.

Занятие 4

Задача 48.

В вычислительной лаборатории имеется 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95. Для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу взятой машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

Ответ: 0,89.

Задача 49.

В ящике содержится 12 деталей завода № 1, 20 деталей завода № 2, 18 деталей завода № 3. Вероятность того, что детали завода № 1 отличного качества, равна 0,9; для деталей заводов № 2 и 3 она соответственно равна 0,6 и 0,9. найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

Ответ: 0,78.

Задача 50.

Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины возникают сбои в арифметическом устройстве, оперативной памяти и в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

Ответ: 0,87.

Задача 51.

Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии по одному бракованному изделию. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

Ответ: $\frac{13}{132}$.

Задача 52.
Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на дополнительный вопрос из другого билета.

Ответ: $\frac{190}{203}$.

Задача 53.
В цехе три типа автоматических станков, которые производят одни и те же детали. Производительность их одинакова, но качество работы различно. Известно, что на станках первого типа можно изготовить 0,9 деталей высшего качества, на станках второго типа – 0,85 и третьего типа – 0,8. Все полученные в цехе за смену детали в нерассортированном виде сложены на складе. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь: а) окажется высшего качества, если станков первого типа десять, второго восемь, третьего два; б) оказавшаяся высшего качества, изготовлена на станке первого типа.

Ответ: а) 0,87; б) $\frac{45}{87}$.

Задача 54.
В тире имеется 6 одинаковых духовых ружей. Вследствие разницы в пристрелке вероятность попадания для двух из этих ружей равна 0,8; для трех – 0,9; а для одного – 0,3. Наудачу было взято ружье, произведен выстрел и произошло попадание. Какова вероятность, что выстрел был произведен из ружья, вероятность попадания из которого равна 0,8.

Ответ: 0,35.

Задача 55.
Две работницы на разных перфораторах набили по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая из них допустит ошибку, равна 0,05, а для второй равна 0,1. При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая работница. Предполагается, что оба перфоратора были исправны.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задача 56.
Два автомата производят одинаковые детали, которые сбрасываются на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Ответ: 0,59.

Задача 57.
Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, как 3:2. Вероятность

того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая.

Ответ: 0,43.

Задание на дом

Задача 58.

На распределительной базе находятся электрические лампочки, произведенные двумя заводами. Среди них 70% изготовлены первым заводом и 30% - вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, произведенных первым заводом, 90 штук удовлетворяют стандарту, а из 100 штук, произведенных вторым заводом, удовлетворяют стандарту 80 штук. Определить вероятность того, что взятая наудачу с базы лампочка будет удовлетворять требованиям стандарта.

Ответ: 0,87.

Задача 59.

На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый выпускает 20%, второй – 30%, третий – 50% деталей данного типа. Первый автомат дает 0,2% брака, второй – 0,3%, третий – 0,1%. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали.

Ответ: 0,0018.

Задача 60.

В тире имеется 5 ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу, а также вероятность того, что выстрел произведен из пятого ружья, если зафиксировано попадание.

Ответ: 0,7; 0,26.

Задача 61.

На двух автоматических станков изготовляются одинаковые детали. Известно, что производительность первого станка в два раза больше, чем второго, и что вероятность изготовления детали высшего качества на первом станке равна 0,99, а на втором 0,96. Изготовленные за смену на обоих станках нерассортированные детали находятся на складе. Определить вероятность того, что наудачу взятая деталь: а) окажется высшего качества; б) оказавшаяся высшего качества, изготовлена на первом станке.

Ответ: а) 0,98; б)0,673.

Задача 62.

Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

Ответ: 0,998.

IV. Повторные независимые испытания

Если вероятность появления события А в каждом из n независимых опытов постоянна и равна p, а не наступление события А в опыте q = 1 – p, то вероятность наступления события А точно k раз определяется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,\dots,n\,.$$

Наивероятнейшее число m_0 наступлений событий А определяются из неравенства

$$np - q \le m_0 \le np + p$$

Локальная теорема Лапласа

Если число независимых опытов *n* велико (несколько сотен), а npq>10, то

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\ \text{где}\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}},\ x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

На практике при большом числе опытов n и малой вероятности p в каждом отдельном опыте число появлений события приближенно вычисляется по формуле Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \text{где}\ \lambda = np\ \text{интенсивность процесса.}$$

Интегральная теорема Лапласа.

Если число независимых опытов n велико (несколько сотен), то вероятность появления события А не менее k_1 и не более k2 раз определяется по формуле

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)\,,$$

$$\text{где}\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-x^2}{2}}dx,\ x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Из интегральной теоремы Лапласа следует вероятность того, что относительная частота события $\frac{m}{n}$ отклоняется от его вероятности в отдельном испытании p по абсолютной величине не более чем на ε и определяется по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Функции φ(x) и Φ(x) затабулированы, и таблицы есть во многих учебниках по теории вероятностей. Однако здесь надо знать, что если x < 0, то нужно воспользоваться четностью φ(-x)=φ(x) функции φ(x) и нечетностью Φ(-x) = =-Φ(x) функции Φ(x). Если x >5, то принимают с большой степенью точности Ф(x)=0,5. Если x >4, то принимают с большой степенью точности φ(x)=0.

Занятие 5

Формула Бернулли. Локальная теорема Лапласа. Формула Пуассона

Пример:

Игральную кость бросили 4 раза. Найти вероятность того, что шестерка выпала ровно 2 раза.

Решение:

Вероятность выпадения шестерки при каждом отдельном бросании кости равна $p=\frac{1}{6}$ и поскольку в этой задаче n=4, k=2, $q=1-p=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$, искомая вероятность равна

$$P_4(2)=C_4^2\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot(\frac{5}{6})^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{25}{36}=\frac{75}{1296}.$$

Пример:

Сколько раз нужно подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было ровно10?

Решение:

Пусть $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$, тогда по формуле нахождения наивероятнейшего числа: $n\cdot\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\le 10\le n\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ или $n-5\le 60\le n+1$, т.е. необходимо подбросить кость $59\le n\le 65$раз.

Пример:

Стрелок стреляет по мишени до тех пор, пока общее число промахов не станет равным 3. Вероятность промаха при одном выстреле равна 0.2. Какова вероятность того, что стрелок израсходует ровно 7 патронов.

Решение:

По условию задачи последний, седьмой выстрел должен дать промах, остальные два промаха могут произойти произвольно в предыдущих 6 выстрелах. Тогда вероятность того, что стрелок израсходует ровно 7 патронов, равна:

$$P(A)=q\cdot C_6^2\,p^2\,q^4=0.2\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot 0.2^2\cdot 0.8^4=0.04915$$

Пример:

Вероятность того, что при автоматической штамповке изделий отдельное изделие окажется бракованным, равна 0.05. какова вероятность того, что в партии из1000 изделий встретится ровно 40 бракованных?

Решение:

Так как npq = 1000·0.05·0.95=47.5>10 воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{40-1000\cdot 0.5}{\sqrt{47.5}}\approx -1.45.$$

Находим по таблице φ(-1.45) = φ(1.45) = 0.1394. Тогда

$$P_{1000}(40) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{0.1394}{\sqrt{47.5}} = 0.02.$$

Пример:

Вероятность «сбоя» в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0.007. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность 9 «сбоев».

Решение:

Поскольку $npq = 1000 \cdot 0.007 \cdot 0.993 = 0.6951 < 10$, при этом n - велико, а p – мало, то воспользуемся теоремой Пуассона:

$\lambda = np = 1000 \cdot 0.007 = 7$, тогда $P_{1000}(9) = \frac{7^9}{9!} e^{-7} \approx 0.1014$.

Задача 63.

Производится 4 независимых выстрела в одинаковых условиях, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3. Найти вероятность ни одного попадания, трех и четырех попаданий.

Ответ: 0,240; 0,076; 0,008.

Задача 64.

При установившемся технологическом процессе станок-автомат производит 2/3 числа изделий первого сорта и 1/3 второго. Определить: а) ряды распределения вероятности числа первосортных изделий: первый для трех отбираемых изделий, второй для пяти отбираемых изделий; б) что является более вероятным: получить 2 первосортных изделия среди трех наудачу отобранных или три первосортных среди пяти наудачу отобранных?

Ответ: а) $P_{0,3} = \frac{1}{3^3}; P_{1,3} = \frac{6}{3^3}; P_{2,3} = \frac{12}{3^3}; P_{33} = \frac{8}{3^3}$;

б) $P_{0,5} = \frac{1}{3^5}; P_{1,5} = \frac{10}{3^5}; P_{2,5} = \frac{40}{3^5}; P_{3,5} = \frac{80}{3^5}; P_{4,5} = \frac{80}{3^5}; P_{5,5} = \frac{32}{3^5}$.

Задача 65.

Изделия, изготовленные на станке-автомате, в среднем составляют 90% изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 5 изделий будет: а)4 изделия первого сорта; б) хотя бы 4 изделия первого сорта?

Ответ: а) 0,328; б) 0,918.

Задача 66.

В цехе имеется 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включены 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

Ответ: а) 0,246; б)0,026; в)0,000064.

Задача 67.

Найти вероятность того, что событие А наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Ответ: 0,0041.

Задача 68.

Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз.

Ответ: 0,04565.

Задача 69.

Установлено, что в среднем 0,5% шариков, изготовленных для подшипников, оказываются бракованными. Определить вероятность того, что среди поступивших на контроль 10 000 шариков бракованными окажутся: а) 40 штук, б) 50 штук, в) 60 штук.

Ответ: а) 0,022; б) 0,057; в) 0,022.

Задача 70.

Найти наивероятнейшие числа отрицательных и положительных ошибок и соответствующую вероятность при четырех измерениях, если при каждом измерении вероятность получения положительной ошибки равна 2/3, а отрицательной 1/3.

Ответ: $m_0^+ = 3; m_0^- = 1; p = \frac{32}{81}$.

Задача 71.

Чему равна вероятность наступления события А в каждом испытании, если наивероятнейшее число наступления события А в 100 независимых испытаниях равно 20?

Ответ: 0,2.

Задача 72.

Сколько необходимо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события А в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появлений события А в этих испытаниях было равно 20?

Ответ: n=49; 50; 51.

Задание на дом

Задача 73.

Последовательно посланы четыре радиосигнала. Вероятность приема каждого из них не зависит от того, приняты ли остальные сигналы, и равна 0,3. Определить вероятность приема 1,2,3,4 сигналов, а также ни одного из них.

Ответ: 0,4116; 0,2646; 0,0756; 0,0081; 0,2401.

Задача 74.

Среди изготовленных рабочими деталей в среднем бывает 4% брака. Какова вероятность того, что среди среди взятых на испытание 6 деталей 2 будут бракованными?

Ответ: 0,029.

Задача 75.

Что вероятнее выиграть у равносильного противника: а) 3 партии из 4 или 5 из 8? б) не менее 3 партии из 4 или не менее 5 из 8?

Ответ: а) $P_{3,4} > P_{5,8}$; б) вероятнее выиграть не менее 5 партий из 8.

Задача 76.

По данным технического контроля в среднем 2% изготовленных на заводе часов нуждается в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что из 300 изготовленных часов 290 штук не будут нуждаться в дополнительной регулировке?

Ответ: 0,042.

Задача 77.
Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при одном броске равна 0,4. Произведено 10 бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

Ответ: 4; 0,251.

Занятие 6

Интегральная теорема Лапласа и следствия.

Задача 78.
Известно, что 3/5 всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Определить вероятность того, что в изготовленной партии из 200 аппаратов окажется: а) наивероятнейшее число аппаратов первого сорта; б) 140 штук первого сорта.

Ответ: а) 0,058; б) 0,00087.

Задача 79.
Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

Ответ: а) 0,8862; б) 0,8944; в) 0,1056.

Задача 80.
Вероятность появления события в каждом из 21 независимого испытания равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

Ответ: 0,95945.

Задача 81.
Возможность выпуска нестандартной электролампы равна 0,1. Определить вероятность того, что в партии из 2000 ламп: а) число стандартных – не менее 1790 штук; б) число нестандартных – менее 101 штуки; в) число нестандартных – менее 201 штуки.

Ответ: а) 0,773; б) 0; в) 0,53.

Задача 82.
Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

Ответ: 0,7698.

Задача 83.
Вероятность появления события в каждом из 1000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

Ответ: 0,979.

Задача 84.
При проверке качества изготовляемых радиоламп установлено, что из них 95% служит не менее гарантируемого срока в 2000 часов. Определить вероятность того, что в партии из 500 радиоламп доля ламп со сроком службы менее гарантируемого будет отличаться от вероятности изготовления такой радиолампы не более чем на 0,02.

Ответ: 0,959.

Задача 85.
Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти число испытаний n, при котором с вероятностью 0,9876 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Ответ: n=625.

Задача 86.
При массовом производстве продукции и установившемся процессе производства 4% изделий выходят бракованными. Сколько изделий следует отобрать, чтобы с вероятностью 0,99 можно было утверждать, что среди изделий доля бракованных по абсолютной величине отличается от 4% не более чем на 1; 1,5; 2%?

Ответ: 2556; 1136;639.

Задача 87.
Вероятность допущения дефекта при производстве механизмов равна 0,4. Произвольным образом отбирается 500 механизмов. Установить величину наибольшего отклонения частности изготовленных механизмов с дефектами от вероятности 0,4, которую можно гарантировать с вероятностью 0,9973.

Ответ: 0,066.

Задание на дом

Задача 88
При данном технологическом процессе 75% всей продукции выпускается высшим сортом. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 150 изделий. Вычислить вероятность того, что в этой партии окажется наивероятнейшее число изделий высшего сорта.

Ответ: $m_0 = 113; P_{113/150} = 0.075.$

Задача 89
При проверке качества изготовленных на заводе часов установлено, что в среднем 98% их отвечает предъявляемым требованиям, в 2% нуждается в дополнительной регулировке. Приемщик проверяет качество 300 изготовленных часов. Если при этом среди них обнаружится II или более часов, нуждающихся в дополнительной регулировке, вся партия возвращается заводу для доработки. Определить вероятность того, что партия будет принята.

Ответ: 0,944.

Задача 90.
По техническим условиям диаметр валиков, изготовляемых на автоматическом станке, должен быть не менее 37,8 мм и не более 37,9 мм. Настроенный станок производит в среднем 98% валиков, удовлетворяющих предъявляемым требованиям. Определить вероятность того, что среди 900 изготовленных валиков будет бракованных: а) до 3% и более; б) от 2% и менее.

Ответ: а)0,0162; б)0,5;

Задача 91.

При установившемся технологическом процессе вероятность изготовления бракованного шарика для шарикоподшипника равна 0,015. определить вероятность того, что доля бракованных шариков среди изготовленных 1000 штук будет отличаться от вероятности изготовления бракованного шарика не более чем на 0,005 в ту или другую сторону. Как изменится результат, если вместо 1000 штук взять 625?

Ответ: 0,806; 0,697.

Задача 92.

При штамповке 70% деталей выходит первым сортом, 20%-вторым и 10%-третьим. Определить, сколько нужно взять отштампованных деталей, чтобы с вероятностью, равной 0,9973, можно было утверждать, что доля первосортных среди них будет отличаться от вероятности изготовления первосортной детали по абсолютной величине не более чем на 0,05?

Ответ: 756

V. ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Случайная величина X называется дискретной, если она принимает изолированные (дискретные) значения $X_1, X_2, ..., X_n$, которые можно пронумеровать.

Если заданы значения X_i дискретной величины и соответствующие им вероятности $p_i = P(X = x_i)$, то говорят, что задан ряд распределения этой величины, который записывают в виде таблицы:

X_i	X_1	X_2	X_3	$\dots$	X_n
P_i	P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_n

В таблице $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Для случая бесконечного числа возможных значений величины X $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ является сходящим рядом. Если на плоскости изобразить точки $A_i(x_i; p_i)$ и соединить их прямолинейными отрезками, то полученная ломаная называется многоугольником распределения вероятностей дискретной, случайной величины.

Математическим ожиданием дискретной величины X называется сумма произведений её возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Для случая бесконечного числа возможных значений величины X выражения $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ должно быть сходящимся рядом.

Для математического ожидания справедливы следующие свойства:

M(C)=C, где C=const;

M(CX)=CM(X), где C=const;

M(X+У)=M(X)+M(У);

$$M(X_1+X_2+...+X_m)=M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_m);$$

М(ХУ)=М(Х)М(У), если Х и У- независимые случайные величины;

$$M(X_1X_2...X_m)=M(X_1)M(X_2)...M(X_m),$$

если $X_1, X_2, ..., X_m$ - взаимно независимые случайные величины.

Дисперсией дискретной случайной величины Х называется математическое ожидание случайной величины

$[X-M(X)]^2 : D(X)=M[X-M(X)]^2=M(X^2)-[M(X)]^2.$

Для дисперсии справедливы следующие свойства:

D(C)=0, где C=const;

D(CX)=C^2D(X), где C=const;

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X);$$

D(X+Y)=D(X)+D(Y), если Х и У независимы;

$$D(X_1+X_2+...+X_m)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_m);$$

если $X_1, X_2, ..., X_m$ - взаимно независимые случайные величины;

D(X-Y)=D(X)+D(Y),

Если Х и У независимы.

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины Х называется величина:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Наиболее важные распределения

1. Биномиальное распределение. Схема испытаний, в которой производится n независимых испытаний, каждое из которых может иметь два исхода: «успех» с вероятностью p и «неудача» с вероятностью q = 1 – p, называется схемой Бернулли. Вероятностью события, что при n независимых испытаниях по схеме Бернулли произойдет равно k успехов, равна (формула Бернулли):

$$P_n(x=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,\ldots,n.$$

Математическое ожидание M(X)= np, дисперсия D(X) = npq.

2. Геометрическое распределение. Если производятся независимые испытания, в каждом из которых возможны два исхода - «успех» с вероятностью p или «неудача» с вероятностью q = 1-p, то вероятность, что будет произведено k испытаний до первого появления «успеха» будет равна:

$$P(x=k)=q^{k-1}p.$$

3. Гипергеометрическое распределение. Пусть в урне N шаров, из них K белых, N- K черных. Наудачу из урны взято n шаров. Тогда вероятность того, что среди них будет ровно k белых шаров, равна:

$$P(x=k)=\frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

4. Распределение Пуассона с параметром λ=np

$$P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\ldots$$

Математическое ожидание M(X)= λ, дисперсия D(X) = λ.

Занятие 7.

Пример:

Устройство состоит из четырех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов в одном опыте.

<u>Решение:</u>

Пусть случайная величина x - число отказавших элементов в одном опыте. Тогда по формуле Бернулли:

$$P_4(x=0)=C_4^0p^0q^4=1\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^4=0{,}6561\ ,$$

$$P_4(x=1)=C_4^1p^1q^3=4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^3=0{,}2916,$$

$$P_4(x=2)=C_4^2p^2q^2=\frac{4!}{2!2!}0{,}1^2\cdot 0{,}9^2=0{,}0486,$$

$$P_4(x=3)=C_4^3p^3q^1=4\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9=0{,}0036,$$

$$P_4(x=4)=C_4^4p^4q^0=1\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9^0=0{,}0001.$$

Закон (ряд) распределения.

x	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{4}P(x=k)=1{,}0000$.

Математическое ожидание:

$$M(X)=0\cdot 0{,}6561+1\cdot 0{,}2916+2\cdot 0{,}0486+3\cdot 0{,}0036+4\cdot 0{,}0001=0{,}4000.$$

Найдем

$$M(X^2)=0^2\cdot 0{,}6561+1^2\cdot 0{,}2916+2^2\cdot 0{,}0486+3^2\cdot 0{,}0036+4^2\cdot 0{,}0001=0{,}5200.$$

Дисперсия: $D(X)=M(X^2)-(MX)^2=0{,}52-(0{,}4)^2=0{,}36$.

Так как дискретная величина имеет биноминальное распределение, то математическое ожидание можно найти в виде:

$$M(X)=np=4\cdot 0{,}1=0{,}4,$$

а дисперсию:

$D(X)=npq=4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}36$

Ответ: $M(X)=0{,}4$, $D(X)=0{,}36$.

Пример:

Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания, всего выдано 4 патрона. Вероятность попадания в цель p = 0,6. Составить закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины - числа произведенных выстрелов.

Решение: Пусть случайная величина x подчиняется геометрическому распределению. Так как стрельба заканчивается при первом попадании или потому, что закончились патроны, закон распределения может быть представлен в виде:

x	1	2	3	4
P	p	qp	q^2p	q^3p+q^4

Подставляя числа, получим:

x	1	2	3	4
P	0,6	0,24	0,096	0,064

Контроль: $\Sigma P = 1$.

Математическое ожидание:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}24 + 3 \cdot 0{,}096 + 4 \cdot 0{,}064 = 1{,}624.$$

Найдем

$$M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}24 + 3^2 \cdot 0{,}096 + 4^2 \cdot 0{,}064 = 3{,}448.$$

Дисперсия: $D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = 3{,}448 - (1{,}624)^2 = 0{,}810624$.

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}810624} = 0{,}9.$$

Пример:

В партии из 10 деталей 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение: Случайная величина имеет следующие возможные значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вероятности этих значений определяются гипергеометрическим распределением

$$P(X=0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1 \cdot 1}{\frac{10 \cdot 9}{2}} = \frac{1}{45}$$

$$P(X=1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 2}{45} = \frac{16}{45}$$

$$P(X=2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 1}{45} = \frac{28}{45}.$$

Закон распределения имеет вид:

x	0	1	2

P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Математическое ожидание:

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{45} + 1 \cdot \frac{16}{45} + 2 \cdot \frac{28}{45} = \frac{72}{45}.$$

Найдем $M(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{45} + 1^2 \cdot \frac{16}{45} + 2^2 \cdot \frac{28}{45} = \frac{128}{45}$.

Дисперсия: $D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{128}{45} - \left(\frac{72}{45}\right)^2 = 0{,}284$.

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}284} = 0{,}53.$$

Пример:

Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения:

X_1	1	2
P	0,2	0,8

X_2	2	4
P	0,3	0,7

Найти математические ожидания произведения $4X_1 \cdot X_2 - 2X_2$.

Решение: Используя свойства математического ожидания, найдем математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин, подсчитав отдельно $M(X_1)$ и $M(X_2)$

$$M(X_1) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}8; \qquad M(X_2) = 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}7 = 3{,}4;$$

$$M(4X_1 \cdot X_2 - 2X_2) = 4 \cdot 1{,}8 \cdot 3{,}4 - 2 \cdot 3{,}4 = 17{,}68.$$

Пример:

Случайные величины X_1 и X_2 независимы. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$Z = 3X_1 - 2X_2 + 5,$$

если $D(X_1) = 1$ и $D(X_2) = 4$.

Решение:

Воспользовавшись свойствами дисперсии, имеем

$D(Z) = D(3X_1 - 2X_2 + 5) = D(3X_1) + D[X_1(-2)] + D(5) = 9D(X_1) + 4D(X_2) =$
$= 9+16=25$,

$$\sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = 5.$$

Задача 93.

В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отображены 3 детали. Составить закон распределения дискретной, случайной величины X- числа стандартных деталей среди отобранных.

Ответ:

X	0	1	2	3
p	0	$1/5$	$3/5$	$1/5$

Задача 94.

Два бомбардировщика поочерёдно сбрасывают бомбы на цель до первого попадания. Вероятность попадания в цель первым бомбардировщиком равна 0,7, а вторым 0,8. первым сбрасывает бомбы первый бомбардировщик. Составить первые четыре члена закона распределения дискретной случайной величины X-числа сброшенных бомб обоими бомбардировщиками (ограничиться возможными значениями X, равными 1, 2, 3 и 4).

Ответ:

X	1	2	3	4
p	0,7	0,24	0,042	0,0144

Задача 95.

Вероятность нарушения стандартности изделия при некотором технологическом процессе равна 0,06. В ОТК из каждой партии берут по одному 5 изделий и сразу проверяют качество каждого из них. Если при этом обнаружится нестандартное изделие, дальнейшие испытания прекращаются и вся партия задерживается. Составить закон распределения числа изделий, подвергаемых проверке.

Ответ:

Число проверяемых изделий	1	2	3	4	5
вероятности	0,06	0,056	0,053	0,5	0,781

Задача 96.

Математическое ожидание случайной величины X равно 7, а величины У равно 3. Случайные величины X и У независимы. Найти математическое ожидание следующих величин:

а) X-1; б) 4У+5; в) 5X-2У+5; г) 3XУ+2; д) 6-X+3У+1/7XУ;

Ответ: а)6; б)17; в) 33; г) 65; д)11.

Задача 97.

Дисперсия случайной величины X равна 5. Найти дисперсию следующих величин: а)X-1; б)-2X; в)3X+6;

Ответ: а)5; б)20; в)45;

Задача 98.

В партии из 10 деталей содержится 3 нестандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X-числа нестандартных деталей среди двух отобранных и найти её математическое ожидание.

Ответ: M(X)=27/45.

Задача 99.

Рабочий у конвейера при сборке механизма устанавливает в него определённую деталь. Эту деталь приходится в некоторых случаях дополнительно обрабатывать (подгонять) и проверять качество подгонки пробной установкой её в механизм. Закон распределения случайной величины (количества пробных установок детали в механизм) выражается таблицей.

Число пробных установок	X_i	1	2	3	4	5
вероятность	P_i	0,38	0,26	0,20	0,14	0,02

Определить математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой случайной величины.

Ответ: 2,16 и 1,2944

Задача 100.

Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0.5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0.3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 с вероятностью p_3 при M(X)=8.

Ответ: x_3=21; p_3=0,2.

Задача 101.

Даны значения дискретной случайной величины X ($x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$), а также математические ожидания этой величины и её квадрата: M(X)=2,3; $M(X^2) = 5{,}9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

Ответ: $p_1 = 0{,}2; p_2 = 0.3; p_3 = 0.5.$

Задача 102.

ОТК проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартного, равна 0,9. в каждой партии содержится 5 изделий. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X- числа партий, в каждой из которых окажется 4 стандартных изделия, если проверке подлежит 50 партий.

Ответ: примерно 16.

Задача 103.

Найти дисперсию дискретной случайной величины X-числа отказов элемента некоторого устройства в десяти независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,9.

Ответ: D(X)=0,9.

Задача 104.

Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найти вероятность появления события A, если дисперсия числа появлений события в трёх независимых испытаниях равна 0,63.

Ответ: 0,3; 0,7.

Задание на дом

Задача 105.

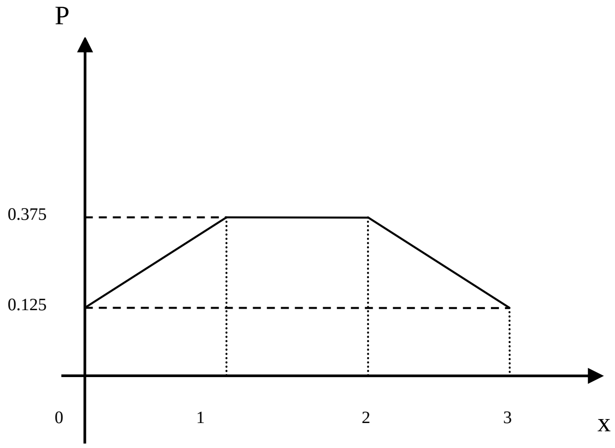
Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью 0,5. Для случайного числа появлений герба построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения.

Ответ: а)

X_i	0	1	2	3

p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

б)



Задача 106.
Математическое ожидание количества вызовов, поступающих на заводской коммутатор в течение часа, из цеха № 1 равно 27,5; из цеха № 2 - 33,4; из цеха № 3 – 28,6. Определить математическое ожидание общего количества вызовов, поступающих на заводской коммутатор в течение года.

Ответ: 89,5.

Задача 107.
Найти закон распределения дискретной случайной величины X, которая может принимать значения X_1 с вероятностью p_1=0,9 и $x_2 (x_1 < x_2)$, если M(x) = 4,1 и D(x)=0,09.

Ответ: $x_1 = 4; x_2 = 5.$

Задача 108.
Из поступивших в ремонт 10 часов 6 штук нуждается в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в общей чистке механизма, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Требуется составить закон распределения величины X (количества просмотренных часов) и найти ее математическое ожидание.

Ответ:

X_i	1	2	3	4	5
P_i	3/5	4/15	1/10	1/35	1/210

$M(x)=1\frac{4}{7}$.

Задача 109.
При установившемся технологическом процессе2/3 всей производимой продукции станок-автомат выпускает первым сортом и 1/3 – вторым. Составить закон распределения числа изделий первого сорта среди 5 изделий, отобранных случайным образом. Использовав этот закон, найти математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой случайно величины.

Ответ: 3,33; 1,11.

IV. Функция распределения вероятностей. Плотность распределения вероятностей.

Случайная величина X называется непрерывной, если ее возможные значения заполняют интервал (α;β), где α и β могут быть и бесконечными.
Функцией распределения вероятностей (интегральным законом) непрерывной случайной величины X называется вероятность того, что эта величина примет значение, удовлетворяющее неравенству X<x, где x – любое действительное число. Она обозначается F(x)=P(X<x). Функция F(x) непрерывна на всей числовой оси.
Функцию распределения F(x) можно построить и для дискретной случайной величины. Тогда F(x) будет являться разрывной в возможных значениях этой величины, причем разрывы равны вероятностям, с которыми принимаются соответствующие значения.

Важнейшие свойства функции F(x)

1) F(x) является неотрицательной возрастающей функцией, удовлетворяющей при всех x неравенствам $0 \le F(x) \le 1$;
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$. Если величина X принимает значения из интервала (α;β), то F(x)=0 при x$\le \alpha$ и F(x)=1 при x$\ge \beta$;
3) Вероятность того, что X – непрерывная случайная величина, имеющая функцией распределения F(x), примет значение из интервала (x_1, x_2), определяется по формуле $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Плотностью распределения вероятностей (дифференциальным законом) непрерывной случайной величины называется производная от функции распределения. Она обозначается

f(x)=$F'(x)$, т. е.
$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}, \text{ где } \Delta x > 0.$$

Важнейшие свойства функции f(x)

1) $f(x) \ge 0$ при всех значениях x. Если X принимает значения из интервала (α; β), то $f(x) \equiv 0$ при x<α и x>β;
2) функция распределения и плотность распределения вероятностей связаны соотношением
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx;$$
3) для плотности вероятностей непрерывной случайной величины X всегда выполняется равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

4) вероятность того, что непрерывная случайная величина X, имеющая плотность распределения вероятностей $f(x)$, примет значение из интервала ($x_1;x_2$), определяется по формуле

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X).$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины

$$G(x) = \sqrt{D(X)}.$$

Занятие 8.

Пример:

Дискретная случайная величина задана рядом распределения

x	1	2	5	7
P	0,6	0,24	0,096	0,064

Найти функцию распределения и вероятность нахождения случайной величины в интервале (1;6).

Решение:

Если значения случайной величины x < 1, то F(x) = P (X < 1) = 0, так как X не имеет значений, меньших 1.

Если значения X принадлежит интервалу 1 ≤ x < 2, то F(x) = 0,6, так как X может принимать только значение 1 с вероятностью 0,6.

Если 2 ≤ x < 5, то F(x) = 0,84. Действительно, X может принимать значение 1 с вероятностью 0,6 или значение 2 с вероятностью 0,24. Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий вероятность такого события есть 0,6 + 0,24 = 0,84.

Если 5 ≤ x < 7, то F(x) = 0,936. Действительно, X может принимать значение 1 с вероятностью 0,6, или значение 2 с вероятностью 0,24, или значение 5 с вероятностью 0,096. Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий вероятность такого события есть 0,6 + 0,24 + +0,096 = 0,936.

Если x ≥ 7, то F(x) = 1. Действительно, событие X ≥ 7 достоверно, так как X при этом может иметь любое из возможных значений, и вероятность его равна 1.

Функцию распределения запишем в следующем виде:

$$F(X)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0{,}6 & 1\le x<2\\ 0{,}84 & 2\le x<5\\ 0{,}936 & 5\le x<7\\ 1 & x\ge 7\end{cases}.$$

Вероятность нахождения случайной величины в интервале (2;6) найдем в виде:

$$P(1 < x < 6) = F(6) – F(1) = 0{,}936 – 0{,}6 = 0{,}336.$$

Пример:

Непрерывная случайная величина X задана на всей числовой оси плотностью распределения вероятностей, определенной формулой

$$f(x)=\frac{C}{1+x^2}.$$

Найти величину параметра C, определить вероятность попадания случайной величины в интервал (-1; $\sqrt{3}$).

<u>Решение:</u>

По свойству плотности вероятностей

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{1+x^2}dx=1.$$

Вычислим этот интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{1+x^2}dx=C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=C\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=C[\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}(-\infty)]=$$

$$=C(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=C\pi$$

Следовательно $C\pi=1$, откуда $C=\frac{1}{\pi}$.

Теперь можно определить вероятность попадания в интервал (-1;$\sqrt{3}$)

$$P(-1<X<\sqrt{3})=\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{\pi}}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}}=\frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}(-1))=$$

$$=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{7\pi}{12}=\frac{7}{12}.$$

Пример:

Функция распределения величины X имеет вид:

$$F(X)=\begin{cases}A+Be^{2x}, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}.$$

Найти A и B, плотность вероятности $f(x)$.

<u>Решение:</u>

Так как интегральная функция непрерывной случайной величины непрерывна, а так же в соответствии с ее свойствами, получим:

$$\begin{cases} F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} (A + Be^{2x}) = 0 \\ A + Be^{0} = 1 \end{cases}$$, тогда A=0, B=1.

Интегральная функция распределения принимает вид:

$$F(X) = \begin{cases} e^{2x}, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Так как $f(x) = F'(X)$, найдем плотность вероятности:

$$f(X) = \begin{cases} 2e^{2x}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Пример:

Плотность распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \dfrac{A}{\sqrt{x}}, & 1 < x < 4 \\ 0, & x \geq 4 \end{cases}.$$

Найти: параметр A, интегральную функцию распределения F(X), математическое ожидание M(X); дисперсию D(X); среднее квадратическое отклонение σ(X).

Решение:

По свойствам плотности распределения: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Тогда $\int\limits_{1}^{4} \frac{A}{\sqrt{x}} dx = 2A\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2A(2-1) = 2A = 1$, получим A=0,5.

Учитывая найденный параметр, запишем функцию плотности распределения:

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & 1 < x < 4 \\ 0, & x \geq 4 \end{cases}.$$

Найдем интегральную функцию распределения F(X):

$$F(X) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

При $x \leq 1$ интегральную функцию распределения предстанет в виде:

$$F(X) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0.$$

При $1 < x < 4$:

$$F(X) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int\limits_{1}^{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x}\Big|_1^x = \sqrt{x} - 1.$$

При $x \geq 4$:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx + \int_{4}^{+\infty} 0\,dx = \sqrt{x}\Big|_1^4 = 2-1=1.$$

Запишем интегральную функцию распределения $F(X)$:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \sqrt{x}-1, & 1 < x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{1}^{4} \frac{x}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{4}\sqrt{x}dx = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X) = \int_{1}^{4}\frac{x^2}{2\sqrt{x}}dx - \frac{49}{9} = \frac{1}{2}\int_{1}^{4} x^{\frac{3}{2}}dx - \frac{49}{9} = \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_1^4 - \frac{49}{9} =$$

$$= \frac{1}{5}(32-1) - \frac{49}{9} = \frac{34}{45}.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{34}{45}} \approx 0{,}8692.$$

Задача 110.

Для случайной величины X, заданной рядом распределения

X_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

Найти функцию распределения и построить её график.

Ответ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0{,}125, & 0 < x \leq 1; \\ 0{,}500, & 1 < x \leq 2; \\ 0{,}875, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Задача 111.

Дискретная случайная величина задана законом распределения

x	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти интегральную функцию F(x) и построить её график.

Ответ:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3; \\ 0{,}2, & 3 < x \le 4; \\ 0{,}3, & 4 < x \le 7; \\ 0{,}7, & 7 < x \le 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Задача 112.

Может ли $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ являться функцией распределения случайно величины, изменяющейся в пределах: а)от $-\infty$до $+\infty$; б)от 0 до $+\infty$; в) от $-\infty$ до 0?

Ответ: а)нет; б)нет; в)да.

Задача 113.

Каковы должны быть параметры A и B, чтобы функция $F(x) = A + Be^{-x}$ являлась функцией распределения вероятностей случайной величины X, изменяющейся в пределах от 0 до ∞?

Ответ: A=1; B=-1;

Задача 114.

Функция распределения вероятности имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3; \\ 1-(\frac{3}{x})^2, & x > 3. \end{cases}$$

найти плотность вероятности и вероятность нахождения случайной величины в интервале (5;10).

Ответ: 0,27.

Задача 115.

Функция распределения случайной величины X по закону Коши имеет вид $F(x) = A + B\,arctg\,\dfrac{x}{2} (-\infty < x < \infty)$. Определить: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности f(x); в) $P(\dfrac{2}{\sqrt{3}} \le x \le 2\sqrt{3})$

Ответ: а) $A = \dfrac{1}{2}; B = \dfrac{1}{\pi}$;

б) $\dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{2}{4+x^2}$;

в) $\frac{1}{6}$;

Задача 116.

Случайная величина X имеет следующую плотность вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \dfrac{A}{x^2}, & x\geq 1.\end{cases}$$

Определить: а) коэффициент A; б) функцию распределения F(x); в) вероятность попадания случайной величины X в интервале (2;3).

Ответ: а) A=1;

б) $F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \dfrac{x-1}{x^2}, & x\geq 1.\end{cases}$

в) - $\frac{1}{6}$.

Задача 117;

Дана дифференциальная функция распределения случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ ax^2+\dfrac{2}{3}x, & 0<x\leq 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

определить: а) коэффициент а; б) интегральную функцию распределения F(x); в) вероятность попадания случайной величины в интервал (0; ½).

Ответ: а) а=2;

б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ \dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{3}x^2, & 0<x\leq 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$

в) $\frac{1}{6}$.

Задача 118.

Случайная величина задана дифференциальной функцией:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Найти: а)интегральную функцию; б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, заключённое в интервале $(0;\frac{\pi}{4})$.

Ответ: а)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0\le x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

б) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

Задача 119.

Случайная величина X имеет следующую функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{x^2}{6}, & 0\le x<2;\\ -\frac{x^2}{3}+2x-2, & 2\le x<3;\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

Требуется: а)построить график F(x); б) найти плотность распределения f(x) и построить ее график; в) найти M(x); D(x); $\sigma(x)$.

Ответ: б) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{x}{3}, & 0\le x<2;\\ 2-\frac{2}{3}x+, & 2\le x<3;\\ 0, & x\ge 3.\end{cases}$

в) P=0,5;

г) M(x)=1,67; D(x)=0.389; $\sigma(x)=0{,}624$.

Задание на дом.

Задача 120.

Для случайной величины X ряд распределения

X_i	1	2	3	4	5

P_i	0,38	0,26	0,20	0,14	0,02

Найти функцию распределения и построить ее график.

Ответ:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 0{,}38, & 1<x\le 2;\\ 0{,}64 & 2<x\le 3;\\ 0{,}84 & 3<x\le 4;\\ 0{,}98 & 4<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Задача 121.
Может ли функция sin x быть функцией распределения вероятности величины X, изменяющейся в пределах: а) от 0 до $\frac{\pi}{2}$; б) от 0 до π?

Ответ: а) может; б) не может.

Задача 122.
Функция распределения вероятностей случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x & 0\le x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$ (закон равномерного распределения);

найти плотность вероятности случайной величины X.

Ответ: $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1 & 0\le x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Задача 123.
Функция распределения вероятности случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{x^2}{25} & 0\le x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

найти вероятность того, что случайная величина окажется в интервале(3;6).

Ответ: 0,64.

Задача 124.

При каком значении A функция $f(x)=\frac{A}{1+x^2}$, где $-\infty<x<\infty$, является плотностью вероятности случайной величины X?

Ответ: A=$\frac{1}{\pi}$.

Задача 125.
Дифференциальная функция непрерывной случайной величины f(x)=Csin2x в интервале(0; $\frac{\pi}{2}$), вне этого интервала f(x)=0. найти постоянный параметр C.

Ответ: C=1.

Занятие 9

Задача 126.
Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ a+b\cdot\arcsin x, & -1\le x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Определить постоянные a и b, а также M(X).

Ответ: a=$\frac{1}{2}$; b=$\frac{1}{\pi}$; M(X)=0.

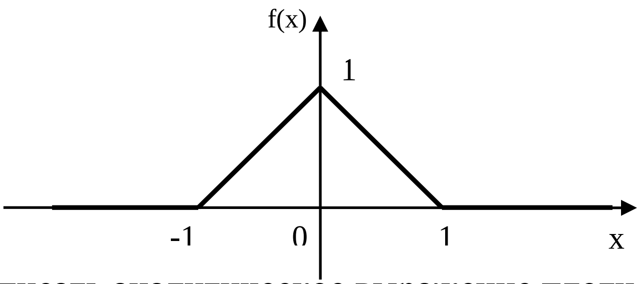
Задача 127.
Случайная величина x задана дифференциальной функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ c(x^2+2x), 0\le x\le 1;\\ 0, x>1.\end{cases}$$

Найти: а) параметр C; б) математическое ожидание величины M(x); в)дисперсию случайной величины D(x).

Ответ: C=$\frac{3}{4}$; б)M(x)=$\frac{11}{16}$; в)D(x)=$\frac{21}{640}$.

Задача 128.
Плотность вероятности f(x) случайной величины X имеет график



Требуется: а) написать аналитическое выражение плотности вероятности f(x); б)найти функцию распределения F(x) случайной величины x; в)найти функцию распределения F(x) случайной величины x; в)найти M(x); D(x) и $\sigma(x)$.

Ответ: а)

$$f(x)=\begin{cases}0, x<-1;\\ x+1, -1\le x\le 0;\\ x-1, 0\le x\le 1;\\ 0, x>1.\end{cases}$$

б) $$F(x)=\begin{cases}0, x<-1;\\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, -1\le x\le 0;\\ 1-\dfrac{(1-x)^2}{2}, 0<x\le 1;\\ 1, x>1.\end{cases}$$

в) M(x)=0;D(x)=$\frac{1}{6}$; $\sigma(x)$.

Задача 129.

Функция распределения непрерывной случайной величины X задана следующим образом:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}cosx, & 0\le x\le \pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Требуется: а) Найти плотность вероятностей f(x); б) построить графики F(x) и f(x); в) найти M(X); D(X) и $\sigma(X)$; определить вероятность попадания случайной величины X в интервал (0; π).

Ответ: а) $$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

б)M(X)=$\frac{\pi}{2}; D(X)=\pi; \sigma(X)=\sqrt{\pi};$;

г) $p(0\le x\le \pi)=1.$

Задача 130.

Случайная величина X задана дифференциальной функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}04x, & 0<x<5;\\ 0, & x\ge 5.\end{cases}$$

найти дисперсию X.

Ответ: $D(X)=\frac{25}{18}.$

Задача 131.

Случайная величина X задана интегральной функцией

$$F_ч = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases};$$

Требуется: а) найти дифференциальную функцию f(x); б) построить графики F(x) и f(x); в)найти M(X);D(X)

Ответ: а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases};$

б) M(X)=0,5; D(X)=1/12.

<u>Задание на дом.</u>

Задача 132.

Случайная величина задана интегральной функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ ax + b, & 2 \le x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Определить постоянные a и b; M(X) и D(X). Построить графики F(x) и f(x).

Ответ: a=0,5; b=-1;

M(X)=3; D(X)=1/3.

Задача 133.

Случайная величина X задана дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2}; \\ acosx, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определить а) коэффициент a; б) вероятность $P(0 < x < \frac{\pi}{2})$; попадания случайной величины X в интервал $(0; \frac{\pi}{2})$; в)M(X); г) построить график распределения функцииF(x).

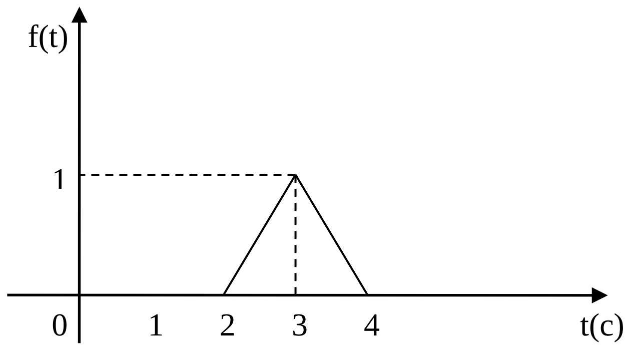
Ответ: а) a=0,5;

б) $P(0 < x < \frac{\pi}{2}) = 0,5$;

в)M(X)=0.

Задача 134.

Время инерциального вращения механизма является случайной величиной с плотностью вероятности изображённой на рисунке.



Определить а) функцию плотности вероятности; б) функцию распределения вероятностей и вероятность того, что время инерционного вращения будет в интервале (3;4), т. е. $P(3 \le t \le 4)$; в) среднее время (математическое ожидание времени) инерционного вращения механизма.

Ответ:

а) $f(t) = \begin{cases} 0, t < 2; \\ t-2, 2 \le t \le 3; \\ 4-t, 3 < t \le 4; \\ 0, t > 4; \end{cases}$

б) $F(t) = \begin{cases} 0, t < 2; \\ \dfrac{(t-2)^2}{2}; 2 \le t \le 3; \\ 1 - \dfrac{(4-t)^2}{2}, 3 < t \le 4; \\ 1, t > 4; \end{cases}$

в) $M(t) = 3.$

VII. Нормальный закон распределения вероятностей

Непрерывная случайная величина X, принимающая возможные значения из интервала (-∞;+∞), подчинена нормальному закону распределения вероятностей, если ее плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где

$$a = M(X); \sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Вероятность того, что случайная величина X, подчиненная нормальному закону, примет значение из интервала (x_1, x_2), определяется по формуле

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

Вероятность того, что отклонение случайной величины X, подчинённой нормальному закону, от её математического ожидания по абсолютной величине не превосходит заданного числа $\varepsilon > 0$, определяется по формуле

$$P(|X-a| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа.

Правило «трех сигм»

$$P(|x - M(X)| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973.$$

Занятие 10.

Пример:

Автомат штампует детали. Длина детали X распределена нормально с M(X) = 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали больше 55 мм.

Решение:

Используем правило «трех сигм»:

$$P(32 \le x \le 68) = 0{,}9973 ,$$

откуда найдем параметр σ нормального распределения. Используем формулу $P(x_1 \le x \le x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$, получим

$$P(32 \le x \le 68) = \Phi\left(\frac{68-50}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{32-50}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right),$$

$$\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) = 0{,}49865.$$

По таблице для функции $\Phi(x)$: $\frac{18}{\sigma} = 3{,}0, \quad \sigma = 6{,}0.$

Искомая вероятность:

$$P(x > 55) = P(55 \le x < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{55-50}{6}\right) = 0{,}5 - 0{,}38493 = 0{,}11507.$$

Пример 2:

Случайная величина распределена нормально. Среднее квадратическое отклонение σ=0,4. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

Решение:

$$P(|x-a| < 0{,}3) = 2\Phi(\frac{0{,}3}{0{,}4}) = 2\Phi(0{,}75) = 2 \cdot 0{,}2734 = 0{,}5468.$$

Задача 135.

Нормально распределённая случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

Ответ: M(X)=1; D(X)=25.

Задача 136.

Дана интегральная функция нормированного нормального распределения:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Найти дифференциальную функцию f(x).

Ответ: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Задача 137.

Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 6 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключённое в интервале (4;8).

Ответ: 0,6826.

Задача 138.

Автомат штампует детали. Контролируется длина детали (проектная длина), которая распределена нормально с математическим ожиданием равным 50мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 мм и не более 68мм. Найти вероятность того, что длинна на удачу вероятной детали: а)больше 55мм; б) меньше 40мм.

Указание: Найти предварительно σ из равенства P(32<x<68)=1.

Ответ: а) 0,0823;
б)0,0027.

Задача 139.

Изготовленные детали в зависимости от диаметра распределяются по нормальному закону с математическим ожиданием a=4,5 см и средним квадратическим отклонением $\sigma=0{,}05$см. Найти вероятность того, что диаметр взятой наудачу детали отличается от математического ожидания не более чем на 1 мм.

Ответ: 0,9545

Задача 140.

Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону с параметрами $\sigma=5\text{мм}$ и a=0. Сколько процентов годных деталей изготовляет автомат?

Ответ: Примерно 95%

Задача 141.

Длина изготовляемой автоматом детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с параметрами a=15см, $\sigma=0{,}2$ см.

Найти вероятность брака, если допустимые размеры детали должны быть 15+0,3см. Какую точность длинны изготовляемой автоматом детали можно гарантировать с вероятностью 0,97?

Ответ: 0,8664; 0,434.

Задача 142.

На автомате изготовляются заклёпки. Диаметр их головок, представляющий собой случайную величину, распределённую по нормальному закону, имеет среднее значение, равное 2мм, и дисперсию равную 0,01. какие размеры диаметра головок заклёпки можно гарантировать с вероятностью 0,95?

Ответ: $X \in]1{,}8;2{,}2[$

Задача 143.

Найти дисперсию случайной величины, распределённой по нормальному закону, если известно, что отклонение от математического ожидания, не превосходящее 0,1 см, имеет место с вероятностью 0,7887.

Ответ: 0,0064.

Задача 144.

Размеры деталей, выпускаемым цехом, распределяются по нормальному закону. Параметры этого нормального закона таковы: а= 5 см, $\sigma = 0{,}9 см$. Определить: а) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали имеет размеры в пределах от 4 до 7 см; б) вероятность того, что размер диаметра наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более чем на 2 см; в) в каких границах следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,95.

Ответ: а)0,8533; б) 0,9736;
в) $X \in]3{,}236;6{,}764[$.

Задание на дом.

Задача 145.

Математическое ожидание нормально распределённой случайной величины X а = 3 и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$.Написать дифференциальную функцию X.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$.

Задача 146.

Написать дифференциальную функцию нормально распределённой случайной величины X, зная, что M(X)=3; D(X) =16.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^{12}}{32}}$.

Задача 147.

Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами а= 5 и $\sigma = 2$.Определить вероятность того, что случайная величина окажется в интервале (1; 10).

Ответ: 0,971.

Задача 148.

Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами а= 3 и $\sigma = 0{,}5$. Определить вероятность того, что её значения будут отклоняться от а по абсолютной величине меньше чем на 1,3.

Ответ: 0,768.

Задача149.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределённой по нормальному закону, равно 2, математическое ожидание a=15. Найти, в каких границах следует ожидать значение случайной величины, при условии, что вероятность невыхода за эти границы должна быть равной 0,95.

Ответ: $X \in (11{,}08;\ 18{,}92)$.

VII. РАВНОМЕРНОЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ФУНКЦИЯ НАДЕЖНОСТИ.

Равномерным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, для которого дифференциальная функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}.$$

Математическое ожидание M(X) = $\dfrac{a+b}{2}$, дисперсия D(X) = $\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, описывается дифференциальной функцией $f(x)=\begin{cases}0, x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0,\end{cases}$

где λ - постоянная положительная величина и следовательно, $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$, причём $P(a<x<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$.

Математическое ожидание M(X) = $1/\lambda$, дисперсия D(X) = $1/\lambda^2$.

Длительность безотказной работы t некоторого элемента $t_0 = 0$ характеризуется интегральной функцией распределения, определяющей вероятность отказа элемента за время t:

$$F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t},$$

где T – длительность времени безотказной работы; $\lambda>0$ - интенсивность отказов.

Функцией надёжности называют функцию R(t), определяющую вероятность безотказной работы элемента за время t:

$$R(t)=e^{-\lambda t}.$$

Занятие 11

Пример:

Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания амперметра округляются до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

Решение:

Ошибка округления - случайная величина X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними делениями. Плотность вероятности можно записать в виде:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0{,}1-0}, & x\in[0,\,0{,}1]\\ 0, & x\notin[0,\,0{,}1]\end{cases},\ \text{или}\ f(x)=\begin{cases}10, & x\in[0,\,0{,}1]\\ 0, & x\notin[0,\,0{,}1]\end{cases}.$$

Ошибка отсчета превысит 0,02, если будет заключена в интервале (0,02; 0,08).

Найдем вероятность ошибки по формуле $P(x_1;\, x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$:

$$P(0{,}02;\, 0{,}08) = \int\limits_{0{,}02}^{0{,}08} 10\, dx = 0{,}6\,.$$

Задача 150.

Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3мин.

Ответ: 0,6.

Задача 151.

Минутная стрелка электрических часов перемещается скачкообразно в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20с.

Ответ: -2/3.

Задача 152.

Закон равномерного распределения задан дифференциальной функцией $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ в интервале (a;b). Вне этого интервала f(x)=0. Найти интегральную функцию F(x).

Ответ: $F(x)=\begin{cases}0\quad , & ,x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, \quad , & x>b;\end{cases}$

Задача 153.

Найти математическое ожидание случайной величины X, распределённой равномерно в интервале (2;8).

Ответ: 5.

Задача 154.

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределённой равномерно в интервале (a;b).

Ответ: $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12};$ $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}.$

Задача 155.

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному дифференциальной функцией $f(x) = 0.004e^{0.004x}$ при $x \ge 0$ и $f(x) = 0$ при x<0. найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (1;2).

Ответ: 0,038

Задача 156.

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному интегральной функцией $F(x) = 1 - e^{-0.6x}$ при $x \ge 0$ и F(x)=0 при x<0. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (2;5).

Ответ: $P(2 < x < 5) = 0{,}252$.

Задача 157.

Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного интегральной функцией $F(x) = 1 - e^{-0{,}1x}\,(x \ge 0)$.

Ответ: M(x)=10.

Задача 158.

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного дифференциальной функцией $f(x) = 10e^{-10x}\,(x \ge 0)$.

Ответ: D(x)=0,01; $\sigma(x) = 0{,}1$.

Задача 159.

Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-0{,}03t}$. Найти вероятность того, что за время t=100ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Ответ: а) F(100)=0,95;
б) R(100)=0,05.

Задача 160.

Испытывают три элемента, которые работают независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $F_1 = 1 - e^{-0{,}1t}$; для второго $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}2t}$; для третьего элемента $F_3(t) = 1 - e^{-0{,}3t}$. Найти вероятность того, что в интервале времени (0;5)ч: а) откажет только один элемент; б)откажут только два элемента; в) откажут все три элемента.

Ответ: а)0,445; б)0,29; в)0,05.

Задание на дом

Задача 161.

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале(2;8).

Ответ: D(x)=3; σ(x)=$\sqrt{3}$.

Задача 162.

Равномерно распределенная случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x) = \frac{1}{2l}$ в интервале *(a-l;a+l)*. Вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

Ответ: M(X)=a (кривая распределения симметрична прямой, $x=a$);

D(X)=$\frac{l^2}{3}$.

Задача 163.

Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного дифференциальной функцией $f(x) = 5e^{-5x} (x \geq 0)$.

Ответ: M(x)=0,2.

Задача 164.

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного интегральной функцией $F(x) = 1 - e^{-0,4x} (x \geq 0)$.

Ответ: $D(x) = 6,25; \sigma(x) = 2,5$.

Задача 165.

Производится испытание трех элементов, работающих независимо один от другого. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по показательному закону: для первого элемента $f_1(t) = 0,1e^{-0,1t}$, для второго $f_2(t) = 0,2e^{-0,2t}$, для третьего элемента $f_3(t) = 0,3e^{-0,3t}$. Найти вероятность того, что в интервале времени (0;10)ч: а) откажет хотя бы один элемент; б)откажут не менее двух элементов.

Указание: Обратите внимание на то, что в показательном распределении $M(x) = \frac{1}{\lambda}; D(x) = \frac{1}{\lambda^2}; \sigma(x) = \frac{1}{\lambda}$. Таким образом, $M(x) = \sigma(x)$.

Ответ: а) 0,95; б)0,35.

Библиографический список

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1977. – 479с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979. – 400с.
3. Кремер Н.Ш. Теория вероятности и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.
4. Колде Я.И. Практикум по теории вероятностей и математической статистики. – М.: Высшая математика, 1991 – 157 с.
5. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1982. – 256с.

Рассмотрено на заседании методической комиссии

Кафедры математического моделирования

Протокол № ____от "___"______________2008 г.

Председатель ________________В.В.Аверин

Нормоконтролер, ответственный за стандартизацию

на кафедре__________________А.С.Пустовгар

Утверждено на заседании

кафедры математического моделирования

Протокол № ____от "___"_______________2008 г.

Заведующий кафедрой_______________АА.Маркин