

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2020 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_____ В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Механика сплошной среды»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

с направленностью (профилем)
Механика деформируемого твердого тела

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-20

Тула 2020

Разработчик методических указаний

Разработчик:

Соколова М.Ю., проф., д.ф.-м.н., доц.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

Методические указания содержат задачи по различным разделам МСС.

1. Описание движения среды в формах Эйлера и Лагранжа

Задача 1.1.

Относительно совмещенных материальных осей X_i и пространственных осей x_i задано поле перемещений сплошной среды
 $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, где A – константа. Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме (в лагранжевых и эйлеровых переменных).

Задача 1.2.

Для поля перемещений $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, где A – константа, определить смещенное положение материальных частиц, которые первоначально составляли:

- круг с границей $X_2^2 + X_3^2 = 1/(1 - A^2)$ в плоскости $X_1 = 0$;
- бесконечно малый куб, ребра которого лежат на осях координат и имеют длину $dX_i = dX$.

Нарисовать смещенные конфигурации, если $A = 1/2$.

Задача 1.3.

Относительно совмещенных материальных и пространственных осей задан вектор перемещения $\vec{u} = 4X_1^2\vec{e}_1 + X_2X_3^2\vec{e}_2 + X_1X_3^2\vec{e}_3$. Определить смещенное положение частицы, первоначально находившейся в точке (1,0,2).

Кинематика бесконечно малой частицы материального пространства

Задача 1.4.

Деформация задана в лагранжевой форме:

$x_1 = X_1 + X_3(e^2 - 1)$, $x_2 = X_2 + X_3(e^2 - e^{-2})$, $x_3 = e^2X_3$, где e – константа. Показать, что аффинор отличен от нуля и найти эйлеровы уравнения, описывающие эту деформацию.

Задача 1.5.

Некоторый объем сплошной среды совершает перемещение

$$\vec{u} = (3X_2 - 4X_3)\vec{e}_1 + (2X_1 - X_3)\vec{e}_2 + (X_2 - X_1)\vec{e}_3.$$

Определить смещенное положение вектора, соединяющего частицы $A(1, 0, 3)$ и $B(3, 6, 6)$, считая, что материальные и пространственные оси совпадают.

Задача 1.6.

Для поля перемещений $\vec{u} = (3X_2 - 4X_3)\vec{e}_1 + (2X_1 - X_3)\vec{e}_2 + (X_2 - X_1)\vec{e}_3$ определить смещенное положение радиуса-вектора частицы $C(2, 6, 3)$, который параллелен вектору, соединяющему частицы $A(1, 0, 3)$ и $B(3, 6, 6)$. Показать, что эти два вектора остаются параллельными и после деформации.

Задачи по темам 1.1-1.7:

Задача 1

Относительно совмещенных материальных осей X_i и пространственных осей x_i задано поле перемещений сплошной среды

$x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, где A – константа. Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме (в лагранжевых и эйлеровых переменных).

Задача 2

Для поля перемещений $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, где A – константа, определить смещенное положение материальных частиц, которые первоначально составляли:

- круг с границей $X_2^2 + X_3^2 = 1/(1-A^2)$ в плоскости $X_1 = 0$;
- бесконечно малый куб, ребра которого лежат на осях координат и имеют длину $dX_i = dX$.

Нарисовать смещенные конфигурации, если $A = 1/2$.

Задача 3

Относительно совмещенных материальных и пространственных осей задан вектор перемещения $\vec{u} = 4X_1^2\vec{e}_1 + X_2X_3^2\vec{e}_2 + X_1X_3^2\vec{e}_3$. Определить смещенное положение частицы, первоначально находившейся в точке $(1,0,2)$.

Задача 4

Деформация задана в лагранжевой форме:

$x_1 = X_1 + X_3(e^2 - 1)$, $x_2 = X_2 + X_3(e^2 - e^{-2})$, $x_3 = e^2X_3$, где e – константа. Показать, что аффинор отличен от нуля и найти эйлеровы уравнения, описывающие эту деформацию.

Задача 5

Некоторый объем сплошной среды совершает перемещение

$$\vec{u} = (3X_2 - 4X_3)\vec{e}_1 + (2X_1 - X_3)\vec{e}_2 + (X_2 - X_1)\vec{e}_3.$$

Определить смещенное положение вектора, соединяющего частицы $A(1, 0, 3)$ и $B(3, 6, 6)$, считая, что материальные и пространственные оси совпадают.

Задача 6

Для поля перемещений $\vec{u} = (3X_2 - 4X_3)\vec{e}_1 + (2X_1 - X_3)\vec{e}_2 + (X_2 - X_1)\vec{e}_3$ определить смещенное положение радиуса-вектора частицы $C(2, 6, 3)$, который параллелен вектору, соединяющему частицы $A(1, 0, 3)$ и $B(3, 6, 6)$. Показать, что эти два вектора остаются параллельными и после деформации.

Задача 7

Некоторый объем сплошной среды испытывает деформацию $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$,

$x_3 = X_3 + AX_2$, где A – константа. Вычислить меру деформации Коши и использовать ее для определения тензора деформации Коши-Грина.

Задача 8

В случае поля перемещений задачи 7 вычислить квадрат длины сторон OA и OB и диагонали OC малого прямоугольника, изображенного на рисунке, после деформации.

Вычислить изменение квадрата длины линейного элемента и сверить результат с полученным по формуле $(dx)^2 - (dX)^2 = d\vec{X} \cdot 2\underset{\sim}{\varepsilon} \cdot d\vec{X}$.

Задача 9

Дано поле перемещений $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2 + AX_3$, $x_3 = X_3 + AX_2$, где A – константа. Вычислить тензор линейной деформации Коши-Грина.

Задача 10

Для поля перемещений $\vec{u} = (x_1 - x_3)^2 \vec{e}_1 + (x_2 - x_3)^2 \vec{e}_2 + x_1 x_2 \vec{e}_3$ при ограничениях, принятых в теории малых деформаций, определить тензор линейной деформации, тензор линейного поворота и вектор поворота в точке P с координатами $(0, 2, -1)$.

Задача 11

Для поля перемещений $\vec{u} = (x_1 - x_3)^2 \vec{e}_1 + (x_2 - x_3)^2 \vec{e}_2 + x_1 x_2 \vec{e}_3$ найти изменение длины, приходящееся на единицу начальной длины (относительное удлинение), в направлении $\vec{v} = (8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3)/9$ в точке P с координатами $(0, 2, -1)$.

Задача 12

Некоторое поле однородной деформации приводит к тензору Коши-Грина

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определить главные деформации и направления главных осей.

Задача 13

Линейная (малая) деформация задана полем перемещений $u_1 = 4x_1 - x_2 + 3x_3$, $u_2 = x_1 + 7x_2$, $u_3 = -3x_1 + 4x_2 + 4x_3$. Найти для такой деформации главные деформации и главные значения девиатора деформаций.

Задача 14

Дано поле перемещений $x_1 = X_1 - CX_2 + BX_3$, $x_2 = CX_1 + X_2 - AX_3$, $x_3 = -BX_1 + AX_2 + X_3$.

Показать, что эти перемещения соответствуют повороту абсолютно твердого тела, если константы A, B, C очень малы. Определить вектор поворота для бесконечно малого поворота твердого тела.

Задача 15

Для поля перемещений $x_1 = X_1 + AX_3$, $x_2 = X_2 - AX_3$, $x_3 = X_3 - AX_1 + AX_2$ определить тензор деформаций Коши-Грина. Показать, что если константа A очень мала, то перемещение представляет поворот абсолютно твердого тела.

Задача 16

В некоторой точке задан тензор деформаций

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить относительное удлинение в направлении $\vec{\nu} = \vec{e}_1/2 - \vec{e}_2/2 + \vec{e}_2/\sqrt{2}$ и изменение угла между направлениями $\vec{\nu}$ и $\vec{\mu} = -\vec{e}_1/2 + \vec{e}_2/2 + \vec{e}_2/\sqrt{2}$.

Задача 17

Вычислить все три инварианта тензора деформаций Коши-Грина задачи 16.

Задачи по темам 2.1-2.3

2 Взаимодействие между частицами сплошной среды, тензор напряжений.

Задача 2.1.

Дан тензор напряжений в точке P :

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в точке P на площадке с единичным вектором нормали

$$\vec{n} = \frac{2}{3} \cdot \vec{e}_1 - \frac{2}{3} \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{3} \cdot \vec{e}_3.$$

Задача 2.2.

Для вектора напряжения задачи 1 определить:

- компоненту, перпендикулярную площадке;
- модуль вектора напряжения;
- угол между вектором напряжения и нормалью к площадке.

Задача 2.3.

Напряженное состояние в некоторой точке задано тензором напряжений

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix}.$$

где a, b, c константы, а σ - некоторое значение напряжения. Определить константы a, b, c так, чтобы вектор напряжения на октаэдрической площадке с единичной нормалью

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \vec{e}_3 \text{ был равен нулю.}$$

Задача 2.4.

Дан тензор напряжений в точке P :

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения на площадке, проходящей через точку P параллельно плоскости ABC , изображенной на рис.

Задача 2.5.

Напряженное состояние в любой точке сплошной среды в декартовой системе координат задано тензором напряжений

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2 & 0 \\ 5x_2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в точке $P(2, 1, \sqrt{3})$ на площадке, касательной в этой точке к цилиндрической поверхности $x_2^2 + x_3^2 = 4$.

Тензор напряжений в различных базисах, главные оси и главные напряжения

Задача 2.6.

Напряженное состояние в некоторой точке сплошной среды в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ задано тензором напряжений

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Определить тензор напряжений $\tilde{\mathbf{S}}^*$ для повернутых осей $Ox'_1x'_2x'_3$, которые связаны с осями без штрихов тензором преобразования

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.7.

В системе осей без штрихов тензор напряжения дан в виде

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}.$$

Определить тензор напряжений в осях со штрихами, направление которых указано на рисунке.

Задача 2.8.

Тензор напряжений в точке P в декартовых осях $Ox_1x_2x_3$ имеет компоненты

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить главные напряжения и главные оси тензора напряжений, с которыми будет связана система осей координат $Ox'_1x'_2x'_3$.

Задача 2.9.

Показать, что тензор преобразований, состоящий из направляющих косинусов, определенных в задаче 8, приводит первоначальный тензор напряжений к диагональному виду.

Задача 2.10.

Определить главные напряжения и главные оси тензора напряжений

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{pmatrix}.$$

Задача 2.11.

Непосредственным вычислением найти инварианты I_1, I_2, I_3 тензора напряжений

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти главные напряжения для этого напряженного состояния и показать, что диагональная форма приводит к тем же самым значениям инвариантов.

Задача 2.12.

Показать, что касательное напряжение на октаэдрической площадке вычисляется по формуле

$$\sigma_{\text{окт}} = 1/3 \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Задача 2.13.

В некоторой точке задан тензор напряжений

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить максимальное касательное напряжение в этой точке и показать, что оно действует в плоскости, которая делит пополам угол между площадками максимального и минимального нормальных напряжений.

Задача 2.14.

Разложить тензор напряжений

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

на шаровую часть и девиатор и показать, что первый инвариант девиатора равен нулю.

Задача 2.15.

Определить главное значение девиатора напряжений для тензора напряжений

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.16.

Показать, что второй инвариант девиатора напряжений выражается через главное значение девиатора следующим образом:

$$\tilde{I}_2 = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_3 + \tilde{\sigma}_3 \tilde{\sigma}_1.$$

Задача 2.17.

Главные напряжения в точке P таковы, что $2\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_3$. Определить единичный вектор нормали n_i к площадке, на которой $\sigma_n = \sigma_2$ и $\sigma_\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)/4$.

Задача 2.18.

Напряженное состояние во всех точках тела заданы тензором напряжений

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & Cx_3 & 0 \\ Cx_3 & 0 & -Cx_1 \\ 0 & -Cx_1 & 1 \end{pmatrix},$$

где C – произвольная постоянная. Показать, что если массовые силы равны нулю, то уравнения равновесия удовлетворяются. Определить главные напряжения, максимальное касательное напряжение и главные значения девиатора напряжений в точке $P(4, -4, 7)$. Вычислить вектор напряжения в точке $P(4, -4, 7)$ на плоскости $2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$ и на сфере $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = (9)^2$.

Задача 2.19.

В точке P дан тензор напряжения

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в точке P на площадке, параллельной плоскости:

- BGE
- $BGFC$

в элементарном параллелепипеде, изображенном на рисунке.

Задача 2.20.

Определить нормальную и касательную компоненты напряжения на плоскости $BGFC$ задачи 17.

Задача 2.21.

Главные напряжения в точке P таковы: $\sigma_1 = 12$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = -3$

Определить вектор напряжения и его нормальную компоненту на октаэдрической площадке в точке P .

Задача 2.22.

Определить величины главных напряжений для тензоров

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } S_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и показать, что главные оси этих тензоров совпадают.

Задача 2.23.

Разложить тензор напряжений

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 30 \\ 0 & 30 & -27 \end{pmatrix}$$

на шаровую часть и девиатор и найти главное значение девиатора напряжений.

Задача 2.24.

В некоторой точке задан тензор напряжений

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma_{22} & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Причем величина σ_{22} не указана. Определить σ_{22} так, чтобы вектор напряжения на некоторой площадке в этой точке обращался в ноль. Найти единичную нормаль к этой свободной от напряжения площадке.

Задача 2.25

Поле напряжений в сплошной среде задано тензором

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 & (1-x_2^2)x_1 & 0 \\ (1-x_2^2)x_1 & (x_2^3 - 3x_2)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Определить:

- распределение массовых сил, если уравнения равновесия удовлетворены повсюду;
- величины главных напряжений в точке P ;
- максимальное касательное напряжение в точке P ;
- главное значение девиатора напряжений в точке P .

3. Уравнения движения и основные теоремы МСС.

Уравнения движений

3.1. Запишите уравнения движения в декартовых координатах пространственной системы.

3.2. Запишите уравнения движения в лагранжевых координатах в проекциях на оси пространственной декартовой системы.

3.3. Можно ли, зная распределения поля ускорений и массовых сил в момент времени t , определить распределение напряжений в сплошной среде, исходя из уравнений движения?

3.4. Можно ли по известному полю ускорений и массовых сил определить главный вектор массовых сил, действующих на выделенный материальный объем сплошной среды (рассмотреть случай сжимаемой и несжимаемой среды)?

3.5. Покажите, что в случае малых перемещений и их градиентов, когда $1 + u_{i,j} \approx 1$, уравнения движения в лагранжевых и эйлеровых координатах имеют одинаковый вид.

3.6. Среда испытывает однородное напряженное состояние $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t)$. Найти поле скоростей в лагранжевых и эйлеровых координатах, закон движения, полагая распределение аффинора деформаций однородным.

3.7. Определить напряженное состояние в полупространстве $x_3 \leq 0$, если на среду действуют массовые силы с вектором интенсивности $\vec{F} = -\gamma \vec{e}_3$, где γ – постоянная. Плотность считать постоянной, а среду – находящейся в равновесии. Вектор напряжений на плоскости x_3 равен нулю.

3.8. Вывести уравнение движения путем рассмотрения движения элементарного прямоугольного параллелепипеда, ограниченного декартовыми плоскостями.

3.9. Доказать симметрию тензора напряжений, рассматривая вращение элементарного прямоугольного параллелепипеда, полагая моментные напряжения и распределенный кинетический момент отсутствующим. Рассмотреть случай плоского напряженного состояния.

Теорема об изменении количества движения и кинетического момента.

3.10. Записать теорему об изменении количества движения в проекциях на оси декартовой пространственной системы координат.

3.11. Записать теорему об изменении кинетического момента в проекциях на оси декартовой пространственной системы координат.

3.12. Найти закон изменения со временем главного вектора, действующего на выделенный объем V . Известно, что поле скоростей изменяется по закону $\vec{V} = k(t)x_1\vec{e}_1$, распределение плотности в начальный момент однородно.

3.13. Решить предыдущую задачу для случая, выделенного в начальный момент материального объема, при этом $V|_{t=0} = V_0$, Пояснить механический смысл и отличие решений задач 3 и 4.

3.14. Поле скоростей задано в виде

$$\begin{cases} V_1 = k(ct - x_1), & 0 \leq x_1 \leq ct, \\ V_1 \equiv 0, & x_1 > ct. \end{cases}$$

Вдоль оси движется волна сжатия (растяжения) со скоростью c . На участке $0 \leq x_1 \leq ct_k$ среда деформирована, а при $x_1 > ct_k$ в момент $t = t_k$ неподвижна.

Определить вектор внешних сил, действующих на плоскость $x_1 = 0$ материального цилиндра с единичной площадью поперечного сечения и с высотой $h = ct_k$.

3.15. Поле перемещений задано как функция эйлеровых координат в виде

$$\begin{cases} u_1 = k(ct - x_1), & 0 \leq x_1 \leq ct, \\ u_1 \equiv 0, & x_1 > ct. \end{cases}$$

Найти поле перемещений в лагранжевых координатах и главный вектор внешних сил, действующих на деформируемый цилиндр, ограниченный плоскостями $x_1 = 0, x_1 = ct_k$.

3.16. В бесконечно цилиндрическую трубу с поступательно движущейся жидкостью (скорость \vec{V} направлена вдоль оси) помещается неподвижное тело, размеры которого малы по сравнению с размерами трубы.

Найти:

1) силу, действующую со стороны среды на симметричное тело с осью симметрии вдоль оси трубы.

2) направление силы, действующей на тело, если его форма не симметрична.

Считать, что параметры сплошной среды на значительном удлинении от тела те же, что и при его отсутствии.

3.17. Поле скоростей в эйлеровых координатах имеет вид:

$$V_2 = kx_1; V_1 = V_3 = 0, \quad k - \text{постоянная.}$$

Найти главный момент внешних сил относительно начала координат, действующих на объем сплошной среды, занимающий область $0 \leq x_i \leq 1$.

Начальная плотность среды ρ_0 , массовые силы не учитывать.

Дополнительные задачи к разделу.

Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения.

Задача №9.

Поле скоростей в сплошной среде распределено по закону:

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty + \frac{c}{x^2} (\vec{e}_3 \times \vec{x}), \quad (1)$$

где \vec{v}_∞ – постоянная скорость, c – константа.

Определить:

1. Величину циркуляции для круговых контуров, включающих начало координат, выяснить кинематический смысл постоянной c и выразить её через циркуляцию Γ .

2. Найти распределение вектора вихря, доказать что циркуляция по произвольному контуру не охватывающему начало координат равна нулю, а по произвольному контуру, включающему начало координат постоянна.

3. Найти величину и направление главного вектора и главного момента, действующих на массу жидкости, заключённую в круговом цилиндре единичной длины и радиуса r .

1. Так как вектор \vec{v}_∞ постоянен, то его циркуляция по произвольному контуру равна нулю.

Найдём распределение поля скоростей в полярных координатах для второй составляющей скорости в распределении (1).

$$v_\varphi = \frac{c}{x^2} (\vec{e}_3 \times \vec{x}). \quad (2)$$

Представим радиус-вектор в виде $\vec{x} = x\vec{n}$, тогда

$$v_\varphi = \frac{c}{x^2} x(\vec{e}_3 \times \vec{n}) = \frac{c}{x} \vec{\tau}. \quad (3)$$

Таким образом, линии тока, соответствующие полю (2), являются окружностями.

Циркуляция для контура $x = r$ определяется в виде

$$\Gamma = \oint_0^{2\pi} \vec{v} \cdot \vec{\tau} r d\varphi = \oint_0^{2\pi} \frac{c}{r} \vec{\tau} \vec{\tau} r d\varphi = c \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi c. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что циркуляция не зависит от радиуса, а определяется постоянной c .

2. Определим вектор вихря соответствующий движению (3)

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{v}_\varphi).$$

Оператор $\vec{\nabla}$ в полярных координатах имеет вид

$$\vec{\nabla} = \vec{n} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{\tau} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Ротор поля \vec{v}_φ с учётом (3) примет вид

$$\vec{n} \times \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c}{x} \right) \vec{\tau} + \frac{c}{x^2} \vec{\tau} \times \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial \varphi}.$$

Так как $\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial \varphi} = -\vec{n}$, то получим

$$2\vec{\omega} = -\frac{c}{x^2} \vec{n} \times \vec{\tau} - \frac{c}{x^2} \vec{\tau} \times \vec{n} = 0.$$

Таким образом, поле является безвихревым во всех точках за исключением начала координат, через которое проходит вихревая нить с интенсивностью $\Gamma = 2\pi c$.

3. Докажем что циркуляция по произвольному замкнутому контуру, а не только по круговому равна $2\pi c$. Для этого рассмотрим область, заключённую между данным контуром l и охватывающим его круговым контуром. Соединим точки А и В на этих контурах линией АВ.

Так как поле в областях с исключённым началом координат безвихривое, то циркуляция по области, ограниченной контуром не включающим точку 0 равна нулю.

Это следует из теоремы Стокса:

$$\oint \vec{v} \cdot \tau dl = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{e}_3 d\Sigma .$$

Так как $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, то и циркуляция отсутствует. Рассмотрим область ограниченную контуром АВМВАСКА, включающим внутренний и внешний круговые контуры.

Циркуляция по данному контуру складывается из циркуляции по круговому контуру ВМВ и циркуляции Γ_l по рассматриваемому контуру АСКА. Так как в сумме они равны нулю и противоположны по направлению, то

$$\Gamma_l = \Gamma .$$

4. Найдём величину и направление главного вектора внешних сил, действующих на круговой контур.

Так как течение стационарное, то главный вектор определяется из выражения

$$\vec{R}^{(e)} = \int_{\Sigma} \rho \vec{v} v_n d\Sigma . \quad (5)$$

Из (1) и (3) получим

$$v_n = v_{\infty} \cdot \cos \varphi ,$$

$$\vec{v} v_n = v_{\infty} \cos \varphi \left(v_{\infty} \vec{e}_1 + \frac{c}{x} \vec{\tau} \right) = v_{\infty} \cos \varphi \left(v_{\infty} \vec{e}_1 + \frac{c}{x} (-\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi) \right) . \quad (6)$$

Полагая среду несжимаемой из (5) и (6) находим главный вектор на единицу длины цилиндрической поверхности, ограниченной рассматриваемым контуром

$$\vec{R}^{(e)} = \rho \oint_l \left(v_\infty^2 \cos \varphi - v_\infty \frac{c}{2r} \sin 2\varphi \right) r d\varphi + \vec{e}_2 \rho \oint_l v_\infty \cos^2 \varphi \frac{c}{r} d\varphi,$$

$$R_1^{(e)} = \rho r \int_0^{2\pi} v_\infty^2 \cos \varphi d\varphi - v_\infty \frac{\rho c}{2r} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0,$$

$$R_2^{(e)} = \rho v_\infty c \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi - \rho v_\infty c \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = 2\pi \rho v_\infty c$$

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi; \quad \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$$

$$\vec{R} = \frac{1}{2} \rho v_\infty \Gamma \vec{e}_2 = \rho v_\infty \pi c \vec{e}_2. \quad (7)$$

Главный вектор, как следует из формулы (7) направлен перпендикулярно направлению скорости \vec{v}_∞ и определяет величину циркуляции. Выражению (7) можно придать инвариантную форму если ввести вектор циркуляции

$$\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_3,$$

тогда

$$\vec{R} = \frac{1}{2} \rho \vec{\Gamma} \times \vec{v}_\infty.$$

Задача №10 к разделу

Теорема об изменении количества движения с использованием интеграла Бернулли.

В поступательно движущуюся с постоянной скоростью \vec{v}_∞ среду помещают абсолютно твёрдое тело конечных размеров. Полагая, что вне тела течение безвихревое, а среда несжимаема, определить главный вектор \vec{F} , действующий со стороны среды на неподвижное тело.

При помещении тела поле скоростей в потоке изменяется на величину $\vec{v}_r(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x})$. Причём данная составляющая движения удовлетворит условию

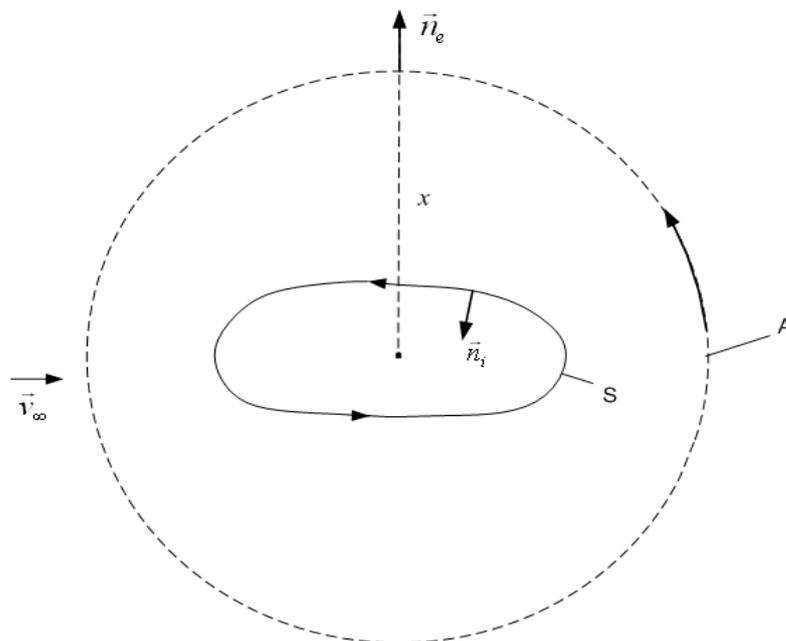
$$|\vec{u}| \sim \frac{c}{x}, \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Представим абсолютную скорость потока в виде

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty + \vec{u}(\vec{x}), \quad (2)$$

где $\vec{u} \equiv \vec{v}_r$ – относительная скорость.

Так как движение стационарное, для определения главного вектора, действующего на тело, используем контрольные поверхности, ограниченные контуром тела и окружностью радиуса x . (Рис)



На основании следствия из теоремы об изменении количества движения, главный вектор \vec{R} , действующий на среду, находящийся между контрольными поверхностями определяется выражением

$$\vec{R} = \int_{\Sigma^{(e)}} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n}^{(e)} ds + \int_{\Sigma^{(i)}} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n}^{(i)} ds, \quad (3)$$

где $\vec{n}^{(e)}$ – внешняя нормаль; $\vec{n}^{(i)}$ – внутренняя нормаль.

Так как при обтекании тела $\vec{v} \cdot \vec{n}^{(i)} = 0$, то интеграл по внутренней поверхности равен нулю. Вектор \vec{R} складывается из составляющей \vec{F} – действующей со стороны поверхности тела на среду и составляющей $\vec{F}^{(e)}$, действующей со стороны отброшенной среды на поверхность $\Sigma^{(e)}$. Тогда

$$\vec{R} = \vec{f} + \vec{F}^{(e)} = \int_{\Sigma^{(e)}} \rho (\vec{v}_\infty + \vec{u})(\vec{v}_\infty + \vec{u}) \cdot \vec{n}^{(e)} ds. \quad (4)$$

Из условия несжимаемости

$$\int_{\Sigma^{(e)}} \rho (\vec{v}_\infty + \vec{u}) \cdot \vec{n} ds = 0.$$

По определению

$$\int_{\Sigma^{(e)}} \rho \vec{v}_\infty \cdot \vec{n} ds = \rho \int_0^{2\pi} v_\infty \cos \varphi d\varphi = 0.$$

Тогда из условия несжимаемости получим

$$\int_{\Sigma^{(e)}} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds = 0.$$

С учётом данных условий правая часть (4) преобразуется и главный вектор примет вид

$$\vec{R} = \int_{\Sigma^{(e)}} \rho \vec{u} \vec{v}_\infty \cdot \vec{n} ds + \int_{\Sigma^{(e)}} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} ds. \quad (5)$$

Производя интегрирование по окружности цилиндра радиуса x и переходя к пределу при $x \rightarrow \infty$ получим из (1) и (5):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \vec{R} = \vec{F} + \lim_{x \rightarrow \infty} \vec{F}^{(e)} = \int_0^{2\pi} \rho \vec{c}(\varphi) \vec{v}_\infty \cdot \vec{n} d\varphi + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^{2\pi} \vec{c} \vec{c} \cdot \vec{n} d\varphi. \quad (6)$$

Здесь используется асимптотическое представление перемещения \vec{u} на бесконечность в виде

$$\vec{u} \Big|_{x \rightarrow \infty} \cong \frac{\vec{c}(\varphi)}{x}. \quad (7)$$

Так как второе слагаемое в правой части (6) обращается в ноль, то

$$\vec{R}_\infty = \vec{F} + \vec{F}_\infty^{(e)} = \int_0^{2\pi} \rho \vec{c}(\varphi) \vec{v}_\infty \cdot \vec{n} d\varphi. \quad (8)$$

Для определения $\vec{F}_\infty^{(e)}$ воспользуемся интегралом Бернулли. Интеграл Бернулли позволяет получить распределение давления в системе координат с координатными линиями η , направленными вдоль линий тока, и линиями ξ , ортогональными к линиям тока. В такой системе на произвольной линии $\xi = const$ выполняется условие

$$P(\eta, \xi) + \frac{1}{2} \rho v^2(\eta, \xi) = P(\eta_0, \xi) + \frac{1}{2} \rho v^2(\eta_0, \xi). \quad (9)$$

Выбираем начальную точку η_0 на бесконечности, где $P = P_0$, а $\vec{v} = \vec{v}_\infty$, тогда

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2. \quad (10)$$

Так как условие (10) выполняется в любой точке среды, то распределение давления с учётом (2) имеет вид

$$P(\vec{x}) = P_0 - \rho \vec{v}_\infty \vec{u} + \rho \vec{u} \vec{u}. \quad (11)$$

Используя выражении (11) найдём силу $\vec{F}_\infty^{(e)}$, действующую на внешнюю поверхность $\Sigma_{(e)}$, интегрируя распределение давления (11)

$$\vec{F}^{(e)} = - \int_{\Sigma_{(e)}} P \vec{n}^{(e)} ds = \int_0^{2\pi} \rho \vec{v}_\infty \cdot \vec{u} \vec{n} x d\varphi - \int_0^{2\pi} \rho u^2 x \vec{n} d\varphi.$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow \infty$ на основании (7) получим

$$\vec{F}_\infty^{(e)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \vec{F}^{(e)} = \int_0^{2\pi} \rho \vec{v}_\infty \cdot \vec{c}(\varphi) \vec{n} d\varphi. \quad (12)$$

На основании выражений (8) и (12) находим силу, действующую со стороны тела на среду

$$\vec{F} = -\vec{F}_\infty^{(e)} + \int_0^{2\pi} \rho \vec{c}(\varphi) \vec{v}_\infty \cdot \vec{n} d\varphi$$

или

$$\vec{F} = -\int_0^{2\pi} \rho \vec{v}_\infty \cdot \vec{c}(\varphi) \vec{n} d\varphi + \int_0^{2\pi} \rho \vec{c}(\varphi) \vec{v}_\infty \cdot \vec{n} d\varphi. \quad (13)$$

На поверхность тела со стороны среды действует противоположно направленная сила $T = -F$. Найдём составляющие этой силы в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} T_1 = -F_1 = -\vec{F} \cdot \vec{e}_1 &= -\int_0^{2\pi} \rho v_\infty c_1(\varphi) n_1 d\varphi + \int_0^{2\pi} \rho c_1(\varphi) v_\infty n_1 d\varphi = 0 \\ T_2 = -F_2 = -\vec{F} \cdot \vec{e}_2 &= \int_0^{2\pi} \rho v_\infty c_1 n_2 d\varphi - \int_0^{2\pi} \rho c_2 n_1 v_\infty d\varphi = \rho v_\infty \int_0^{2\pi} (c_1 \sin \varphi - c_2 \cos \varphi) d\varphi = \\ &= -\rho v_\infty \int_0^{2\pi} \vec{c}(\varphi) \cdot \vec{\tau} d\varphi. \end{aligned}$$

Из определения циркуляции следует с учётом (7), что

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \vec{u} \cdot \vec{\tau} x d\varphi = \int_0^{2\pi} \vec{c} \cdot \vec{\tau} d\varphi.$$

Таким образом, не равна нулю составляющая силы перпендикулярная направлению тока – постоянная сила

$$\vec{T} = -\vec{e}_2 \rho v_\infty \Gamma. \quad (14)$$

Выражение (14) является формулой Жуковского для подъёмной силы. Эта сила получается поворотом \vec{v}_∞ в сторону противоположную циркуляции на угол 90° .

Теорема об изменении кинетической энергии. Интеграл Бернулли.

3.18. В бесконечной цилиндрической трубе, заполненной несжимаемой жидкостью, тело с площадью поперечного сечения Σ_0 обтекается потоком со скоростью \vec{V}_1 перед ним и со скоростью \vec{V}_2 за телом. При этом в области за телом образуется бесконечная вдоль потока полость. Найти силу сопротивления, действующую на тело со стороны жидкости.

3.19. Поле скоростей в сплошной среде распределено по закону:

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty + \frac{c}{x^2} (\vec{e}_3 \times \vec{x}),$$

где \vec{v}_∞ – постоянная скорость, c – константа.

Определить:

4. Величину циркуляции для круговых контуров, включающих начало координат, выяснить кинематический смысл постоянной c и выразить её через циркуляцию Γ .

5. Найти распределение вектора вихря, доказать что циркуляция по произвольному контуру не охватывающему начало координат равна нулю, а по произвольному контуру, включающему начало координат постоянна.

6. Найти величину и направление главного вектора и главного момента, действующих на массу жидкости, заключённую в круговом цилиндре единичной длины и радиуса r .

3.20. В поступательно движущуюся с постоянной скоростью \vec{v}_∞ среду помещают абсолютно твёрдое тело конечных размеров. Полагая, что вне тела течение безвихревое, а среда несжимаема, определить главный вектор \vec{F} , действующий со стороны среды на неподвижное тело.