

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2020 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_____ В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Математические модели в механике сплошной среды»**

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

с направленностью (профилем)
Механика деформируемого твердого тела

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-20

Тула 2020

Разработчик методических указаний

Разработчик:

Соколова М.Ю., профессор, доцент, д.ф-м.н.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СТЕРЖНЯ

Система линеаризованных термомеханических уравнений

Рассмотрим механическое и тепловое движение среды в окрестности ненапряженного равновесного состояния, а температура однородна.

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}^{(0)} = 0, \quad T = T_0. \quad (1)$$

Полагаем, что отклонение термомеханических характеристик от этого состояния малы, поэтому компонентами градиента перемещений по сравнению с единицей можно пренебречь, тогда

$$\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{E} + \vec{\nabla} \vec{u} \approx \underset{\sim}{E}, \quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \vec{\nabla}). \quad (2)$$

Первый инвариант тензора деформаций равен относительному изменению объема $I_1(\underset{\sim}{\varepsilon}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \theta$.

Температурные отклонения также малы: $T = T_0(1 + \vartheta) \approx T_0$, где $\vartheta = \frac{T - T_0}{T_0}$ – относительное изменение температуры.

При записи системы термомеханических уравнений в лагранжевых координатах получим:

$$1) \text{ уравнение движения } \vec{\nabla} \cdot \underset{\sim}{S} + \rho \vec{F} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt}, \quad (3)$$

$$2) \text{ уравнение неразрывности } \rho = \rho_0,$$

$$3) \text{ закон изменения внутренней энергии}$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon} + \vec{\nabla} \cdot (\underset{\sim}{\Lambda} \cdot \vec{\nabla} T) + \rho \frac{dQ}{dt}, \quad (4)$$

$$4) \text{ закон изменения энтропии}$$

$$\rho \frac{dS}{dt} = \frac{\rho}{T_0} \frac{dQ}{dt} - \frac{1}{T_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{q}, \quad (5)$$

$$5) \text{ закон теплопроводности Фурье } \vec{q} = -\underset{\sim}{\Lambda} \cdot \vec{\nabla} T. \quad (6)$$

В законе теплопроводности Фурье

\vec{q} – вектор теплового потока, характеризующий воздействие окружающей среды на рассматриваемый объем в единицу времени через единичную поверхность;

$\underset{\sim}{\Lambda}$ – тензор теплопроводности, для изотропного материала $\underset{\sim}{\Lambda} = \underset{\sim}{\Lambda} E$.

Приток тепла к рассматриваемому объему сплошной среды складывается из притока через поверхность, ограничивающую объем, и массовый приток. Приток

$$\text{тепла через поверхность } \Delta Q_{\Sigma} = - \int_{t_0}^t \int_{\Sigma_0} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma dt;$$

скорость притока тепла к единице массы среды $\frac{dQ_m}{dt} = \dot{Q}_m$, так что тепловое массовое воздействие представляется в виде $\Delta Q_m = - \int_{t_0}^t \int_V \rho \dot{Q} dV dt$.

Определяющие соотношения для линейно упругой изотропной среды

Свободная энергия конкретизируется соотношением

$$\rho_0 \psi(\tilde{\varepsilon}, t) = \frac{1}{2} \lambda \theta^2 + G \tilde{\varepsilon} - \rho_0 T_0 (S_0 \vartheta + \frac{1}{2} c \vartheta^2 + \frac{1}{\rho_0} \vartheta b \theta),$$

где λ, G – коэффициенты упругости Ламе;

$$S_0 = -\frac{1}{T_0} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \Big|_{\theta=0} \quad \text{– начальная энтропия};$$

$$c = -\frac{1}{T_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} \Big|_{\theta=0} \quad \text{– удельная теплоемкость};$$

$$b = -\frac{\rho_0}{T_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\varepsilon} \partial \vartheta} \Big|_{\tilde{\varepsilon}=0, \vartheta=0} \quad \text{– тензор коэффициентов температурных напряжений; для изотропного материала } b = b E.$$

Через свободную энергию определяем напряжения $\tilde{S} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\varepsilon}}$:

$$\tilde{S} = \lambda \theta E + 2G \tilde{\varepsilon} - \vartheta T_0 b E, \quad (7)$$

и выражаем из (7) деформации в виде

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} S - \frac{\nu}{E} I_1(S) E + T_0 \alpha \vartheta E, \quad (8)$$

где E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно;

α – коэффициент температурных расширений, связанный с коэффициентом температурных напряжений соотношением $b = (3\lambda + 2G)\alpha$,

и энтропию

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = -\frac{1}{T_0} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = S_0 + c \vartheta + \frac{1}{\rho_0} b \theta. \quad (9)$$

Начальные и граничные условия для уравнений термоупругости

В качестве начальных условий будем использовать условия (1).

Границные условия зададим для механических воздействий:

$$\begin{aligned} \vec{P}^{(n)}(\vec{x}, t) &= \vec{P}^*(\vec{x}, t) & \forall \vec{x} \in \Sigma_P, \\ \vec{u}^{(n)}(\vec{x}, t) &= \vec{u}^*(\vec{x}, t) & \forall \vec{x} \in \Sigma_u. \end{aligned} \quad (10)$$

Границные условия для тепловых воздействий:

на части поверхности Σ_T задан закон изменения температуры

$$T = T^*(\vec{x}, t) \quad \forall \vec{x} \in \Sigma_T, \quad (11)$$

на части поверхности Σ_q задан закон изменения теплового потока

$$\vec{q} = \vec{q}^*(\vec{x}, t) \quad \forall \vec{x} \in \Sigma_q,$$

на части поверхности Σ_c задан закон теплообмена с окружающей средой

$$\vec{n} \cdot \Lambda \cdot \vec{\nabla} T + \alpha_0 (T - T_i) = 0 \quad \forall \vec{x} \in \Sigma_c,$$

где α_0 – коэффициент теплообмена. Для изотропного материала это условие принимает вид $\Lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_0 (T - T_i) = 0$.

Поверхности Σ_P и $\Sigma_u; \Sigma_T, \Sigma_q$ и Σ_c – не пересекаются.

Квазистационарная задача термоупругости для тонкого прямолинейного стержня

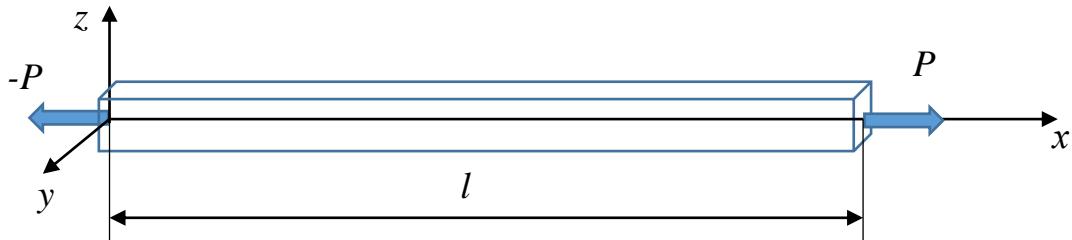


Рисунок – Расчетная схема

Рассмотрим тонкий прямолинейный стержень длиной l , боковая поверхность которого адиабатически изолирована. При таких предположениях (поперечное сечение мало) все термомеханические характеристики можно считать только функцией координаты x , направленной вдоль оси стержня, и медленными функциями времени. Считаем также, что отсутствуют массовые силы $\vec{F} \equiv 0$ и массовые термические воздействия $Q \equiv 0$, инерционным членом пренебрегаем.

На стержень действует осевая сила \vec{P} , медленно меняющаяся со временем. Тензор напряжения считаем заданным:

$$\underline{\underline{S}} = \sigma(t) \vec{e}_1 \vec{e}_1, \text{ причем } P = \int_{\Sigma} \sigma d\Sigma. \quad (12)$$

В начальный момент времени $\sigma(0) = 0$, (13)

при $t > 0$ $\sigma(t) = \dot{\sigma}t$, $\dot{\sigma} = \text{const.}$

Температура в стержне $T = T(x, t)$.

В начальный момент времени относительное изменение температуры

$$\vartheta = \frac{T - T_0}{T_0} = 0, \quad (\vartheta(x, 0) = 0). \quad (14)$$

На концах стержня поддерживается постоянная температура

$$\vartheta(0, t) = \vartheta_1, \quad \vartheta(l, t) = \vartheta_2. \quad (15)$$

Требуется определить перемещения точек стержня как функций времени и координат: $u(x, t)$, $u_y(x, y, t)$, $u_z(x, z, t)$, причем будем считать, что левый торец стержня $x=0$ закреплен от перемещений:

$$u(0, t) = u_y(0, t) = u_z(0, t) = 0.$$

По заданному тензору напряжений (12) определим деформации по закону Гука (8):

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma \vec{e}_1 \vec{e}_1 - \frac{\nu}{E} \sigma (\vec{e}_1 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \vec{e}_3) + \alpha T_0 \vartheta (\vec{e}_1 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \vec{e}_3).$$

Откуда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma}{E} + \alpha T_0 \vartheta, \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\nu}{E} \sigma + \alpha T_0 \vartheta. \end{aligned} \quad (16)$$

Интегрирование выражений для деформаций (16) возможно после определения функции $\vartheta(x, t)$:

$$u = \frac{\sigma}{E} x + \alpha T_0 \int_0^x \vartheta(x, t) dx, \quad (17)$$

$$u_y = \left(-\frac{\nu}{E}\sigma + \alpha T_0 \vartheta\right)y, \quad u_z = \left(-\frac{\nu}{E}\sigma + \alpha T_0 \vartheta\right)z.$$

Относительное изменение температуры $\vartheta(x, t)$ будем искать из уравнения теплопроводности. Из закона изменения энтропии (5) с учетом закона теплопроводности Фурье (6) для однородного изотропного стержня запишем уравнение:

$$T_0 \rho_0 \frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda \nabla^2 T, \quad (18)$$

и, переходя к величине относительного изменения температуры, получим

$$T = T_0 + T_0 \vartheta, \quad T_0 = \text{const},$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (T_0 + T_0 \vartheta)}{\partial x^2} = T_0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$

С учетом представления для энтропии (9), найдем производную от энтропии по времени:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = c \dot{\vartheta} + \frac{1}{\rho_0} b \dot{\vartheta}.$$

Тогда уравнение (18) принимает вид:

$$T_0 \rho_0 \left(c \dot{\vartheta} + \frac{1}{\rho_0} b \dot{\vartheta}\right) = \Lambda T_0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}. \quad (17)$$

Из выражений для деформаций (16) относительное изменение объема можно вычислить по формуле

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma + 3\alpha T_0 \vartheta.$$

Тогда

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\sigma}}{3K} + 3\alpha T_0 \dot{\vartheta}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнение (17), получим

$$\rho_0 c \dot{\vartheta} + b \left(\frac{\dot{\sigma}}{3K} + 3\alpha T_0 \dot{\vartheta}\right) = \Lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$

Проведем преобразования в последнем уравнении:

$$(\rho_0 c + b 3\alpha T_0) \dot{\vartheta} = \Lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - b \frac{\dot{\sigma}}{3K},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 c + b \cdot 3\alpha T_0} \left(\Lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - b \frac{\dot{\sigma}}{3K} \right).$$

Обозначим $\frac{\Lambda}{\rho_0 c + b \cdot 3\alpha T_0} = \tilde{a}^2$; $- \frac{b}{3K(\rho_0 c + b \cdot 3\alpha T_0)} \dot{\sigma} = \tilde{A}$.

Уравнение теплопроводности для *связанной* задачи получим в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \tilde{a}^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \tilde{A}. \quad (19)$$

Для *несвязанной* квазистатической задачи следует пренебречь влиянием деформаций на уравнение теплопроводности. Тогда получим

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (20)$$

где $a^2 = \frac{\Lambda}{\rho_0 c}$, (a называют коэффициентом температуропроводности), $\tilde{A} = 0$.

Решение несвязанной термомеханической задачи для стержня

Найдем поле температуры из уравнения (20) с начальными (14) и граничными (15) условиями:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}; \quad (21)$$

$$\vartheta(x, 0) = 0; \quad \vartheta(0, t) = \vartheta_1; \quad \vartheta(l, t) = \vartheta_2. \quad (22)$$

Решение будем искать в виде суммы двух функций, одна из которых не зависит от времени:

$$\vartheta(x, t) = \bar{v}(x) + v(x, t),$$

где $\bar{v}(x)$ – стационарная температура,

$v(x, t)$ – отклонение от стационарной температуры.

Найдем стационарную температуру, подставляя эту функцию в уравнение (21) и удовлетворяя условиям на границе (22):

$$\begin{aligned} \bar{v}''(x) &= 0, \\ \bar{v}(0) &= \vartheta_1, \quad \bar{v}(l) = \vartheta_2, \\ \bar{v}(x) &= \vartheta_1 + \frac{x}{l}(\vartheta_2 - \vartheta_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Функцию $v(x, t)$ будем искать как решение уравнения (20), удовлетворяющее однородным граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v(x, 0) &= \vartheta(x, 0) - \bar{v}(x) = -\bar{v}(x), \\ v(0, t) &= 0, \\ v(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Задачу (24) решаем методом разделения переменных:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= X(x)T(t), \\ \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} &= \frac{X''}{X} = -r. \end{aligned}$$

Границные условия для функции $X(x)$: $X(0) = 0, X(l) = 0$;

дифференциальное уравнение $X'' + \lambda X = 0$ имеет нетривиальные решения только при $r_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, поэтому $X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$.

Дифференциальное уравнение для функции $T(t)$

$$T' + a^2 r_n T = 0$$

имеет решения $T_n = C_n e^{-a^2 r_n t}, n = 1, 2, 3, \dots$

Частные решения уравнения (24)

$$v_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-a^2 r_n t} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

удовлетворяют граничным условиям.

Составим ряд

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (25)$$

Функция $v(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям. Удовлетворим начальным условиям (24):

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} = -\bar{v}(x),$$

т.е. C_n являются коэффициентами Фурье для функции $-\bar{v}(x)$ при разложении её в ряд по синусам на интервале $(0, l)$:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(-\bar{v}(x) - \frac{x}{l}(\vartheta_2 - \vartheta_1) \right) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{\pi n} (\vartheta_2 (-1)^n - \vartheta_1).$$

Таким образом, на основании (23) и (25) решение несвязанной задачи имеет вид:

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_1 + \frac{x}{l}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (\vartheta_2(-1)^n - \vartheta_1) e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (26)$$

Решение связанной задачи термоупругости для прямолинейного стержня

Найдем поле температур из уравнения (19) с начальными условиями (14) и граничными условиями (15):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \tilde{a}^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \tilde{A}, \quad (27)$$

$$\vartheta(x, 0) = 0, \quad \vartheta(0, t) = \vartheta_1, \quad \vartheta(l, t) = \vartheta_2. \quad (28)$$

Так же как и при решении несвязанной задачи, будем искать решение уравнения (27) с начальными и граничными условиями (28) в виде:

$$\vartheta(x, t) = \bar{v}(x) + v(x, t).$$

Для стационарной температуры краевая задача формулируется в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{a}^2 \bar{v}''(x) &= -\tilde{A} \\ \bar{v}(0) &= \vartheta_1, \quad \bar{v}(l) = \vartheta_2. \end{aligned}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$\bar{v}(x) = \vartheta_1 + \frac{x}{l}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \frac{\tilde{A}}{2\tilde{a}^2} x(l - x).$$

Нестационарная температура находится из решения уравнения с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \tilde{a}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(x, 0) = -\bar{v}(x), \\ v(0, t) &= 0, \quad v(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Эта задача совпадает с задачей (24) для несвязанной задачи. Её решение легко получить из (25), заменяя коэффициент a на коэффициент \tilde{a} . Коэффициенты C_n вычисляются с помощью начальных условий. Удовлетворим начальным условиям:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l} = - \left(\vartheta_1 + \frac{x}{l}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \frac{\tilde{A}}{2\tilde{a}^2} x(l - x) \right). \\ C_n &= -\frac{2}{l} \int_0^l \left(\vartheta_1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{l} x + \frac{\tilde{A}l}{2\tilde{a}^2} x - \frac{\tilde{A}}{2\tilde{a}^2} x^2 \right) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{\pi n} (\vartheta_2(-1)^n - \vartheta_1) - \frac{2}{l} \frac{\tilde{A}}{2\tilde{a}^2} \int_0^l (lx - x^2) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{\pi n} (\vartheta_2(-1)^n - \vartheta_1) + \frac{2}{l} \frac{\tilde{A}}{2\tilde{a}^2} \frac{2l^3}{\pi^3 n^3} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Решение связанной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) &= \vartheta_1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{l} x + \frac{\tilde{A}}{2\tilde{a}^2} x(l - x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n} (\vartheta_2(-1)^n - \vartheta_1) + \frac{\tilde{A}}{l\tilde{a}^2} \frac{2l^3}{\pi^3 n^3} ((-1)^n - 1) \right) e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tilde{a}^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}. \end{aligned} \quad (29)$$

Сравнение результатов решения связанный и несвязанной задач термоупругости для прямолинейного стержня

В качестве материала стержня выбран алюминий. На рисунке 1 приведено распределение температуры стержня в различные моменты времени при его растяжении. Графики слева построены по результатам решения несвязанной задачи, а графики справа – по результатам решения связанный задачи. Из графиков следует, что вблизи изолированного конца стержня при растяжении решение задачи (29) в связанный постановке прогнозирует снижение температуры по сравнению с начальным значением.

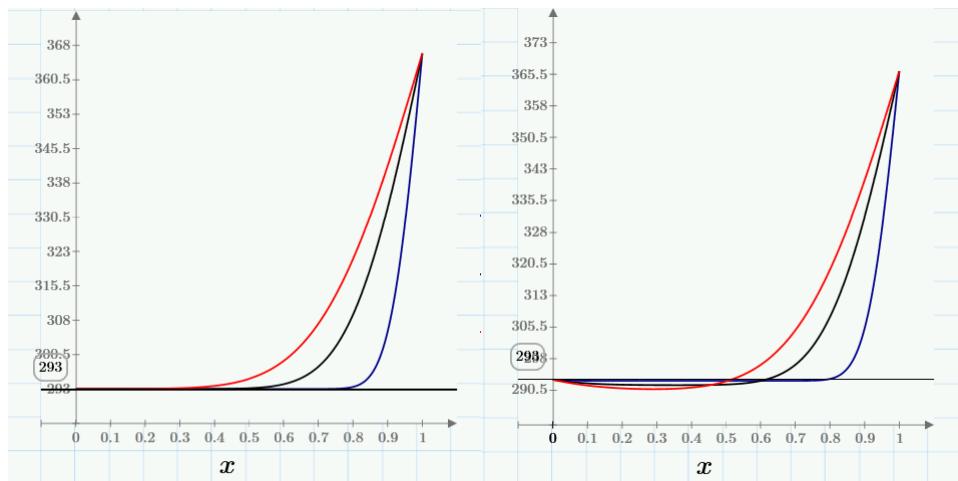


Рисунок 1 – Распределение температуры стержня по длине

На рисунке 2 приведены графики, отражающие зависимости температуры в различных сечениях стержня с течением времени, полученные по соотношениям (26) и (29).

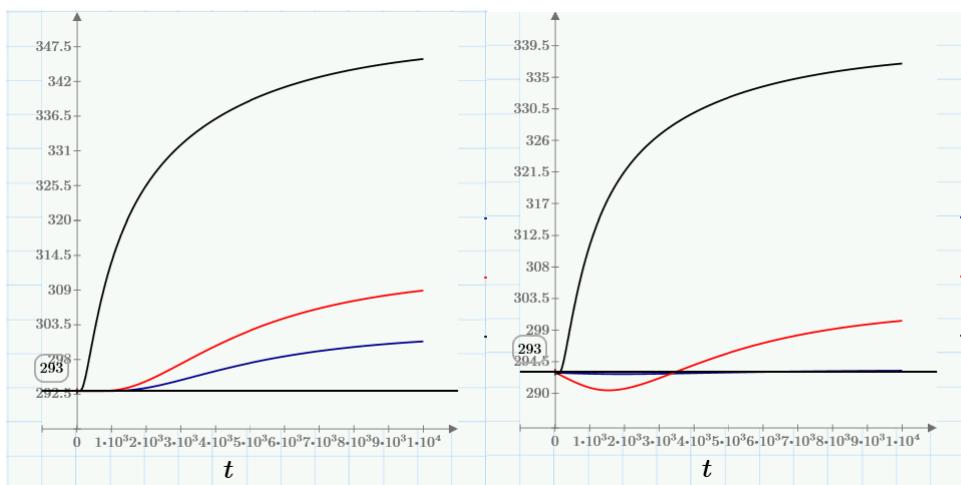


Рисунок 2 – Изменение температуры в различных сечениях стержня

В сечении, расположенном вблизи изолированного конца стержня, наблюдается понижение температуры на начальном этапе деформирования, которое в дальнейшем сменяется прогревом.