

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2020 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_____ В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению курсовой работы
по дисциплине (модулю)
«Механика сплошной среды»**

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки

01.03.03 Механика и математическое моделирование

с направленностью (профилем)

Механика деформируемого твердого тела

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-20

Тула 2020

Разработчик методических указаний

Разработчик:

Соколова М.Ю., проф., д.ф.-м.н., доц.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

Задание к КР.

По заданной функции комплексной переменной $f = f(z)$ определить:

- 1) поле скоростей и вихревое поле;
- 2) координаты точек, скорость течения в которых равна нулю (критические точки);
- 3) уравнения линий тока и уравнение обтекаемого контура; изобразить обтекаемый контур и линии тока;
- 4) распределение давления по обтекаемому контуру (построить эпюру давлений); направление и величину главного вектора сил давления, действующих на обтекаемый контур.

Примеры функций $f = f(z)$:

1) $f(z) = az^n$ ($n > \frac{1}{2}$) – обтекание угла $\alpha = \frac{\pi}{n}$;

2) $f(z) = v_{\infty}(z - i\sqrt{2pz})$ – обтекание параболы;

3) $f(z) = az + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a}$ – обтекание овала.

Пример решения варианта задания.

Движение идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением в форме Громеки-Лэмба следующего вида:

$$\vec{\nabla} p + \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2} \vec{\nabla} v^2 - \rho_0 \vec{v} \times \vec{\omega} = \rho_0 \vec{F}, \quad (1)$$

где p – давление, $\vec{v}(\vec{x}, t)$ – поле скоростей, ρ_0 – постоянная плотность, $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ – вектор вихря, \vec{F} – плотность массовых сил, $\vec{\nabla} = \vec{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ – оператор Гамильтона.

Уравнение неразрывности принимает форму

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (2)$$

Течение называется безвихревым, если выполняется условие

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим плоское потенциальное течение в плоскости Ox_1x_2 . Тогда $v_3=0$ и условие несжимаемости (2) будет удовлетворено, если ввести функцию тока $\Psi(x_1, x_2)$ такую, что

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{e}_3 \Psi). \quad (4)$$

Действительно, из (2) и (4) следует, что

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times (\vec{e}_3 \Psi)) \equiv 0.$$

Из формулы (4) получаем следующие выражения декартовых компонент поля скоростей:

$$v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}. \quad (5)$$

Из (5) находим поле вектора вихря в следующем виде:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = -\vec{e}_3 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \right) = -\vec{e}_3 \Delta \Psi. \quad (6)$$

Отсюда следует, что в случае безвихревого движения функция тока является гармонической.

Безвихревому плоскому течению ставят в соответствие аналитическую функцию комплексной переменной $f(z)$ следующего вида:

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y). \quad (7)$$

По определению аналитической функции, ее действительная $\varphi(x, y)$ и мнимая $\Psi(x, y)$ части есть гармонические функции, связанные условиями Коши-Римана:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (8)$$

Из условий (8) и выражений (5) получаем представление вектора скорости через потенциал скоростей ϕ в форме

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi. \quad (9)$$

Отметим, что семейства кривых $\Psi = C$ и $\phi = C$ взаимно ортогональны. При этом линии $\Psi = C$ совпадают с линиями тока. Действительно, так как нормали к семейству $\Psi = C$ совпадают с $\vec{\nabla} \Psi$, а к $\phi = C$ с $\vec{\nabla} \phi$, то легко показать, что

$$\vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \Psi \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{e}_3 \Psi) = 0.$$

Полученное условие означает, что вектор скорости ортогонален нормали к плоской кривой $\Psi = C$, следовательно, он направлен вдоль касательной к ней, и данная линия есть линия тока.

Чтобы установить, обтеканию какого контура соответствует заданная функция $f(z)$, необходимо учесть, что этот контур должен совпадать с линией тока, на которой имеются точки с нулевой скоростью (критические точки). При определении скорости удобно воспользоваться выражением

$$\frac{df}{dz} = v_1 - iv_2, \quad v^2 = \frac{df}{dz} \cdot \overline{\frac{df}{dz}}. \quad (10)$$

В качестве примера решения обратной задачи определения параметров течения, соответствующего заданной функции, рассмотрим функцию вида

$$f(z) = v_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \quad (11)$$

где v_∞ – величина скорости набегающего потока на бесконечности,

a – положительная постоянная,

Γ – величина циркуляции (при $\Gamma > 0$ циркуляционная составляющая течения направлена против часовой стрелки, при $\Gamma < 0$ – по часовой стрелке, при $\Gamma = 0$ обтекание является бесциркуляционным). В рассматриваемой задаче принято $\Gamma > 0$.

1) Определение поля скоростей и вихревого поля

Предварительно найдем потенциальную функцию φ и функцию тока Ψ , выделяя действительную и мнимую части функции $f(z)$, заданной в виде (11). Для этого перейдем к полярным координатам r , θ и воспользуемся представлением комплексной переменной в форме Эйлера

$$z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

В результате функция (11) принимает следующий вид:

$$f(z) = v_\infty \cdot \frac{(r^2 + a^2) \cos \theta}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + i(v_\infty \cdot \frac{(r^2 - a^2) \sin \theta}{r} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r).$$

Из данного выражения в соответствии с (7) получаем представления потенциальной функции и функции тока

$$\varphi = v_\infty \cdot \frac{(r^2 + a^2) \cos \theta}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = v_\infty \cdot \frac{(r^2 - a^2) \sin \theta}{r} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (12)$$

Используя формулу (9) и представление оператора Гамильтона в полярных координатах

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

находим поле скоростей для потенциала, заданного в виде (12),

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = v_\infty (1 - \frac{a^2}{r^2}) \cos \theta \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot (\frac{\Gamma}{2\pi} - \frac{v_\infty (r^2 + a^2) \sin \theta}{r}) \vec{e}_\theta. \quad (13)$$

В соответствии с формулой (6) находим вихревое поле,

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{\nabla} \times \vec{v} = (\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}) \times (v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta) = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \vec{e}_z - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \vec{e}_z + \frac{v_\theta}{r} \vec{e}_z = \\ &= (-\frac{\Gamma}{2\pi r^2} + \frac{2v_\infty a^2 \sin \theta}{r^3} + v_\infty (\frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^3}) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} - v_\infty (\frac{1}{r} + \frac{a^2}{r^3}) \sin \theta) \vec{e}_z = 0 \end{aligned}$$

(при дифференцировании надо учитывать, что $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta$ и $\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r$). Таким образом, течение является безвихревым в области с исключенным началом координат.

2) Определение критических точек

Находим координаты критических точек из условия равенства нулю скорости течения в них. Из выражения скорости (13), приравнявая компоненты вектора скорости к нулю, получим:

$$\begin{cases} v_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta = 0, \\ \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\Gamma}{2\pi} - \frac{v_\infty (r^2 + a^2) \sin \theta}{r}\right) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) имеет различные решения в зависимости от величины циркуляции. Рассмотрим следующие возможные варианты расположения критических точек:

а) если $\Gamma=0$ (бесциркуляционное обтекание), то существуют две критические точки с координатами $(r=a; \theta=0)$ и $(r=a; \theta=\pi)$;

б) если $\Gamma < 4\pi v_\infty a$, то существуют две критические точки с координатами

$$(r=a; \theta = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi v_\infty a}) \text{ и } (r=a; \theta = \pi - \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi v_\infty a}); \quad (15)$$

в) если $\Gamma = 4\pi v_\infty a$, то существует одна критическая точка с координатами $(r=a; \theta = \frac{\pi}{2})$;

г) если $\Gamma > 4\pi v_\infty a$, то существует одна критическая точка с координатами $(r = \frac{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - (4\pi v_\infty a)^2}}{4\pi v_\infty}; \theta = \frac{\pi}{2})$, расположенная в области $r > a$ и, следовательно не лежащая на окружности $r=a$.

Случай в) является предельным для случаев б) и г).

3) Определение уравнений линий тока и уравнения обтекаемого контура

Как указывалось выше, на линиях тока функция тока не изменится. Поэтому из выражения потенциальной функции в виде (12) находим уравнения линий тока в следующем виде:

$$v_{\infty} \cdot \frac{(r^2 - a^2) \sin \theta}{r} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = C, \quad (16)$$

где C – постоянная на данной линии тока величина.

Так как мы рассматриваем безотрывное течение, то линии тока, проходящие через критические точки, должны образовывать обтекаемый контур. Условие расположения критических точек на обтекаемом контуре позволяет определить значение постоянной C , соответствующее «критическим» линиям тока, а следовательно, и уравнение обтекаемого контура. Подставляя координаты критических точек из выражений (15) в уравнение (16), находим значения постоянной C для различных величин циркуляции:

а) $\Gamma=0$: $C=0$, тогда уравнение обтекаемого контура получаем, полагая в (16) $C=0$. Данное уравнение имеет вид

$$v_{\infty} \cdot \frac{(r^2 - a^2) \sin \theta}{r} = 0$$

или $r=a$. Таким образом, обтекаемым контуром в данном случае является окружность радиуса a . Распределение линий тока для этого случая показано на рисунке 1. Течение симметрично относительно плоскости $y=0$;

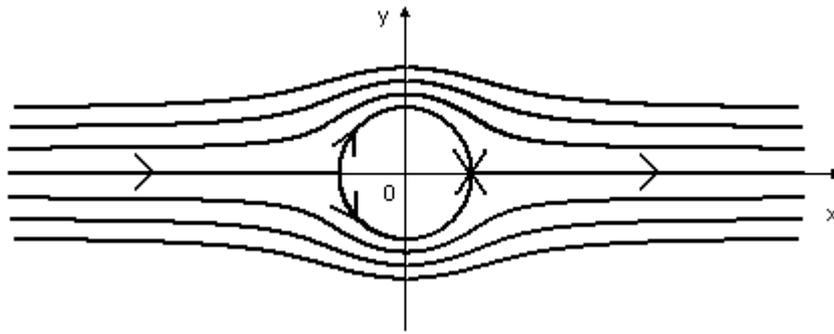


Рис.1 – Линии тока при $\Gamma=0$

б) $\Gamma < 4\pi\nu_\infty a$: $C = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln a$. Подставляя данное значение в (16), находим

$$v_\infty \cdot \frac{(r^2 - a^2) \sin \theta}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{a}{r} = 0.$$

Отсюда следует, что $r=a$ и обтекаемым контуром также является окружность. Распределение линий тока для этого случая показано на рисунке 2. В отличие от случая а) данное течение несимметрично относительно плоскости $y=0$. «Критическая» линия тока (помечена стрелками) вне обтекаемого контура не является прямой;

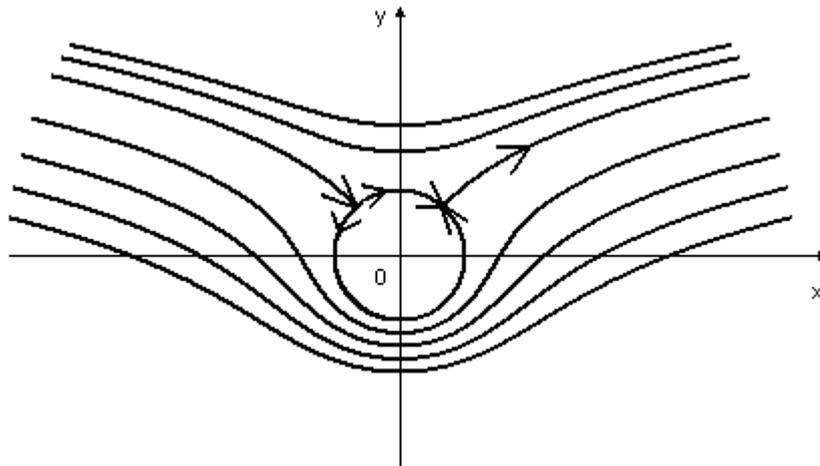


Рис.2 – Линии тока при $\Gamma < 4\pi\nu_\infty a$

в) $\Gamma = 4\pi\nu_\infty a$: $C = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln a$. При этом условии две критические точки на обтекаемой окружности сливаются в одну. Распределение линий тока показано на рисунке 3;

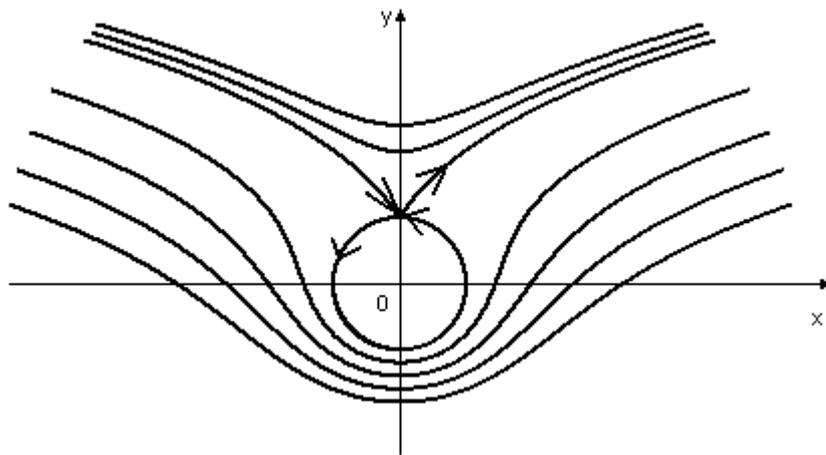


Рис.3 – Линии тока при $\Gamma=4\pi v_{\infty}a$

$$\Gamma) \Gamma > 4\pi v_{\infty}a: \quad C = \frac{(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - (4\pi v_{\infty}a)^2})^2 - (4\pi v_{\infty}a)^2}{4\pi(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - (4\pi v_{\infty}a)^2})} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - (4\pi v_{\infty}a)^2}}{4\pi v_{\infty}}.$$

В данном случае обтекаемый контур не является окружностью. Распределение линий тока показано на рисунке 4.

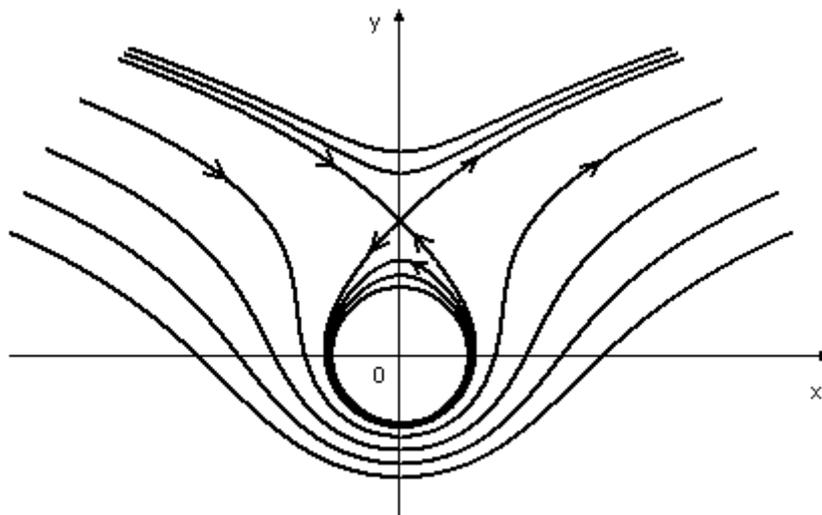


Рис.4 – Линии тока при $\Gamma > 4\pi v_{\infty}a$

4) Определение распределения давления на обтекаемый контур, направления и величины главного вектора сил давления

Для нахождения закона распределения давления на обтекаемый контур (в нашем случае окружность) воспользуемся интегралом Бернулли. При отсутствии массовых сил изменение давления вдоль линии тока связано с изменением скорости следующим выражением:

$$p + \frac{\rho_0 v^2}{2} = C, \quad (17)$$

где ρ_0 – плотность несжимаемой среды.

Рассмотрим случай обтекания окружности радиуса a , когда $\Gamma \leq 4\pi v_\infty a$. Применим формулу (17) вдоль «критической» линии тока, расположенной на окружности. Полагая в формуле распределения скоростей (13) $r=a$, находим закон изменения скорости по обтекаемому контуру:

$$v|_{r=a} = \frac{\Gamma}{2\pi a} - 2v_\infty \sin \theta. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), находим закон распределения давления по окружности в следующем виде:

$$p(\theta) = C - \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} - 2v_\infty \sin \theta \right)^2. \quad (19)$$

Определим постоянную C через давление p_0 в левой критической точке, где, согласно (15), $\theta = \theta_0 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi v_\infty a}$. Подставляя значение θ_0 в (19), получим

$$p(\theta)|_{\theta=\theta_0} = p_0 = C. \quad (20)$$

Таким образом, распределение давления с учетом условия (20) принимает вид:

$$p(\theta) = p_0 - \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} - 2v_\infty \sin \theta \right)^2. \quad (21)$$

Если циркуляция отсутствует ($\Gamma=0$), то распределение давления симметрично относительно плоскостей $x=0$ и $y=0$. Поэтому в данном случае главный вектор внешних сил, действующих на обтекаемый контур, равен нулю.

На рисунке 5 показана эпюра отношения давления в произвольной точке контура к давлению в критической точке $\frac{p}{p_0}$, когда $\Gamma \neq 0$. Эпюра построена для следующих значений параметров потока: $v_\infty = 20 \text{ м/с}$, $a = 1 \text{ м}$, $\Gamma = 60\pi \text{ м}^2/\text{с}^2$, $p_0 = 3000000 \text{ Па}$, $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

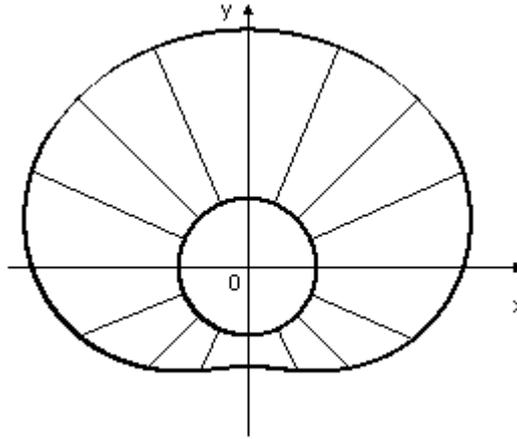


Рис.5 – Эпюра давлений

Главный вектор сил давления, действующих на обтекаемый контур, вычисляется как интеграл от элементарной силы давления по замкнутому обтекаемому контуру $\vec{R} = -\oint p \vec{n} d\ell$. Определим компоненты вектора \vec{R} в декартовых координатах:

$$\begin{aligned}
 R_x &= -\int_0^{2\pi} p a \cos \theta d\theta = -a \int_0^{2\pi} \left(p_0 - \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} - 2v_\infty \sin \theta \right)^2 \right) \cos \theta d\theta = \\
 &= -\frac{\rho_0 a}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2p_0}{\rho_0} \cos \theta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \cos \theta + \frac{2\Gamma v_\infty}{\pi a} \sin \theta \cos \theta - 4v_\infty^2 \sin^2 \theta \cos \theta \right) d\theta = \\
 &= -\frac{\rho_0 a}{2} \left(\frac{2p_0}{\rho_0} \sin \theta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \sin \theta + \frac{\Gamma v_\infty}{\pi a} \sin^2 \theta - \frac{4}{3} v_\infty^2 \sin^3 \theta \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 0,
 \end{aligned}$$

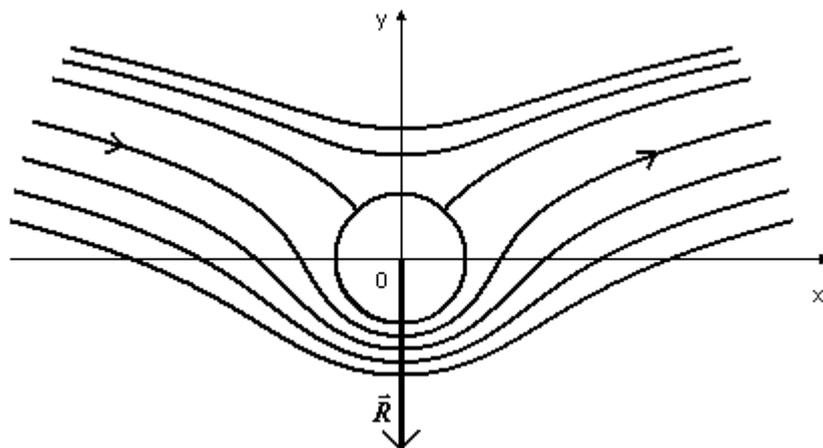
$$\begin{aligned}
R_y &= -\int_0^{2\pi} p a \sin \theta d\theta = -a \int_0^{2\pi} \left(p_0 - \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} - 2v_\infty \sin \theta \right)^2 \right) \sin \theta d\theta = \\
&= -\frac{\rho_0 a}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2p_0}{\rho_0} \sin \theta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \sin \theta + \frac{2\Gamma v_\infty}{\pi a} \sin^2 \theta - 4v_\infty^2 \sin^3 \theta \right) d\theta = \\
&= -\frac{\rho_0 a}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2p_0}{\rho_0} \sin \theta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \sin \theta + \frac{\Gamma v_\infty}{\pi a} (1 - \cos 2\theta) - 4v_\infty^2 (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \right) d\theta = \\
&= -\frac{\rho_0 a}{2} \left(-\frac{2p_0}{\rho_0} \cos \theta + \left(\frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \cos \theta + \frac{\Gamma v_\infty}{\pi a} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + 4v_\infty^2 \left(\cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \right) \Bigg|_0^{2\pi} = -\rho_0 \Gamma v_\infty .
\end{aligned}$$

Таким образом, главный вектор сил давления, действующих на обтекаемый контур, направлен вдоль оси y , перпендикулярной к направлению скорости потока на бесконечности (рисунок 6),

$$\vec{R} = -\rho_0 \Gamma v_\infty \vec{e}_y . \quad (22)$$

Формула (22) является частным случаем общей теоремы Жуковского о подъемной силе, действующей на обтекаемый контур. Эта теорема справедлива для любого обтекаемого контура.

Главный вектор сил давления отличен от нуля, так как давление над окружностью больше давления под ней. Это объясняется тем, что под контуром скорости бесциркуляционного обтекания и чисто циркуляционного потока складываются, а над цилиндром вычитаются. Следовательно, под окружностью скорости больше, а давления, согласно интегралу Бернулли, меньше, над



о́кружностью скорости меньше, а давления больше. При бесциркуляционном обтекании главный вектор сил давления равен нулю. Этот эффект называется парадоксом Даламбера. Если $\Gamma \neq 0$, то на обтекаемый контур действует подъемная сила.

Рис.6 – Главный вектор сил давления