МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«11 » января 2019 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

________________________ *В.В. Глаголев*

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий

"Математика"

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы специалитета

по специальности
38.05.02 Таможенное дело

со специализацией
Таможенная деятельность

Форма обучения: *очная*

Идентификационный номер образовательной программы: 380502-01-19

Тула 2019 год

Разработчик методических указаний

ЛебедевА.М.,профессор,д.т.н. ____________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Аналитическая геометрия

Векторная алгебра.

Вектор – направленный отрезок.

Равенство

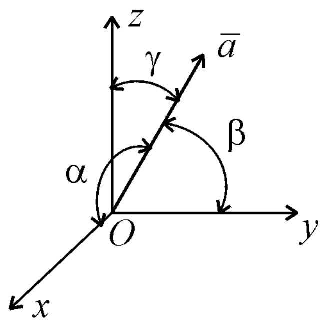
$$\vec{a} = (x,\, y,\, z)$$

(1) означает, что x, y, z – проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (2)$$

позволяет по координатам вектора определить его модуль.



Если α, β, γ – углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то $cos\,\alpha,\ cos\,\beta,\ cos\,\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

$$x = |\,\vec{a}\,|\,cos\,\alpha, \quad y = |\,\vec{a}\,|\,cos\,\beta, \quad z = |\,\vec{a}\,|\,cos\,\gamma, \qquad (3)$$

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1.$$

(4)

Если известны начало вектора $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и конец $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$, то координаты вектора находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1.$$

(5)

Если $\vec{a} = (x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2,\, y_2,\, z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2,\, y_1 \pm y_2,\, z_1 \pm z_2)$$

(6) и $\alpha\vec{a} = (\alpha x_1,\, \alpha y_1,\, \alpha z_1)$, где α – любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Признак коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

(7)

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом:

$$|\,\vec{i}\,| = |\,\vec{j}\,| = |\,\vec{k}\,| = 1.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по осям соответственно Ox, Oy, Oz в положительную сторону.

Любой вектор $\vec{a} = (x,\, y,\, z)$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

(8)

Скалярным произведением векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi, \tag{9}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}, \tag{10}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \tag{11}$$

т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

(12) Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{13}$$

$$cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{14}$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа этой силы определяется

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

(15)

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\varphi$, где $\varphi -$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3. вектор $\vec{c}$ образует с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

(16) Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|, \tag{17}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{18}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, в частности, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (19)$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке M, а вектор $\vec{a}$ идет из некоторой точки O в точку M, то вектор $\vec{a} \times \vec{F}$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки O:

$$m_{\circ}\vec{F} = \vec{a} \times \vec{F}. \qquad (20)$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right).$$

(21) Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$$V = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}. \qquad (22)$$

Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

(23) Для векторов $\vec{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right), \vec{b} = \left(x_2, y_2, z_2\right), \ \vec{c} = \left(x_3, y_3, z_3\right)$ смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(24)

Задача 1. На материальную точку действуют силы:

$$\vec{F}_1 = (2, -1, 1), \quad \vec{F}_2 = (-1, 2, 2), \quad \vec{F}_3 = (1, 1, -2).$$

Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

Решение. Найдем равнодействующую

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2 - 1 + 1, -1 + 2 + 1, 1 + 2 - 2) = (2, 2, 1).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (4 - 2, 1 + 1, -1 - 0) = (2, 2, -1).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W = \vec{R} \cdot \vec{S} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7.$$

Задача 2. Дана сила $\vec{F} = (3,\ 4,\ -2)$ и точка ее приложения $A(2,\ -1,\ 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. По формуле (20) $m_\circ \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$. Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ по формуле (5) имеет координаты $\vec{r} = (2,\ -1,\ 3)$, по формуле (19)

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 13\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Итак, $m_\circ \vec{F} = (-10,\ 13,\ 11)$. Модуль момента находим по формуле (2):

$$\left| m_\circ \vec{F} \right| = \sqrt{(-10)^2 + (13)^2 + (11)^2} = \sqrt{390} \approx 19{,}748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$cos\,\alpha = \frac{-10}{19{,}748} = -0{,}506, \quad cos\,\beta = \frac{13}{19{,}748} = 0{,}658, \quad cos\,\gamma = \frac{11}{19{,}748} = 0{,}557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha = 120^\circ 24', \qquad \beta = 48^\circ 51', \qquad \gamma = 56^\circ 9'.$$

Контроль: должно быть $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$. У нас:

$$(-0{,}506)^2 + (0{,}658)^2 + (0{,}557)^2 = 0{,}999.$$

Задача 3. Написать разложение вектора $\vec{x} = (5,\ 16,\ 2)$ по векторам $\vec{p} = (2,\ 1,\ 0)$, $\vec{q} = (0,\ -2,\ 0)$, $\vec{r} = (-1,\ 5,\ 2)$.

Решение.

1. Разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{p} + \alpha_2 \vec{q} + \alpha_3 \vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 q_1 + \alpha_3 r_1 \\ x_2 = \alpha_1 p_2 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 r_2 \\ x_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 q_3 + \alpha_3 r_3. \end{cases}$$

2. С учетом числовых значений координат векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ и $\vec{x}$ получим систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} 2\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 - 1\cdot\alpha_3 = 5 \\ 1\cdot\alpha_1 - 2\cdot\alpha_2 + 5\cdot\alpha_3 = 16 \\ 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 5 + \alpha_3 \\ 2\alpha_2 = \alpha_1 + 5\alpha_3 - 16 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

3. Разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид:

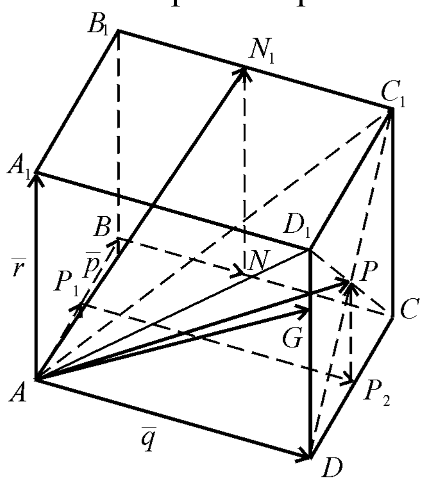
$$\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}$.

Задача 4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$ образуют базис. Разложить векторы $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN_1}$ по выбранному базису, если точка G делит ребро DD_1 в отношении 1:2; точка P – точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C; точка N_1 – середина ребра B_1C_1.

Решение.

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r}$,

$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}$.

Прямая и плоскость.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad – \qquad (25)$$

общее уравнение плоскости.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) + C(z - z_\circ) = 0 \quad –$$

(26) уравнение плоскости, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad –$$

(27) уравнение плоскости «в отрезках». Здесь $a, b, c -$ величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad – \qquad (28)$$

нормальное уравнение плоскости.

$$d=\frac{|Ax_\circ+By_\circ+Cz_\circ+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ -$$

(29) расстояние от точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\ - \tag{30}$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}\ - \tag{31}$$

общее уравнение прямой (прямая задана пересечением двух плоскостей).

$$\frac{x-x_\circ}{m}=\frac{y-y_\circ}{n}=\frac{z-z_\circ}{p}\ - \tag{32}$$

каноническое уравнение прямой, где $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ – точка, принадлежащая прямой, $\vec{a}=(m, n, p)$ − направляющий вектор прямой (вектор, параллельный прямой).

$$\begin{cases} x=x_\circ+mt \\ y=y_\circ+nt \\ z=z_\circ+pt \end{cases}\ - \tag{33}$$

параметрические уравнения прямой.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ - \tag{34}$$

уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\cdot\sqrt{m_2{}^2+n_2{}^2+p_2{}^2}}\ - \tag{35}$$

угол между двумя прямыми, где $\vec{a}_1=(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{a}_2=(m_2, n_2, p_2)$ − направляющие векторы прямых.

$$sin\psi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+c^2}}\ - \tag{36}$$

угол между прямой и плоскостью, где $\vec{n}=(A, B, C)$ − нормальный вектор плоскости, $\vec{a}=(m, n, p)$ − направляющий вектор прямой.

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\left| \overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} \right|$$ – объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$,

где $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ – координаты вершин пирамиды.

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \qquad (37)$$

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, $A_4(0, 8, 0)$. Найти:

1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
3) объем пирамиды V;
4) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$;
5) точку A_4', симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$;
6) точку A_4'', симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3.

Решение.

1) Угол между ребрами находим по формуле (35).

$\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = (3-2, 0-1, 1-(-1)) = (1, -1, 2)$ – направляющий вектор прямой A_1A_2;

$\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_4} = (0-2, 2-1, 0-(-1)) = (-2, 7, 1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4.

$$cos\varphi = \frac{1\cdot(-2) - 1\cdot 7 + 2\cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}} = -\frac{7}{18}.$$

2) Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через три точки $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, по формуле (30)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & 0-1 & 1+1 \\ 2-2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot 0 - (y-1)\cdot 4 + (z+1)\cdot(-2) = 0,$$

$$-4y + 4 - 2z - 2 = 0,$$

$4y + 2z - 2 = 0$ – уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

$\vec{n} = (0,\ 2,\ 1)$ – нормальный вектор плоскости;

$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_4} = (-2,\ 7,\ 1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4.
Находим угол ψ между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ по формуле (36)

$$sin\psi = \frac{0\cdot(-2)+2\cdot7+1\cdot1}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+7^2+1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{54}} = 0{,}9114.$$

3) Находим объем пирамиды по формуле (37)

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1,\ -1,\ 2);\quad \overrightarrow{A_1A_3} = (0,\ -2,\ 4);\quad \overrightarrow{A_1A_4} = (-2,\ 7,\ 1).$$

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(-2+8-8-28) = -\frac{1}{6}(-30) = 15.$$

4) Расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$ находим по формуле (29).

$$d = \frac{|2\cdot8+0-1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}69.$$

5) Чтобы найти точку A_4', симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, сделаем следующее.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через точку A_4 по формуле (32). За направляющий вектор прямой $\vec{a} = \vec{n} = (0,\ 2,\ 1)$ берем нормальный вектор плоскости, т.к. прямая перпендикулярна плоскости:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-0}{1}, \qquad \frac{x}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{1}.$$

Составим параметрические уравнения этой прямой по формуле (33):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t+8 \\ z = t. \end{cases}$$

Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью $A_1A_2A_3$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t+8 \\ z = t \\ 2y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6+8 = 2 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \quad 2(2t+8)+t-1=0,$$

$$5t+15=0, \qquad t=-3.$$

Получаем точку $M(0,2,-3)$; т.к. точка A_4' симметрична точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, то точка M является серединой отрезка A_4A_4', поэтому

$$x_M=\frac{x_4+x_4'}{2},\qquad 0=\frac{0+x_4'}{2},\qquad x_4'=0;$$

$$y_M=\frac{y_4+y_4'}{2},\qquad 2=\frac{8+y_4'}{2},\qquad y_4'=-4;$$

$$z_M=\frac{z_4+z_4'}{2},\qquad -3=\frac{0+z_4'}{2},\qquad z_4'=-6.$$

$$A_4'(0,-4,-6).$$

6) Чтобы найти точку A_4'', симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3, составим уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_1A_3 по формуле (26). За нормальный вектор плоскости $\vec{n}=\vec{a}=(0,-2,4)$ берем направляющий вектор прямой A_1A_3, т.к. плоскость перпендикулярна прямой.

$$0\cdot(x-0)-2\cdot(y-3)+4\cdot(z-0)=0,\quad -2y+16+4z=0,\quad y=2z-8=0.$$

Уравнение прямой A_1A_3 составляем по формуле (34).

$$\frac{x-2}{2-2}=\frac{y-1}{-1-1}=\frac{z+1}{3+1},\qquad \frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{4}.$$

Параметрические уравнения прямой A_1A_3:

$$\begin{cases}x=2\\ y=-2t+1\\ z=4t-1.\end{cases}$$

Находим точку N пересечения прямой A_1A_3 и плоскости:

$$\begin{cases}x=2\\ y=-2t+1\\ z=4t-1\\ y-2z-8=0,\end{cases}$$

$$-2t+1-2(4t-1)-8=0,\qquad -10t-5=0,\qquad t=-\frac{1}{2},$$

$$x=2,\quad y=-2\left(-\frac{1}{2}\right)+1=2,\quad z=4\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-3.$$

Итак, точка $N(2,2,-3)$. Так как точка A_4'' симметрична точке A_4 относительно прямой A_1A_3, то точка N является серединой отрезка A_4A_4'', тогда

$$x_N = \frac{x_4 + x_4''}{2}, \qquad 2 = \frac{0 + x_4''}{2}, \qquad x_4'' = 4,$$

$$y_N = \frac{y_4 + y_4''}{2}, \qquad 2 = \frac{8 + y_4''}{2}, \qquad y_4'' = -4,$$

$$z_N = \frac{z_4 + z_4''}{2}, \qquad -3 = \frac{0 + z_4''}{2}, \qquad z_4'' = -6, \quad \text{точка} \quad A_4''(4, -4, -6).$$

$$Ax + By + C = 0 \ - \tag{38}$$

общее уравнение прямой.

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} \ -$$

(39) уравнение прямой, проходящей через точку
$M_\circ(x_\circ, y_\circ)$, $\vec{a} = (m, n) -$ вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) = 0 \ - \tag{40}$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с перпендикулярным вектором $\vec{n} = (A, B)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \ - \tag{41}$$

уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ - \tag{42}$$

уравнение прямой в «отрезках», где $a, b -$ величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \ - \tag{43}$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\varphi$ и отрезком $b -$ отсекаемым на оси Oy.

$$y - y_\circ = k(x - x_\circ) \ -$$

(44) уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с угловым коэффициентом k.

$$d = \frac{|\,Ax_\circ + By_\circ + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ - \tag{45}$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

$$\delta = \frac{Ax_\circ + By_\circ + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ - \tag{45а}$$

отклонение точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} \; -$$

(46) угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$.

$$k_1 = k_2 \; - \qquad (47)$$

условие параллельности прямых.

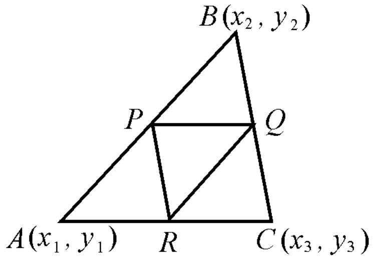
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \; -$$

(48) условие перпендикулярности прямых.

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \; - \qquad (49)$$

угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2.

Задача 6. Даны середины сторон треугольника $P(1,\ 2),\ Q(5,\ 1),\ R(-4,\ 3)$. Составить уравнения его сторон.



1 способ. Так как точки $P,\ Q,\ R$ являются серединами отрезков $AB,\ AC,\ BC$, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 6, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{array}{lll} x_1 = -8 & y_1 = 6 & \\ x_2 = 0 & y_2 = 0 & A(-8,\ 6), \quad B(10,\ -2), \quad C(0,\ 0). \\ x_3 = 10, & y_3 = -2, & \end{array}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение AB:

$$\frac{x+8}{10+8} = \frac{y-6}{-2-6}, \qquad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC:

$$\frac{x-10}{0-10} = \frac{y+2}{0+2}, \qquad x + 5y = 0.$$

Уравнение AC:

$$\frac{x+8}{0+8} = \frac{y-6}{0-6}, \qquad 3x + 4y = 0.$$

2 способ. Не определяя координат точек A, B, C, составим уравнение каждой из сторон треугольника ABC, как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника PQR параллельно противолежащей стороне.

Уравнение AB: прямая AB проходит через точку P параллельно вектору $\overrightarrow{QR} = (-9, 4)$. Используем уравнение (39).

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y-2}{4} \quad \Rightarrow \quad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC: прямая BC проходит через точку Q параллельно вектору $\overrightarrow{PR} = (-5, 1)$.

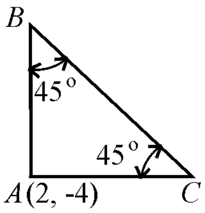
$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y+1}{1} \quad \Rightarrow \quad x + 5y = 0.$$

Уравнение AC: прямая AC проходит через точку R параллельно вектору $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$.

$$\frac{x+4}{4} = \frac{y-3}{-3} \quad \Rightarrow \quad 3x + 4y = 0.$$

Ответ: $4x + 9y - 22 = 0, \quad x + 5y = 0, \quad 3x + 4y = 0.$

Задача 7. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x + 3y - 5 = 0$ и вершину прямого угла $(2, -1)$.



$AB = BC$ (по условию), поэтому $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$, $k_{BC} = -\frac{2}{3}$ (по формуле (46)). Уравнения катетов AB и BC составляем по формуле (44): $y + 1 = k(x-2)$.

$$tg 45^\circ = \left| \frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} \right|, \tag{49}$$

$$\frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} = \pm 1.$$

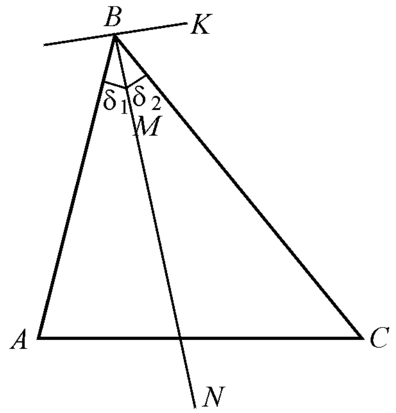
Решая эти уравнения, получим:

$$k = \frac{1}{5}, \quad y + 1 = \frac{1}{5}(x-2), \quad 5y + 5 = x - 2, \qquad x - 5y - 7 = 0.$$

$$k = -5, \quad y + 1 = -5(x-2), \quad y + 1 = -5x + 10, \quad 5x + y - 9 = 0.$$

Ответ: $x - 5y - 7 = 0, \qquad 5x + y - 9 = 0.$

Задача 8. В треугольнике с вершинами $A(3,-2),\ B(-1,1),\ C(5,-7)$ найти биссектрису внутреннего угла $\angle ABC$.



1) Составим уравнения сторон угла $\angle ABC$, воспользовавшись формулой (41).

Сторона BA:

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-1}{-2-1}, \qquad -3x-4y+1=0.$$

Сторона BC:

$$\frac{x+1}{5+1}=\frac{y-1}{-4-1}, \qquad -8x-6y-2=0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Приравняем расстояния от произвольной точки биссектрисы $M(x,y)$ до сторон угла BA и BC, вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-8x-6y-2|}{\sqrt{8^2+6^2}}, \qquad \frac{|-3x-4y+1|}{5}=\frac{|-8x-6y-2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x-4y+1)=-8x-6y-2 \quad \text{и} \quad 2(-3x-4y+1)=-(-8x-6y-2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине B треугольника ABC:

$$x-y+3=0 \qquad \text{(а)}$$

и

$$x+y=0. \qquad \text{(б)}$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника BN отклонения вершин треугольника A и C имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла BK – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек A и C от прямой (а) по формуле (40,а):

$$\delta_A=\frac{3-(-2)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}>0, \qquad \delta_C=\frac{5-(-7)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{2}}>0,$$

следовательно, уравнение (а) – это уравнение прямой BK. Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника ABC при вершине B:

$$x+y=0.$$

Ответ: $x+y=0$.

2. Линейная алгебра

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{1}$$

Введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ – определитель системы,}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} -$$

вспомогательные системы.

1. Пусть $\Delta \neq 0$, тогда система (1) имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

2. Пусть $\Delta = 0$. Возможны два случая:

а) если хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система (1) не имеет решений;

б) если все вспомогательные определителя равны нулю, то система (1) либо не имеет решений, либо имеет их бесконечно много.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3(5-1) - 2(5+4) + 1(-1-4) = -11 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение. Составим вспомогательные определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 11, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -33, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -22.$$

Тогда $x = -1,\ y = 3,\ z = 2.$

Матрицы и действия над ними. Решение систем линейных уравнений средствами матричного исчисления

Матрицей порядка $m \times n$ называется прямоугольная система чисел

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right).$$

<u>*Сложение.*</u> Суммой матриц $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$, где $i=1, 2, \dots, m,\quad j=1, 2, \dots, n$, называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$.

Очевидно, что складывать можно матрицы только одного порядка.

<u>*Умножение матриц на число.*</u> Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ на число $k\neq 0$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)=\left(ka_{ij}\right)$.

<u>*Умножение матриц.*</u> Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ $(i=1, 2, \dots, m,\quad j=1, 2, \dots, n)$ на матрицу $B=\left(b_{ij}\right)$ $(i=1, 2, \dots, n,\quad j=1, 2, \dots, k)$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)$ порядка $m\times k$, где $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$, то есть c_{ij} есть сумма произведений элементов $i-$ой строки матрицы A на соответствующие элементы $j-$ого столбца матрицы B.

Операция умножения матриц, вообще говоря, не коммутативна, т.е. $AB\neq BA$.

<u>*Обращение матриц.*</u> Пусть определитель квадратной матрицы A отличен от нуля. В этом случае матрица называется невырожденной. Для всякой невырожденной матрицы существует обратная матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, где $E-$ единичная матрица.

1. Транспонируем матрицу A, т.е. заменим ее строки на столбцы с теми же номерами:

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

2. Заменим все элементы матрицы A их алгебраическими дополнениями:

$$\widetilde{A}'=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Обратная матрица находится по формуле: $A^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$, где $|A|-$определитель матрицы A.

Запишем систему (1) в виде $AX = B,$ где $A = \left(a_{ij}\right)$ – матрица системы, которая предполагается невырожденной, B – вектор-столбец свободная членов, X – вектор-столбец неизвестных. Тогда

$$X = A^{-1}B.$$

(2) Отыскание решения по формуле (2) и называют матричным методом решения системы (1).

Пример 1. Найти связь между координатами векторов $X = \left(x_1, x_2\right)$ и $CX,$ где $C = f\left(A, B\right).$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; f\left(A, B\right) = 2A^2 + 7AB.$$

Решение.

$$2A^2 = 2\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 25+3 & 5+1 \\ 15+3 & 3+1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 18 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 12 \\ 36 & 8 \end{pmatrix},$$

$$7AB = 7\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 70 \\ -21 & 42 \end{pmatrix},$$

$$C = f\left(a, b\right) = \begin{pmatrix} 21 & 82 \\ 15 & 50 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21x_1 + 82x_2 \\ 15x_1 + 50x_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Решить систему средствами матричного исчисления:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Решение. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$\left| a \right| = -11 \neq 0,$ поэтому существует матрица A^{-1}. Найдем ее.

1. $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$

2. $\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/11 & 1 & 3/11 \\ 9/11 & -1 & -4/11 \\ 5/11 & -1 & -1/11 \end{pmatrix}.$

Тогда

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/11 & 1 & 3/11 \\ 9/11 & -1 & -4/11 \\ 5/11 & -1 & -1/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20/11+9/11 \\ 45/11-12/11 \\ 25/11-3/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли

Определение. Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров (т.е. определителей k-го порядка, составленных из элементов, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов матрицы A).

Обозначения: $r(A)$, $rangA$.

При вычислении ранга обычно используют следующие элементарные преобразования, которые не меняют его:

1) перемена местами двух строк или столбцов;
2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3) прибавление к строки (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на произвольной, отличное от нуля, число;
4) выбрасывание нулевой строки (столбца).

При этом стараются привести матрицу к треугольному или квазитреугольному виду.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + \ldots + a_{1n}t = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + \ldots + a_{2n}t = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x + a_{m2}y + \ldots + a_{mn}t = b_m. \end{cases}$$

(3)

Пусть $A = \left(a_{ij}\right)$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, – матрица системы. Матрица

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называется расширенной матрицей системы.

Теорема Кронекера-Капелли. Система (3) совместна, т.е. имеет хотя бы одно решение, тогда и только тогда, когда $rangA = rangB$.

<u>Пример.</u> Установить совместность или несовместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 5y + 4z + 8t = 1 \\ 2x - y + 2z - t = 0 \\ 5x + 3y + 8z + t = 1. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Имеем

$$B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & | & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & | & 0\\ 5 & 3 & 8 & 1 & | & 1\end{pmatrix}.$$

Вычтем из 3-й строки 1-ю:

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & | & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & | & 0\\ 4 & -2 & 4 & -2 & | & 0\end{pmatrix}.$$

Разделим элементы третьей строки на 2 и вычтем из полученной 3-й строки 2-ю:

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & | & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}.$$

Вычеркнем 3-ю строку:

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & | & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & | & 0\end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $rangA = rangB = 2$, т.к., например, отличен от нуля минор второго порядка

$$\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix},$$

следовательно, система совместна. (заметим, что эта система имеет бесконечно много решений, т.к. ранг ее матрицы при этом меньше числа неизвестных).

Линейные операторы и их матрицы

Определение. Говорят, что в линейном пространстве R^n задан оператор A (преобразование A), если каждому вектору $x \in R^n$ поставлен в соответствие по некоторому закону единственный вектор $y \in R^n$.

Оператор A называется *линейным*, если

1) $A(x+y) = Ax + Ay,$

2) $A(kx) = kAx.$

Пусть e_1, e_2, e_3 − базис в пространстве R^3. Так как Ae_1, Ae_2, Ae_3 − векторы пространства R^3, то каждый из них можно единственным образом разложить по базису:

$$Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$$

$$Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3$$

$$Ae_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного оператора (линейного преобразования A в базисе e_1, e_2, e_3. Ее j-й столбец составлен из координат Ae_j. (Линейные операторы и их матрицы мы будем обозначать одинаковыми буквами).

Пусть $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in R^3$. Тогда $Ax = x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3$, где

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Над операторами можно производить действия сложения, умножения на число, умножения и обращения, при этом соответствующие действия производятся над их матрицами. Заметим, что произведение операторов AB есть последовательное применение оператора $B,$ а затем A: $(AB)x = A(BX)$.

Преобразование базиса. Изменение координат вектора при переходе к новому базису. Изменение матрицы оператора. Пусть в пространстве R^3 даны два базиса: e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3', связанные соотношениями

$$e_1' = b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + b_{31}e_3$$
$$e_2' = b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + b_{32}e_3$$
$$e_3' = b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3.$$

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от старого базиса e_1, e_2, e_3 к новому базису e_1', e_2', e_3'.

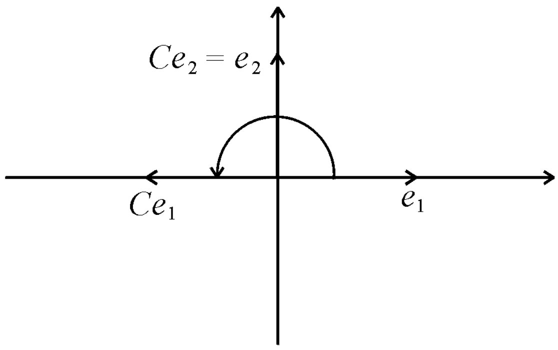
Пусть x_1, x_2, x_3 – координаты вектора x в базисе e_1, e_2, e_3, а x_1', x_2', x_3' – его координаты в базисе e_1', e_2', e_3'. Тогда

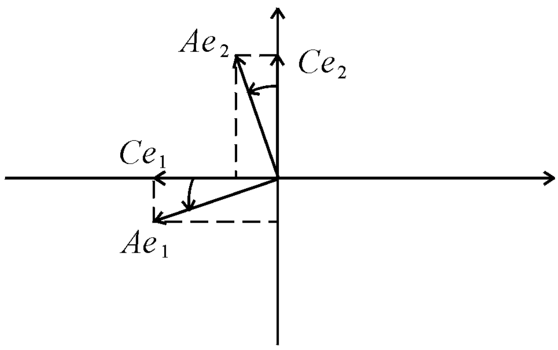
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть A – матрица оператора в старом базисе e_1, e_2, e_3, тогда матрица A' – этого оператора в новом базисе e'_1, e'_2, e'_3 находится по формуле $A' = S^{-1}AS$.

Пример 1. Построить матрицу оператора A в пространстве R^2: A – оператор зеркального отражения относительно оси Oy и последующего поворота на угол $30°$ против часовой стрелки.

Решение. Для того, чтобы построить матрицу оператора, нужно знать, как он действует на базисные векторы. Сделаем чертежи. Пусть C – оператор зеркального отражения, B – оператор поворота. Тогда $A = BC$.





Из рисунков ясно, что

$$Ae_1 = B(Ce_1) = -cos\,30°\,e_1 - sin\,30°\,e_2 = -\sqrt{3}/2e_1 - 1/2e_2,$$

$$Ae_2 = B(Ce_2) = -sin\,30°\,e_1 + cos\,30°\,e_2 = -1/2e_1 + \sqrt{3}/2e_2,$$

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

(Напомним, что координаты вектора Ae_1 записываются в первый столбец матрицы A, а координаты вектора Ae_2 – во второй).

Пример 2. В базисе e_1, e_2 дан вектор $x = (4, -2)$. Записать матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису e'_1, e'_2 и найти координаты вектора x в новом базисе, если $e'_1 = -5e_1 - 3e_2$, $e'_2 = 2e_1 - 7e_2$.

Решение. Имеем:

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -7/29 & -2/29 \\ -3/29 & -5/29 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/29 & -2/29 \\ -3/29 & -5/29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24/29 \\ -2/29 \end{pmatrix}, \qquad x = (-0{,}83, \ -0{,}07).$$

Пример 3. Найти матрицу A' линейного оператора A в базисе e'_1, e'_2, если известен ее вид в базисе e_1, e_2:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -4 & 0\end{pmatrix},\quad e_1'=-5e_1+3e_2,\ e_2'=2e_1-7e_2.$$

Решение.

$$B=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -7\end{pmatrix},\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}-7/29 & -2/29\\ -3/29 & -5/29\end{pmatrix},$$

$$A'=S^{-1}AS=\begin{pmatrix}-7/29 & -2/29\\ -3/29 & -5/29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7/29 & -2/29\\ -3/29 & -5/29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-14 & 23\\ 20 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Собственные значения и собственные векторы линейных операторов и их матриц

Определение. Ненулевой вектор $x\in R^n$ называется собственным вектором линейного оператора A (матрицы A), если существует такое число λ, что выполняется равенство $Ax=\lambda x$. Число λ называется собственным значением оператора A, отвечающим собственному вектору x.

Пусть $A=\left(a_{ij}\right),\quad i=1,2,\dots,m,\quad j=1,2,\dots,n$ – матрица оператора A в некотором базисе. Собственные значения λ_i являются решениями характеристического уравнения n-ой степени

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

Координаты собственного вектора $x_i=\left(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\right)$, соответствующего собственному значения λ_i, находятся из системы уравнений

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\xi_1+a_{12}\xi_2+\ldots+a_{1n}\xi_n=0\\ a_{21}\xi_1+(a_{22}-\lambda)\xi_2+\ldots+a_{2n}\xi_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)\xi_n=0.\end{cases} \tag{2}$$

Замечание. В качестве координат собственного вектора можно брать ненулевые алгебраические дополнения элементов любой строки матрицы $\left(A-\lambda_i E\right)$.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей A:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 8 & 9\end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение (1):

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0.$$

Отсюда находим собственные значения $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 13.$ Для $\lambda_1 = 1$ составим систему уравнений (2):

$$\begin{cases} 4\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ 8\xi_1 + 8\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечно много решений $\xi_1 = t,\ \xi_2 = -t,$ где t – произвольное число. Поэтому в качестве собственного вектора можно взять, например, вектор $x_1 = (1,\ -1).$ (Все собственные векторы, соответствующие собственному значению 1, будут иметь вид $t(1,\ -1)$ и будут лежать на одной прямой, которая называется собственным направлением преобразования A).

Для $\lambda_2 = 13$ аналогично получим:

$$\begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ 8\xi_1 - 4\xi_2 = 0, \end{cases} \lambda_1 = 1$$

т.е. $\xi_2 = 2\xi_1$. Полагая $\xi_1 = t$, получаем $\xi_2 = 2t$. В качестве собственного вектора возьмем, например, $x_2 = (1,\ 2).$

Можно поступить и по-другому. Для $\lambda_1 = 1$

$$A - 1E = \begin{pmatrix} 5-1 & 4 \\ 8 & 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

В качестве координат собственного вектора x_1 возьмем алгебраические дополнения элементов первой строки этой матрицы: $x_1 = (8,\ -8).$ Для $\lambda_2 = 13$

$$A - 13E = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

и $x_1 = (-4,\ -8).$

3. Пределы и производная

Пределы.

Пусть каждому натуральному числу $n = 1,\ 2,\ \ldots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число u_n. Тогда говорят, что определена последовательность чисел $u_1, u_2,\ u_3,\ \ldots$ или, короче, последовательность $\{u_n\}$. Отдельные числа u_n называются ее элементами.

Определение 1.1. Число a называется пределом последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется зависящее от него натуральное число N такое, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство: $|u_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Определение 1.2. Говорят, что функция $f(x)$ стремится к A $\left(f(x) \to A\right)$ при стремлении к a $(x \to a)$, где A и a – числа, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta(M)$, где M – произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.

1. Если существуют конечные $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

   а) $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$

   б) $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$,

   в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$ $\qquad \left(\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0\right)$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = 0$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty,$$

   если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взять соответственно две последовательности: $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения. Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 0^0; 1^∞; ∞^0.

<u>Пример 1.1.</u> При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x\to\infty$ или n при $n\to\infty$ для последовательностей (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$) оба члена соотношения полезно предварительно разделить на x^m или, соответственно, n^m где m – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-1}{5x^4+3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}}=\frac{3+0+0}{5+0+0}=\frac{3}{5},$$ старшая степень $m=4$,

делится на x^4.

$$б)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{9n^4-2n^3+2}+4\sqrt[3]{8n^3+21}}{\sqrt[4]{n^4-3}+2\sqrt{4n^4+9n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{n^4\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+4\cdot\sqrt[3]{n^3\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^4\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{n^4\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2\cdot\sqrt{\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+4n\cdot\sqrt[3]{\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{n\cdot\sqrt[4]{\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2n^2\cdot\sqrt{\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\sqrt{\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+\frac{4}{n}\cdot\sqrt[3]{\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{\frac{1}{n}\cdot\sqrt[4]{\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}} = \frac{3\cdot\sqrt{9-0+0}+0\cdot\sqrt[3]{8+0}}{0\cdot\sqrt[4]{1-0}+2\cdot\sqrt{4+0}} = \frac{9}{4}$$

(неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, старшая степень $m=2,$ делится на n^2).

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x+7}\right]=\left[\infty\cdot(\infty-\infty)\right]=$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x-7}\right]\cdot\left[\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}\right]}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\left(x^2+4x+5-x^2-4x+7\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\cdot 12}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}}\left(\frac{:x}{:x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{12\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}} = \frac{12\cdot 3}{1+1} = 18.$$

<u>Пример 1.2.</u> Если $P(x)$ и $Q(x)$ – целые многочлены $x,$ $P(a)\neq 0$ или $Q(a)\neq 0,$ то предел рациональной дроби P/Q при $x\to a$ находится непосредственно. Если же $P(a)=Q(a)=0$ (неопределенность $\frac{0}{0}$), то дробь P/Q рекомендуется сократить один или несколько раз на $(x-a)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)\left(x^3+x^2+x-3\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример 1.3. Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность $\frac{0}{0}$).

$$a)\ \lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt[3]{5-x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{9-5-x}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{1}{3+\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{1-5+x}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{x-4}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}(1+1+1)=-\frac{1}{2}.$$

$$б)\ \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(x^2-7x-8\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\frac{1}{9\cdot 12}=\frac{1}{108}.$$

Пример 1.4. При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

следствием которого являются пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arcsin\,x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arxtgx}{x}=1.$$

а) $$\lim_{x\to 0}\left[ctg^2 3x-ctg^2 5x\right]\cdot\frac{tg^2 4x\cdot arcsin^2 x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{cos^2 3x}{sin^2 3x}-\frac{cos^2 5x}{sin^2 5x}\right]\cdot\frac{\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2\cdot 16x^2\cdot\left(\frac{arcsin\,x}{x}\right)^2\cdot x^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}16x^2\cdot\left[\frac{cos^2 3x}{sin^2 3x}-\frac{cos^2 5x}{sin^2 5x}\right]\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{arcsin\,x}{x}\right)^2=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{cos^2 3x\cdot 16x^2}{\left(\frac{sin\,3x}{3x}\right)^2\cdot 9x^2}-\frac{cos^2 5x\cdot 16x^2}{\left(\frac{sin\,5x}{5x}\right)^2\cdot 25x^2}\right]\cdot 1^2\cdot 1^2=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{16}{9}cos\,3x-\frac{16}{25}cos^2 5x\right]=\frac{16}{9}\cdot 1-\frac{16}{25}\cdot 1=\frac{256}{225}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 2x\cdot\sqrt{1-cos\,4x}}{x^2\cdot arcsin\,3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2\cdot 4x^2\cdot\sqrt{2\,sin^2 2x}}{x^2\cdot\left(\frac{arcsin\,3x}{3x}\right)\cdot 3x}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin\,3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}\,sin\,2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}\left(\frac{sin\,2x}{2x}\right)\cdot 2x}{3x}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

<u>Пример 1.5.</u> При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда $x\to a$ и $a\neq 0,$ рекомендуется предварительно провести замену $x-a=y.$

$$\lim_{x\to 3}\frac{cos\frac{\pi\cdot x}{6}}{x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=(x-3=y,\ y\to 0\ \text{при}\ x\to 3)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{cos\frac{\pi\cdot(y+3)}{6}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot y}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\pi}{6}\cdot sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}}=$$

$$= -\frac{\pi}{6}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}} = -\frac{\pi}{6}\cdot 1 = -\frac{\pi}{6}.$$

<u>Пример 1.6.</u> При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = c$ необходимо иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы $A = \lim\limits_{x\to a} f(x),\ B = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x),$ то $c = A^B\ (A > 0)$;

2) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 1,\ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty,$ то вопрос о нахождении предела c решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty,$ то следует воспользоваться «вторым замечательным пределом»: $\lim\limits_{x\to a}\left(1+g(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}} = e,$ где $g(x)\to 0$ при $x\to a$ и $e = 2{,}718\ldots$.

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}} = 0, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1} = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{x+3} = 4^3 = 64, \text{ т.к. } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\cdot 4 = 4,$$
$$\lim_{x\to 0}(x+3) = 3.$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}\cdot\frac{7}{3x-6}\cdot 2x} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x}{3x-6}} = e^{14/3}.$$

г) $$\lim_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{3}{x-3}} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to 3}\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{3}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\left\{\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{1}{6-2x}}\right\}^{\frac{(6-2x)\cdot 3}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{18-6x}{x-3}} = e^{-6}.$$

Определение 2.1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,$ то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в окрестности точки $x = a$ (при $x \to a$).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть также бесконечно малая при $x \to a$.

Определение 2.2. Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = c,$ где c – некоторое число, отличное от нуля, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$, если $c = 0,$ то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$.

Бесконечно малая $f(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g^n(x)} = c, \qquad 0 < |c| < +\infty.$$

Пример 2.1. При $x \to 0$ определить порядок малости функции $tgx - sinx$ относительно x.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - sinx}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx\left(\frac{1}{cosx}-1\right)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx(1-cosx)}{x^n\, cosx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2sinx\cdot sin^2\frac{x}{2}}{x^n\, cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{4sin^3\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}}{x^n\, cosx} = 4\lim_{x\to 0}\frac{sin^3\frac{x}{2}}{x^n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{cos\frac{x}{2}}{cosx} =$$

$$= 4\lim_{x\to 0}\frac{sin^3\frac{x}{2}}{x^n}\cdot 1 = 4\lim_{x\to 0}\frac{sin^3\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot 2^n} = \frac{4}{2^n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin^3\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n}.$$

Этот предел будет равен константе $c \neq 0$ при $n = 3,$ следовательно, функция $tgx - sinx$ имеет порядок малости $n = 3$ относительно x при $x \to 0$.

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

Пример 2.2. Определить порядок малости относительно x при $x \to 0$ суммы $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$.

Слагаемое $\sqrt[3]{x^2}$ имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x, а слагаемое $\sqrt{x^3}$ – порядок $\frac{3}{2}$, следовательно, сумма имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x при $x \to 0$.

Определение 2.3. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1,$ то бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$: $f(x) \sim g(x)$.

Например, при $x \to 0$ будем иметь:

$$sin x \sim x, \quad tgx \sim x, \quad arcsin x \sim x, arctgx \sim x,$$

$$ln(1+x) \sim x, \quad cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot ln a \ (a \neq 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

Пример 2.3.

a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{4tg^2x} - 5^{3arcsin^2 3x}}{3sin^2 4x + 7arctg^2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3^{4tg^2x} - 1\right) - \left(5^{3arcsin^2 x} - 1\right)}{3\cdot(4x)^2 + 7\cdot(x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4tg^2x\cdot ln3 - 3arcsin^2 3x \cdot ln5}{55x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4ln3\cdot x^2 - 3ln5\cdot(3x)^2}{55x^2} =$$

$$= \frac{4ln3 - 27ln5}{55}.$$

$б$)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4arcsin2x}{3tg8x}\right)^{\frac{ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot 2x}{3\cdot 8x}\right)^{\frac{3x}{x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

$в$)
$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(3-5x) - ln(3+7x)}{2sinx} = \lim_{x\to 0}\frac{ln\left[3\left(1-\frac{5}{3}x\right)\right] - ln\left[3\left(1+\frac{7}{3}x\right)\right]}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{ln3 + ln\left(1-\frac{5}{3}x\right) - ln3 - ln\left(1+\frac{7}{3}x\right)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}x}{2x} = -2.$$

Определение 2.4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$.

Подобно тому, как .то сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

Пример 2.4. Пусть $x\to\infty$. Определить порядок бесконечно большой $f(x)=\dfrac{x^5}{x+2}$ по сравнению с x.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^5}{x+2}:x^n\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^n(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}+x^n\cdot 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}}=1$$

при $n=4$.

Производная.

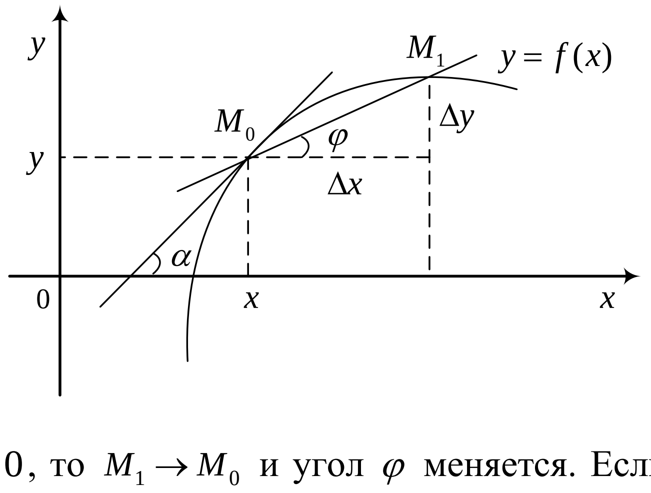
Определение. Производной от функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения её приращения Δy в этой точке к соответствующему приращению аргумента Δx, когда $\Delta x\to 0$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Процесс нахождения производной называется дифференцированием.

Геометрический смысл производной.

$$M_0(x,\,y),\ M_1(x+\Delta x,\,y+\Delta y);\quad y+\Delta y=f(x+\Delta x);\quad tg\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Если $\Delta x\to 0$, то $M_1\to M_0$ и угол φ меняется. Если $\varphi\to\alpha$, то прямая, проходящая через M_0 и составляющая угол α с осью Ox будет касательной. При этом:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Итак, $f'(x) = tg\alpha$.

Таким образом, значение производной $f'(x)$ в точке x есть тангенс угла наклона, который образует касательная к графику функции в данной точке $M(x,\ f(x))$ с положительным направлением оси Ox.

Механический смысл производной.

Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $S = f(t)$, где t – время, S – путь.

Скоростью V_0 в данный момент t_0 называется предел средней скорости V_{cp} при $\Delta t \to 0$, то есть $V_0 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = f'(t)$.

Таким образом, механический смысл производной: производная функции $f(x)$ в данной точке x_0 есть скорость изменения функции в данной точке.

Дифференцируемость.

<u>Определение</u>. Функция, имеющая производную в точке $x = x_0$, называется дифференцируемой в этой точке. Если существует $f'(x)$ во всех точках $[a,\ b]$, то функция называется дифференцируемой на $[a,\ b]$.

Таблица производных элементарных функций.

1) $C' = 0, C = Const$;

2) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \quad n \in R, \quad x \in R;$

3) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$

$\left(e^x\right)' = e^x; \quad x \in R;$

4) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0;$

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x};$

5) $\left(\sin x\right)' = \cos x$, $x \in R$;

6) $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R;$

7) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z;$

8) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z;$

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

11) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R;$

12) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R.$

Имеют место следующие равенства:

$$\left[f(x)+g(x)\right]' = f'(x)+g'(x),$$

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x),$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}, \quad g(x)\neq 0.$$

Производная сложной функции.

Если функция $U=\varphi(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y=f(U)$ – в точке U, то сложная функция $y=f\left[\varphi(x)\right]$ имеет производную по x в точке x и $y'(x)=f'(U)\varphi'(x)$ или $y'_x = y'_U U'_x$.

Пример 1.

$y=\sin\left(x^2+2x-1\right).$

Полагаем $U=x^2+2x-1$, $y=\sin U$.

Тогда $y'_x = y'_U U'_x = \cos U\cdot(2x+2) = 2(x+1)\cos\left(x^2+2x-1\right)$.

Пример 2.

$y=\ln\sin^2 x$ $(x\neq k\pi,\ k\in z)$. Полагаем $y=\ln U$, $U=V^2$, $V=\sin x$.

Тогда $y'_x = y'_U\cdot U'_V\cdot V'_x = \dfrac{1}{U}\cdot 2V\cdot\cos x = \dfrac{2\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = 2ctgx$.

Логарифмическое дифференцирование.

$y = U(x)^{V(x)}, \quad U(x) > 0.$

$\ln y = V(x) \cdot \ln U(x)$, $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y' \;\Rightarrow\; y' = y(\ln y)'$,

$(\ln y)' = V'(x)\ln U(x) + V(x)\frac{1}{U(x)}U'(x)$,

$$y' = U(x)^{V(x)}\left[V'(x)\ln U(x) + V(x)\frac{U'(x)}{U(x)}\right].$$

Выражение $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ называется логарифмической производной функции $y(x)$.

Пример.

Найти производную функции $y = x^x$.

Решение. $\ln y = x \cdot \ln x$, $\frac{y'}{y} = \ln x + x\frac{1}{x}$, $\Rightarrow$ $y' = x^x(1 + \ln x)$.

Пример.

Найти производную функции $y = \frac{\sqrt[3]{3x+5} \cdot (x-5)^5}{(2x-3)^3}$.

Решение. Представим функцию в виде произведения степенных функций и прологарифмируем

$y = (3x+5)^{\frac{1}{3}} \cdot (x-5)^5 \cdot (2x-3)^{-3} \to \ln y = \frac{1}{3}\ln(3x+5) + 5\ln(x-5) - 3\ln(2x-3)$

Найдем производную

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\frac{3}{3x+5} + 5\frac{1}{x-5} - 3\frac{2}{2x-3}, \text{ тогда}$$

$$y' = \frac{\sqrt[3]{3x+5} \cdot (x-5)^5}{(2x-3)^3}\left(\frac{1}{3x+5} + \frac{5}{x-5} - \frac{6}{2x-3}\right).$$

4. Комплексные числа

Определение. Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется действительной частью числа z ($a = Re\ z$), а b- мнимой частью ($b = Im\ z$).

Если $a = Re\ z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\ z = 0$, то число z будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются комплексно – сопряженными.

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

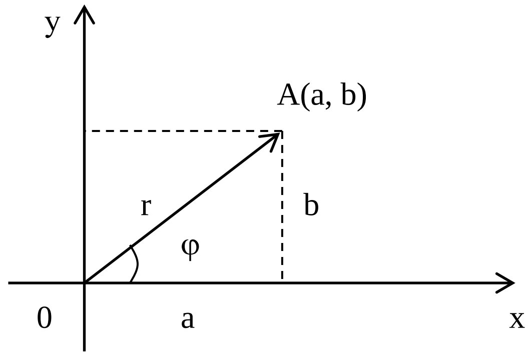
$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.



Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi;\quad b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

При этом величина r называется модулем комплексного числа, а угол наклона φ - аргументом комплексного числа.

$$r = |z|;\qquad \varphi = Arg\ z\,.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2};\quad \varphi = Arg\,z = arctg\frac{b}{a};$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|;\qquad Arg\ z = -Arg\ \bar{z}.$$

Действия с комплексными числами.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) Сложение и вычитание.

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) Умножение.

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

С случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) Деление.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме:

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

4) Возведение в степень.

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2=zz=r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

где n – целое положительное число. Это выражение называется формулой Муавра.

5) Извлечение корня из комплексного числа.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Отсюда: $\rho=\sqrt[n]{r};\quad n\psi=\varphi+2\pi k;\quad k\in Z.$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w=e^z;\quad z=x+iy.$

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

Данное равенство называется уравнением Эйлера.

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$;

2) $e^{z_1-z_2}=\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3) $(e^z)^m=e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy}=\cos y-i\sin y$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases}\cos y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\\ \sin y=\dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = re^{i\varphi}$$

Полученное равенство и есть показательная форма комплексного числа.

5. Неопределенный и определенный интеграл

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ .$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ − подынтегральным выражением, $F(x)$ − результат интегрирования, C − произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$.
2. $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$, где A − постоянная.
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица простейших интегралов:

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0)$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C, (A \neq 0)$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

Основные методы интегрирования:

1. Подведение под знак дифференциала:

   а) под знаком дифференциала можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) + A)$;

   б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель: $df(x) = \frac{1}{A} d(Af(x))$; в) под знак дифференциала подводится функция по правилу: $f'(x)dx = df(x)$.

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

   $\int udv = uv - \int vdu$, где $u = u(x), v = v(x)$.

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а) $\int a^x \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = a^x dx$.

б) $\int \sin ax \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \sin axdx$.

в) $\int \cos ax \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \cos axdx$,

где $P_n(x)-$ многочлен *n*-ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

   $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, где $x = \varphi(t)$.

Пример выполнения задания.

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; б) $\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx$; в) $\int (3x+4)e^{3x} dx$.

Решение.

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + (-0{,}5) \int (1-x^2)^{-0{,}5} d(1-x^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - 0{,}5 \cdot \frac{(1-x^2)^{0{,}5}}{0{,}5} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C .$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C \right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3(\arcsin x)^2 \cdot (\arcsin x)' - 0{,}5(1-x^2)^{-0{,}5}(1-x^2)' + C' =$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) в этом случае подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-17 & \underline{x^2-4x+3} \\
\underline{x^3-4x^2+3x} & x+4 \\
4x^2-3x-17 & \\
\underline{4x^2-16x-12} & \\
13x-29 &
\end{array}
$$

Тогда

$$\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx = \int\left(x+4+\frac{13x-29}{x^2-4x+3}\right)dx = \int xdx + \int 4dx + \int \frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx.$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3},\ \ 13x-29 = A(x-3)+B(x-1).$$

При $x=3$ имеем $13\cdot 3-29=B(3-1)$, откуда $B=5$;

при $x=1$ имеем $13\cdot 1-29=A(1-3)$, откуда $A=8$.

Получаем $\dfrac{13x-29}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{8}{x-1} + \dfrac{5}{x-3}$ и интегрируем

$$\int \frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}dx = \int \frac{8}{x-1}dx + \int \frac{5}{x-3}dx = 8\int \frac{dx}{x-1} + 5\int \frac{dx}{x-3} = 8\ln|x-1| + 5\ln|x-3| + C$$

и окончательно получаем

$$\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + \ln|x-3| + C.$$

Проверим результаты дифференцированием:

$$\left(\frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + \ln|x-3| + C\right)' = \frac{2x}{2} + 4 + \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3} = \frac{x^3-17}{x^2-4x+3},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Замечание.

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$\int \frac{A_1}{x-a}dx = A_1 \ln|x-a| + C$; $\quad \int \frac{A_k}{(x-a)^k}dx = \frac{A_k}{(-k+1)}(x-a)^{-k+1} + C$,

($k = 2,3,...$);

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

в) этот интеграл находим методом интегрирования по частям.

Примем $u = 3x+4$, $dv = e^{3x}dx$, тогда $du = 3dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int (3x+4)e^{3x}dx = (3x+4)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 3dx = \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \int e^{3x}dx =$$

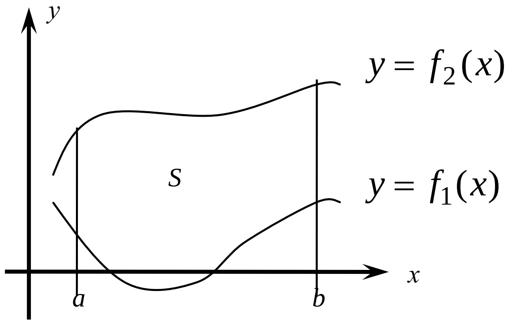
$$= \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3}e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C.$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1)+C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}(3x+4),$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Приложения определенных интегралов



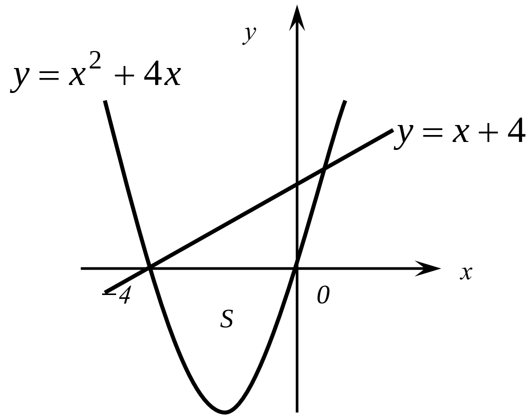
Если на плоскости Oxy задана фигура, ограниченная двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь S такой фигуры может быть вычислена по формуле $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

Пример выполнения задания.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение.

Заданные линии ограничивают на плоскости Оху криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}$, $x^2 + 4x = x + 4$, $x^2 + 3x - 4 = 0$, откуда $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int (4 - 3x - x^2)dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (}\textit{кв. ед.}\text{)}.$$

Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью *Ox* и прямыми $x = a$, $x = b$,

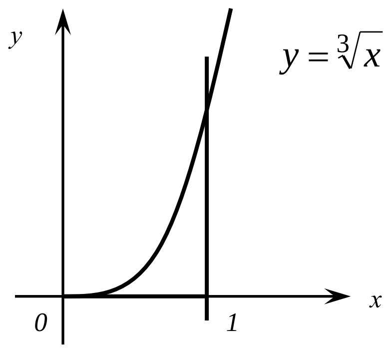
1) вокруг оси *Ox*, вычисляются по формуле $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$;

2) вокруг оси *Oy*, вычисляются по формуле $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.

Пример выполнения задания.

Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей *Ox* и *Oy* криволинейного треугольника, образованного кривой $y=\sqrt[3]{x}$, осью *Ox* и прямой $x=1$.

Решение.



1) объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox*, равен

$$V_x=\pi\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}\right)^2dx=\pi\left.\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right|_0^1=\frac{3\pi}{5}\ (\text{куб. ед.})$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy*, равен

$$V_y=2\pi\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{x}dx=2\pi\left.\frac{x^{7/3}}{7/3}\right|_0^1=\frac{6\pi}{7}\,(\text{куб. ед.}).$$

6. Теория вероятностей и математическая статистика

Комбинаторика

Размещения – комбинации, составленные из N различных элементов по n элементам, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех различных размещений из N элементов по n элементам равно:

$$(A_N^n)_{\text{без повт.}}=\frac{N!}{(N-n)!}.$$

Число размещений с повторениями:

$$(A_N^n)_{\text{с повт.}}=N^n.$$

Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же N различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Другими словами, перестановками из N элементов называется размещение при n = N. Число всех перестановок из N элементов:

$$(P_N)_{без\ повт.} = A_N^N = N!\,.$$

Число перестановок с повторениями:

$$(P_N)_{с\ повт.} = N^N\,.$$

<u>Сочетания</u> – комбинации, составленные из N различных элементов по n элементам, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число всех сочетаний из N по n равно:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}\,.$$

Случайные события

Событие, которое может произойти, а может и не произойти, называется случайным событием. Если может произойти и событие А, и событие В, то события умножаются АВ, если происходит или событие А, или событие В, то события складываются А + В.

Аксиоматическое определение вероятности : числовая функция Р, определенная на классе событий S, называется вероятностью, если верны аксиомы:

А1) S – алгебра событий,

А2) аксиома неотрицательности $P(A) \ge 0\ \forall A \in S$,

А3) аксиома нормированности $P(\Omega) = 1$, Ω - пространство элементарных событий,

А4) аксиома конечной аддитивности $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если А и В несовместны (т.е. $A \cap B = \varnothing$),

А5) аксиома непрерывности : $\forall \{A_n\}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, $A_n \in S$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ имеет место

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0\,.$$

Аксиоматическое определение вероятности предложено академиком А.Н. Колмогоровым в 1933 году.

Свойства вероятности (следуют из А2 по А4).

1. Вероятность противоположного события
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. Вероятность невозможного события
$P(\varnothing) = 0$.

3. Если $A \subset B$, то $P(B - A) = P(B) - P(A)$ и $P(A) \le P(B)$.

4. Для каждого случайного события $0 \le P(A) \le 1$.

5. Теорема сложения двух произвольных событий $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, то же

для трех событий: P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)–P(AB)–P(AC)-P(BC)+P(ABC).

Классическое определение вероятности : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, (1)

где $|A|$ - число элементарных событий, входящих в событие А,

$|\Omega|$ - общее число элементарных событий.

Формула (1) справедлива, если множество элементарных событий конечно, а элементарные события равновероятны.

Геометрическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{mA}{m\Omega} , \qquad (2)$$

где mA - мера множества А;

mΩ - мера множества Ω.

В качестве меры обычно принимают для одномерных множеств – длину, для двумерных – площадь, для трехмерных – объем.

Формула (2) справедлива, когда множество элементарных событий бесконечно, а точка равномерно распределена на множестве Ω.

Условной вероятностью события B при условии, что произошло событие А, называется:

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) \neq 0 .$$

Два события А и В независимы, если

$P(B \mid A) = P(B)$, если $P(A) \neq 0$

или

$P(A \mid B) = P(A)$, если $P(B) \neq 0$.

Условие независимости событий удобно записывать в симметричном виде:

P(AB) = P(A)P(B).

Теорема произведения вероятностей

P(AB) =P(A) P(B|A).

То же для трех событий

P(ABC) =P(A) P(B|A) P (C|AB) .

Формула полной вероятности: если A_1 , A_2 , … , A_n – разбиения (т.е. $A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$, $A_iA_j=\varnothing$, $\forall i, j \quad i \neq j$) и $P(A_i)>0$, то $\forall$ B

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k) .$$

Формула Байеса: если A_1 , A_2 , … , A_n – разбиения и $P(A_i) > 0$ $\forall$i, P(B) > 0, то

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

Случайные величины

Случайная величина – величина, принимающая те или иные значения в зависимости от случая. Случайные величины обозначаются греческими буквами ξ, η, ζ … (в некоторых случаях большими латинскими буквами X, Y, Z, …) Значения, которые принимают случайные величины, обозначаются малыми латинскими буквами x, y, z,…

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x).$$

Она обладает следующими свойствами:

1. $F_\xi(x)$ – неубывающая функция на $(-\infty, +\infty)$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$.
4. $F_\xi(x)$ - непрерывна слева: $F_\xi(x-0) = F_\xi(x)$.

Закон распределения случайной величины ξ называется дискретным, если существует конечное или счетное множество значений $x_1, x_2, ...$,которые может принимать случайная величина, таких, что:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi = x_n) = 1,$$

а случайная величина, имеющая дискретный закон распределения, называется дискретной случайной величиной.

Закон распределения случайной величины ξ называется абсолютно непрерывным, если существует неотрицательная кусочно - непрерывная функция $p_\xi(x)$, называемая плотностью распределения (вероятностей) случайной величины ξ, такая, что:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx,$$

а случайная величина, имеющая абсолютно непрерывный закон распределения, называется абсолютно непрерывной случайной величиной.

В некоторых случаях функция распределения обозначается F(x), а плотность распределения - f (x).

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. $p_\xi(x) = F'_\xi(x)$ в точках непрерывности $p_\xi(x)$;
2. $p_\xi(x) \ge 0, \forall x$;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1.$

Вероятности событий:

$P(\xi \geq x)=1 - F_\xi(x)= \int\limits_x^{+\infty} p_\xi(x)dx;$

$$P(x_1 \leq \xi < x_2)=F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)= \int\limits_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx, \qquad (3)$$

$P(\xi =x)=F_\xi (x+0)- F_\xi(x)=0.$

Первое равенство в формулах (3) справедливо для любых случайных величин, второе равенство - для абсолютно непрерывных случайных величин.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется число:

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P(\xi = x_n),$$

если ряд абсолютно сходится. Математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины называется число:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx,$$

если интеграл абсолютно сходится.

Свойства математического ожидания:

1. $MC = C$, если C - неслучайная величина.
2. $M(C\xi) = CM\xi$.
3. $M(\xi_1 \pm \xi_2) = M\xi_1 \pm M\xi_2$.
4. $M(\xi_1\xi_2)=M\xi_1 \cdot M\xi_2$, если ξ_1, ξ_2 - независимые случайные величины.

Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называется число $D\xi=M(\xi - M\xi)^2$, если математическое ожидание существует. Величина $\sigma_\xi=\sqrt{D\xi}$ называется средним квадратическим отклонением.

Для вычисления дисперсии используется формула:

$$D\xi=M\xi^2 - (M\xi)^2 .$$

Свойства дисперсии:

1. $D\xi \geq 0$.
2. $DC=0$.
3. $D(C\xi)=C^2D\xi$.
4. $D(\xi_1 \pm \xi_2)=D\xi_1+ D\xi_2$, если ξ_1,ξ_2 – независимы.

Наиболее важные распределения

Дискретные:

1. <u>Биномиальное распределение</u>. Схема испытаний, в которой производится n независимых испытаний, каждое из которых может иметь два исхода:

«успех» с вероятностью p и «неудача» с вероятностью q = 1 – p, называется схемой Бернулли. Вероятностью события, что при n независимых испытаниях по схеме Бернулли произойдет равно k успехов, равна (формула Бернулли):

$$P_n(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,...,n. \qquad (4)$$

Значение $k = k_0$, при котором вероятность (4) принимает наибольшее значение, называется наивероятнейшим числом «успехов», которое определяется:

$$k_0 = \begin{cases} [(n+1)p], \text{если } (n+1)p - \text{не целое}, \\ (n+1)p-1, (n+1)p, \text{если } (n+1)p - \text{целое}, \end{cases}$$

здесь [a] – означает целую часть числа a.

Математическое ожидание $M\xi = np$, дисперсия $D\xi = npq$.

<u>Теорема Пуассона.</u> Если в схеме Бернулли $n \to \infty$ и $p \to 0$, так, что $np = \lambda \in (0,+\infty)$, то $\forall к = 0, 1,\ldots$ $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

<u>Локальная теорема Муавра-Лапласа.</u> Если в схеме Бернулли $n \to \infty, 0 < p < 1$, p - постоянная величина, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ ограничена, то:

$$P_n(\xi = k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$,

<u>Интегральная теорема Муавра - Лапласа.</u> Если $0 < p < 1$ и p - постоянно, то при $n \to \infty$:

$$P_n(k_1 \le \xi \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-x^2/2} dx,$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функции $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ затабулированы, и таблицы есть во многих учебниках по теории вероятностей. Однако здесь надо знать, что если $x < 0$, то нужно воспользоваться четностью $\varphi(-x)=\varphi(x)$ функции $\varphi(x)$ и нечетностью $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ функции $\Phi(x)$. Если $x > 5$, то принимают с большой степенью точности $\Phi(x)=0,5$.

2. <u>Геометрическое распределение</u>. Если производятся независимые испытания, в каждом из которых возможны два исхода - «успех» с вероятностью p или «неудача» с вероятностью q = 1-p, то вероятность, что будет произведено k испытаний до первого появления «успеха» будет равна:

$$P(\xi = k) = q^{k-1} p.$$

3. Гипергеометрическое распределение. Пусть в урне N шаров, из них K белых, N- K черных. Наудачу из урны взято n шаров. Тогда вероятность того, что среди них будет ровно k белых шаров, равна:

$$P(\xi = k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

4. Распределение Пуассона с параметром $\lambda>0$

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0,1,...$$

Математическое ожидание $M\xi = \lambda$, дисперсия $D\,\xi = \lambda$.

Распределением Пуассона описывается простейший поток событий.

Абсолютно непрерывные законы распределения.

1. Нормальное распределение с параметрами a, $\sigma > 0$

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание $M\xi = a$, дисперсия $D\xi = \sigma^2$. Вероятность попадания в заданный интервал:

$$P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 \le \xi \le x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \qquad (5)$$

Правило «трех сигм»

$$P(|\xi - M\xi| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973.$$

2. Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание $M\xi = 1/\lambda$, дисперсия $D\xi = 1/\lambda^2$.

3. Равномерное распределение:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Математическое ожидание $M\xi = \frac{a+b}{2}$, дисперсия $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Примеры решения задач

Задача 1.

Чему равняется вероятность открыть с первого раза автоматическую камеру хранения?

Решение.

Пусть событие А - открытие камеры хранения с первого раза. Воспользуемся классическим определением вероятности, т.к. набор любого номера от А000 до К999 равновероятен: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$,

где $|A|=1$, т. к. существует единственный номер, открывающий камеру хранения;

$|\Omega|=(A_{10}^{4})_{\text{с повт.}}=10^4$.

Ответ: P(A)=0,0001.

<u>*Задача 2.*</u>

В ящике 30 деталей, среди которых 27 деталей не бракованных. В ОТК наудачу извлекают 5 деталей. Найти вероятность, что брак не будет обнаружен.

Решение.

Событие А - брак не будет обнаружен. Опять используем классическое определение вероятности: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$,

где $|A|=C_{27}^{5}=\frac{27!}{5!22!}$ – число, показывающее, сколькими способами можно достать из 27 небракованных 5 небракованных деталей; $|\Omega|=C_{30}^{5}=\frac{30!}{5!25!}$ – число, показывающее, сколькими способами можно достать любые 5 деталей из 30 деталей.

$$P(A)=\frac{27!25!}{22!30!}=\frac{25\cdot 24\cdot 23}{30\cdot 29\cdot 28}=0{,}567.$$

Ответ: 0,567.

Замечание. Учитывая, что $C_3^0=1$, искомую вероятность можно записать в виде:

$$P(A)=\frac{C_{27}^{5}\cdot C_{3}^{0}}{C_{30}^{5}}=P(\xi=5),$$

при этом случайная величина ξ имеет гипергеометрическое распределение.

<u>*Задача 3 (задача о встрече).*</u>

Два студента условились встретиться в библиотеке между 16 и 17 часами. Пришедший первым ждет другого в течении получаса, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если равновероятен их приход в любой момент времени в течении часа.

Решение.

Так как приход студентов в течении часа равновероятен, то применим геометрическое определение вероятности:

$$P(A)=\frac{mA}{m\Omega}\ .$$

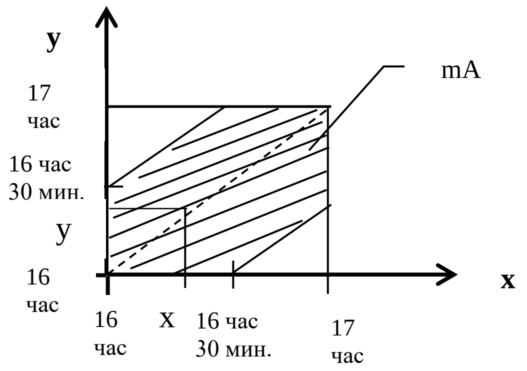


Рис. 1. К задаче о встрече.

Пусть x – время прихода первого студента, y – время прихода второго студента. Если точка (x,y) попала в заштрихованную область (рис. 1), то студенты встретятся, если нет, то один уйдет раньше, чем второй придет. Поэтому mA равно площади заштрихованной области: mA = 0,75 час^2, mΩ равна площади квадрата: mΩ = 1 час^2. Тогда

$$P(A) = \frac{mA}{m\Omega} = 0{,}75.$$

Ответ: 0,75.

Задача 4.

Студент выучил 41 из 50 вопросов, предлагающихся на экзамене. Найти вероятность того, что он ответит верно на 3 вопроса и получит отличную оценку (событие A), не ответит ни на один вопрос и получит неудовлетворительную оценку (событие B).

Решение:

1) Пусть A_1 – студент отвечает верно на первый вопрос, A_2 – то же, но на второй вопрос,

A_3 – то же, но на третий вопрос. Очевидно, что $A = A_1 A_2 A_3$, ибо студент должен ответить верно на все три вопроса.

По теореме умножения вероятностей:

$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 |A_1) P(A_3| A_1 A_2)$,

$P(A_1) = 41/50$, $P(A_2 |A_1) = 40/49$, $P(A_3| A_1 A_2) = 39/48$.

$P(A) = (41/50) \cdot (40/49) \cdot (39/48) = 0{,}544$.

2) Пусть B_i – студент не ответит на i – ый вопрос, i = 1, 2, 3.

$P(B) = P(B_1 B_2 B_3) = P(B_1) P(B_2 |B_1) P(B_3| B_1 B_2) = 9/50 \cdot 8/49 \cdot 7/48 = 0{,}004$.

Ответ: P(A) = 0,544, P(B) = 0,004.

Задача 5.

Три охотника независимо друг от друга одновременно стреляют по волку. Вероятность попадания в цель первого охотника равна 0,6, второго – 0,7, третьего – 0,8. Определить вероятность того, что волк будет убит (событие A), волк будет убит, но шкура будет испорчена (больше одного попадания) (событие B).

Решение:

Пусть A_i – i-ый охотник попал в цель, $\overline{A_i}$ - i-ый охотник не попал в цель. Распишем пространство элементарных событий:

$$\Omega = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1A_2A_3.$$

Событие, например, $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ означает, что третий охотник попал в цель, а остальные не попали.

Событие

$$A = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1A_2A_3 = \Omega - \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}.$$

Событие $B = \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1A_2A_3$.

По свойству вероятности 3:

P(A) = P$(\Omega - \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$= P$(\Omega)$- P$(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$.

По аксиоме A3 P(Ω) = 1, а по теореме умножения вероятностей: P$(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$= P$(\overline{A_1})$ P$(\overline{A_2} \mid \overline{A_1})$ P$(\overline{A_3} \mid \overline{A_1}\,\overline{A_2})$. Так события A_1, A_2, A_3 независимы, то независимы и события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$.

Поэтому P$(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$ = P$(\overline{A_1})$ P$(\overline{A_2})$ P$(\overline{A_3})$.

Но P$(\overline{A_1})$= 1 – P(A_1) = 1-0,6 = 0,4, P$(\overline{A_2})$= 1 – P(A_2) = 1 – 0,7 =0,3, P$(\overline{A_3})$= 1 – P(A_3) = 1 – 0,8 = 0,2.

Итак, P(A) = 1 – 0,4 · 0,3 · 0,2 = 0,976.

По теореме сложения вероятностей (события $\overline{A_1}A_2A_3, A_1\overline{A_2}A_3, A_1A_2\overline{A_3}, A_1A_2A_3$ несовместны) и по теореме умножения независимых событий:

P(B) = $P(\overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1A_2A_3) = P(\overline{A_1}A_2A_3) + P(A_1\overline{A_2}A_3) +$ $+ P(A_1A_2\overline{A_3}) + P(A_1A_2A_3)$= P$(\overline{A_1})$P($A_2$) P($A_3$) + P($A_1$) P$(\overline{A_2})$P($A_3$) + P($A_1$) P($A_2$) P$(\overline{A_3})$+ +P($A_1$) P($A_2$) P($A_3$) =0,4 · 0,7 · 0,8 + 0,6 · 0,3 · 0,8 + 0,6 · 0,7 · 0,2 + 0,6 · 0,7 · 0,8 = 0,788.

Ответ: P(A) = 0,976, P(B) = 0,788.

<u>*Задача 6.*</u>

При одном цикле осмотра радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект будет обнаружен с вероятностью 0,7. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Проведено 10 циклов осмотра. Какова вероятность того, что объект будет обнаружен?

Решение:

Пусть A – объект будет обнаружен (хотя бы в одном цикле), A_i – объект будет обнаружен в i – том цикле. Можно записать:

$\Omega = A + \overline{A}$, $A = \Omega - \overline{A}$.

Но $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_{10}}$.

Тогда Р(А) = $P(\Omega - \overline{A})$= Р(Ω) – Р ($\overline{A}$) = 1 - Р ($\overline{A}$) = 1 – Р($\overline{A_1}$) Р($\overline{A_2}$) … Р($\overline{A_{10}}$).

А так как Р($\overline{A_1}$) = Р($\overline{A_2}$) = … = Р($\overline{A_{10}}$) = 1 – 0,7 = 0,3 ,
Р(А) = 1 – $0{,}3^{10}$ =0,9999940951.
Ответ: 0,9999940951.

<u>*Задача 7.*</u>

Два стрелка А и В по очереди стреляют по цели. Выигрывает тот, кто попадет первым. Вероятность попадания при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, для второго - 0,3. Первым стреляет А. Найти вероятность выигрыша для каждого стрелка.

Решение.

Пусть:
А - выигрыш стрелка А;
В - выигрыш стрелка В;
A_i - стрелок А попал при i - ом выстреле;
B_i - стрелок В попал при i - ом выстреле;

Тогда:

$$A = A_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2A_3 + ...$$

$$B = \overline{A}_1B_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{A}_3B_3 + ...$$

Применяя теоремы сложения и умножения вероятностей, получим:

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(A_2) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{B}_2)P(A_3)+...=$$
$$= 0{,}2 + 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2 + 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2 + ... =$$
$$= 0{,}2\left[1 + 0{,}8\cdot 0{,}7 + (0{,}8\cdot 0{,}7)^2 + ...\right] \quad .$$

В квадратных скобках стоит сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q = 0,8 · 0,7 = 0,56 и первым членом b_1 = 1. Тогда

$$P(A) = 0{,}2\frac{1}{1-0{,}56} = 0{,}455.$$

Аналогично:

$$P(B) = P(\overline{A}_1)P(B_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(B_2) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{B}_2)P(\overline{A}_3)P(B_3)+...=$$
$$= 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 + ... =$$
$$= 0{,}8\cdot 0{,}3\left[1 + 0{,}8\cdot 0{,}7 + (0{,}8\cdot 0{,}7)^2 + ...\right] = 0{,}24\cdot\frac{1}{1-0{,}56} = 0{,}545.$$

Заметим, что вероятность того, что стрельба будет длиться бесконечно долго(событие С) равна нулю:

$$P(C) = P(\Omega - A - B) = P(\Omega) - P(A) - P(B) = 1 - 0{,}455 - 0{,}545 = 0.$$

Ответ: Р(А) = 0,455, Р(В) = 0,545.

<u>*Задача 8.*</u>

Изделия проверяются двумя контролерами. Вероятность того, что изделие попадет к первому контролеру, равна 0,6; второму – 0,4. Вероятность того, что годное изделие будет забраковано, для первого контролера равна 0,06, для второго – 0,02. При проверке брака наудачу взятое изделие оказалось годным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось первым контролером.

Решение.

В этой задаче нельзя использовать классическое определение, т.к. элементарные события не равновероятны, хотя их число конечно. Для таких задач пригодна формула Байеса.

Пусть:

A_1 - изделие попало к первому контролеру;

A_2 - изделие попало ко второму контролеру;

B - изделие годное.

Тогда $P(A_1) = 0{,}6$, $P(A_2) = 0{,}4$, $P(B/A_1) = 0{,}94$, $P(B/A_2) = 0{,}98$ и

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}94}{0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}98} = 0{,}590.$$

Заметим, что $P(A_1) + P(A_2) = 1$, т.е. A_1 и A_2 - разбиения. Именно в этом случае справедливы формулы полной вероятности и Байеса.

Ответ: 0,590.

<u>*Задача 9.*</u>

Два равносильных шахматиста играют в шахматы, причем ничьи во внимание не принимаются. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести?

Решение:

Задача удовлетворяет схеме Бернулли: производятся n (4 или 6) независимых испытаний (шахматные партии), в каждом из которых два исхода: выигрыш или проигрыш, причем выигрыш с вероятностью $p = ½$ (т.к. противники равносильны) и проигрыш с вероятностью $q = 1 – p = ½$.

По формуле Бернулли:

$$P_4(\xi=2) = C_4^2\, p^2 q^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{3}{8}\ .$$

$$P_6(\xi=3) = C_6^3\, p^3 q^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{5}{16}\ .$$

Ответ: $P_4(\xi=2) > P_6(\xi=3)$.

<u>*Задача 10.*</u>

Вероятность рождения мальчика равна 0,515 (статистические данные). Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных будет 50 мальчиков (событие A), от 40 до 60 мальчиков (событие B). Определить наивероятнейшее число мальчиков.

Решение:

Задача соответствует схеме Бернулли, однако использовать формулу Бернулли затруднительно, т.к. n = 100 велико. Применим локальную теорему Муавра – Лапласа (теорема Пуассона неприменима, т.к. p = 0,515 и к нулю не стремится)

P(A) = $P_{100}(\xi=50)$ = $\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где x = $\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Здесь k = 50, n = 100, p = 0,515, q = 0,485 .

Тогда x = $\frac{50-100\cdot 0{,}515}{\sqrt{100\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}} = -\frac{1{,}500}{5{,}000}$ = - 0,3 , φ(-0,3) = φ(0,3) = 0,3814 (найдено по таблице [5], хотя можно вычислить на калькуляторе по формуле

φ(x) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$),

P(A) = $\frac{0{,}3814}{5{,}000} = 0{,}0763$.

По интегральной теореме Муавра – Лапласа:

P(B) = $P_{100}(40 \le \xi \le 60)$ = Φ (x_2) - Φ(x_1),

x_1 = $\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{40-100\cdot 0{,}515}{5{,}000} = -2{,}30$,

x_2 = $\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} = \frac{60-100\cdot 0{,}515}{5{,}000} = 1{,}70$,

P(B) = Φ(1,70) - Φ(-2,30) = Φ(1,70) + Φ(2,30) = 0,4554+0,4893 = 0,9447.

Функция Φ(x) найдена по таблице [5]. Так как (n + 1) p = (100 + 1) · 0,515 = 52,015 – число нецелое, то наивероятнейшее число мальчиков равно k_0 = [(n + 1) p] = [52,015] =52.

Ответ: P(A) = 0,0763, P(B) = 0,9447, $k_0 = 52$.

Задача 11.

Устройство состоит из четырех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение

Пусть случайная величина ξ - число отказавших элементов в одном опыте. Тогда по формуле Бернулли:

$P_4(\xi=0) = C_4^0 p^0 q^4 = 1\cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561$,

$P_4(\xi=1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$,

$P_4(\xi=2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2!2!}0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486$,

$P_4(\xi=3) = C_4^3 p^3 q^1 = 4\cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9 = 0{,}0036$,

$P_4(\xi=4) = C_4^4 p^4 q^0 = 1\cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001$.

Закон (ряд) распределения.

ξ	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{4} P(\xi = k) = 1{,}0000$.

Математическое ожидание:

$$M\xi = \sum\limits_{k=0}^{4} kP(\xi = k) = 0 \cdot 0{,}6561 + 1 \cdot 0{,}2916 + 2 \cdot 0{,}0486 + 3 \cdot 0{,}0036 + 4 \cdot 0{,}0001 = 0{,}4000.$$

Найдем $M\xi^2 = \sum\limits_{k=0}^{4} k^2 P(\xi = k) =$

$$= 0^2 \cdot 0{,}6561 + 1^2 \cdot 0{,}2916 + 2^2 \cdot 0{,}0486 + 3^2 \cdot 0{,}0036 + 4^2 \cdot 0{,}0001 = 0{,}5200.$$

Дисперсия: $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 0{,}52 - (0{,}4)^2 = 0{,}36$.

Ответ: $M\xi = 0{,}4$, $D\xi = 0{,}36$.

Задача 12.

Точка M равномерно распределена в круге радиуса R. Пусть ξ - расстояние от точки M до центра круга. Найти функцию распределения $F_\xi(x)$, плотность распределения $p_\xi(x)$, построить их графики, вычислить $M\xi$, $D\xi$, а также вероятность попасть в кольцо $\frac{R}{3} \le \xi \le \frac{R}{2}$.

Решение.

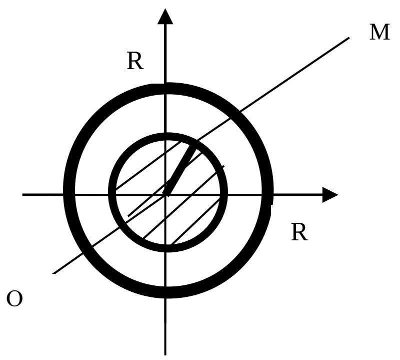


Рис. 2. К определению функции распределения.

Функция распределения $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \frac{mA(x)}{m\Omega} = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}, x \in [0, R]$.

Итак, $F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{x^2}{R^2}, 0<x\le R\\ 1, x>R.\end{cases}$

Плотность вероятности $p_{\xi}(x)=F'_{\xi}(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{2x}{R^2}, 0<x\le R\\ 0, x>R\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2x}{R^2}, x\in[0,R]\\ 0, x\notin[0,R].\end{cases}$

Графики функций $F_{\xi}(x)$ и $p_{\xi}(x)$ представлены на рис. 3.

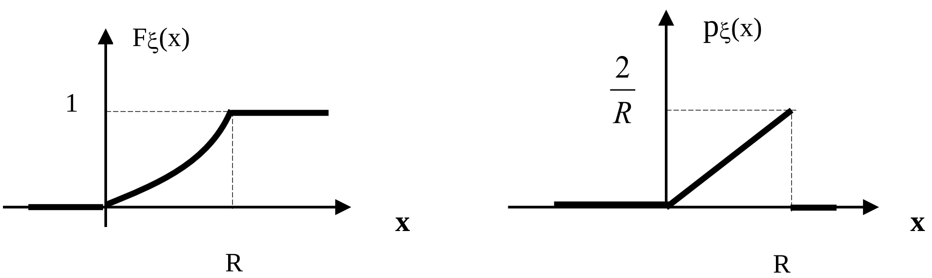


Рис. 3. Графики функций $F_{\xi}(x)$ и $p_{\xi}(x)$ (к задаче 12)

Математическое ожидание:

$$M\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi}(x)dx=\int\limits_{0}^{R} x\frac{2x}{R^2}dx=\frac{2}{R^2}\int\limits_{0}^{R} x^2dx=\frac{2}{R^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^R=\frac{2R^3}{3R^2}=\frac{2}{3}R,$$

$$M\xi^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_{\xi}(x)dx=\int\limits_{0}^{R} x^2\frac{2x}{R^2}dx=\frac{2}{R^2}\int\limits_{0}^{R} x^3dx=\frac{2}{R^2}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^R=\frac{R^2}{2}.$$

Дисперсия:

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\frac{R^2}{2}-\frac{4}{9}R^2=\frac{1}{18}R^2.$$

Вероятность:

$$P\left(\frac{R}{3}\le\xi\le\frac{R}{2}\right)=\int\limits_{R/3}^{R/2} p_{\xi}(x)dx=\frac{2}{R^2}\int\limits_{R/3}^{R/2} xdx=\frac{2}{R^2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{R/3}^{R/2}=\frac{1}{R^2}\left(\frac{R^2}{4}-\frac{R^2}{9}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=$$

$$=\frac{5}{36}=0{,}139.$$

Ответ: $F_\xi(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \dfrac{x^2}{R^2},\ 0<x\le R\\ 1,\ x>R.\end{cases}$, $p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{R^2}, x\in[0,R]\\ 0, x\notin[0,R]\end{cases}$, $M\xi=\dfrac{2}{3}R$, $D\xi=\dfrac{1}{18}R^2$,

$P(\frac{R}{3}\le\xi\le\frac{R}{2})=0{,}139$.

Задача 13.

Плотность вероятности случайной величины ξ задана формулой $p_\xi(x)$ $=\dfrac{A}{1+x^2}$ (распределение Коши). Найти А, функцию распределения, математическое ожидание, вероятность Р $(-1\le\xi\le 1)$.

Решение:

Константу А найдем из условия:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx=1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{1+x^2}dx=A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=A\,arctg\,x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=A(\lim_{x\to+\infty}arctg\,x-\lim_{x\to-\infty}arctg\,x)=$$

$$=A\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=A\pi=1,$$

$$A=\frac{1}{\pi}.$$

Функция распределения:

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}p_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{\frac{1}{\pi}}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}arctgx\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}\left(arctgx-\lim_{x\to-\infty}arctgx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(arctgx+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctgx.$$

Графики $F_\xi(x)$ и $p_\xi(x)$ изображены на рисунке 4.

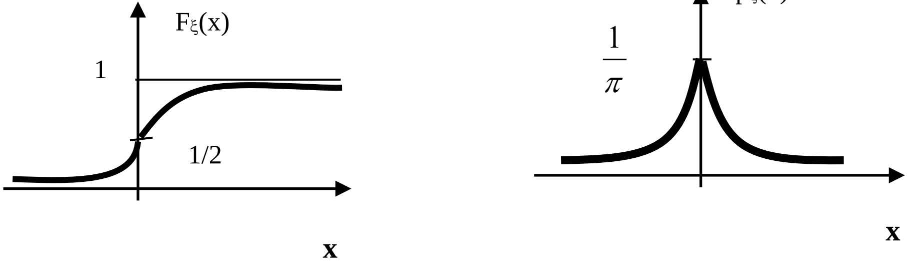


Рис. 4. Графики функций $F_\xi(x)$ *и* $p_\xi(x)$ (к задаче 13)

Математическое ожидание:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_{\xi}(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx = 0,$$ т.к. функция $\frac{x}{1+x^2}$ нечетная.

$$P(-1 \le \xi \le 1) = \int\limits_{-1}^{1} p_{\xi}(x)dx = \int\limits_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{\pi}}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}arctgx\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}arctg1 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Другой способ:

$$P(-1 \le \xi \le 1) = F_{\xi}(1) - F_{\xi}(-1) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,1 - \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,(-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $A = \frac{1}{\pi}$, $F_{\xi}(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\,x$, $M\xi = 0$, $P(-1 \le \xi \le 1) = \frac{1}{2}$.

Задача 14.

Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения

ξ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
P	0,2	0,7	0,1

Построить ряд распределения случайной величины $\eta = \sin\xi$.

Решение:

ξ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
η	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Тогда $P\left(\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = P\left(\xi = \frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad \xi = \frac{3\pi}{4}\right) = P\left(\xi = \frac{\pi}{4}\right) + P\left(\xi = \frac{3\pi}{4}\right) =$

$= 0,2 + 0,1 = 0,3.$

Тогда закон распределения η запишется:

η	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
P	0,3	0,7

Задача 15.

Законы распределения числа очков, выбиваемых каждым из двух стрелков, имеют вид:

ξ	8	9	10
P	0,6	0,3	0,1

η	8	9	10
P	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайной величины равной сумме очков, выбиваемых двумя стрелками.

Решение.

$P(\xi+\eta=16)=P(\xi=8)P(\eta=8)=0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}30$,

$P(\xi+\eta=17)=P(\xi=8)P(\eta=9)+P(\xi=9)P(\eta=8)=0{,}6\cdot 0{,}3+0{,}3\cdot 0{,}5=0{,}33$,

$P(\xi+\eta=18)=P(\xi=8)P(\eta=10)+P(\xi=9)P(\eta=9)+P(\xi=10)P(\eta=8)=$

$=0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}3+0{,}1\cdot 0{,}5=0{,}26$,

$P(\xi+\eta=19)=P(\xi=9)P(\eta=10)+P(\xi=10)P(\eta=9)=0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}3=0{,}09$,

$P(\xi+\eta=20)=P(\xi=10)P(\eta=10)=0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}02$.

Закон распределения:

$\xi+\eta$	16	17	18	19	20
P	0,30	0,33	0,26	0,09	0,02

Проверка: сумма вероятностей 0,30 + 0,33 + 0,26 + 0,09 + 0,02 = 1.

Задача 16.

Автомат штампует детали. Длина детали ξ распределена нормально с $M\xi$ = 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали больше 55 мм.

Решение.

Используем правило «трех сигм»:

$$P(32\le\xi\le 68)=0{,}9973\ ,$$

откуда найдем параметр σ нормального распределения. Используем формулу (5),

$$P(32\le\xi\le 68)=\Phi\left(\frac{68-50}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{32-50}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right),$$

$$\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right)=0{,}49865.$$

По таблице [5] для функции Ф(x) $\frac{18}{\sigma}=3{,}0,\quad \sigma=6{,}0$.

Искомая вероятность:

$$P(\xi > 55) = P(55 \le \xi < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{55-50}{6}\right) = 0{,}5 - 0{,}38493 = 0{,}11507.$$

Ответ: 0,11507.

Библиографический список

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. - М.: Высшая школа, 1986. – 80с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : Учебник для вузов / Д.В.Беклемишев .— 9-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2002 .— 376с.
3. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа : учеб. пособие для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович .— 14-е изд., стер. — СПб. ; М.; Краснодар: Лань, 2008 .— 736 с.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1979. – 400с.
5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1977. – 479с.
6. Ильин В.А., Аналитическая геометрия : учебник для вузов / В.А.Ильин, Э.Г.Позняк .— 6-е изд.,стер. — М.: Физматлит, 2002 .— 240с.
7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие для втузов / под ред. Н.В.Ефимова .— 17-е изд., стер. — СПб. : Профессия, 2004 .— 200с.
8. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов .— 9-е изд., стер.— СПб. [и др.] : Лань, 2007 .— 240 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов. в 2 т., Т.1 / Н.С.Пискунов .— Изд.стер. — М. : Интеграл-Пресс, 2004 .— 416с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов. в 2 т., Т.2 / Н.С.Пискунов .— Изд.стер. — М.: Интеграл-Пресс, 2004 .— 544с.
11. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. Ч.1 / А.В.Ефимов [и др.]; под ред.А.В.Ефи-мова, А.С.Поспелова .— М. : Физматлит, 2004 .— 288с.
12. Сборник задач по математике для втузов: в 4 ч. Ч.2 / А.В.Ефимов [и др.]; под ред. А.В.Ефи-мова, А.С.Поспелова .— 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Физматлит, 2004 .— 432с.
13. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. - М.: Наука, 1982. – 256с.
14. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. - М.: Высшая школа, 1983. – 112с.

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры математического моделирования механико-математического факультета (протокол заседания № __ от «__» ___________ 20__ г.)