МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Политехнический институт
Кафедра «Робототехника и автоматизация производства»

Утверждено на заседании кафедры
«Робототехника и автоматизация
производства»
«14» января 2021г., протокол №6

Заведующий кафедрой

________________________Е.В. Ларкин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине (модулю)
«Методы принятия оптимальных решений»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
09.03.02 Информационные системы и технологии

с направленностью (профилем)
Информационные системы и технологии в робототехнике

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 090302-02-21

Тула 2021 год

Разработчик методических указаний

Акименко Татьяна Алексеевна доцент, канд. техн. наук, доцент______________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1 5
Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений 5
Лабораторная работа № 2 11
Приближенное вычисление на ЭВМ определенных интегралов 11
Лабораторная работа № 3 16
Овладение практическими навыками численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера 16
Лабораторная работа № 4 19
Овладение практическими навыками численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Рунге_Кутта 19
Лабораторная работа № 5 23
Методы численного решения дифференциальных уравнений второго порядка 23
Список литературы 26

ВВЕДЕНИЕ

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Внимательно прочитать и уяснить условие задачи, которую предстоит решить.
2. Ознакомиться с необходимым теоретическим материалом - см. Список рекомендуемой литературы
3. Подготовить свой вариант текста программы и попробовать решить его с помощью компьютера. Обычно с первого раза решение не удается - это нормально. Нужно повторить редактирование и счет до получения нужного результата.
4. Сделать отчет.

Каждый отчет оформляется в виде пояснительной записки и должен содержать следующие элементы:

- ♦ титульный лист;
- ♦ текст пояснительной записки в машинописном виде;
- ♦ список использованной литературы;
- ♦ машинный листинг программы на языке PASCAL - в виде приложения.

Содержание пояснительной записки

1. Постановка задачи.
2. Краткие теоретические сведения об особенностях применяемых операторов и методов (теоретическое введение).
3. Описание программы:
    - ♦ общие сведения (язык программирования, операционная система, тип процессора);
    - ♦ описание логической структуры программы;
    - ♦ описание алгоритма решения задачи (в виде блок-схемы);
    - ♦ описание входных и выходных данных программы;
    - ♦ описание подпрограмм;
    - ♦ перечень аномалий и допустимых значений входных данных (тестовые примеры).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- практика в использовании численных методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений;
- практика в разработке алгоритмов и программ, содержащих итерационные циклы;
- получение начальных навыков использования библиотек стандартных программ и личных библиотек;
- углубление навыков отладки программ и практической работы на ЭВМ.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Аналитическое решение для многих нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений получить не удается. Общая форма таких уравнений $f(x)=0$.

Алгебраические уравнения $a_{m+1} x^{m}+ a_m x^{m-1} + a_{m-1} x_{m-2} + ... +a_1 = 0$ имеют m корней. Трансцендентные уравнения, включающие степенные, тригонометрические и экспоненциальные функции от некоторого аргумента X, например arctg(x) - x=0, бесчисленное множество корней. Для решения таких уравнений используют приближенные итерационные методы. Решение уравнения обычно складывается из двух этапов: отыскание начального приближения корня, т.е. определение интервалов, в которых имеется корень уравнениями последующего уточнения начального приближения корня до достижения заданной точности.

Процесс определения интервала, содержащего только один из корней уравнения, называется отделением корня этого уравнения. Обычно процесс отделения корней проводят исходя из физического смысла задачи, графически или с помощью таблиц значений функций $f(x)$. Известно, что если непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка [a, b] принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка есть хотя бы одна точка x=u ,в которой функция принимает нулевое значение $f(u)=0$.Если при этом знак первой производной $f'(x)$ на этом отрезке не изменяется, то корень x=u является единственным на данном отрезке.

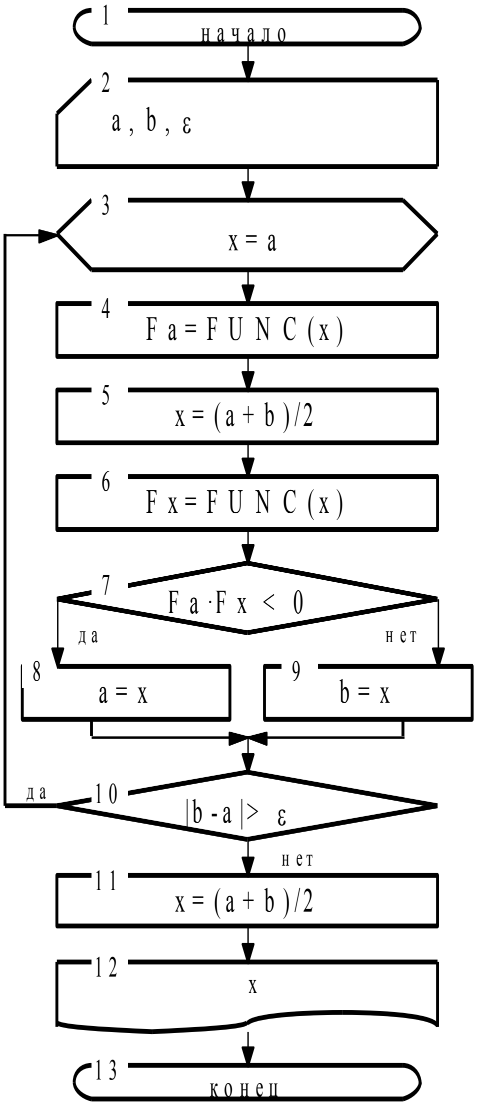
Наиболее распространенным численными методами уточнения корней являются методы последовательного приближения, половинного деления, Ньютона, итерации.

Метод половинного деления

Уточнение корня производится в следующей последовательности:

- вычисляется координата x_1 середины отрезка поиска [a, b];
- определяются знаки функции $f(x)$ в точках x, a, в;
- определяется новый уменьшенный интервал поиска по результатам сравнения знаков функции $f(x)$ в указанных точках (отбрасывается та половина предыдущего интервала, которая содержит на границе значения функции $f(x)$ того же знака, что и в середине интервала;
- указанная последовательность действий повторяется до достижения требуемой точности $| x_j - x_{j-1} | \le \varepsilon$, где ε -допустимая погрешность решения.

Алгоритм рассмотренного вычислительного процесса имеет вид:



Применение метода половинного деления проиллюстрировано на рис.1.

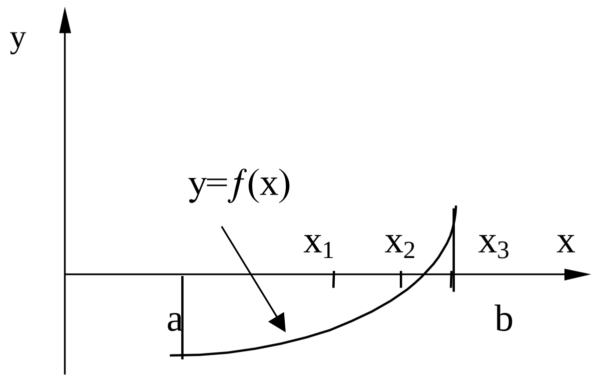


Рис.1. Уточнение корня методом половинного деления

Метод Ньютона

Уточнение корня может быть произведено также по методу Ньютона.

Сущность метода Ньютона заключается в том, что в интервале поиска выбирается начальное приближение корня x_0 (рис.2) и в этой точке проводится касательная к функции, и точка x_1 пересечения касательной с осью абсцисс принимается за уточненное значение корня.

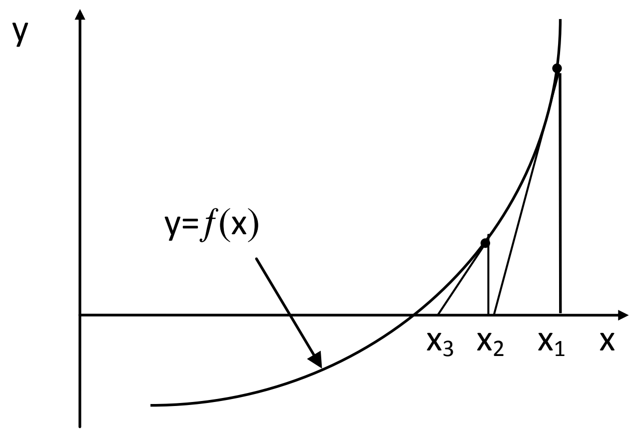


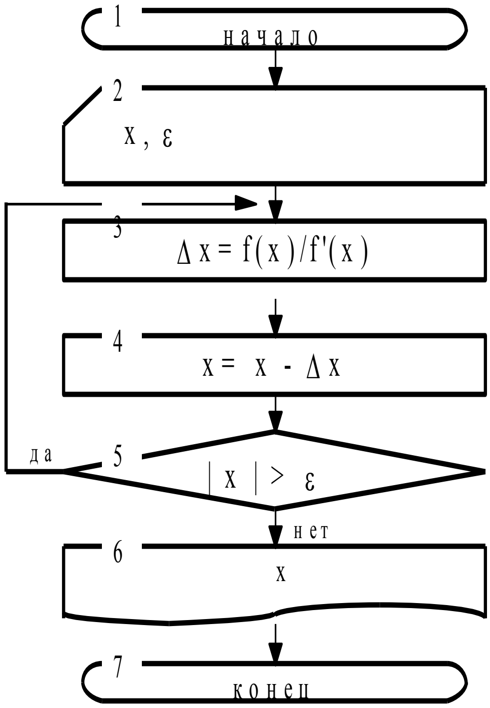
Рис. 2. Графическая интерпретация метода Ньютона.

Повторяя построение касательных в точках x_1, x_2, x_3 ... x_{n-1}, x_n, получают последовательно уточнение корня. Аналитическая зависимость, описывающая такой процесс, имеет вид:

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1}).$$

Метод Ньютона (касательных) в отличие от метода половинного деления использует информацию о форме функции, что ускоряет процесс уточнения корня. Однако данный метод ограничен в применении, поскольку для функций с изменением кривизны и пологими участками в интервале поиска пересечение касательной с осью абсцисс может выйти за пределы интервала, и тогда уточнения корня не получится.

Алгоритм уточнения корня по методу Ньютона имеет вид:

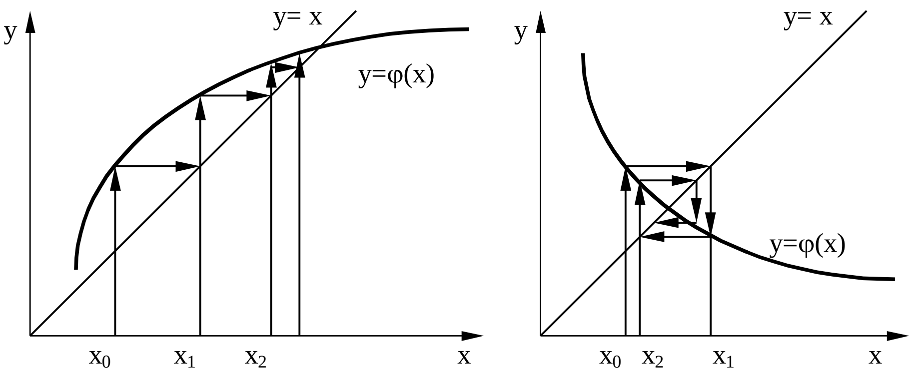


Метод простой итерации

Метод простой итерации (последовательных приближений) заключается в том, что исходное уравнение имеет вид $\varphi(x) = x$. Если в интервале поиска выполняется условие $|\varphi'(x)| < 1$, то метод дает возможность вычислить значение корня с заданной точностью. Если это условие не выполняется, то можно перейти к обратной функции. Приближение к корню осуществляется по формуле $x_{j+1} = \varphi(x_j)$. Итерационный процесс прекращается, если выполняется условие

$$|x_{i+1} - x_i| \le \varepsilon$$

где ε - допустимая погрешность решения. Сходимость будет тем более быстрой, чем меньше величина $|\varphi'(x)|$.



а) $0 < \varphi'(x) < 1$ б) $-1 < \varphi'(x) < 0$

Рис. 3. Уточнение корня по методу Ньютона.

Следует отметить, что для всякого уравнения $f(x)=0$ можно найти большое количество соответствующих ему уравнений $x=\varphi(x)$, но нужно с большой осторожностью подходить к их конкретному выбору, т.к. от него зависит сходимость и скорость сходимости метода итераций.

Приближенное решение систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений

Приближенное решение систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений

$f_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$;

$f_2(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$;

....

$f_n(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$;

также осуществляется в два этапа: отделение корней и уточнение корней с помощью метода последовательных приближений (методом Ньютона или методом итераций). Однако при уточнении корней, систем уравнений в форме $x_J = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ представление их и анализ сходимости процесса итераций более трудоемки и сложны. Изменение формы исходного уравнения при этом неоднозначно поэтому необходимо тщательно проанализировать различные варианты преобразованных уравнений с целью получения пригодной для итерации формы.

В заключении необходимо отметить, что допустимую погрешность ε определения корня уравнения в итерационном процессе нельзя задавать слишком малой, т.к. ошибки округления в ЭВМ не позволяют получить более точного приближения.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Для функции, заданной в каждом варианте, необходимо найти двумя различными приближенными методами наименьший по модулю отличный от нуля корень уравнения с относительной погрешностью не более $\varepsilon=0{,}001$. Три шага приближения по каждому из методов выполнить вручную с помощью микрокалькулятора и изобразить графически.

1) $1/(1+x^2) - 1{,}5x = 0$
2) $0{,}1x^2 - x\ln(x) = 0$
3) $x^3 - 1{,}473x^2 - 5{,}738x + 6{,}763 = 0$
4) $\mathrm{tg}^2 x - 1{,}5x = 0$
5) $e^{-x} - 1{,}5x = 0$
6) $1/(1+x^4) - 1{,}5x^2 = 0$
7) $\ln(2+x) - 5{,}5x^3 = 0$
8) $x^3 - 10 - 1{,}5\sqrt{x-2} = 0$
9) $\sqrt{1-x^2} - 2{,}5x^5 = 0$
10) $1 - x^2 - 0{,}4e^x = 0$
11) $\sin 2x - 2x^2 = 0$
12) $2x - e^{-x/10} = 0$

13) $e^{-0,3x} = 0,7x$
14) $x^3 - 3x - 1 = 0$
15) $\sin x - x \cos x = 0$
16) $x^3 + 2x^2 - 10,2x = 0$
17) $x = \operatorname{tg} x$
18) $x^4 - 2,5x^2 + x = 0$
19) $1/(1+x^2) - 2,5x^2 = 0$
20) $x^3 + 3x + 1 = 0$
21) $1,5\cos x = 2x^2$
22) $4x^3 - 12,3x^2 - x + 16,2 = 0$
23) $\ln(1,5x + 3,2) = 4,3x$
24) $2,5x^3 + 1,2x^2 = 3,2$
25) $1,2e^{-x} = \cos x$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Исследовать заданную функцию, найти интервал, в котором находится требуемый корень уравнения, проверить применимость различных численных методов и выбрать метод решения.
2. Разработать алгоритм решения задачи двумя выбранными методами, представив его структуру в виде блок - схемы и дав его неформальное описание.
3. Составить и отладить программу решения задачи.
4. Вычислить три шага приближения вручную и построить график приближения.
5. Составить программу решения задачи с помощью одной из стандартных подпрограмм.
6. Решить задачу на ЭВМ по разработанным программам.
7. Проанализировать результаты расчетов.
8. Ответить на контрольные вопросы.

При отладке программы следует прежде всего отладить используемую подпрограмму вычисления функции. Для этого нужно подготовить и решить соответствующий набор тестов.

Отладку численного решения уравнения целесообразно сначала провести на уравнении с заранее известным решением.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.Чем определяется существование предела достижимой точности приближенного вычисления корней, одинаков ли этот предел для различных методов?

2.Каким образом можно предусмотреть выход из итерационного процесса, если заданная точность не достигается?

3.Какое влияние на конечный результат вычисления корня уравнения в итерационном процессе оказывает ошибка, допущенная на промежуточном шаге данного процесса?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НА ЭВМ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

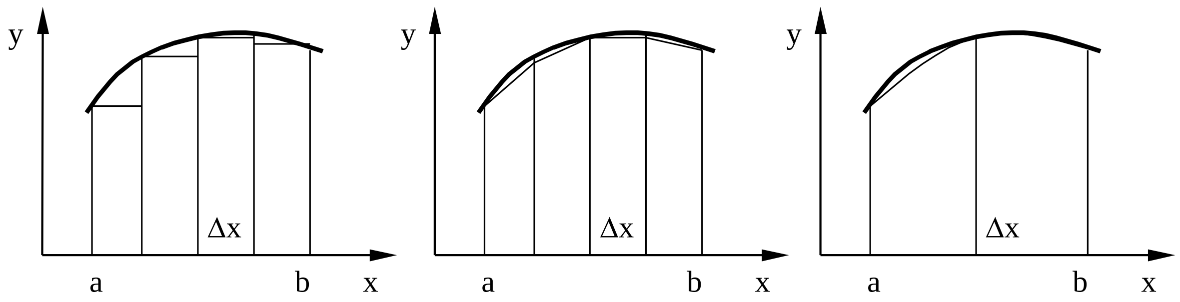
ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- практика в использовании численных методов интегрирования функций на ЭВМ;
- углубление навыков разработки алгоритмов и программ, имеющих модульную структуру;
- практика в использовании библиотеки стандартных подпрограмм и личных библиотек.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Задачи, в которых требуется вычисление определенных интегралов, возникают почти во всех областях прикладной математики. Иногда можно вывести аналитическую формулу и представить интеграл в виде комбинации алгебраических и трансцендентных функций с соответствующими пределами. Во многих случаях однако, не удается найти никакой аналитической зависимости или же она получается настолько сложной, что вычислить с ее помощью интеграл труднее, чем другими способами. В таких случаях приходится применять различные методы численного интегрирования, которые основаны на том что интеграл представляется в виде конечной суммы простых слагаемых. В геометрической интерпретации при численном интегрировании площадь под кривой интегрирования приближенно заменяется суммой площадей элементарных фигур (прямоугольников, трапеций и др.), которые могут быть найдены по простым аналитическим зависимостям.

Наиболее распространенными методами численного интегрирования функций на ЭВМ является метод прямоугольников, частным случаем которого является метод средних, метод трапеций и метод Симпсона (метод парабол). Указанные методы различаются способом аппроксимации интегрируемой функции на каждом шаге интегрирования. В методе прямоугольников применяется ступенчатая аппроксимация, в методе трапеций– линейная аппроксимация, в методе Симпсона – аппроксимация параболой второй степени.



а) б) с)

Рис. 1. Геометрическое представление численных методов интегрирования:

а) - метод прямоугольников;

б) - метод трапеций;

в) - метод Симпсона.

Указанные численные методы могут применятся не только к функциям, заданным аналитически, но и к табличным функциям, широко распространенной в инженерной практике (это результаты экспериментов, справочные таблицы свойств материалов и т.д.)

Квадратурные формулы указанных методов для постоянного шага интегрирования Δx представлены ниже.

1.Метод прямоугольников

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x(f(x_1) + f(x_2) + ...+f(x_n)),$$

$\Delta x= (b- a)/n$, n — число шагов интегрирования

Остаточные члены для различных вариантов метода прямоугольников вычисляются формулами:

$x_i= a +\Delta x\cdot(i-1)$: $R= -(\Delta x)^2 /2\cdot f^{!}(x_i)=0[(\Delta x)^2]$;

$x_i=a +\Delta x\cdot i$: $R= (\Delta x)^2/2 \cdot f^{!}(x_i)=0[(\Delta x)^2]$;

$x_i= a + \Delta x\cdot(i- 1/2)$: $R= (\Delta x)^3/2a\cdot f^{!!}(x_i)= 0[(\Delta x)^3]$;

2. Метод трапеций

$$S=\int_a^b f(x)\, dx\approx\Delta x\cdot (1/2\, f(x_1)+ f(x_2)+ f(x_3)+ ... +f(xn_n)+ 1/2\, f(x_{n+1}))$$

где $x_i =a+ \Delta x(i-1)$, $\Delta x=(b- a)/n$

Остаточный член: $R= -(\Delta x)^3/12$ $f^{!!}=0[(\Delta x)^3]$

3. Формула Симпсона

$$S=\int_a^b f(x)dx\approx\Delta x/3\cdot (f(x_1)+ 4f(x_2)+ 2f(x_3)+... +4f(x_n)+ f(x_{n+1})),$$

где $x_i = a+ \Delta x\cdot (i-1)$, $\Delta x=(b- a) /n$.

Остаточный член: $R=(\Delta x)^4/180 : f^{!!!!}(x_i) =0[(\Delta x)^4]$

Для обеспечения требуемой точности при приближенном вычислении значения интеграла по квадратурным формулам на практике часто используется метод последовательного удвоения числа шагов, который заключается в следующем.

Интеграл S вычисляется по квадратурной формуле дважды: сначала при числе шагов, равном n, а затем при числе шагов равно 2n.

Погрешность приближенного значения интеграла Sn, вычисленного по квадратурной формуле при числе шагов, равном 2n, определяется приближенно по правилу Рунге:

$$\varepsilon_{2n} \approx \theta \cdot \left| S_n - S_{2n} \right|,$$

где для формулы средних и трапеций θ=1/2, для формулы Симпсона θ=1/16.

Таким образом, S_n вычисляется для последовательных значений n, 2n, 4n и т. д. Процесс вычисления заканчивается, когда для очередного числа шагов интегрирования не будет получена допустимая погрешность. Начальное число шагов n рекомендуется выбирать от 10 до 100.

Для экономии следует учесть, что при удвоении числа шагов нет необходимости заново вычислять значения подынтегральной функции во всех узлах, так как часть узлов сетки с шагом 2n являлись узлами и ранее, и в них уже вычислялись значения функции.

Следует так же учитывать, что знаки погрешностей у формулы средних и формулы трапеций разные. Поэтому, если есть расчеты по обеим формулам, то можно утверждать, что точное значение интеграла, как правило, лежит между этими результатами.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

С использованием ЭВМ вычислить с относительной погрешностью не более 10^{-4} значение $\int_a^b f(x)dx$ для исходных данных, приведенных в таблице 1. Вычисление произвести по разработанной самостоятельно программе и с использованием одной из стандартных библиотечных подпрограмм, исследовать влияние числа шагов интегрирования на точность решения задачи. Разработанную программу представить в виде подпрограммы и записать ее в личную библиотеку исходных модулей, обеспечив возможность интегрирования функции, задаваемой пользователем во внешней подпрограмме– функции предусмотрите возможность вывода вместе с величиной интеграла– числа шагов интегрирования (величину шагов интегрирования), при котором достигнута заданная точность.

Таблица 1.Исходные данные

№ п/п	f(x)	a	b	Квадратурная формула
1	$\sqrt{e^x - 1}$	0,1	2	прямоугольников
2	exsinx	0	π	трапеций
3	(x2- 1)10-2x	0	1	средних
4	x $\sqrt[3]{1+x}$	1	9	Симпсона
5	1/(3+2cosx)	0	π	прямоугольников
6	1/(ln2x)	2	3	трапеций
7	arcsin $\sqrt{x}$ / $\sqrt{x(1-x)}$	0	0,3	средних
8	x3e2x	0	1	Симпсона
9	tg3(x/2+π/4)	0	π/4	прямоугольников
10	arctgx	0	$\sqrt{3}$	трапеций
11	1/(1+ $\sqrt{x}$)	0	4	средних
12	1/(5-3cosx)	0	2π	Симпсона
13	2x/(1-4x)	-2	-1	прямоугольников
14	1/[(x+1) $\sqrt{x^2+1}$]	0	3/4	трапеций
15	cos(πx2)/ $\sqrt{1,2+x^3}$	0,6	0,7	средних
16	(0,3+x2)cos $\sqrt{e-x}$	0,2	0,6	Симпсона
17	sin(ex2)/ $\sqrt{0,8+3x}$	0,5	0,6	прямоугольников
18	e-x/4/(π+x2)	0	1	трапеций
19	$\sqrt{1,5-0,4x}$ tg(x2/5π)	1,5	2	средних
20	e-0,3x/ $\sqrt{2\pi+x}$	0,5	1,5	Симпсона
21	(π-x2)sin $\sqrt{2,1+x}$	5	25	прямоугольников
22	$\sqrt{0,7-0,1x}$ ln[0,3(π+x)]	-1	4	трапеций
23	$\sqrt[3]{0,1+0,2x}$ ln(π/3-x/5)	-3	2	средних
24	(2,5-x)ctgπ/x	1,8	2,3	Симпсона
25	1,5/ $\sqrt[4]{x^2+2}$	0	2,1	прямоугольников

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Разработать алгоритм решения задачи, представив его структуру в виде блок-схемы и дав его неформальное описание.
2. Составить и отладить программу решения задачи по разработанному алгоритму.
3. Записать разработанную программу в личную библиотеку.
4. Составить программу решения задачи с помощью одной из стандартных программ.
5. Решить задачу на ЭВМ по разработанным программам.
6. Проанализировать результаты расчетов, построить график зависимости точности решения от числа шагов интегрирования.
7. Ответить на контрольные вопросы.

Отладку разработанной программы провести на несложном уравнении с заранее известным решением.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Существует ли предел достижимой точности вычисления интеграла рассмотренными методами?
2. Каковы преимущества формулы Симпсона по сравнению с формулой трапеций и следствием чего являются эти преимущества?
3. Почему остаточные члены формулы средних и формулы трапеций имеют разные знаки?
4. Дайте геометрическую интерпретацию ответа и поясните, как можно использовать указанное обстоятельства при расчетах.
5. Какие другие формулы численного интегрирования функций с разными знаками остаточных членов вы знаете?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ОВЛАДЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИМИ НАВЫКАМИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ЭЙЛЕРА

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- овладение практическими навыками использования ЭВМ для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (задача Коши);
- проведение вычислительных экспериментов по применению метода Эйлера**;**
- изучение влияния шага интегрирования на точность решения конкретного уравнения ;
- накопление опыта по использования алгоритмических языков и отладке программ;

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Одним из наиболее распространенных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений является метод конечных разностей (МКР). Рассмотрим применение МКР для численного решения на ЭВМ простейшего дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dY}{dX} = f(X, Y)$$

с начальными условиями X_0 , $Y(X_0) = Y_0$. .

Решение будем искать в интервале $[X_0$, b] и будем полагать, что функция на данном интервале удовлетворяет условиям гладкости.

Разобьем область аргумента X на множество отрезков длиной ΔX и разложим функцию Y в ряд Тейлора в окрестности произвольной точки X_i из области существования функции:

$$Y_{i+1} = Y(X_i + \Delta X) = Y(X_i) + \frac{\Delta X}{1!} Y'(X_i) + \frac{\Delta X^2}{2!} Y''(X_i) + ...$$

Отбрасывая члены ряда, содержащие производные второго и высшего порядков, получаем конечно-разностное выражение первой производной

$$Y'(X_i) = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta X}.$$

Отсюда $Y_{i+1} = Y_i + \Delta X * f(X_i, Y_i)$.

Вычисляя последовательно от начального значения Y_0 значения Y_1 , Y_2 , Y_3 , ... ,Y_{i+1} по данной формуле, находим искомое решение.

На рис.2 показана форма численного решения, получаемая с помощью таких вычислений.

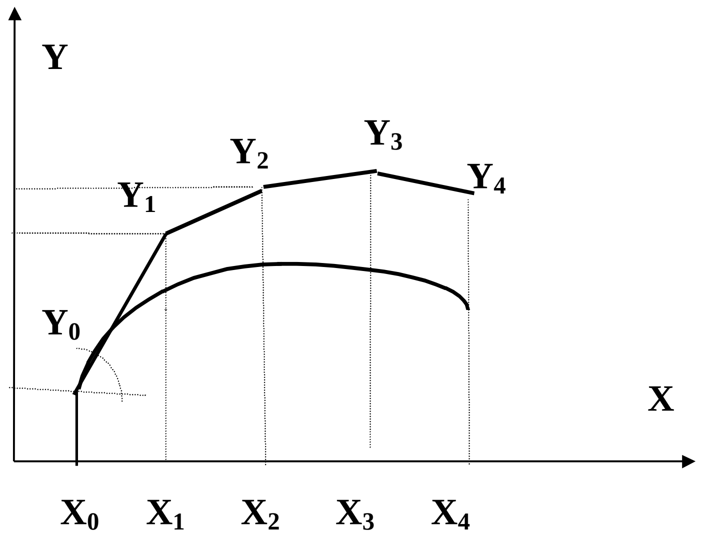
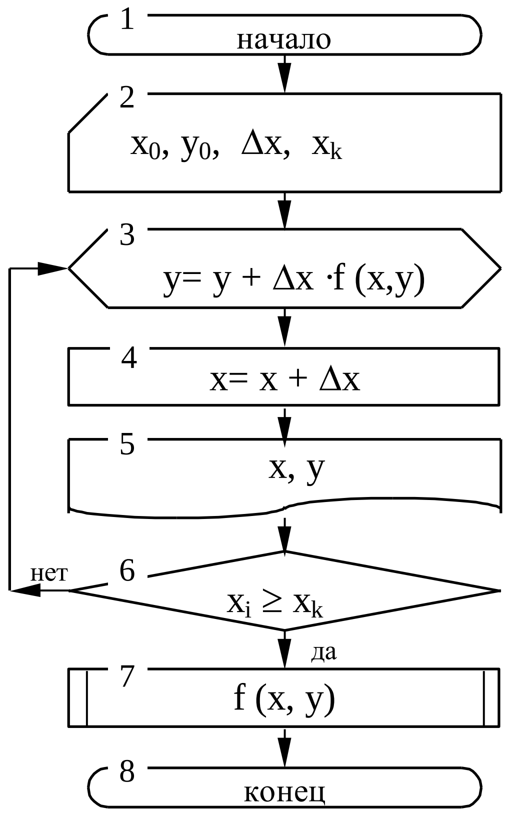


Рис.2. Схема приближенного решения методом Эйлера.

Данный метод решения обыкновенного дифференциального уравнения носит название метода Эйлера. При достаточно малых величинах шага ΔX метод Эйлера дает решение с большой точностью, так как погрешность близка к 0 (ΔX^2) на каждом шаге процесса по методу Эйлера.



В данной блок-схеме $x_к$ - конечное значение координаты X

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$Y'(X) = f(X, Y),$$

где f(X,Y) -заданная функция.

Требуется найти численное решение задачи Коши на заданном отрезке $[X_0\ ,\ b]$ ($b > X_0$) при начальном условии $Y(X_0) = Y_0$ методом Эйлера с различной величиной шага интегрирования ΔX и исследовать влияние величины шага интегрирования на точность решения (сравнение осуществлять с аналитическим решением задачи) .

Ниже приведены варианты функций f(X,Y).

Функция может быть задана произвольным набором двух функций φ(X,Y), ψ(X,Y):

f (X,Y)=φ(X,Y)+ ψ(X,Y).

Функции φ(X,Y):

1) Y / X ;	2) $X^2 + Y$;	3) $X^3 + Y$;
4) $X + Y^2$;	5) $X + Y^3$;	6) $X^2 + Y^2$;
7) $e^x Y$;	8) e^{x+1} ;	9) $e^x + Y^2$.

Функции ψ(X,Y):

1) $e^{-x^2} XY$;	2) e^{x^2+1} ;	3) XY ;
4) 3.2;	5) $4.8X^2Y$;	6) $e^X + 3Y$;
7) $e^{3x} Y$;	8) 8.7;	9) $\sqrt{X} + Y$.

Решение задачи осуществить в интервале [2, 3] при начальном условии, заданном преподавателем.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Изучение метода Эйлера.
2. Составление блок-схемы алгоритма.
3. Составление программы расчета (в программе предусмотреть возможность ее использования для различных шагов интегрирования ΔX).
4. Ввод программы в ЭВМ и отладка программы.
5. Проведение вычислительных экспериментов.
6. Анализ полученных результатов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем ограничена минимальная величина шага интегрирования ΔX ?
2. Каким образом можно уточнить решение дифференциального уравнения методом Эйлера, не изменяя величину шага интегрирования ΔX ?
3. Какое изменение необходимо ввести в ваш алгоритм , чтобы получить решение с заданной точностью?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

ОВЛАДЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИМИ НАВЫКАМИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД РУНГЕ_КУТТА

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- - овладение практическими навыками численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- - проведение вычислительных экспериментов по применению метода Рунге-Кутта;
- - сравнение методов Эйлера и Рунге-Кутта;
- - практика и использование стандартных подпрограмм для решения дифференциальных уравнений;
- - закрепление навыков программирования на алгоритмическом языке и отладки программ.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Увеличение точности решения при укрупненных шагах интегрирования обеспечивают методы Рунге-Кутта. Уточнение достигается за счет специального подбора координат промежуточных на шаге интегрирования точек, в которых вычисляется первая производная. Вместо значения первой производной в начале шага интегрирования, используемой в методе Эйлера, вычисляется усредненная на шаге интегрирования первая производная. Формула численного интегрирования приобретает вид:

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta X \cdot \widetilde{f} \ ,$$

где $\widetilde{f}$ - усредненная на шаге интегрирования первая производная .

Ниже приведены формулы метода Рунге-Кутта различного порядка:

1. Метод 2-го порядка, $\varepsilon = 10^{-2}$:

- первый вариант $Y_{i+1} = Y_i + K_2$,

где $K_2 = \Delta X \cdot f(X_i + \Delta X / 2 , Y_i + K_1 / 2)$,

$K_1 = \Delta X \cdot f(X_i ,Y_i)$;

- второй вариант $Y_{i+1} = Y_i + 1/2 (K_1 + K_2)$,

где $K_1 = \Delta X \cdot f(X_i , Y_i)$,

$K_2 = \Delta X \cdot f(X_i + \Delta X , Y_i + K_1)$.

2. Метод 3-го порядка , $\varepsilon = 10^{-3}$:

- первый вариант $Y_{i+1} = Y_i + 1/4K_1 + 3/4K_3$,

где $K_1 = \Delta X \cdot f(X_i , Y_i)$,

$K_2 = \Delta X \cdot f(X_i + 1/3\Delta X , Y_i + 1/3K_1)$,

$K_3 = \Delta X \cdot f(X_i +2/3\Delta X , Y_i +2/3K_2)$;

- второй вариант $Y_{i+1} = Y_i + 1/6 (K_1 + 4K_2 + K_3)$,

где $K_1 = \Delta X \cdot f(X_i , Y_i)$,

$K_2 = \Delta X \cdot f(X_i + 1/2\Delta X, Y_i + 1/2K_1)$,

$K_3 = \Delta X \cdot f(X_i + \Delta X, Y_i - K_1 + 2K_2)$;

3. Метод 4-го порядка, $\varepsilon = 10^{-4}$:

- первый вариант $Y_{i+1} = Y_i + 1/6 (K_1 + 4K_3 + K_4)$,

где $K_1 = \Delta X \cdot f(X_i , Y_i)$,

$K_2 = \Delta X \cdot f(X_i + 1/4\Delta X ,Y_i + 1/4K_1)$,

$K_3 = \Delta X \cdot f(X_i + 1/2\Delta X , Y_i + 1/2K_2)$,

$K_4 = \Delta X \cdot f(X_i + \Delta X , Y_i + K_1 - 2K_2 + 2K_3)$;

- второй вариант $Y_{i+1} = Y_i + 1/6 (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$,

где $K_1 = \Delta X \cdot f(X_i ,Y_i)$,

$K_2 = \Delta X \cdot f(X_i + 1/2\Delta X, Y_i + 1/2K_1)$,

$K_3 = \Delta X \cdot f(X_i + 1/2\Delta X, Y_i + 1/2K_2)$,

$K_4 = \Delta X \cdot f(X_i + \Delta X, Y_i + K_3)$.

В практических расчётах интегрирование дифференциальных уравнений осуществляется с автоматическим выбором шага, обеспечивающее получение результата с заданной погрешностью решения.

При интегрировании с автоматическим выбором шага рекомендуется использовать следующие правила выбора шага .

В узле X_0 взять $\Delta X = \Delta X_0$, ΔX_0 – заданный начальный шаг, найти приближённые значения решения $\widetilde{Y}$ и $\widetilde{\widetilde{Y}}$ с шагами ΔX и $\Delta X/2$ соответственно. За абсолютную погрешность приближённого решения (в качестве которого естественно взять $\widetilde{\widetilde{Y}}$ как более точное), вычисленного по методу Рунге-Кутта n-го порядка (метод Эйлера является методом Рунге-Кутта первого порядка), принимается

$$\delta = \left| \frac{\widetilde{Y} - \widetilde{\widetilde{Y}}}{2^n - 1} \right| ,$$

Если $\delta \geq \varepsilon$, то шаг ΔX уменьшается в два раза и вычисления повторяются, исходя из узла X_0 . Как только на очередном приближении будет получено $\delta<\varepsilon$, считается, что $\tilde{\tilde{\tilde{Y}}}$ и является решением в узле $X_1=X_0 + \Delta X$, полученным с заданной точностью на этом шаге .

Решение в следующем узле X_2 , исходя из узла X_1 , получается аналогичным образом. При этом начальный шаг выбирается по шагу ΔX, с которым было получено решение в узле X_1 , в зависимости от погрешности δ : если $\delta < \varepsilon /2^{n+1}$, то предыдущий шаг удваивается; в противном случае шаг не изменяется. Аналогично находится решение и в последующих точках .

При выходе к точке $X = b$ следует проявлять осторожность, т.к. при значениях $X > b$ правая часть $f(X, Y)$ дифференциального уравнения может быть не определена и при решении задачи на ЭВМ может произойти прерывание, в результате чего задача будет снята со счёта .

Во избежание такой ситуации необходимо на каждом шаге интегрирования проверять условие выхода за пределы интервала интегрирования. На шаге выхода за точку $X = b$ принять последнее значение ΔX таким, чтобы точно выйти на точку b.

Для отладки программы можно взять простейшее уравнение и небольшой отрезок интегрирования.

В библиотеке стандартных программ имеются программы, для интегрирования дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Дано дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$Y'(X) = f(X, Y) = F(X) - g(X)\cdot Y(X) ,$$

где $F(X)$, $g(X)$ – заданные функции.

Требуется:

1. Найти численное решение задачи Коши на заданном отрезке $[X_0 , b]$ при начальном условии $Y(X_0) = Y_0$ одним из методов Рунге-Кутта:

а) с постоянным шагом $\Delta X = (b - X_0) / N$, где N – число шагов;

б) с автоматическим выбором шага, выйдя на точку $X = b$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Найти решение поставленной задачи с использованием стандартной подпрограммы RK2 .

3. Сравнить численные решения, полученные методами Рунге-Кутта с постоянным шагом, с автоматическим выбором и с помощью стандартной программы RK2 .

Ниже приведены варианты функций g(X) и $F(X) = \varphi(X)*\Psi(X)$. Функция F(X) может быть задана произвольным набором функций φ(X) и Ψ(X) в заданном интервале.

3.1. $\Delta X_0 = 0.5$, $X_0 = 1$, $b = 6$, $Y_0 = 10$, $g(X) = 2(X - 2)$.

Функции φ(X):

1) $e^{-(x+4)x}$ 2) e^{-x^2} ; 3) e^{-x^2+2x} ;

4) xe^{-x^2} ; 5) $(x+2)e^{-x^2}$; 6) $e^{-x^2}\mathrm{Sin}\,x$;

7) $e^{-x^2}\mathrm{Cos}(0.8x)$; 8) $\mathrm{Cos}(x/2)e^{-x^2+3x}$; 9) $\mathrm{Sin}(0.6x)e^{-x^2}$

Функции Ψ(X) :

1) $e^{-2(2x-2)}$; 2) 0.01 ; 3) e^{x} ;

4) e^{-2x}; 5) e^{3x}; 6) $1/\sqrt{2\pi}$;

7) e^{2x-3}; 8) e^{3x-2} ; 9) $e^{x-1.5}$;

3.2. $\Delta X_0 = 0.5$, $X_0 = -1$, $b = 2\pi - 1$, $Y_0 = 8$, $g(X) = -\mathrm{Sin}(X + 1)$

Функции φ(X) :

10) Sin(X+1); 11) $e^{-\mathrm{Cos}(X+1)}$; 12) $(X+2)e^{-\mathrm{Cos}(X+1)}$;

Функции Ψ(X) :

10) $\frac{1}{6}Cos(x+1)$; 11) 1/8 ; 12) 4Cos(X+1) .

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Изучение методов Рунге-Кутта.
2. Составление блок-схемы алгоритма.
3. Составление программы расчёта (в программе предусмотреть возможность её использования для различных функций f(X, Y)).
4. Ввод программы в ЭВМ и отладка программы.
5. Проведение вычислительных экспериментов.
6. Решение поставленной задачи с помощью стандартной подпрограммы RK2.
7. Анализ полученных результатов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем объясняется различие точности методов Рунге-Кутта 1, 2, 3, 4-го порядка?
2. Каким образом в программе обеспечивается выход на точку X =b?
3. Какова реальная максимальная точность численного метода решения дифференциального уравнения на конкретной ЭВМ ?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

- - овладение практическими навыками численного решения дифференциальных уравнений второго порядка и систем дифференциальных уравнений;
- - практика и использование стандартной программы RKGS решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений;
- - проведение вычислительных экспериментов по решению практических задач.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

При интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков можно использовать два подхода. Во-первых, дифференциальное уравнение может быть непосредственно преобразовано в конечно-разностную форму путем представления всех его производных соответствующими конечно-разностными выражениями. Например, уравнение падения тела

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -G(Y), \quad Y(t=0) = h, \quad V(t=0) = V_n,$$

где Y - высота, t - время, G(Y) - ускорение падения, h,V_n - начальная высота и скорость, может быть численно решено с помощью конечно-разностного уравнения

$$Y_{i+1} = 2Y_i - Y_{i-1} + (\Delta t)^2 \cdot G(Y_i) \;,$$

в котором точки Y_0 и Y_1 находятся из начальных условий:

$$Y_0 = h,$$
$$Y_1 = Y_0 + V_n \cdot \Delta\, t$$

Во-вторых, дифференциальное уравнение высшего порядка может быть представлено в форме системы дифференциальных уравнений первого порядка, которые решаются последовательно рассмотренными ранее методами. Например, написанное выше уравнение падения тела может быть представлено системой

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = V(t), \\ \dfrac{dV}{dt} = -G(Y) \end{cases}$$

Решение данной системы методом Эйлера дает систему конечно-разностных уравнений

$$V_{i+1} = V_i + \Delta t(-G((Y_i)),$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta t \cdot (\frac{V_i + V_{i+1}}{2}),$$

где $V_0 = V_н, Y_0 = h$. Аналогично может быть применен метод Рунге-Кутта.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Дана система дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих траекторию движения тела переменной массы в воздухе,

$$\begin{cases} m(t)\frac{d^2x}{dt^2} = [P(t) - R(V)]\cos[\alpha(t)]; \\ m(t)\frac{d^2Y}{dt^2} = [P(t) - R(V)]\sin[\alpha(t)] - m(t)\cdot g(Y); \\ X = X_0, Y = Y_0, V = V_0, \alpha = \alpha_0, t = 0. \end{cases}$$

В приведенной системе уравнений X, Y - пространственные координаты; t - время; α - угол, образуемый касательной к траектории движения с осью X ; m - масса тела, изменяющаяся по заданному закону;

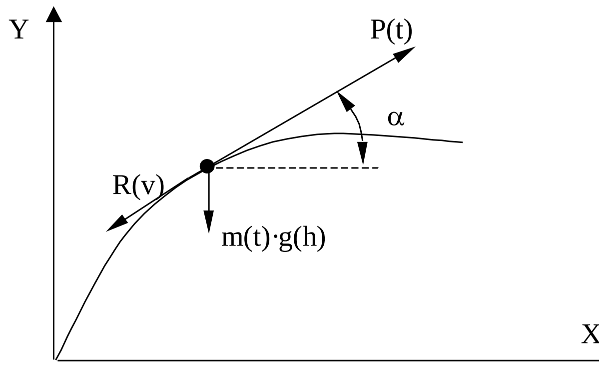


Рис. 3. Схема действующих сил.

$R = (C_x \rho V^2 S_m)/2$ - сила сопротивления воздуха движению тела (C_x - константа, ρ - плотность воздуха, изменяющаяся с высотой движения Y; S_m - площадь сечения тела) ; g - ускорение свободного падения; V - полная скорость движения; P - сила, создаваемая истекающим потоком массы, изменяется по заданному закону.

Каждому студенту предлагаются по заданию преподавателя определенные начальные условия и закономерности m(t), P(t), $\rho(Y)$.

Необходимо численно решить данную задачу двумя способами;

1) непосредственно методом конечных разностей получить решение задачи, используя конечно-разностное представление второй производной;

2) привести дифференциальные уравнения второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка, численно решить эту систему с помощью стандартной подпрограммы RKGS .

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Вывести конечно-разностную формулу численного интегрирования.
2. Разработать алгоритм решения задачи.
3. Первые десять шагов интегрирования произвести вручную.
4. Составить программы решения задачи по разработанному алгоритму и с использованием стандартной подпрограммы RKGS .
5. Проанализировать результаты расчета.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каким образом можно численно решить данную задачу, если часть граничных условий будет задана не в начальной точке (например, в конечной точке траектории или в другой точке)?
2. Какую минимальную величину допустимой погрешности решения можно задавать?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елович И. В. Информатика : учебник для вузов / И.В. Елович, И. В. Кулибаба ; под ред. Г.Г. Раннева .– Москва : Академия, 2011 .– 395 с. : ил. – (Высшее профессиональное образование: Информатика) (Бакалавриат) .— ISBN 978-5-7695-7975-2
2. Острейковский, В. А. Информатика : учебник для вузов / В. А. Острейковский .– 5-е изд., стер. – М. : Высш. Шк., 2009 .– 512 с. : ил .– ISBN 978-5-06-006134-5
3. Цветкова А.В. Информатика и информационные технологии [электронный ресурс]: учебное пособие / А. В.Цветкова.– Саратов: Научная книга, 2012.– 190 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/6276. –Режим доступа : ЭБС «IPRbooks», по паролю
4. Методы принятия оптимальных решений. Часть 1 [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Р.М. Безбородникова [и др.].– Электрон. текстовые данные.– Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2016.– 245 c.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69912.html.– ЭБС «IPRbooks»
5. Пятецкий В.Е. Методы принятия оптимальных управленческих решений [Электронный ресурс]: моделирование принятия решений. Учебное пособие/ Пятецкий В.Е., Литвяк В.С., Литвин И.З.– Электрон. текстовые данные.– Москва: Издательский Дом МИСиС, 2014.– 133 c.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/56567.html.– ЭБС «IPRbooks»
6. Воройский, Ф.С. Информатика. Новый систематизированный толковый словарь-справочник. Введение в современные информационные и телекоммуникационные технологии в терминах и фактах [электронный ресурс] /Ф.С. Воройский. – М.: Физмат-лит, 2011.– 760 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12990.– ЭБС «IPRbooks», по паролю
7. Губарев, В. В. Информатика. Прошлое, настоящее, будущее [электронный ресурс]: учебное пособие для вузов / В. В.Губарев.– М.: Техносфера, 2011.– 432 с.– (Мир программирования). – ISBN 978-5-94836-288-5. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13281. – ЭБС «IPRbooks», по паролю
8. Информатика [электронный ресурс]: учебное пособие/ С.В. Тимченко [и др.]; ТУСУР.– Томск: Эль Контент, 2011.– 160 с.–ISBN 978-5-4332-0009-8. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13935.– ЭБС «IPRbooks»