

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ
ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

«Математические модели в механике сплошной среды»

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

с направленностью (профилем)
Механика деформируемого твердого тела

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-20

Тула 2020

Разработчик методических указаний

Разработчик:

Соколова М.Ю., профессор, доцент, д.ф-м.н.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

1 Малые деформации сплошной среды

При деформации сплошной среды ее частицы смещаются из своих первоначальных положений: частица находившаяся до деформации в точке \vec{x} с координатами x_i , оказывается в результате деформации в точке \vec{x} с координатами x_i . Вектор

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{x}, \quad u_i = x_i - x_i \quad (1.1)$$

называется вектором перемещений. Задание во всем объеме, занимаемом телом, векторного поля $\vec{u}(\vec{x})$ полностью определяет деформированное состояние тела.

Рассмотрим частицу вместе с некоторой бесконечно малой ее окрестностью. Деформацию тела вблизи данной частицы мысленно разложим на три движения: 1) поступательное перемещение частицы вместе с окрестностью из точки \vec{x} в точку \vec{x} ; 2) поворот окрестности как твердого тела вокруг некоторой оси, проходящей через точку \vec{x} ; 3) собственно деформацию, т.е. такое перемещение одних частиц относительно других, при котором изменяется расстояние между частицами.

Поступательное перемещение частицы вместе с окрестностью определяется вектором $\vec{u}(\vec{x})$. Остальные два перемещения определяются производными вектора перемещений по координатам. Эти девять производных образуют несимметричный тензор – градиент перемещений $\text{grad} \vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \vec{u}$. Его симметричную часть называют *тензором малых деформаций* (тензором дисторсии)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right), \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (1.2)$$

а антисимметричную часть

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{u} - (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right), \quad \omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.3)$$

называют *тензором малых вращений*.

В окрестности материальной частицы, находившейся до деформации в точке \vec{x} , смещения равны

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x} + \delta\vec{x}) &= \vec{u}(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{u}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \cdot \delta\vec{x} = \vec{u}(\vec{x}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \delta\vec{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta\vec{x}, \\ u_i(\vec{x} + \delta\vec{x}) &= u_i(\vec{x}) + \frac{\partial u_i(\vec{x})}{\partial x_k} \delta x_k = u_i(\vec{x}) + \omega_{ik} \delta x_k + \varepsilon_{ik} \delta x_k. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Смещения частиц окрестности относительно избранной частицы, находившейся до деформации в точке \vec{x} , равны

$$\begin{aligned} \delta\vec{u}(\vec{x} + \delta\vec{x}) &= \vec{u}(\vec{x} + \delta\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \delta\vec{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta\vec{x}, \\ \delta u_i(\vec{x} + \delta\vec{x}) &= u_i(\vec{x} + \delta\vec{x}) - u_i(\vec{x}) = u_i(\vec{x}) + \omega_{ik} \delta x_k + \varepsilon_{ik} \delta x_k. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Антисимметричному тензору $\boldsymbol{\omega}$ ставится в соответствие аксиальный вектор $\vec{\phi}$, называемый вектором малых вращений, с компонентами

$$\varphi_i = -\frac{1}{2} \delta_{ijk} \omega_{jk}, \quad (1.6)$$

причем $\boldsymbol{\omega} \cdot \delta\vec{x} = \vec{\phi} \times \delta\vec{x}$. Поэтому

$$\delta\vec{u}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{\phi} \times \delta\vec{x} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta\vec{x}. \quad (1.7)$$

Предположим, что $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x}) = 0$. Если $\delta\rho$ – составляющая вектора $\delta\vec{x}$, перпендикулярная вектору $\vec{\phi}$, то $\delta\vec{u}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{\phi} \times \delta\vec{\rho}$, $\delta u_i = \varphi \delta \rho$. Это значит, что смещение каждой точки $\vec{x} + \delta\vec{x}$ окрестности пропорционально расстоянию $\delta\rho$ от этой точки до оси, параллельной вектору $\vec{\phi}$ и проходящей через точку \vec{x} . Направление этого смещения перпендикулярно как оси, так и вектору $\delta\rho$, соединяющему эту ось с данной точкой окрестности. Это означает поворот всей окрестности как целого вокруг оси вращения. Угол (в радианах) и направление этого поворота совпадают соответственно с длиной и направлением аксиального вектора $\vec{\phi}$.

Подставив в (1.6) компоненты тензора малых вращений (1.3), получим

$$\varphi_i = -\frac{1}{4} \delta_{ijk} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{4} \delta_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{1}{4} \delta_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{1}{4} \delta_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{1}{4} \delta_{ikj} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}.$$

$$\varphi_i = \frac{1}{4} \delta_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{1}{4} \delta_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \delta_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad \vec{\varphi} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \vec{u}. \quad (1.8)$$

Положим $\omega(\vec{x}) = 0$. Тогда $\delta \vec{u}(\vec{x} + \delta \vec{x}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta \vec{x}$. Представим тензор деформаций разложением по диадам его главных векторов \vec{p}_i в виде $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{(1)} \vec{p}_1 \vec{p}_1 + \varepsilon_{(2)} \vec{p}_2 \vec{p}_2 + \varepsilon_{(3)} \vec{p}_3 \vec{p}_3$, где для симметричного тензора $\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = \delta_{ij}$. Пусть $\varepsilon_{(1)} = \varepsilon \neq 0$, $\varepsilon_{(2)} = \varepsilon_{(3)} = 0$. Обозначим $\vec{p}_i \cdot \delta \vec{x} = \delta x_1$, тогда

$$\delta \vec{u}(\vec{x} + \delta \vec{x}) = \varepsilon \delta x_1 \vec{p}_1.$$

Это значит, что смещения всех точек окрестности параллельны вектору \vec{p}_1 и пропорциональны расстояниям соответствующих точек ото перпендикулярной к этому вектору плоскости $\delta x_1 = 0$. Таким образом, в этом случае происходит удлинение в направлении, параллельном \vec{p}_1 , в отношении $(1 + \varepsilon) : 1$.

В общем случае, когда все главные значения тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ отличны от нуля, происходит наложение таких удлинений в трех взаимно перпендикулярных направлениях, определяемых главными векторами тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Определим изменения расстояний в направлении произвольного единичного вектора \vec{n} , когда $\delta \vec{x} = \vec{n} \delta s$. До деформации это расстояние равно δs . В результате деформации точка $\vec{x} + \vec{n} \delta s$ сместится относительно точки \vec{x} на вектор $\delta \vec{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n} \delta s$. Составляющая этого вектора в направлении \vec{n} равна $\vec{n} \cdot \delta \vec{u} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n} \delta s$. Относительное изменение расстояний в направлении \vec{n} в результате малой деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ составляет

$$\frac{\vec{n} \cdot \delta \vec{u}}{\delta s} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{n} = \varepsilon_{ik} n_i n_k. \quad (1.9)$$

Найдем относительное изменение объема при деформации. Выделим в окрестности точки \vec{x} малый прямоугольный параллелепипед с ребрами,

параллельными главным векторам тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и равными l_1, l_2, l_3 . В результате деформации он превратится в прямоугольный параллелепипед с ребрами $l_1 = (1 + \varepsilon_{(1)})l_1, l_2 = (1 + \varepsilon_{(2)})l_2, l_3 = (1 + \varepsilon_{(3)})l_3$. Относительное изменение объема равно

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{l_1 l_2 l_3 - l_1 l_2 l_3}{l_1 l_2 l_3} = (1 + \varepsilon_{(1)})(1 + \varepsilon_{(2)})(1 + \varepsilon_{(3)}) - 1.$$

Если пренебречь квадратичными и кубичными по $\varepsilon_{(i)}$ членами, то

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} = \varepsilon_{kk}. \quad (1.10)$$

Это выражение не зависит от выбора координатной системы, являясь инвариантом тензора деформаций. Относительное изменение объема можно выразить через вектор перемещений:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \operatorname{div} \vec{u}. \quad (1.11)$$

Найдем изменение в результате деформации угла между двумя единичными векторами \vec{p} и \vec{q} , которые до деформации были взаимно ортогональны ($\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$). После деформации косинус угла между ними приблизительно равен

$$\cos \vartheta = (\vec{p} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{p}) \cdot (\vec{q} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{q}) \approx 2 \vec{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{q}.$$

Таким образом,

$$\vartheta \approx \frac{\pi}{2} - 2 \vec{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{q}. \quad (1.12)$$

Шаровая часть $\frac{1}{3}\varepsilon_{ii}\mathbf{I}$ тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ описывает изменение объема, но форма под действием шарового тензора не изменяется: все прямые, которые были ортогональны до деформации, остаются ортогональными и после нее: если $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$, то и $\vec{p} \cdot \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}\mathbf{I} \cdot \vec{q} = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$.

Девиатор тензора деформаций

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \mathbf{I}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (1.13)$$

описывает деформацию, происходящую без изменения объема, т.к. $e_{kk} = 0$, но с изменением формы: если $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$, то и $\vec{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{q} = \vec{p} \cdot \mathbf{e} \cdot \vec{q}$.

Если задано любое поле перемещений $\vec{u}(\vec{x})$, можно найти поле деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x})$. Возникает вопрос: по любому ли тензорному полю $\boldsymbol{\varepsilon}(\vec{x})$ можно восстановить векторное поле $\vec{u}(\vec{x})$, или всякое ли тензорное поле является деформацией некоторого векторного поля? Выведем условия, которому должно удовлетворять тензорное поле, чтобы быть деформацией некоторого векторного поля.

Рассмотрим $\text{rot } \boldsymbol{\varepsilon}$. По определению

$$(\text{rot } \boldsymbol{\varepsilon})_{ij} = \delta_{ikl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k}. \quad (1.14)$$

Выразим компоненты этого псевдотензора через производные вектора перемещений:

$$\delta_{ikl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \delta_{ikl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{1}{2} \delta_{ikl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Второе слагаемое равно нулю, т.к. представляет собой свертку симметричного тензора $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_l \partial x_k}$ и антисимметричного тензора

$\delta_{ikl} = -\delta_{ilk}$. Заметим, что из тензорного анализа известно, что

$$\frac{1}{2} \delta_{ikl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} (\text{rot grad } \vec{u})_{ij} = 0. \quad (1.15)$$

Запишем (1.14) в виде

$$(\text{rot } \boldsymbol{\varepsilon})_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\delta_{ikl} \partial u_l / \partial x_k)}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\text{rot } \vec{u})_i}{\partial x_j}, \quad \text{rot } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\text{rot } \vec{u})}{\partial \vec{x}}. \quad (1.16)$$

С другой стороны, $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} = \vec{\varphi}$ (см. (1.8)), поэтому получаем

$$(\mathbf{rot} \boldsymbol{\varepsilon})_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}, \quad \mathbf{rot} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{x}}. \quad (1.17)$$

Из (1.17) следует, что $(\mathbf{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T = \mathbf{grad} \vec{\phi}$, поэтому в силу (1.15) $\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T = \mathbf{Ink} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{rot}(\mathbf{grad} \vec{\phi}) = 0$. Дифференциальная операция взятия ротора от ротора тензора называется несовместностью и обозначается \mathbf{Ink} . Окончательно получаем

$$\mathbf{Ink} \boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad \delta_{ikm} \delta_{jnl} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ml}}{\partial x_k \partial x_n} = 0. \quad (1.18)$$

Таким образом, доказано, что если тензорное поле является деформацией некоторого векторного поля, то его несовместность равна нулю. Уравнения (1.18) называются *уравнениями совместности Сен-Венана*.

Когда тензор деформаций зависит только от одной координаты, например x_3 , из (1.18) следует, что

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3^2} = 0, \quad (1.19)$$

а остальные три уравнения совместности удовлетворяются тождественно. Из уравнений (1.19) следует, что $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ линейно зависят от x_3 :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} x_3 \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \quad A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}, \quad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}). \quad (1.20)$$

К соотношениям (1.20) сводятся все уравнения совместности при зависимости тензора деформаций только от одной координаты.

2 Тензор напряжений

При деформировании кристалла возникают силы, стремящиеся восстановить первоначальную конфигурацию. Как показывает теория кристаллической решетки, эти силы относятся к близкодействующим: эффективный радиус их действия не превышает нескольких постоянных решетки. Элементарные объемы, используемые в теории сплошных сред, велики по сравнению с элементарными ячейками кристалла; поэтому следует считать, что сила, действующая вследствие деформации на любой мысленно

выделенный в кристалле объем, передается только через поверхность, ограничивающую этот объем. Тогда напряженное состояние в каждой точке кристалла характеризуются совокупностью сил $\vec{P}dS$, действующих на всевозможные проходящие через эту точку площадки с единичным вектором внешней нормали \vec{n} и площадью dS (вектор \vec{P} имеет размерность напряжения: сила на площадь).

Таким образом, напряженное состояние в точке определяется функцией $\vec{P}(\vec{n})$ или, если ввести обозначения $\vec{F} = \vec{P}dS$, $\vec{N} = \vec{n}dS$, функцией $\vec{F}(\vec{N})$. Докажем, что эта функция линейна. Равенство $\vec{F}(\lambda\vec{N}) = \lambda\vec{F}(\vec{N})$, где λ – произвольное, но не слишком большое вещественное число, следует непосредственно из определения векторов \vec{F} и \vec{N} . Кроме того, справедливо равенство $\vec{F}(\Sigma\vec{N}_s) = \Sigma\vec{F}(\vec{N}_s)$, так как суммарная сила, действующая на площадку, не зависит от того, плоская или ребристая поверхность у этой площадки.

Так как вектор \vec{F} – линейная функция вектора \vec{N} , существует такой тензор второго ранга σ , не зависящий от \vec{N} , что $\vec{F} = \sigma \cdot \vec{N}$ или

$$\vec{P} = \sigma \cdot \vec{n} \quad \text{и} \quad P_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (2.1)$$

Тензор σ называется *тензором напряжений*; вполне определяя функцию $\vec{P}(\vec{n})$, он исчерпывающе характеризует напряженное состояние в точке. Чтобы его найти, достаточно измерить силы $\vec{P}^{(k)}$, действующие на три площадки с некомпланарными нормалями $\vec{n}^{(k)}$; тогда компоненты σ_{ij} являются решением системы девяти линейных уравнений

$$n_j^{(k)} \sigma_{ij} = P_i^{(k)}. \quad (1.2)$$

Пусть нормали к площадкам параллельны ортам: $\vec{n}^{(k)} = \vec{e}_k$. Тогда $n_j^{(k)} = \delta_{jk}$, так что система (1.2) принимает вид

$$\sigma_{ij} = P_i^{(k)}. \quad (1.3)$$

Таким образом, σ_{ij} – это i -ая компонента силы, приложенной к единичной площадке, внешняя нормаль к которой направлена по оси X_k .

Так как сила, действующая на 1 см² площадки с внешней нормалью \vec{n} , равна $\vec{P} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$, нормальная компонента этой силы $\vec{n} \cdot \vec{P} = \vec{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_{ik} n_i n_k$, а полная касательная (лежащая в плоскости площадки) составляющая $\vec{P} - \vec{n} \vec{n} \cdot \vec{P} = (\mathbf{I} - \vec{n} \vec{n}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$. Касательное (сдвиговое) напряжение в заданном направлении \vec{l} равно $\vec{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_{ik} l_i n_k$; единичный вектор \vec{l} лежит в плоскости площадки и, следовательно, перпендикулярен вектору \vec{n} .

Мысленно выделим в теле некоторый объем V , ограниченный поверхностью S . Если на каждый элемент поверхности dS действует сила $\vec{P} dS = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dS$, то на весь объем действует сила

$$\vec{F} = \iint_S \vec{P} dS = \iint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dS, \quad F_i = \iint_S P_i dS = \iint_S \sigma_{ik} n_k dS. \quad (2.4)$$

Интеграл по замкнутой поверхности, согласно теореме Остроградского-Гаусса, можно преобразовать в интеграл по ограничивающему этой поверхностью объему:

$$\vec{F} = \iint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^T dV, \quad F_i = \iint_S \sigma_{ik} n_k dS = \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV. \quad (2.5)$$

С другой стороны, по второму закону Ньютона

$$\vec{F} = \iiint_V \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} dV, \quad F_i = \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV. \quad (2.6)$$

Сравнивая (2.6) с (2.5), получим

$$\iiint_V \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^T dV = \iiint_V \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} dV, \quad \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \iiint_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV.$$

Так как это равенство справедливо при любом выборе объема V , должны быть равны подынтегральные выражения

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^T = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Это уравнения движения упругого тела – так называемые уравнения *эластодинамики*, или уравнения Коши. Уравнения равновесия упругого тела – уравнения *эластостатики*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (2.8)$$

Если на тело действует объемная сила \vec{f} (размерность этого вектора – сила/объем), она должна быть прибавлена к левым частям уравнений (2.7) и (2.8). Например, уравнения Коши при наличии объемных сил принимают вид

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (2.9)$$

Момент сил, действующих на мысленно выделенный объем V с поверхностью S с учетом объемных сил равен

$$\vec{M} = \oint_S \vec{r} \times \vec{P} dS + \iiint_V \vec{r} \times \vec{f} dV, \quad M_i = \oint_S \delta_{ijk} x_j P_k dS + \iiint_V \delta_{ijk} x_j f_k dV. \quad (2.10)$$

Выразим поверхностные усилия P_k через тензор напряжений и преобразуем поверхностный интеграл в объемный:

$$\oint_S x_j P_k dS = \oint_S x_j \sigma_{kl} n_l dS = \iiint_V \frac{\partial(x_j \sigma_{kl})}{\partial x_l} dV.$$

Заметим, что $\frac{\partial(x_j \sigma_{kl})}{\partial x_l} = x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} + \sigma_{kl} \frac{\partial x_j}{\partial x_l}$, причем $\frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \delta_{jl}$, так что

$\sigma_{kl} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \sigma_{kj}$. Соотношения (2.10) можно записать в виде

$$M_i = \iiint_V \delta_{ijk} x_j \left(\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} + f_k \right) dV + \iiint_V \delta_{ijk} \sigma_{kj} dV. \quad (2.11)$$

В подынтегральном выражении первого интеграла сумма, заключенная в скобки, равна силе, действующей на единицу объема тела (2.9), а все подынтегральное выражение – ее моменту. Таким образом, все действие моментов поверхностных усилий и объемных сил на выделенный объем сводится к первому интегралу, а второй должен равняться нулю. Ввиду

произвольности объема V отсюда следует, что обращается в ноль и подынтегральное выражение

$$\delta_{ijk}\sigma_{kj} = 0. \quad (2.12)$$

Эти три равенства дают условия симметричности тензора напряжений:

$$\delta_{1jk}\sigma_{kj} = \sigma_{32} - \sigma_{23} = 0, \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0, \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0.$$

3 Обобщенный закон Гука

Подсчитаем работу внешних усилий \vec{P} , приложенных к поверхности S упругого тела, объем которого V . Если под действием этих усилий точки поверхности испытывают малые смещения $\delta\vec{u}$, то работа

$$\delta A = \iint_S \delta\vec{u} \cdot \vec{P} dS = \iint_S \delta u_i P_i dS.$$

Так как $\vec{P} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}$, где \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности S , то

$$\delta A = \iint_S \delta\vec{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \delta u_i \sigma_{ij} n_j dS.$$

Преобразуем поверхностный интеграл в объемный с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

$$\delta A = \iiint_V \mathbf{div}(\delta\vec{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i \sigma_{ij}) dV.$$

По правилу дифференцирования произведения

$$\delta A = \iiint_V \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV + \iiint_V \delta u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV. \quad (3.1)$$

Пространственные производные малых перемещений $\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}$ равны

малым дисторсиям $\delta\varepsilon_{ij} + \delta\omega_{ij}$, но так как свертка антисимметричного тензора $\delta\omega_{ij}$ с симметричным тензором σ_{ij} – тождественный ноль, первое подынтегральное выражение из (3.1) сводится к $\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$.

По уравнениям Коши (2.7) $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = \rho\ddot{u}_i$, а δu_i можно рассматривать как $\dot{u}_i\delta t$, где δt – время, в течение которого происходят перемещения δu_i .

Далее, $\rho\ddot{u}_i\dot{u}_i\delta t = \frac{1}{2}\rho\frac{\partial}{\partial t}(\dot{u}_i\dot{u}_i)\delta t$, но это – изменение кинетической энергии единицы объема за время δt (в приближении теории малых деформаций плотность ρ в процессе деформирования остается постоянной). Тогда второй интеграл из (3.1) оказывается изменением кинетической энергии K упругого тела. Таким образом, работа внешних сил

$$\delta A = \iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV + \delta K,$$

так что часть работы, затрачиваемая на то, чтобы сообщить единице объема тела малую деформацию $\delta\varepsilon_{ij}$, оказывается равной

$$\delta R = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}. \quad (3.2)$$

Упругие (точнее – линейно-упругие) тела характеризуются тем, что напряжения в них пропорциональны деформациям. В применении кристаллам это означает, что тензор напряжений линейно зависит от тензора деформаций, и эта линейная зависимость

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.3)$$

определяется материальным тензором \mathbf{C} ; он называется *тензором коэффициентов упругости* или *коэффициентов жесткости* и выражается в $\text{кгс}/\text{см}^2$, $\text{дин}/\text{см}^2$ или $\text{Н}/\text{м}^2$.

Имеют место и обратные соотношения

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.4)$$

в которых материальный тензор \mathbf{A} называют *тензором коэффициентов упругой податливости*. Его внутренняя симметрия совпадает с симметрией тензора \mathbf{C} , размерность коэффициентов податливости $\text{см}^2/\text{дин}$, $\text{см}^2/\text{кгс}$ или $\text{м}^2/\text{Н}$.

Чтобы найти работу, необходимую для конечного изменения деформации единицы объема анизотропного упругого тела от значения $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$ до значения $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$, нужно проинтегрировать выражение (3.2) с учетом (3.3):

$$R = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij}.$$

Этот интеграл в общем случае зависит от пути интегрирования. Условием независимости интеграла от пути интегрирования является существование такой функции $W(\boldsymbol{\varepsilon})$, чтобы

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (3.5)$$

Тогда работа по упругому деформированию единицы объема будет равна

$$R = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}^{\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} = W(\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}) - W(\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}),$$

так что функция $W(\boldsymbol{\varepsilon})$ окажется плотностью энергии упругой деформации.

При естественном предположении $W(0) = 0$ она равна

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.6)$$

Из (3.5) следует, что

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}, \quad \mathbf{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.7)$$

а это означает, что $C_{ijkl} = C_{klij}$. Учитывая внутреннюю симметрию тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$), получаем, что если выполняется соотношение (3.4), то внутренняя симметрия тензора \mathbf{C} равна:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}. \quad (3.8)$$

В формулах (3.3), (3.6) и (3.7) удобно заменить пары индексов ij и kl греческими индексами λ и μ , принимающими значения 1,2,3,4,5,6. Правила перехода можно задать таблицей 1:

Таблица 1 – Правила перехода к двухиндексной записи

ij	11	22	33	23	31	12
λ	1	2	3	4	5	6

В данной работе принято, что для тензора деформаций $\varepsilon_\lambda = \begin{cases} \varepsilon_{ij}, (ij \leftrightarrow \lambda = 1,2,3) \\ 2\varepsilon_{ij}, (ij \leftrightarrow \lambda = 4,5,6) \end{cases}$ и обратно $\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_\lambda}{2 - \delta_{ij}}$. Для тензора напряжений $\sigma^\lambda = \sigma_{ij}, (ij \leftrightarrow \lambda = 1,2,3,4,5,6)$. При этом свертка тензоров напряжений и деформаций записывается в виде $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma^\lambda\varepsilon_\lambda$.

Для компонент тензора \mathbf{C} пересчет коэффициентов проводится по формуле $C^{\lambda\mu} = C_{ijkl} (ij \leftrightarrow \lambda = 1, \dots, 6; kl \leftrightarrow \mu = 1, \dots, 6)$. Для тензора податливости \mathbf{A} правило пересчета коэффициентов имеет вид:

$$A_{\lambda\mu} = \begin{cases} A_{ijkl} (ij \leftrightarrow \lambda = 1,2,3; kl \leftrightarrow \mu = 1,2,3) \\ 2A_{ijkl} (ij \leftrightarrow \lambda = 1,2,3; kl \leftrightarrow \mu = 4,5,6) \\ A_{ijkl} (ij \leftrightarrow \lambda = 4,5,6; kl \leftrightarrow \mu = 1,2,3) \\ 4A_{ijkl} (ij \leftrightarrow \lambda = 4,5,6; kl \leftrightarrow \mu = 4,5,6) \end{cases} \text{ или } A_{ijkl} = \frac{A_{\lambda\mu}}{(2 - \delta_{ij})(2 - \delta_{kl})}.$$

После перехода к форме записи с индексами λ и μ , меняющимися от 1 до 6, соотношения (3.3), (3.4), (3.6) и (3.7) примут вид соответственно

$$\sigma_\lambda = C_{\lambda\mu}\varepsilon_\mu, \quad (3.3')$$

$$\varepsilon_\lambda = A_{\lambda\mu}\sigma_\mu, \quad (3.4')$$

$$W = \frac{1}{2}C_{\lambda\mu}\varepsilon_\lambda\varepsilon_\mu, \quad (3.6')$$

$$C_{\lambda\mu} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_\lambda \partial \varepsilon_\mu}. \quad (3.7')$$

Соотношения (3.3) и (3.4) называют *обобщенным законом Гука для анизотропных сред*. Если надо учесть и температурное расширение кристаллов, их дополняют температурными членами.

При однородном изменении температуры на Θ градусов кристалл, свободный от внешних нагрузок, испытывает температурную деформацию

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij}\Theta, \quad \varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda\Theta;$$

а тензор α называется *тензором коэффициентов теплового расширения*, он симметричен, его размерность K^{-1} .

В общем случае, когда на кристалл действуют и механические напряжения, и изменения температуры, тензор малых деформаций слагается из частей, обусловленных каждым из этих воздействий в отдельности:

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{kl} + \alpha_{ij}\Theta, \quad \varepsilon_\lambda = A_{\lambda\mu}\sigma_\mu + \alpha_\lambda\Theta. \quad (3.9)$$

Тогда температурные члены появляются и в выражениях для напряжений

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\Theta, \quad \sigma_\lambda = C_{\lambda\mu}\varepsilon_\mu - \beta_\mu\Theta, \quad (3.10)$$

а тензор β называется *тензором коэффициентов термоупругости* (тензором температурных напряжений). Он, как и α , симметричен и имеет размерность N/m^2K .

Законы термоупругости (3.9), (3.10) называют *соотношениями Дюгамеля-Неймана*. Установим связь между материальными тензорами, входящими в эти соотношения. Подставим в (3.10) деформации, выраженные из (3.9)

$$\sigma_\lambda = C_{\lambda\mu}A_{\mu\nu}\sigma_\nu - (\beta_\mu - C_{\lambda\mu}\alpha_\mu)\Theta.$$

Так как это тождество должно удовлетворяться при произвольных значениях напряжений σ_λ и температуре Θ , из него следуют искомые соотношения

$$C_{\lambda\mu}A_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\nu}, \quad C_{ijkl}A_{klmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}), \quad (3.11)$$

$$\beta_\mu = C_{\lambda\mu} \alpha_\mu, \quad \beta_{ij} = C_{ijkl} \alpha_{kl}. \quad (3.12)$$

Заменим в законе Гука (3.3) (но не (3.4)!) тензор малых деформаций на тензор-градиент перемещений, поскольку $C_{imjn}\omega_{jn}=0$. Тогда можно записать

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}}. \quad (3.13)$$

Подставив (3.13) в (2.7), получим уравнения движения упругого тела (уравнения элатодинамики)

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \mathbf{C} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{grad} \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (3.14)$$

а подставив их в (2.8), получим уравнения упругого равновесия (уравнения эластостатики)

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} = 0, \quad \mathbf{C} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{grad} \vec{u} = 0. \quad (3.15)$$

Это система трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с тремя неизвестными $u_k(\vec{x})$. Ею удобно пользоваться для решения задач теории упругости в тех случаях, когда граничные условия заданы в перемещениях. При задании граничных условий в напряжениях удобнее записать уравнения теории упругости в такой форме, чтобы неизвестными были компоненты тензора напряжений. Они должны удовлетворять уравнениям упругого равновесия (2.8), а полученные из них с помощью закона Гука компоненты тензора деформаций – уравнениям совместности Сен-Венана (1.18). Таким образом, приходим к системе девяти дифференциальных уравнений относительно шести неизвестных функций $\sigma_{ij}(\vec{x})$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (3.16)$$

$$\operatorname{Ink}(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad \delta_{ikn} \delta_{jlm} A_{mnpq} \frac{\partial^2 \sigma_{pq}}{\partial x_k \partial x_l} = 0. \quad (3.17)$$

с тремя граничными условиями

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{P} \quad \text{и} \quad \sigma_{ij} n_j = P_i, \quad (3.18)$$

где \vec{P} – векторная функция координат, заданная на всей поверхности упругого тела.

Уравнения (3.17) называются обобщенными на случай анизотропного тела *уравнениями Бельтрами-Митчелла*. Можно доказать, что система уравнений (3.16), (3.17) всегда имеет решение и притом единственное.

4 Симметрия упругих свойств кристаллов

В параграфе 3 введены материальные тензоры C , A , α и β , характеризующие упругие свойства, тепловое расширение и термоупругость кристаллов. Тензоры α и β – симметричные тензоры второго ранга. В главных осях анизотропии в зависимости от класса симметрии кристалла эти тензоры могут иметь три различных главных значения, два различных главных значения или одно главное значение. Соответствующие матрицы компонент тензора α представлены ниже:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Отметим, что некоторые материалы (например, кальцит, этилендиамининаррат и др.) могут иметь некоторые главные значения тензора коэффициентов теплового расширения отрицательными. Тогда в таких кристаллах существуют направления, в которых линейные размеры кристалла при повышении температуры не увеличиваются, а уменьшаются. Существуют и направления, в которых тепловое расширение равно нулю. Например, у кальцита это направление составляет угол $64^{\circ}43'$ с главной осью симметрии X_3 .

Общий вид тензоров коэффициентов упругости и упругой податливости, инвариантных относительно возможных кристаллографических и предельных групп, приведен в таблице 2.

Таблица 2 – Структура материальных тензоров четвертого ранга
для различных кристаллических классов

Классы	$C_{\lambda\mu}$ и $A_{\lambda\mu}$	Классы	$C_{\lambda\mu}$ и $A_{\lambda\mu}$
1, l 21 компонента, 18 инвариантов (триклиинный)	$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & \text{sym} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & C_{55} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix}$	2, m, 2/m (2 X_2 , $m\perp X_2$) 13 компонент, 12 инвариантов (моноclinиний)	$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ & & \text{sym} & C_{44} & 0 & C_{46} \\ & & & C_{55} & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$
2, m, 2/m (2 X_3 , $m\perp X_3$) 13 компонент, 12 инвариантов (моноclinиний)	$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & \text{sym} & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & C_{55} & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$	222, mm2, mmmm 9 компонент (ромбический)	$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym} & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & C_{55} & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$
3, $\bar{3}$ 7 компонент, 6 инвариантов $C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$ $A_{66} = 2(A_{11} - A_{12})$ (тригональный)	$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & -C_{25} & 0 \\ C_{11} & C_{13} & -C_{14} & C_{25} & 0 & 0 \\ C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym} & C_{44} & 0 & C_{25} \\ & & & C_{44} & C_{14} & C_{66} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & -A_{25} & 0 \\ A_{11} & A_{13} & -A_{14} & A_{25} & 0 & 0 \\ A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym} & A_{44} & 0 & 2A_{25} \\ & & & A_{44} & 2A_{14} & A_{66} \end{pmatrix}$	32, 3m, $\bar{3}m$ 6 компонент $C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$ $A_{66} = 2(A_{11} - A_{12})$ (тригональный)	$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 & 0 \\ C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym} & C_{44} & 0 & C_{14} \\ & & & C_{44} & C_{14} & C_{66} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ A_{11} & A_{13} & -A_{14} & 0 & 0 & 0 \\ A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym} & A_{44} & 0 & 0 \\ & & & A_{44} & 2A_{14} & A_{66} \end{pmatrix}$
4, $\bar{4}$, 4/m 7 компонент, 6 инвариантов (тетрагональный)	$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & -C_{16} \\ C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym} & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$		
422, 4mm, $\bar{4}2m$, 4/m mm 6 компонент (тетрагональный)	$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym} & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$	23, m3, 432, 43m, m3m 3 компоненты (кубический)	$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym} & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$
$\bar{6}, 6, 6/m, 622, 6mt$, $6m2, 6/mmm, \infty, \infty/m$ $\infty 2, \infty m, \infty/mm$ 5 компонент (гексагональный)	$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{sym} & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$ $C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$	$\infty\infty, \infty\infty m$ 2 компоненты (изотропный)	$C_{44} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$

Тензоры **C** и **A** можно разложить на неприводимые части. Эти части выражаются через неприводимые тензоры с помощью изотропных тензоров Кронекера и Леви-Чивита. К неприводимым тензорам второго ранга относят девиаторы:

$$\mathbf{D}_1 = -a\vec{e}_1\vec{e}_1 - b\vec{e}_2\vec{e}_2 + (a+b)\vec{e}_3\vec{e}_3, \quad \mathbf{D}_2 = -a\vec{e}_1\vec{e}_1 + a\vec{e}_2\vec{e}_2, \\ \mathbf{D}_3 = -a\vec{e}_1\vec{e}_1 - a\vec{e}_2\vec{e}_2 + 2a\vec{e}_3\vec{e}_3. \quad (4.2)$$

К неприводимым тензорам четвертого ранга относят ноноры:

$$\mathbf{N}_1 = (b+c)\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_1 - c(\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_1\vec{e}_1) - b(\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_1) + \\ +(d+e)(\vec{e}_1\vec{e}_1(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2) + (\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2)\vec{e}_1\vec{e}_1) - g(\vec{e}_1\vec{e}_1(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1)\vec{e}_1\vec{e}_1) - \\ - h(\vec{e}_1\vec{e}_1(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1)\vec{e}_1\vec{e}_1) + (c+a)\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_2 - a(\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_2\vec{e}_2) - \\ - d(\vec{e}_2\vec{e}_2(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2) + (\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2)\vec{e}_2\vec{e}_2) + (f+g)(\vec{e}_2\vec{e}_2(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1)\vec{e}_2\vec{e}_2) - \\ - k(\vec{e}_2\vec{e}_2(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1)\vec{e}_2\vec{e}_2) + (a+b)\vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_3 - e(\vec{e}_3\vec{e}_3(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2) + \\ + (\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2)\vec{e}_3\vec{e}_3) - f(\vec{e}_3\vec{e}_3(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1)\vec{e}_3\vec{e}_3) + \\ + (h+k)(\vec{e}_3\vec{e}_3(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1)\vec{e}_3\vec{e}_3),$$

$$\mathbf{N}_2 = (b+c)\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_1 - c(\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_1\vec{e}_1) - b(\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_1) - \\ - g(\vec{e}_1\vec{e}_1(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1)\vec{e}_1\vec{e}_1) + (c+a)\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_2 - a(\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_2\vec{e}_2) + \\ + (f+g)(\vec{e}_2\vec{e}_2(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1)\vec{e}_2\vec{e}_2) + (a+b)\vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_3 - \\ - f(\vec{e}_3\vec{e}_3(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1)\vec{e}_3\vec{e}_3), \quad (4.3)$$

$$\mathbf{N}_3 = (d+e)(\vec{e}_1\vec{e}_1(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2) + (\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2)\vec{e}_1\vec{e}_1) - h(\vec{e}_1\vec{e}_1(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1)\vec{e}_1\vec{e}_1) - \\ - d(\vec{e}_2\vec{e}_2(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2) + (\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2)\vec{e}_2\vec{e}_2) - k(\vec{e}_2\vec{e}_2(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1)\vec{e}_2\vec{e}_2) - \\ - e(\vec{e}_3\vec{e}_3(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2) + (\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2)\vec{e}_3\vec{e}_3) + (h+k)(\vec{e}_3\vec{e}_3(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1)\vec{e}_3\vec{e}_3),$$

$$\mathbf{N}_4 = -h(\vec{e}_1\vec{e}_1(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1)\vec{e}_1\vec{e}_1) + h(\vec{e}_2\vec{e}_2(\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_1)\vec{e}_2\vec{e}_2), \\ \mathbf{N}_5 = -a\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_1 + a(\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_1) + a\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_2 - a(\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_2\vec{e}_2), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{N}_6 = -g(\vec{e}_1\vec{e}_1(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1)\vec{e}_1\vec{e}_1) + g(\vec{e}_2\vec{e}_2(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + (\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1)\vec{e}_2\vec{e}_2),$$

$$\mathbf{N}_7 = -3c\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_1 - c(\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_1\vec{e}_1) + 4c(\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_1) - \\ - 3c\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_2 + 4c(\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_2\vec{e}_2) - 8c\vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_3,$$

$$\mathbf{N}_8 = 2a\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_1 - a(\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_2 + \vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_1\vec{e}_1) - a(\vec{e}_1\vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_1) + \\ + 2a\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_2 - a(\vec{e}_2\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_2\vec{e}_2) + 2a\vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_3\vec{e}_3. \quad (4.5)$$

Разложение тензоров \mathbf{C} и \mathbf{A} проведем в два этапа. На первом этапе выделим из них симметричные по всем индексам части $\mathbf{C}^{(4)}$ и $\mathbf{A}^{(4)}$, оставшиеся части $\mathbf{C}^{(22)}$ и $\mathbf{A}^{(22)}$ обращаются в ноль при симметрировании по всем индексам:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(4)} + \mathbf{A}^{(22)}, \quad A_{ijkl}^{(4)} = A_{(ijkl)}, \quad A_{ijkl}^{(22)} = A_{ijkl} - A_{(ijkl)}. \quad (4.6)$$

В соотношениях (4.6) по индексам в скобках производится симметрирование. Соотношения для тензора \mathbf{C} аналогичны (4.6). Пользуясь методами теории представления групп, можно показать, что тензор $\mathbf{A}^{(4)}$ разлагается на скалярную, девиаторную и нонорную части, а $\mathbf{A}^{(22)}$ – на скалярную и девиаторную части:

$$A_{ijkl}^{(4)} = I^{(4)}\delta_{(ij}\delta_{kl)} + D_{(ij}^{(4)}\delta_{kl)} + N_{ijkl}^{(4)}, \quad (4.7)$$

$$A_{ijkl}^{(22)} = I^{(22)}(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{(ij}\delta_{kl)}) + \left[\frac{1}{2} \left(D_{ij}^{(22)}\delta_{kl} + D_{kl}^{(22)}\delta_{ij} \right) - D_{(ij}^{(22)}\delta_{kl)} \right]. \quad (4.8)$$

Свертывая правые и левые части этих равенств, найдем выражения неприводимых тензоров через тензоры $\mathbf{A}^{(4)}$ и $\mathbf{A}^{(22)}$:

$$I^{(4)} = \frac{1}{5}A_{iikk}^{(4)}, \quad D_{ij}^{(4)} = \frac{2}{7}(3A_{iikk}^{(4)} - 5I^{(4)}\delta_{ij}),$$

$$N_{ijkl}^{(4)} = A_{ijkl}^{(4)} - I^{(4)}\delta_{(ij}\delta_{kl)} + D_{(ij}^{(4)}\delta_{kl)};$$

$$I^{(22)} = \frac{1}{4}A_{iikk}^{(22)}, \quad D_{ij}^{(22)} = 3A_{iikk}^{(22)} - 4I^{(22)}\delta_{ij}.$$

Для кристаллов тех классов, у которых неприводимые девиаторы и ноноры кратны единичным, разложения (4.7) и (4.8) существенно упрощаются и принимают вид

$$A_{ijkl} = A_I^{(4)}\delta_{(ij}\delta_{kl)} + A_D^{(4)}D_{(ij}^0\delta_{kl)} + A_N^{(4)}N_{ijkl}^0 + A_I^{(22)}(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{(ij}\delta_{kl)}) + \\ + A_D^{(22)} \left[\frac{1}{2} \left(D_{ij}^0\delta_{kl} + D_{kl}^0\delta_{ij} \right) - D_{(ij}^0\delta_{kl)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left(A_I^{(4)} + 2A_I^{(22)} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{3} \left(A_I^{(4)} - A_I^{(22)} \right) \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) A_D^{(4)} + \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(A_D^{(4)} + 2A_D^{(22)} \right) \left(D_{ij}^0 \delta_{kl} + D_{kl}^0 \delta_{ij} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(A_D^{(4)} - A_D^{(22)} \right) \left(D_{ik}^0 \delta_{jl} + D_{jl}^0 \delta_{ik} + D_{il}^0 \delta_{jk} + D_{jk}^0 \delta_{il} \right) + A_N^{(4)} N_{ijkl}^0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Здесь коэффициенты $A_I^{(4)} \equiv I^{(4)}$ и $A_I^{(22)} \equiv I^{(22)}$ введены для единообразия записи.

Согласно теореме Германа кристаллы гексагональной системы трансверсально изотропны по упругим свойствам, составляя вместе с текстурами класс упругой симметрии ∞ / mm . Все направления, составляющие с главной осью симметрии один и тот же угол, по упругим свойствам одинаковы, хотя у гексагональных кристаллов эти направления кристаллографически различны. Это один из многих случаев, когда симметрия свойства кристалла выше симметрии самого кристалла.

У кристаллов гексагональной системы и текстур девиаторы и ноноры кратны единичным, причем единичные девиаторы и ноноры определяются формулами

$$D_{ij}^0 = \frac{1}{2} \left(3k_i k_j - \delta_{ij} \right), \tag{4.10}$$

$$N_{ijlm}^0 = \frac{1}{8} \left(35k_i k_j k_l k_m - 30k_{(i} k_{j)} \delta_{lm)} + 3\delta_{(ij} \delta_{lm)} \right), \tag{4.11}$$

где \vec{k} – единичный вектор главной оси симметрии; в кристаллографической системе координат $k_i = \delta_{i3}$, а формулы (4.10) и (4.11) переходят в формулы для $\mathbf{D}^0[\infty / mm] = \mathbf{D}_3$ из (4.2) и $\mathbf{N}^0[\infty / mm] = \mathbf{N}_7$ из (4.5). Для этих кристаллов коэффициенты из (4.9) равны

$$\begin{aligned}
A_I^{(4)} &= \frac{1}{15} (8A_{11} + 3A_{33} + 4A_{13} + 2A_{44}), \quad A_I^{(22)} = \frac{1}{6} (-A_{11} + 3A_{12} + 4A_{13} - A_{44}), \\
A_D^{(4)} &= \frac{2}{21} (-8A_{11} + 6A_{33} + 2A_{13} + A_{44}), \quad A_D^{(22)} = \frac{1}{3} (2A_{11} - 6A_{12} + 4A_{13} - A_{44}),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$A_N^{(4)} = \frac{8}{35} (A_{11} + A_{33} - 2A_{13} - A_{44}).$$

Тензор **C** разлагается тем же образом. В формуле (4.9) в применении к тензору **C** коэффициенты естественно обозначить $C_I^{(4)}, \dots, C_D^{(22)}$. Эти коэффициенты подсчитываются по формулам (4.12), где вместо $A_{11}, A_{33}, \dots, A_{13}$ подставляются $C_{11}, C_{33}, \dots, C_{13}$, но вместо A_{44} следует подставлять $4C_{44}$.

Если коэффициенты $C_D^{(4)}, C_D^{(22)}, C_N^{(4)}$ или $A_D^{(4)}, A_D^{(22)}, A_N^{(4)}$ обратились в ноль, тензоры коэффициентов упругости и податливости оказываются изотропными тензорами.

Кристаллы кубической сингонии отличаются по симметрии упругих свойств от изотропных тел, составляя класс упругой симметрии *m3m*. Ноноры для них кратны единичному, а девиаторы обращаются в ноль. Поэтому разложение (4.9) для кубических кристаллов еще упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= A_I^{(4)} \delta_{(ij} \delta_{kl)} + A_N^{(4)} N_{ijkl}^0 + A_I^{(22)} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{(ij} \delta_{kl)}) = \\ &= \frac{1}{3} (A_I^{(4)} + 2A_I^{(22)}) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{3} (A_I^{(4)} - A_I^{(22)}) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) A_D^{(4)} + A_N^{(4)} N_{ijkl}^0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Единичный нонор кубической симметрии $\mathbf{N}^0[m3m] = \mathbf{N}_8$ имеет в кристаллофизической системе координат компоненты

$$N_{ijkl}^0 = \begin{cases} 1 & \text{при четырех равных индексах,} \\ -1/2 & \text{при двух парах равных индексов,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Коэффициенты разложения (4.13) подсчитываются по формулам

$$\begin{aligned} A_I^{(4)} &= \frac{1}{5} (3A_{11} + 2A_{12} + A_{44}), \quad A_I^{(22)} = \frac{1}{4} (4A_{12} - A_{44}), \\ A_N^{(4)} &= \frac{1}{5} (2A_{11} - 2A_{12} - A_{44}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Тензор упругости также определяется формулой (4.13), где место коэффициентов A занимают коэффициенты C ; последние подсчитываются по формулам (4.15), в которые вместо A_{11}, A_{12}, A_{44} подставляются соответственно $C_{11}, C_{12}, 4C_{44}$.

Несимметричность тензоров **C** и **A** по индексам характеризуется соответственно коэффициентами $C_I^{(22)}$ и $A_I^{(22)}$, причем из равенства нулю одного из них следует равенство нулю другого. Поскольку упругие постоянные существенно зависят от температуры, коэффициенты упругой анизотропии также зависят от температуры. Так, у каменной соли по мере повышения температуры упругая анизотропия уменьшается вплоть до температуры $690K$, при которой кристалл становится упруго-изотропным, а при дальнейшем повышении температуры знак упругой анизотропии (т.е. коэффициентов $C_I^{(22)}$ и $A_I^{(22)}$) меняется. Степень упругой анизотропии измеряется безразмерным отношением

$$A = \frac{2(A_{11} - A_{12})}{A_{44}} = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}}, \quad (4.16)$$

которое характеризует зависимость сопротивления кубического кристалла сдвиговой деформации от направления.

У изотропных и гиротропных тел тензоры упругости и податливости изотропны:

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= A_I^{(4)}\delta_{(ij}\delta_{kl)} + A_I^{(22)}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{(ij}\delta_{kl)}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(A_I^{(4)} + 2A_I^{(22)}\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{3}\left(A_I^{(4)} - A_I^{(22)}\right)\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)A_D^{(4)}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$A_I^{(4)} = A_{11}, \quad A_I^{(22)} = \frac{1}{2}(A_{11} - 3A_{12}); \quad (4.18)$$

аналогичные формулы справедливы для тензора **C**. Для изотропных тел из формул (3.11) следуют соотношения

$$(C_{11} - C_{12})(A_{11} - A_{12}) = (C_{11} + 2C_{12})(A_{11} + 2A_{12}) = C_{44}A_{44} = 1, \quad (4.19)$$

а из формул (4.16) – соотношения

$$C_{11} - C_{12} = 2C_{44}, \quad 2(A_{11} - A_{12}) = A_{44}. \quad (4.20)$$

Для характеристики упругих свойств изотропных тел наряду с коэффициентами упругости и податливости пользуются также *модулем Юнга* $E = 1/A_{44}$, *коэффициентом Пуассона* $\nu = -A_{12}/A_{11}$, *модулем объемного сжатия* $K = (C_{11} + 2C_{12})/3$, *модулем сдвига* $G = (C_{11} - C_{12})/2 = 1/A_{44}$ и *коэффициентами Ламе* $\lambda = C_{12}$ и $\mu = G$. Два независимых коэффициента полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала.

5 Простые напряженные состояния

Простыми напряженными состояниями будем считать такие напряженные состояния, при которых тензор напряжений σ линейно зависит от декартовых координат

$$\sigma = E + \mathbf{B} \cdot \vec{r}, \quad \sigma_{ij} = S_{ij} + B_{ijk} \cdot \mathbf{x}_k, \quad (5.1)$$

где E и \mathbf{B} – не зависящие от координат тензоры: E – симметричный тензор второго ранга, \mathbf{B} – тензор третьего ранга, симметричный по первым двум индексам.

Теорема о простых напряженных состояниях: Если в изотропном теле под действием некоторых усилий, приложенных к его поверхности, возникает какое-либо простое напряженное состояние, то в однородном анизотропном теле той же формы под действием тех же усилий возникает такое же напряженное состояние.

Доказательство основано на теореме о единственности решения уравнений теории упругости. Действительно, в уравнения Бельтрами-Митчелла (3.17) входят только вторые производные тензора напряжений, которые при простом напряженном состоянии все равны нулю, так что эти уравнения удовлетворяются тождественно. В уравнения упругого равновесия Коши (2.8) вообще не входят никакие характеристики материала, так что от

замены одного тела другим (той же формы и при тех же граничных условиях) эти уравнения не изменяются. Таким образом, одно и то же простое напряженное состояние оказывается решением уравнений теории упругости в напряжениях для всех возможных однородных упругих тел. В силу теоремы о единственности ни для какого из этих тел никакого другого решения существовать не может.

Рассмотрим случаи, когда поле напряжений однородно, т.е. тензор напряжений не зависит от координат. Уравнения Коши удовлетворяются при этом тождественно, поэтому достаточно проверить только выполнение граничных условий.

Всестороннее сжатие. Если на упругое тело действует гидростатическое давление p , граничные условия таковы:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = -p\vec{n}, \quad \sigma_{ij}n_j = -pn_i, \quad (5.2)$$

где \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности. Очевидное решение

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}, \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (5.3)$$

удовлетворяет всем уравнениям и граничным условиям. Таким образом, напряженное состояние совершенно не зависит от упругих характеристик тела. Деформация же

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -p\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}, \quad \varepsilon_{ij} = -pA_{ijkk} \quad (5.4)$$

от них существенно зависит. Симметричный тензор второго ранга $\hat{A}_{ij} = A_{ijkk}$ называется *тензором коэффициентов сжимаемости*. С его помощью деформация под действием гидростатического давления записывается в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -p\hat{\mathbf{A}}, \quad \varepsilon_{ij} = -p\hat{A}_{ij}, \quad \varepsilon_\lambda = -p\hat{A}_\lambda. \quad (5.5)$$

Формулы, выражающие компоненты \hat{A}_{ij} тензора $\hat{\mathbf{A}}$ через коэффициенты упругой податливости $A_{\lambda\mu}$ для всех кристаллографических классов приведены в таблице 3. Из нее видно, что влияние симметрии кристаллов на их деформацию при гидростатическом давлении таково же, как и на все их

другие свойства, описываемые тензорами второго ранга (диэлектрическая проницаемость, тепловое расширение и т.п.).

Таблица 3 – Тензор коэффициентов сжимаемости
для всех кристаллографических и предельных классов

Системы	Тензор $\hat{A}_{ij} = A_{ijkk}$		
триклинная система	$A_{11} + A_{31} + A_{12}$ $\frac{1}{2}(A_{16} + A_{26} + A_{36})$ $\frac{1}{2}(A_{15} + A_{25} + A_{35})$	$\frac{1}{2}(A_{16} + A_{26} + A_{36})$ $A_{22} + A_{12} + A_{23}$ $\frac{1}{2}(A_{14} + A_{24} + A_{34})$	$\frac{1}{2}(A_{15} + A_{25} + A_{35})$ $\frac{1}{2}(A_{14} + A_{24} + A_{34})$ $A_{33} + A_{23} + A_{31}$
моноклинная система	$A_{11} + A_{31} + A_{12}$ 0 $\frac{1}{2}(A_{15} + A_{25} + A_{35})$	0 $A_{22} + A_{12} + A_{23}$ 0	$\frac{1}{2}(A_{15} + A_{25} + A_{35})$ 0 $A_{33} + A_{23} + A_{31}$
$2\ X_2$			
$2\ X_3$	$A_{11} + A_{31} + A_{12}$ $\frac{1}{2}(A_{16} + A_{26} + A_{36})$ 0	$\frac{1}{2}(A_{16} + A_{26} + A_{36})$ $A_{22} + A_{12} + A_{23}$ 0	0 0 $A_{33} + A_{23} + A_{31}$
ромбическая система	$A_{11} + A_{31} + A_{12}$ 0 0	0 $A_{22} + A_{12} + A_{23}$ 0	0 0 $A_{33} + A_{23} + A_{31}$
тригональная, тетрагональная, гексагональная системы и текстуры	$A_{11} + A_{31} + A_{12}$ 0 0	0 $A_{11} + A_{12} + A_{31}$ 0	0 0 $A_{33} + 2A_{31}$
кубическая система и изотропные тела	$A_{11} + 2A_{12}$ 0 0	0 $A_{11} + 2A_{12}$ 0	0 0 $A_{11} + 2A_{12}$

Относительное изменение объема под действием гидростатического давления $\Delta V/V = \varepsilon_{ii} = -p\hat{A}_{ii}$ характеризуется скаляром $K^{-1} = \hat{A}_{ii} = \hat{A}_{iikk}$ – коэффициентом всестороннего растяжения. Обратная ему величина K называется модулем всестороннего растяжения. Изменение формы анизотропных тел под действием гидростатического давления характеризуется девиатором деформаций $\varepsilon_{ij} = -pR_{ij}$, пропорциональным девиатору тензора коэффициентов сжимаемости:

$$R_{ij} = A_{ij} - \frac{1}{3}K^{-1}\delta_{ij}. \quad (5.6)$$

Одноосное растяжение. Рассмотрим цилиндрический стержень произвольного поперечного сечения площади S , к торцам которого приложены растягивающие силы $S\sigma$, равномерно распределенные по поверхности торцов; боковая поверхность стержня свободна от нагрузок. Обозначим через \vec{q} единичный вектор, направленный вдоль оси стержня. Тензор напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \vec{q} \vec{q}, \quad \sigma_{ij} = \sigma q_i q_j \quad (5.7)$$

удовлетворяет граничным условиям. По закону Гука определяем деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma \mathbf{A} \cdot \vec{q} \vec{q}, \quad \varepsilon_{ij} = \sigma A_{ijkl} q_k q_l. \quad (5.8)$$

Относительное удлинение стержня $\Delta l/l = \varepsilon_{ij} q_i q_j = \sigma A_{ijkl} q_k q_l$. Его отношение к напряжению σ – обратная величина модуля Юнга E для направления \vec{q} : если ввести обозначение $\vec{q}_i \vec{q}_j = (\vec{q} \vec{q})_\lambda$, где $ij \leftrightarrow \lambda = 1, \dots, 6$, то компоненты напряжения примут вид $\sigma_\mu = (\vec{q} \vec{q})_\mu$, деформации $\varepsilon_\lambda = \sigma A_{\lambda\mu} (\vec{q} \vec{q})_\mu$, обратная величина модуля Юнга

$$E^{-1}(\vec{q}) = A_{ijkl} q_i q_j q_k q_l = \vec{q} \vec{q} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{q} \vec{q}. \quad (5.9)$$

Вычисление модуля Юнга можно упростить: если ввести обозначения $\vec{q}_i \vec{q}_j = (\vec{q} \vec{q})_\lambda$, где $ij \leftrightarrow \lambda = 1, \dots, 6$, то компоненты напряжений примут вид $\sigma_\mu = \sigma (\vec{q} \vec{q})_\lambda$, деформации $\varepsilon_\lambda = \sigma A_{\lambda\mu} (\vec{q} \vec{q})_\mu$ и, наконец, обратная величина модуля Юнга

$$E^{-1}(\vec{q}) = A_{\lambda\mu} (\vec{q} \vec{q})_\lambda (\vec{q} \vec{q})_\mu. \quad (5.10)$$

Эта формула удобнее формулы (5.9), в ней меньше слагаемых, а значения $A_{\lambda\mu}$ берутся непосредственно из экспериментальных данных. Расчетные формулы для вычисления модуля Юнга собраны в таблице 4.

Таблица 4 – Обратная величина модуля Юнга $E^{-1}(\vec{q})$

Общие формулы $E^{-1} = A_{\lambda\mu} Q_\lambda Q_\mu$, $Q_\lambda = \vec{q}_i \vec{q}_j$, $ij \leftrightarrow \lambda = 1, \dots, 6$
Триклинная система

$$\begin{aligned}
E^{-1} = & A_{11}Q_1^2 + A_{22}Q_2^2 + A_{33}Q_3^2 + (A_{44} + 2A_{23})Q_2Q_3 + \\
& +(A_{55} + 2A_{31})Q_3Q_1 + (A_{66} + 2A_{12})Q_1Q_2 + 2(A_{14} + A_{56})Q_1Q_4 + \\
& +2(A_{25} + A_{64})Q_2Q_5 + 2(A_{36} + A_{45})Q_3Q_6 + 2A_{15}Q_1Q_5 + \\
& +2A_{16}Q_1Q_6 + 2A_{26}Q_2Q_6 + 2A_{24}Q_2Q_4 + 2A_{34}Q_3Q_4 + 2A_{35}Q_3Q_5
\end{aligned}$$

Моноклинная система ($2\parallel X_2, m \perp X_2$)

$$\begin{aligned}
E^{-1} = & A_{11}Q_1^2 + A_{22}Q_2^2 + A_{33}Q_3^2 + (A_{44} + 2A_{23})Q_2Q_3 + \\
& +(A_{55} + 2A_{31})Q_3Q_1 + (A_{66} + 2A_{12})Q_1Q_2 + 2(A_{25} + A_{64})Q_2Q_5 + \\
& +2A_{15}Q_1Q_5 + 2A_{35}Q_3Q_5
\end{aligned}$$

Ромбическая система

$$\begin{aligned}
E^{-1} = & A_{11}Q_1^2 + A_{22}Q_2^2 + A_{33}Q_3^2 + (A_{44} + 2A_{23})Q_2Q_3 + \\
& +(A_{55} + 2A_{31})Q_3Q_1 + (A_{66} + 2A_{12})Q_1Q_2
\end{aligned}$$

Тетрагональная система

$$E^{-1} = A_{11}(Q_1^2 + Q_2^2) + A_{33}Q_3^2 + (A_{44} + 2A_{13})(Q_1 + Q_2)Q_3 + (A_{66} + 2A_{12})Q_1Q_2 + 2A_{16}Q_6(Q_1 - Q_2)$$

Для классов 422, 4mm, 42m, 4/mmm коэффициент $A_{16}=0$.

Тригональная и гексагональная система и текстуры

$$E^{-1} = A_{11}(1 - Q_3)^2 + A_{33}Q_3^2 + (A_{44} + 2A_{13})(1 - Q_3)Q_3 + 2A_{14}(3Q_1 - Q_2)Q_4 + 2A_{25}Q_5(3Q_2 - Q_1)$$

$$\text{Кубическая система } E^{-1} = A_{11} - (2A_{11} - 2A_{12} - A_{44})(Q_4^2 + Q_5^2 + Q_6^2)$$

$$\text{Изотропные тела } E^{-1} = A_{11}$$

Относительное изменение толщины стержня, точнее, его линейных размеров в направлении \vec{m} , перпендикулярном к направлению растяжения, равно $\Delta l(\vec{m})/l(\vec{m}) = \varepsilon_{ij}m_i m_j$. Выразим деформации через напряжения, тогда $\Delta l(\vec{m})/l(\vec{m}) = \sigma A_{ijkl}m_i m_j q_k q_l$. Отношение изменения толщины стержня к изменению его длины, взятое с обратным знаком, называется в теории упругости *коэффициентом Пуассона* и обозначается ν . Если обобщить это понятие на анизотропные тела, коэффициент Пуассона окажется функцией двух взаимно перпендикулярных направлений \vec{q} и \vec{m} :

$$\nu(\vec{q}, \vec{m}) = -\frac{\Delta l(\vec{m})/l(\vec{m})}{\Delta l(\vec{q})/l(\vec{q})} = -\frac{A_{ijkl}m_i m_j q_k q_l}{A_{nprt}q_n q_p q_r q_t} = -\frac{\vec{m} \cdot \vec{m} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{q} \vec{q}}{\vec{q} \cdot \vec{q} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{q} \vec{q}}. \quad (5.11)$$

Более удобна для вычислений форма записи:

$$\nu(\vec{q}, \vec{m}) = -\frac{A_{\lambda\mu}(\vec{m}\vec{m})_\lambda(\vec{q}\vec{q})_\mu}{A_{\rho\sigma}(\vec{q}\vec{q})_\rho(\vec{q}\vec{q})_\sigma}. \quad (5.12)$$

Можно определить коэффициент Пуассона анизотропной упругой среды и так, чтобы он зависел не от двух единичных векторов, а только от одного, если трактовать его как характеристику изменения площадей в плоскостях, перпендикулярных к направлению растяжения:

$$\nu(\vec{q}, \vec{m}) = -\frac{\Delta S(\vec{q})/S(\vec{q})}{2\Delta l(\vec{q})/l(\vec{q})}. \quad (5.13)$$

Так как $\Delta S(\vec{q})/S(\vec{q}) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (1 - \vec{q}\vec{q}) = \varepsilon_{ij}(\delta_{ij} - q_i q_j)$, а деформации подсчитываются по формуле (5.8), имеем

$$\nu(\vec{q}) = -\frac{\vec{q}\vec{q} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{I} - \vec{q}\vec{q})}{2\vec{q}\vec{q} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{q}\vec{q}} = -\frac{A_{ijkl}q_i q_j(\delta_{kl} - q_k q_l)}{2A_{nprt}q_n q_p q_r q_t}. \quad (5.14)$$

Заметив, что $(\vec{q}\vec{q} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{q}\vec{q})^{-1}$ – это модуль Юнга $E(\vec{q})$, а $\vec{q}\vec{q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \vec{q} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{q}$ – нормальная составляющая тензора коэффициентов сжимаемости $\hat{\mathbf{A}}$ в направлении \vec{q} , получаем еще одно определение коэффициента Пуассона анизотропной упругой среды:

$$\nu(\vec{q}) = \frac{1}{2} [\mathbf{I} - \vec{q} \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \vec{q} E(\vec{q})]. \quad (5.15)$$

При одноосном растяжении объем стержня изменяется (обычно увеличивается). Относительное изменение объема $\Delta V/V = \varepsilon_{ii}$ при этом равно

$$\Delta V/V = \sigma \hat{A}_{ij} q_i q_j = \sigma \vec{q} \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \vec{q}, \quad (5.16)$$

где $\hat{\mathbf{A}}$ – тензор коэффициентов сжимаемости. Сравнивая этот результат с формулой (5.15) для коэффициента Пуассона $\nu(\vec{q})$, видим, что известная формула $\Delta V/V = (1 - 2\nu)\sigma/E$, определяющая относительное изменение объема при одноосном растяжении изотропных тел, справедлива также и для анизотропных тел в форме

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1 - 2\nu(\vec{q})}{E(\vec{q})} \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.17)$$

На примере коэффициентов Пуассона $\nu(\vec{q}, \vec{m})$ и $\nu(\vec{q})$ мы еще раз убеждаемся, что одна и та же величина, характеризующая свойство изотропного тела, может обобщаться на анизотропные тела различными способами, и выбор того или иного обобщения зависит от того, какое именно свойство анизотропного тела мы хотим описать.

Сдвиг. Пусть к боковым граням прямоугольного бруска приложены касательные равномерно распределенные силы; брусок под действием этой системы сил находится в равновесии. На единицу площади приходится сила $\vec{\sigma}$. Торцы свободны от нагрузок. Напряжения в бруске называются в этом случае *сдвиговыми* или *скалывающими*; они равны

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma(\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{p}), \quad \sigma_{ij} = \sigma(p_i q_j + q_i p_j), \quad (5.18)$$

где \vec{p} и \vec{q} – единичные векторы нормалей к боковым граням. Деформации можно представить в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 2\sigma \mathbf{A} \cdot \vec{p}\vec{q}, \quad \varepsilon_{ij} = 2\sigma A_{ijkl} p_k q_l \quad (5.19)$$

(использована симметричность тензора \mathbf{A} по двум последним индексам). Особый интерес представляет сдвиговая компонента тензора деформаций $\vec{p} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \vec{q} = 2\sigma \vec{p}\vec{q} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{p}\vec{q} = 2\sigma A_{ijkl} p_i q_j p_k q_l$. Отношение силы, приходящейся на единицу площади поверхности, к удвоенной сдвиговой компоненте тензора деформаций называется *модулем сдвига* $G(\vec{p}, \vec{q})$ для пары взаимно перпендикулярных направлений \vec{p} и \vec{q} . Модуль сдвига определяется формулой

$$G^{-1}(\vec{p}, \vec{q}) = 4\vec{p}\vec{q} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{p}\vec{q} = 4A_{ijkl} p_i q_j p_k q_l. \quad (5.20)$$

Более удобна для вычислений формула

$$G^{-1}(\vec{p}, \vec{q}) = A_{\lambda\mu} (\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{p})_\lambda (\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{p})_\mu, \quad (5.21)$$

где $(\vec{p}\vec{q} + \vec{q}\vec{p})_\lambda = p_i q_j + p_j q_i$, $ij \leftrightarrow \lambda = 1, \dots, 6$.

Формулы (5.20) и (5.21) показывают, что модуль сдвига $G(\vec{p}, \vec{q})$ симметричен относительно направлений \vec{p} и \vec{q} :

$$G(\vec{p}, \vec{q}) = G(\vec{q}, \vec{p}). \quad (5.22)$$

Экспериментально реализовать равномерно распределенные касательные усилия на поверхности сколь-нибудь точно довольно трудно, но модуль сдвига, определяемый формулой (5.22), играет важную роль в теории дислокаций. Именно, если вектор \vec{n} – единичный вектор нормали к плоскости скольжения, то для дислокаций, действующих в данной системе скольжения, наиболее существенной характеристикой упругих свойств кристалла оказывается как раз модуль сдвига $G(\vec{p}, \vec{q})$.

В отличие от изотропных тел, анизотропные тела под действием скальывающих напряжений претерпевают объемное растяжение (или сжатие). Оно равно $\Delta V/V = \varepsilon_{ii} = 2\sigma A_{iikl} p_k q_l = 2\sigma \hat{A}_{kl} p_k q_l$, где \hat{A} – тензор коэффициентов сжимаемости. Так как векторы \vec{p} и \vec{q} взаимно перпендикулярны, $\delta_{kl} p_k q_l = 0$; отсюда следует, что объемное расширение под действием скальывающих напряжений определяется девиатором тензора всестороннего растяжения: $\Delta V/V = 2\sigma R_{kl} p_k q_l$.

6 Изгиб и кручение кристаллов

Рассмотрим простые напряженные состояния, в которых тензор напряжений характеризуется линейной зависимостью от координат.

Изгиб прямоугольного кристаллического бруска. Рассмотрим прямоугольный кристаллический брускок длины $2c$, ширины $2a$, толщины $2b$, к торцам которого приложены изгибающие моменты M и $-M$ соответственно. Связем с бруском специальную систему декартовых координат $OX'_1 X'_2 X'_3$, как показано на рисунке 1. Орты этой системы $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ обозначим \vec{m} , \vec{n} и \vec{q} соответственно.

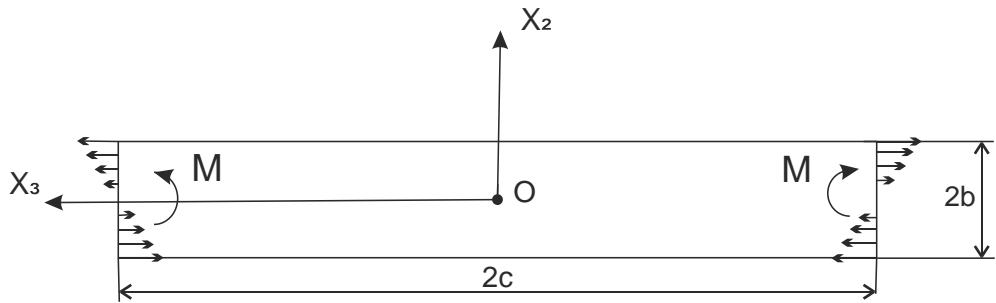


Рисунок 1 – Изгиб прямоугольного бруса

Изгибающие моменты \vec{M} и $-\vec{M}$ могут создаваться системой нагрузок, схематически изображенной на рисунке 1: к торцу $x'_3 = c$ приложены усилия $\vec{P} = kx'_2 \vec{q}$ (на единицу площади), а к торцу $x'_3 = -c$ приложены усилия $-\vec{P}$.

Изгибающий момент усилий, приложенных к торцу $x'_3 = c$,

$$\vec{M} = \int_S x'_2 \vec{n} \times \vec{P} dS = \int_{-a-b}^a \int_{-b}^b x'_2 \vec{n} \times kx'_2 \vec{q} dx'_1 dx'_2 = \frac{4}{3} ab^3 k \vec{m}; \quad (6.1)$$

отсюда находим $k = 3M / 4ab^3$ и выражаем через величину изгибающего момента M граничные условия на торцах бруска $x'_3 = \pm c$. Они равны $\sigma \cdot (\pm \vec{q}) = \pm (3M / 4ab^3) x'_2 \vec{q}$. Этим граничным условиям, а также уравнениям упругого равновесия, удовлетворяет тензор напряжений

$$\sigma = \frac{3M}{4ab^3} x'_2 \vec{q} \vec{q}; \quad (6.2)$$

в специальной системе координат не равна нулю лишь одна его компонента $\sigma'_3 = (3M / 4ab^3) x'_2$. По закону Гука компонента тензора деформаций

$$\varepsilon'_\lambda = \frac{3M}{4ab^3} A'_{\lambda 3} x'_2. \quad (6.3)$$

Штрихи здесь показывают, что данная тензорная величина отнесена не к кристаллографической, а к специальной системе координат. Так, коэффициенты $A'_{\lambda 3}$ не совпадают с табличными значениями коэффициентов податливости, если только ребра бруска не направлены по соответствующим осям кристаллофизической системы координат; они связаны с табличными

значениями коэффициентов податливости данного кристалла $A_{\mu\nu}$ соотношениями $A'_{\lambda 3} = P_{\lambda'\mu} P_{3'\nu} A_{\mu\nu}$, в которых элементы матрицы $P_{\lambda'\mu}$ определяются косинусами углов между осями специальной и кристаллофизической систем $c_{ij} = \cos(X'_i, X_j)$.

Изгиб бруска характеризуется постепенным изменением компоненты φ'_1 вектора малых вращений при продвижении вдоль бруска, т.е. в направлении оси X'_3 : изгиб $\psi = \partial\varphi'_1/\partial x'_3$. Согласно формуле (2.17) $\partial\varphi'_1/\partial x'_3 = \text{rot } \varepsilon'_{13}$. Подсчитав правую часть этого равенства, найдем

$$\psi = \frac{\partial \varepsilon'_{33}}{\partial x'_2} - \frac{\partial \varepsilon'_{23}}{\partial x'_3} = \frac{\partial \varepsilon'_3}{\partial x'_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon'_4}{\partial x'_3}. \quad (6.4)$$

Подставив сюда выражения (6.3) для компонент тензора деформаций, получим

$$\psi = \frac{3A'_{33}}{4ab^3} M. \quad (6.5)$$

Отношение $D = M/\psi$ называют *жесткостью бруска на изгиб*. Заметив, что $1/A'_{33}$ – это модуль Юнга $E(\vec{q})$ в направлении длины бруска, получим

$$D(\vec{q}) = \frac{4}{3} ab^3 E(\vec{q}). \quad (6.6)$$

Оказывается, жесткость на изгиб не зависит (при заданном направлении вектора \vec{q}) от ориентации векторов \vec{m} и \vec{n} .

В отличие от изотропных тел, анизотропные тела при изгибе закручиваются. Закручивание стержня естественно характеризовать изменением компоненты φ'_3 аксиального вектора малых вращений вдоль оси стержня X'_3 , т.е. производной $\vartheta = \partial\varphi'_3/\partial x'_3$. Получим

$$\vartheta = \frac{\partial \varepsilon'_{23}}{\partial x'_1} - \frac{\partial \varepsilon'_{13}}{\partial x'_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon'_4}{\partial x'_1} - \frac{\partial \varepsilon'_5}{\partial x'_2} \right), \quad (6.7)$$

а подставив сюда выражение (6.3) для компонент тензора деформаций, найдем

$$\vartheta = -\frac{3A'_{35}}{8ab^3} M. \quad (6.8)$$

Заметив, что $A'_{35} = 2A'_{3331} = 2\vec{q}\vec{q} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{q}\vec{m}$, отнесем закручивание к произвольной системе координат:

$$\vartheta = -\frac{3M}{4ab^3} A_{ijkl} q_i q_j q_k m_l. \quad (6.9)$$

Эта формула справедлива, в частности, и в кристаллофизической системе координат. Чтобы при расчете можно было пользоваться табличными значениями коэффициентов упругой податливости $A_{\lambda\mu}$, формулу (6.9) целесообразно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \vartheta = -\frac{3M}{8ab^3} A_{\lambda\mu} (\vec{q}\vec{q})_\lambda (\vec{q}\vec{m} + \vec{m}\vec{q})_\mu, & \quad (\vec{q}\vec{q})_\lambda = q_i q_j \ (ij \leftrightarrow \lambda = 1, \dots, 6) \\ & \quad (\vec{q}\vec{m} + \vec{m}\vec{q})_\mu = q_k m_l + m_k q_l \ (kl \leftrightarrow \mu = 1, \dots, 6) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Объем бруска при изгибе не изменяется: расширение одной его половины компенсируется сжатием другой.

Кручение круглого кристаллического стержня. Рассмотрим анизотропный круглый стержень радиуса R и длины $2l$, к торцам которого приложены крутящие моменты \vec{K} и $-\vec{K}$, а боковая поверхность свободна от нагрузок. Введем специальную, отличную от кристаллофизической, декартову систему координат с началом в центре стержня, ось X'_3 которой (с ортом $\vec{e}'_3 = \vec{q}$) совпадает с осью стержня, оси же X'_1 и X'_2 (с ортами $\vec{e}'_1 = \vec{m}$ и $\vec{e}'_2 = \vec{n}$) перпендикулярны к ней и друг к другу, а в остальном произвольны. Кроме того, введем в каждой точке местную систему координат, построенную на ортах \vec{e}'_r , \vec{e}'_ϕ и \vec{q} , направленных вдоль координатных линий цилиндрической системы координат. Цилиндрическая система координат связана со специальной соотношениями $x'_1 = r \cos \varphi$, $x'_2 = r \sin \varphi$.

Крутящий момент \vec{K} может быть создан приложенными к торцу $x'_3 = l$ усилиями $\vec{P} = kr\vec{e}_\phi$ на единицу площади. Тогда

$$\vec{K} = \int_S \vec{r} \times \vec{P} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \vec{e}_r \times k r \vec{e}_\varphi r dr d\varphi = \frac{1}{2} \pi R^4 k \vec{q}, \quad (6.11)$$

откуда находим $k = 2K/\pi R^4$. Граничным условиям $\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{q} = (2K/\pi R^4) r \vec{e}_\varphi$,

$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r = 0$ удовлетворяет тензор напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2K}{\pi R^4} r (\vec{e}_\varphi \vec{q} + \vec{q} \vec{e}_\varphi). \quad (6.12)$$

Чтобы выразить его в специальной системе координат, заметим, что $r \vec{e}_\varphi = x'_1 \vec{n} - x'_2 \vec{m}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2K}{\pi R^4} [x'_1 (\vec{n} \vec{q} + \vec{q} \vec{n}) - x'_2 (\vec{m} \vec{q} + \vec{q} \vec{m})]. \quad (6.13)$$

Для вычисления деформаций запишем компоненты тензора напряжений в виде

$$\sigma'_\mu = \frac{2K}{\pi R^4} (x'_1 \delta_{4\mu} - x'_2 \delta_{5\mu}); \quad (6.14)$$

эта форма записи непосредственно следует из (6.13). Деформации ε'_λ равны

$$\varepsilon'_\lambda = \frac{2K}{\pi R^4} (A'_{\lambda 4} x'_1 - A'_{\lambda 5} x'_2). \quad (6.15)$$

Закручивание по оси на единицу длины стержня равно $\vartheta = \partial \varphi'_3 / \partial x'_3$.

Воспользовавшись формулой (2.17), найдем

$$\vartheta = \frac{\partial \varepsilon'_{23}}{\partial x'_1} - \frac{\partial \varepsilon'_{13}}{\partial x'_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon'_4}{\partial x'_1} - \frac{\partial \varepsilon'_5}{\partial x'_2} \right). \quad (6.16)$$

Учитывая (6.16), получим

$$\vartheta = \frac{2K}{\pi R^4} (A'_{44} + A'_{55}). \quad (6.17)$$

Отношение $C = K/\vartheta$ называется *жесткостью стержня на кручение*, очевидно

$$C = \frac{\pi R^4}{A'_{44} + A'_{55}}. \quad (6.18)$$

Чтобы выразить жесткость C через табличные значения коэффициентов упругой податливости, рассмотрим выражение

$$\frac{1}{4}(A'_{44} + A'_{55}) = A'_{2323} + A'_{1313} = A'_{2323} + A'_{1313} + A'_{3333} - A'_{3333} = A'_{k3k3} - A'_{3333}.$$

Здесь коэффициенты упругой податливости по-прежнему отнесены к специальной системе координат, но их уже можно выразить посредством единственного орта \vec{q} , направленного по координатной оси X'_3 . Так как в произвольной декартовой системе координат это выражение можно представить в виде

$$A_{kjl}q_jq_l - A_{ijkl}q_iq_jq_kq_l = A_{ijkl}(\delta_{ik} - q_iq_k)q_jq_l,$$

где q_j – компоненты единичного вектора \vec{q} относительно этой системы, то жесткость стержня на кручение будет равна

$$C(\vec{q}) = \frac{\pi R^4}{4A_{ijkl}(\delta_{ik} - q_iq_k)q_jq_l}. \quad (6.19)$$

У изотропного тела $A_{44} = A_{55} = 1/G$ (G – модуль сдвига), так что его жесткость на кручение $C = \pi R^4 G / 2$. Поэтому величину

$$G(\vec{q}) = \frac{2C(\vec{q})}{\pi R^4} = \frac{1}{2A_{ijkl}(\delta_{ik} - q_iq_k)q_jq_l} \quad (6.20)$$

называют *модулем сдвига анизотропного материала для кручения*. С помощью симметричного материального тензора второго ранга $Z_{jl} = A_{kjl}$ и формулы (6.9) можно представить обратную величину модуля сдвига $G^{-1}(\vec{q})$ в удобном для вычисления виде

$$G^{-1}(\vec{q}) = 2\left(\vec{q} \cdot \mathbf{Z} \cdot \vec{q} - E^{-1}(\vec{q})\right), \quad (6.21)$$

где $E^{-1}(\vec{q})$ – обратная величина модуля Юнга. Вид тензора \mathbf{Z} представлен в таблице 5.

Поскольку анизотропные стержни при изгибе закручиваются, можно ожидать, что при кручении они будут изгибаться. Действительно, подсчитав

$$\psi'_1 = \frac{\partial \varphi'_1}{\partial \mathbf{x}'_3} = \frac{\partial \varepsilon'_{33}}{\partial \mathbf{x}'_2} - \frac{\partial \varepsilon'_{23}}{\partial \mathbf{x}'_3} = \frac{2K}{\pi R^4} A'_{35}, \quad \psi'_2 = \frac{\partial \varphi'_2}{\partial \mathbf{x}'_3} = \frac{\partial \varepsilon'_{13}}{\partial \mathbf{x}'_3} - \frac{\partial \varepsilon'_{33}}{\partial \mathbf{x}'_1} = -\frac{2K}{\pi R^4} A'_{34},$$

найдем, что ось изгиба параллельна вектору $A'_{35}\vec{m} + A'_{34}\vec{n}$, а абсолютная его

величина $\psi = \frac{2K}{\pi R^4} \sqrt{(A'_{35})^2 + (A'_{34})^2}$. Это выражение зависит только от кристаллографической ориентировки стержня, т.е. компонент орта \vec{q} . В произвольной, в частности в кристаллофизической, системе координат

$$\psi = \frac{4K}{\pi R^4} \sqrt{\vec{q}\vec{q}\vec{q} \cdots \mathbf{A} \cdot (\mathbf{E} - \vec{q}\vec{q}) \cdot \mathbf{A} \cdots \vec{q}\vec{q}\vec{q}}.$$

Таблица 5 – Тензор $Z_{jl} = A_{ijkl}$ для всех кристаллографических и предельных

классов

Системы	Тензор $Z_{jl} = A_{ijkl}$		
триклинная система	$A_{11} + \frac{1}{4}A_{55} + \frac{1}{4}A_{66}$ $\frac{1}{4}A_{45} + \frac{1}{2}A_{16} + \frac{1}{2}A_{26}$ $\frac{1}{4}A_{64} + \frac{1}{2}A_{35} + \frac{1}{2}A_{15}$	$\frac{1}{4}A_{45} + \frac{1}{2}A_{16} + \frac{1}{2}A_{26}$ $A_{22} + \frac{1}{4}A_{66} + \frac{1}{4}A_{44}$ $\frac{1}{4}A_{56} + \frac{1}{2}A_{24} + \frac{1}{2}A_{34}$	$\frac{1}{4}A_{64} + \frac{1}{2}A_{35} + \frac{1}{2}A_{15}$ $\frac{1}{4}A_{56} + \frac{1}{2}A_{24} + \frac{1}{2}A_{34}$ $A_{33} + \frac{1}{4}A_{44} + \frac{1}{4}A_{55}$
моноклинная система $2 X_2$	$A_{11} + \frac{1}{4}A_{55} + \frac{1}{4}A_{66}$ 0 $\frac{1}{4}A_{64} + \frac{1}{2}A_{35} + \frac{1}{2}A_{15}$	0 $A_{22} + \frac{1}{4}A_{66} + \frac{1}{4}A_{44}$ 0	$\frac{1}{4}A_{64} + \frac{1}{2}A_{35} + \frac{1}{2}A_{15}$ 0 $A_{33} + \frac{1}{4}A_{44} + \frac{1}{4}A_{55}$
$2 X_3$	$A_{11} + \frac{1}{4}A_{55} + \frac{1}{4}A_{66}$ $\frac{1}{4}A_{45} + \frac{1}{2}A_{16} + \frac{1}{2}A_{26}$ 0	$\frac{1}{4}A_{45} + \frac{1}{2}A_{16} + \frac{1}{2}A_{26}$ $A_{22} + \frac{1}{4}A_{66} + \frac{1}{4}A_{44}$ 0	0 0 $A_{33} + \frac{1}{4}A_{44} + \frac{1}{4}A_{55}$
ромбическая система	$A_{11} + \frac{1}{4}A_{55} + \frac{1}{4}A_{66}$ 0 0	0 $A_{22} + \frac{1}{4}A_{66} + \frac{1}{4}A_{44}$ 0	0 0 $A_{33} + \frac{1}{4}A_{44} + \frac{1}{4}A_{55}$
тетрагональная система	$A_{11} + \frac{1}{4}A_{44} + \frac{1}{4}A_{66}$ 0 0	0 $A_{22} + \frac{1}{4}A_{44} + \frac{1}{4}A_{66}$ 0	0 0 $A_{33} + \frac{1}{2}A_{44}$
тригональная, гексагональная системы и текстуры	$\frac{3}{2}A_{11} - \frac{1}{2}A_{12} + \frac{1}{4}A_{44}$ 0 0	0 $\frac{3}{2}A_{11} - \frac{1}{2}A_{12} + \frac{1}{4}A_{44}$ 0	0 0 $A_{33} + \frac{1}{2}A_{44}$

кубическая система	$A_{11} + \frac{1}{2}A_{44}$ 0 0 0 $A_{11} + \frac{1}{2}A_{44}$ 0 0 0 $A_{11} + \frac{1}{2}A_{44}$
изотропные тела	$2A_{11} - A_{12}$ 0 0 0 $2A_{11} - A_{12}$ 0 0 0 $2A_{11} - A_{12}$

7 Температурные напряжения в кристаллах

Уравнения упругого равновесия $\nabla \cdot \sigma = 0$ и совместности деформаций $\text{Ink } \varepsilon = 0$ справедливы независимо от того, находится ли весь кристалл при одной и той же температуре или температура от точки к точке меняется. Во втором случае, однако, необходимо принять во внимание температурные члены в соотношениях Дюгамеля-Неймана (3.9), (3.10)

$$\varepsilon_\lambda = A_{\lambda\mu}\sigma_\mu + \alpha_\lambda\Theta, \quad \varepsilon = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Theta}. \quad (7.1)$$

В результате уравнение Бельтрами-Митчелла становится неоднородным: вместо (3.17) получаем

$$\text{Ink}(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = -\text{Ink}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Theta}). \quad (7.2)$$

В однородных температурных полях все однородные тела, изотропны они или нет, расширяются совершенно свободно, если этому не препятствуют окружающие тела. В неоднородных же температурных полях одни части тела мешают свободно расширяться другим его частям, и это приводит к возникновению температурных напряжений в однородном теле, поверхность которого свободна от каких-то бы ни было нагрузок. Теорема о единственности решения уравнений теории упругости показывает, что для возникновения температурных напряжений необходимо, чтобы уравнение Бельтрами-Митчелла (7.2) было неоднородно. Это выполняется лишь при $\text{Ink}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Theta}) \neq 0$; отсюда следует, что температурные напряжения не возникают не только в однородных температурных полях, но и в температурных полях, линейно зависящих от декартовых координат.

С другой стороны, условие $\text{Ink}(\alpha\Theta) \neq 0$ не только необходимо, но и достаточно для возникновения температурных напряжений. Действительно, если они отсутствуют, то тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \alpha\Theta$ и он должен удовлетворять уравнению совместности $\text{Ink}\boldsymbol{\varepsilon} = 0$.

Так как поверхность кристалла свободна от действия нагрузок, средний тензор температурных напряжений и средний момент этого тензора равны нулю. Это обстоятельство часто используется при решении задач о распределении термоупругих напряжений.

Рассмотрим простейшую из таких задач – задачу о термоупругих напряжениях в кристаллической пластинке толщины $2a$, температура которой меняется только по толщине. Введем декартову систему координат $OX'_1X'_2X'_3$ с началом в средней плоскости пластиинки. Пусть оси OX'_1 и OX'_2 , перпендикулярные одна к другой, лежат в средней плоскости пластиинки, а ось OX'_3 направлена по нормали к ней. Очевидно, не только температура, но и напряжения и деформации не зависят ни от x'_1 , ни от x'_2 .

Уравнения упругого равновесия имеют поэтому вид

$$\frac{d\sigma'_{i3}}{dx'_3} = 0 \quad (7.3)$$

(штрихом отмечено, что компоненты тензора $\boldsymbol{\sigma}$ отнесены к системе координат $OX'_1X'_2X'_3$). Решения их σ'_{i3} – константы. Все они равны нулю, т.к.

$$\langle \sigma'_{i3} \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \sigma'_{i3} dx'_3 = 0.$$

Таким образом,

$$\sigma'_3 = \sigma'_4 = \sigma'_5 = 0, \quad (7.4)$$

и отличны от нуля только три компоненты, $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_6$.

Из уравнений совместности (1.20) следует, что

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_\lambda = C'_\lambda + x'_3 B'_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 6), \quad (7.5)$$

где C'_λ и B'_λ – числа, не зависящие от x'_3 .

Учитывая (7.4), закон Гука (7.1) можно записать в виде

$$C'_\lambda + x'_3 B'_\lambda = A'_{\lambda\mu} \sigma'_\mu + \alpha'_\lambda \Theta \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 6). \quad (7.6)$$

Усредним равенство (7.6) по пластинке, т.е. проинтегрируем обе его части по x'_3 от $-a$ до a и результаты разделим на $2a$. Учитывая, что усредненный тензор напряжений равен нулю, получим

$$B'_\lambda = \frac{3}{a^2} \alpha'_\lambda \langle x'_3 \Theta \rangle \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 6). \quad (7.8)$$

Таким образом, мы нашли три компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon'_\lambda = \alpha'_\lambda \left(\langle \Theta \rangle + \frac{3}{a^2} x'_3 \langle x'_3 \Theta \rangle \right) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 6). \quad (7.9)$$

Три равенства (7.6), переписанных в виде

$$A'_{\lambda\mu} \sigma'_\mu = \alpha'_\lambda \left(\langle \Theta \rangle + \frac{3}{a^2} x'_3 \langle x'_3 \Theta \rangle - \Theta \right) \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 6), \quad (7.10)$$

можно рассматривать как систему трех линейных уравнений относительно трех неизвестных компонент тензора напряжений $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_6$. Эту систему легко решить, найдя матрицу $d'_{\chi\lambda}$, обратную к матрице $A'_{\lambda\mu}$:

$$d'_{\chi\lambda} A'_{\lambda\mu} = \delta_{\chi\mu} \quad (\chi, \lambda, \mu = 1, 2, 6). \quad (7.11)$$

Поле термоупругих напряжений определяется формулами

$$\sigma'_\chi = \begin{cases} d'_{\chi\lambda} \alpha'_\lambda \left(\langle \Theta \rangle + \frac{3}{a^2} x'_3 \langle x'_3 \Theta \rangle - \Theta \right) & (\chi, \lambda = 1, 2, 6), \\ 0 & (\chi = 3, 4, 5). \end{cases} \quad (7.12)$$

Отсюда с помощью закона Гука (7.1) можно получить и три еще не найденные компоненты тензора деформаций.

Если температурное поле симметрично относительно средней плоскости пластиинки: $\Theta(-x'_3) = \Theta(x'_3)$, то средний его момент $\langle x'_3 \Theta \rangle$ обращается в ноль, и вместо (7.12) имеем

$$\sigma'_\chi = \begin{cases} d'_{\chi\lambda} \alpha'_\lambda (\langle \Theta \rangle - \Theta) & (\chi, \lambda = 1, 2, 6), \\ 0 & (\chi = 3, 4, 5). \end{cases} \quad (7.13)$$

Симметричное относительно средней плоскости пластиинки температурное поле получается, в частности, при равномерном нагреве пластиинки, поэтому

$$\langle \Theta \rangle - \Theta = \frac{ha^2}{6k'_3} \left[3 \left(\frac{x'_3}{a} \right)^2 - 1 \right], \quad (7.14)$$

где h – скорость повышения температуры, $k'_3 = k'_{33}$ – компоненты тензора температуропроводности в системе $OX'_1 X'_2 X'_3$, a – полутолщина пластиинки. Таким образом, при равномерном нагревании кристаллической пластиинки в ней возникают термоупругие напряжения

$$\sigma'_\chi = \begin{cases} \frac{d'_{\chi\lambda} \alpha'_\lambda ha^2}{6k'_3} \left[1 - 3 \left(\frac{x'_3}{a} \right)^2 \right] & (\chi, \lambda = 1, 2, 6), \\ 0 & (\chi = 3, 4, 5). \end{cases} \quad (7.15)$$

При нагревании пластиинка обычно оказывается сжатой с краев – там напряжения равны $\sigma'_\chi(\pm a) = -d'_{\chi\lambda} \alpha'_\lambda ha^2 / 3k'_3$ – и растянутой посередине; в средней плоскости пластиинки напряжения $\sigma'_\chi(0) = d'_{\chi\lambda} \alpha'_\lambda ha^2 / 6k'_3$. При охлаждении пластиинки $h < 0$, поэтому все напряжения противоположны возникающим при нагревании.