

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева
Кафедра систем автоматического управления

Утверждено на заседании кафедры
«Системы автоматического управления»
«22» января 2020 г., протокол № 6

Заведующий кафедрой



О.В.Горячев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)

«Теория нестационарных систем управления»

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы специалитета**

по специальности

24.05.06 Системы управления летательными аппаратами

со специализацией

Системы управления движением летательных аппаратов

Форма обучения: очная

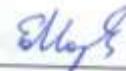
Идентификационный номер образовательной программы: 240506-01-20

Тула 2020 год

Разработчик(и) методических указаний

Морозова Е.В., доцент, к.т.н., доцент

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Примеры простейших нестационарных систем и их дифференциальные уравнения ..	4
2. Примеры сложных нестационарных систем автоматического управления и их дифференциальные уравнения	6
3. Метод уравнивающих операторов	11
4. Математическая модель системы управления самонаводящейся ракеты в форме скалярного дифференциального уравнения	16
5. Математическая модель системы управления самонаводящейся ракеты в нормальной форме Коши.....	21
6. Импульсные переходные функции нестационарных систем	23
7. Математические модели нестационарных САУ в форме векторно-матричного интеграла Коши.....	27
8. Математические модели нестационарных САУ в форме передаточных функций	28
9. Исследование устойчивости линейных нестационарных систем	30
10. Математические модели линейных САУ в форме уравнений с проекционно-матричными операторами	33
Библиографический список	37

1. Примеры простейших нестационарных систем и их дифференциальные уравнения

Пусть задана система, описываемая дифференциальным уравнением

$$a_1(x) \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = Ky(t), \quad (1.1)$$

здесь $a_1(x)$ – коэффициент, являющийся функцией выходной координаты, поэтому уравнение (1.1) – нелинейное. Пусть, например, на основании какого-то упрощающего предположения исходную систему удалось преобразовать к новой, у которой легко вычислить выходной сигнал $x_{\text{оп}}(t)$ (в общем случае $x_{\text{оп}} \neq \text{const}$), причем процесс $x_{\text{оп}}(t)$ близок к $x(t)$. Тогда, выбрав $x_{\text{оп}}(t)$ в качестве опорной траектории, получаем

$$x(t) = x_{\text{оп}}(t) + \Delta x(t), \quad (1.2)$$

где $\Delta x(t)$ – малая величина.

Уравнение (1.1) примет вид

$$a_1(x) \frac{d[x_{\text{оп}}(t) + \Delta x(t)]}{dt} + a_0 [x_{\text{оп}}(t) + \Delta x(t)] = Ky(t).$$

Так как по предположению величина $\Delta x(t)$ мала, линейризуем сначала функцию $a_1(x)$, если она нелинейная,

$$\left\{ [a_1(x)]_{\Delta x=0} + \left[\frac{da_1(x)}{dx} \right]_{\Delta x=0} \Delta x(t) \right\} \left(\frac{dx_{\text{оп}}(t)}{dt} + \frac{d\Delta x(t)}{dt} \right) + a_0 [x_{\text{оп}}(t) + \Delta x(t)] = Ky(t),$$

а потом линейризуем уравнение (пренебрегая малыми величинами второго и высшего порядков, считая при этом, что величина $d\Delta x(t)/dt$ тоже мала):

$$[a_1(x)]_{\Delta x=0} \frac{d\Delta x(t)}{dt} + \left\{ \left[\frac{da_1(x)}{dx} \right]_{\Delta x=0} \frac{dx_{\text{оп}}(t)}{dt} + a_0 \right\} \Delta x(t) = Ky(t) - \left\{ a_0 x_{\text{оп}}(t) + [a_1(x)]_{\Delta x=0} \frac{dx_{\text{оп}}(t)}{dt} \right\}.$$

Нетрудно заметить (см. (1.2)), что выражение $[a_1(x)]_{\Delta x=0} = a_1(x_{\text{оп}})$ – известная функция времени (так как $x_{\text{оп}}(t)$ известна). По той же причине известной функцией времени является и выражение $[da_1(x)/dx]_{\Delta x=0}$.

С учетом обозначений

$$\begin{aligned} [a_1(x)]_{\Delta x=0} &= a_{10}(t); \\ \left\{ \left[\frac{da_1(x)}{dx} \right]_{\Delta x=0} \frac{dx_{\text{оп}}(t)}{dt} + a_0 \right\} &= a_{00}(t); \\ \left\{ a_0 x_{\text{оп}}(t) + [a_1(x)]_{\Delta x=0} \frac{dx_{\text{оп}}(t)}{dt} \right\} &= y_0(t) \end{aligned}$$

уравнение примет вид

$$a_{10}(t) \frac{d\Delta x(t)}{dt} + a_{00}(t) \Delta x(t) = Ky(t) + y_0(t),$$

здесь $a_{10}(t)$, $a_{00}(t)$, $y_0(t)$ – известные функции времени, т.е. исходная нелинейная система после линейризации стала описываться линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами с добавочным известным воздействием $y_0(t)$, что не приносит дополнительных принципиальных трудностей в процесс решения. Действительно, эта система линейна и по отношению к ней справедлив принцип суперпозиции, поэтому $\Delta x(t)$ можно искать следующим образом:

$$\Delta x(t) = \Delta x_y(t) + \Delta x_{y_0}(t),$$

где $\Delta x_y(t), \Delta x_{y_0}(t)$ решение уравнений соответственно:

$$a_{10}(t) \frac{d\Delta x_y(t)}{dt} + a_{00}(t) \Delta x_y(t) = Ky(t);$$
$$a_{10}(t) \frac{d\Delta x_{y_0}(t)}{dt} + a_{00}(t) \Delta x_{y_0}(t) = y_0(t).$$

Класс ДУ, переменность коэффициентов которых обусловлена линеаризацией нелинейных ДУ около некоторых опорных траекторий, являющихся функциями времени, весьма широк.

Однако можно выделить класс САУ, для которых путем перехода к малым отклонениям можно получить линейные ДУ, отражающие основные свойства физических процессов, протекающих в системах. Нелинейные элементы САУ, статические характеристики которых имеют конечные непрерывные однозначные производные в окрестности установившегося процесса, не препятствуют построению линейной модели при переходе к малым отклонениям.

2. Примеры сложных нестационарных систем автоматического управления и их дифференциальные уравнения

Примерами сложных САУ являются системы управления движением ракет или сближением космических аппаратов.

Подробно рассмотрим систему управления самонаводящейся ракетой.

Функциональная схема системы самонаведения определяется, главным образом, типом координатора. Будем принимать во внимание только средства, обеспечивающие изменение траектории ракеты.

$k_{пу}$ Выходным воздействием для координатора является угловое положение линии «ракета-цель»; этот сигнал имеет место на выходе кинематического звена и характеризует взаимное движение центров масс ракеты и цели.

Угловое положение линии «ракета-цель» в неподвижном координаторе сопоставляется с угловым положением продольной оси ракеты, а в подвижном – с равносигнальным направлением. Выходными сигналами неподвижного и подвижного координатора являются напряжения (токи), характеризующие отклонения оси ракеты от направления на цель и угловую скорость линии «ракета-цель» соответственно.

Команды управления в системах самонаведения формируются автопилотом. Там же, помимо того, измеряются и соответствующим образом преобразуются дополнительные сигналы управления, необходимые для стабилизации ракеты и улучшения динамических свойств контура наведения.

Под действием управляющего сигнала, вырабатываемого автопилотом, производится отклонение рулей ракеты так, чтобы устранялось нарушение связей, которые накладываются на движение ракеты.

Система самонаведения помимо контура наведения, обратная связь в котором замыкается через кинематическое звено, содержит ряд внутренних контуров.

В радиотехнической системе самонаведения имеется несколько открытых звеньев, которые могут подвергаться действию организованных помех.

Структурная схема системы самонаведения ракеты с осевой аэродинамической симметрией при прямом способе наведения в вертикальной плоскости может быть представлена в следующем виде (рис. 2.1).

На рис. 2.1: V , $V_{ц}$ – скорость ракеты и цели; θ , $\theta_{ц}$ – угол между вектором скорости и горизонтом ракеты и цели; δ_0 , g – установочный угол руля и ускорение свободного падения; $k_{пу}$ – коэффициент передачи пеленгационного устройства; $L(s)$ – передаточная функция устройства формирования команд; $F(s) = k_{пр}$, $W_{\alpha}(s) = k_{\alpha}$, $W_g(s) = k_g$ – передаточные функции привода рулей, измерителя угла атаки и измерителя угла тангажа; $r(t)$ – расстояние между целью и ракетой.

Основные геометрические соотношения при методе пропорционального сближения ракеты и цели в режиме движения на встречных курсах представлены на рис. 2.2. В этом случае линеаризованное уравнение движения ракеты запишется так:

$$r(t)\Delta\dot{\varphi}(t) + \dot{r}\Delta\varphi(t) = -V(t)\Delta\theta(t) + V_{ц}(t)\Delta\theta_{ц}(t), \quad (2.1)$$

где V — скорость ракеты; $V_{ц}$ – скорость цели; $\Delta\varphi$ — приращение угла линии визирования цели; $\Delta\dot{\varphi}$ — скорость вращения линии визирования; $\Delta\theta$ — приращение угла траектории ракеты; $\Delta\theta_{ц}$ — приращение угла траектории цели; r — расстояние между ракетой и целью на опорной траектории, причем $\dot{r}(t) = V_{ц}(t) - V(t)$.

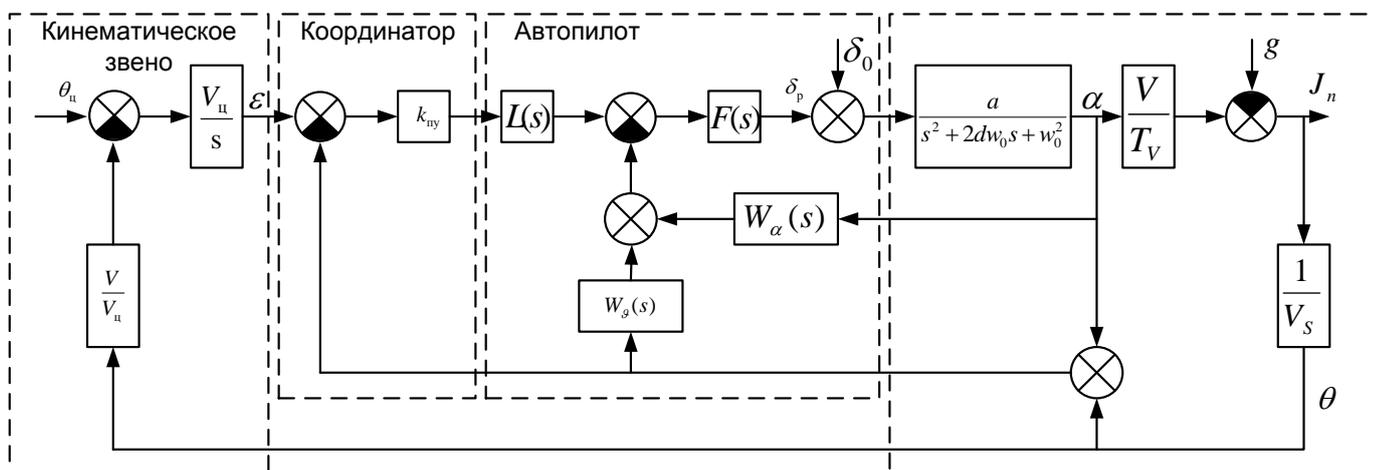


Рис. 2.1. Структурная схема системы самонаведения

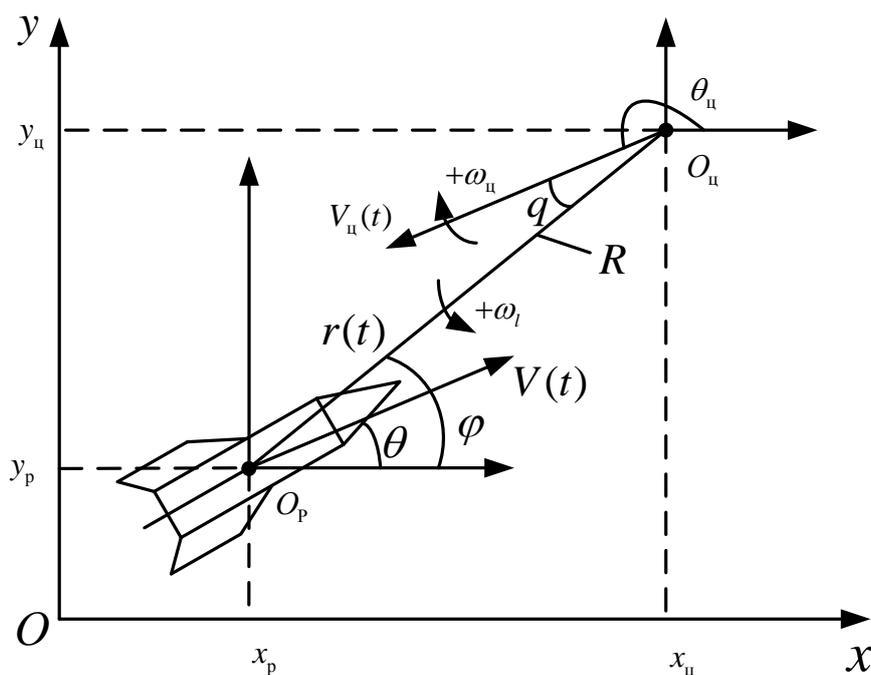


Рис. 2.2. Основные геометрические соотношения при пропорциональном методе сближения

Методом пропорционального сближения называется метод наведения, при котором угловая скорость вращения вектора скорости ракеты пропорциональна угловой скорости вращения линии «ракета-цель». Уравнения метода в прямоугольной системе координат имеют вид (см. рис. 2.2)

$$\dot{x}_{ц} = V_{ц} \cos \theta_{ц};$$

$$\dot{z}_{ц} = V_{ц} \sin \theta_{ц};$$

$$\dot{x} = V \cos \theta;$$

$$\dot{z} = V \sin \theta;$$

$$\dot{\theta} = a \cdot \omega_l,$$

где a – постоянный коэффициент пропорциональности, $\omega_l = \dot{\varphi}$ – скорость вращения линии визирования \mathbf{R} , расстояние между ракетой и целью $r(t) = |\mathbf{R}|$. Пусть цель движется со скоростью

$V_{ц}$ и поворачивается с угловой скоростью $\omega_{ц} = \dot{\theta}_{ц}$, положительное направление которой показано на рис. 2.2 ($+\omega_{ц}$). Положения ракеты и цели в прямоугольной системе координат OXY (O – произвольная точка) определяются координатами x, y и $x_{ц}, y_{ц}$. Положение ракеты относительно цели в полярной системе координат $O_{ц}Rq$, начало которой связано с целью, определяется расстоянием $r(t)$ между целью и ракетой и курсовым углом цели q . Ориентация векторов скорости ракеты и цели в прямоугольной системе координат OXY задается углами θ и $\theta_{ц}$. Ориентация вектора скорости ракеты в полярной системе координат задается углом пеленга цели $\Psi = \varphi - \theta$. Уравнения движения в полярной системе координат могут быть записаны так:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -V \cos \psi - V_{ц} \cos q; \\ \dot{q} &= \frac{V_{ц} \sin q - V \sin \psi}{r} + \omega_{ц}; \\ \dot{\varphi} &= \frac{V_{ц} \sin q - V \sin \psi}{r}.\end{aligned}$$

Законы изменения скорости цели $V_{ц}$, скорости ЗУР V , курса цели $\theta_{ц}(t)$ или угловой скорости вращения вектора скорости цели $\omega_{ц}(t)$ и соответствующие начальные условия приводят к замкнутой системе дифференциальных уравнений, как в прямоугольных, так и полярных координатах.

С помощью структурного преобразования, заключающегося в переносе воздействия $\Delta\theta_0$ к точке приложения воздействия $V_{ц}(t)\theta_{ц}(t)$, исходная схема (рис. 2.3, а) примет вид, изображенный на рис. 2.3, б. На схеме $g(t) = V_{ц}(t)\Delta\theta_{ц}(t) - V(t)\Delta\theta_0$ – внешнее воздействие, эквивалентное маневру цели и начальной ошибке прицеливания.

Система включает следующие блоки:

Блок 1 – *кинематическое звено 1* (рис. 2.3, а), соответствующее инерционной части линеаризованного уравнения (2.1), имеет импульсную переходную функцию

$$k_1(t, \tau) = \frac{1}{r(t)} l(t - \tau). \quad (2.2)$$

Блок 2 – *кинематическое звено 2*, определяемое правой частью уравнения (2.1) с использованием связи между нормальными ускорениями ракеты $\eta(t)$ и скоростью изменения угла ее траектории $\dot{\theta}(t)\eta(t) = V(t)\dot{\theta}(t)$.

Блок 3 – *система стабилизации ракеты*, она имеет следующую передаточную функцию:

$$W_3(s) = \frac{1}{T_{cc}s + 1}. \quad (2.3)$$

Блок 4 – блок выработки команд (устройство формирования команд), реализующий метод наведения. При методе пропорционального сближения требуемые нормальные ускорения ракеты определяются формулой

$$\eta_k(t) = n |\dot{r}(t)| \dot{\varphi}_k(t) \quad (2.4)$$

где n – константа навигации.

Блок 5 – координатор цели, который измеряет скорость вращения линии визирования $\dot{\varphi}(t)$. Передаточная функция координатора имеет вид

$$W_5(s) = \frac{s}{Ts + 1} \tag{2.5}$$

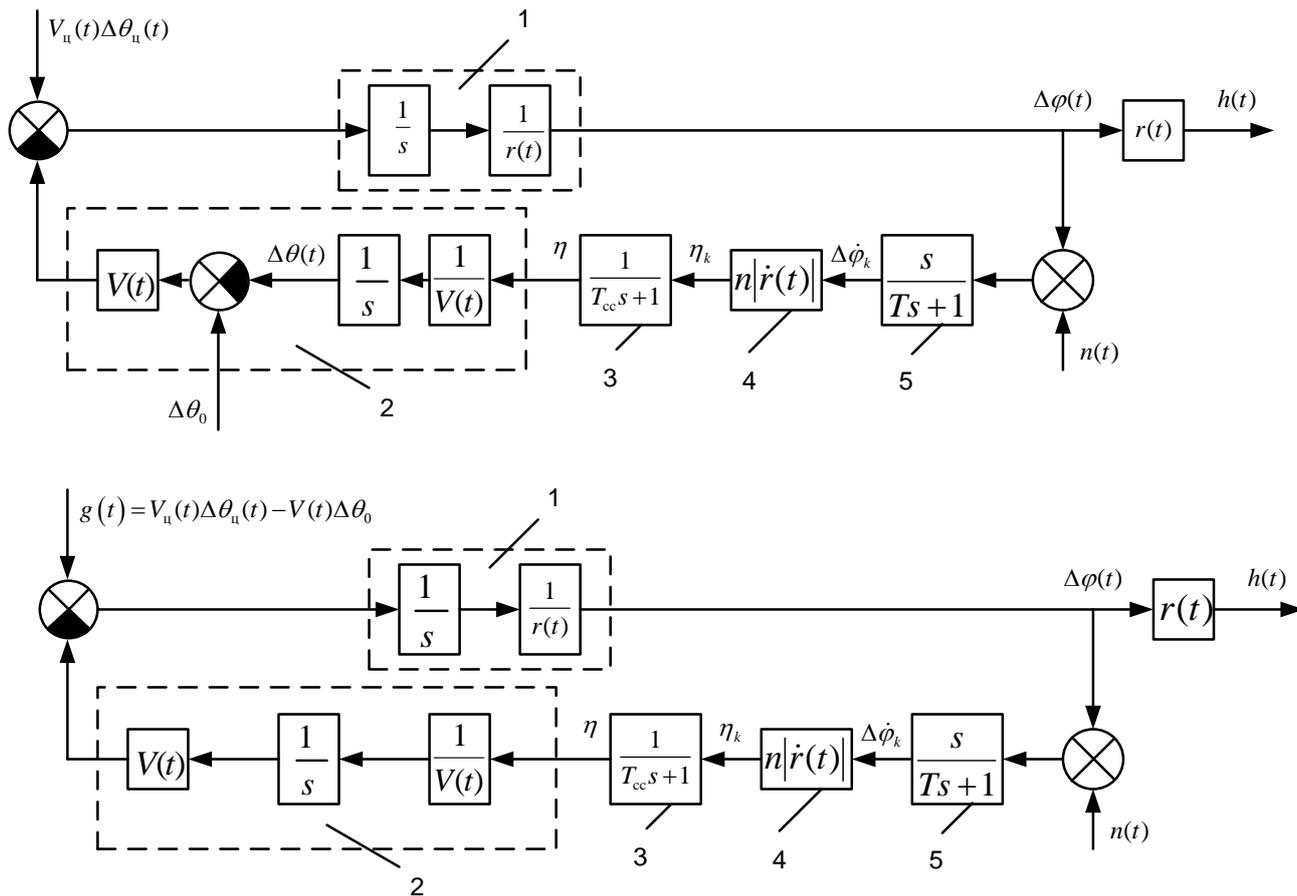


Рис. 2.3. Структурные схемы системы управления самонаводящейся ракетой:
 а – исходная схема; б – преобразованная схема

Выходной сигнал системы – линейное смещение ракеты $h(t)$ относительно опорной невращающейся линии визирования цели (линия, соединяющая центры масс ракеты и цели):

$$h(t) = r(t)\Delta\varphi(t). \tag{2.6}$$

За величину промаха (ошибки) h принимается значение $h(t)$ в момент выключения координатора $t = t_{\text{вык}}$. При исследовании систем управления целесообразно также пользоваться понятием о текущем промахе $h(t)$, характеризующем величину отклонения ракеты от цели в картинной плоскости при предположении о том, что начиная с данного момента времени t процесс наведения прекращается и векторы скоростей цели и ракеты остаются неизменными.

Из внешних воздействий системы учтены: маневр цели, описываемый функцией $V_{ц}(t)\Delta\theta_{ц}$, начальная ошибка прицеливания $\Delta\theta_{ц} = const$ и помеха $n(t)$.

Итак, метод пропорционального наведения требует, чтобы угловая скорость вращения вектора скорости ракеты была пропорциональна угловой скорости вращения линии «ракета-цель». При наведении ракеты в вертикальной плоскости уравнение рассогласования имеет вид

$$\Delta\dot{\theta} = a\dot{\varepsilon} - \dot{\theta} \tag{2.7}$$

здесь a – коэффициент пропорциональности.

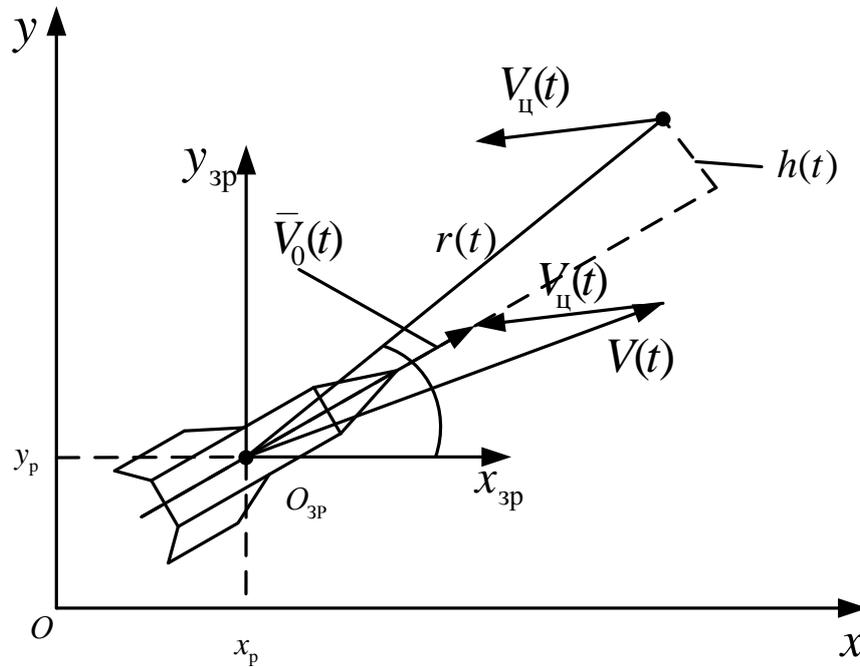


Рис. 2.4. Определение промаха ракеты ($v_0(t)$ – скорость ракеты относительно цели)

Первый член правой части уравнения рассогласования представляет собой требуемое значение управляемой величины $\chi_T = a\dot{\varepsilon}$, а второй – ее действительное значение $\chi_d = \dot{\theta}$.

Пропорциональное наведение, как и параллельное сближение, относится к группе методов управления с переменным углом упреждения. При идеальном наведении закон изменения требуемого угла упреждения q_T находится из уравнения (2.7), если положить в нем $\Delta\dot{\theta} = 0$. Тогда

$$\dot{q}_T = (1 - a)\dot{\varepsilon}.$$

В отличие от метода параллельного сближения, идеальное выполнение которого требует от системы управления мгновенного устранения вращения линии «ракета-цель», при пропорциональном наведении требования к системе управления менее жесткие, так как ее роль сводится лишь к уменьшению угловой скорости вращения линии визирования. Измерение параметра рассогласования при наведении ракеты по рассматриваемому методу осуществляется координатором, который содержит два типа измерителей. Один из них представляет собой следящий радиотехнический угломер, измеряющий угловую скорость линии «ракета-цель», а второй является измерителем угловой скорости вращения вектора скорости ракеты. Такой измеритель может быть выполнен на базе датчика нормальных ускорений (акселерометра).

Параметр рассогласования при наведении ракеты записывается в виде

$$\Delta\dot{\theta} = (a\varepsilon_z - \dot{\theta}_z) + j(a\dot{\varepsilon}_y - \dot{\theta}_y)$$

Последняя формула справедлива при условии согласования измерительных систем координат с плоскостями управления.

Для решения задач анализа и синтеза САУ самонаводящейся ракеты необходимо знать ДУ, связывающее входной и выходной сигналы системы, т.е. ДУ замкнутой САУ.

3. Метод уравнивающих операторов

Пример. Поведение замкнутой нестационарной системы описывается системой ДУ вида

$$\begin{cases} a_1(t) \frac{dx_2}{dt} + a_0(t)x_2 = x_1; \\ x_3 = b_1(t) \frac{dx_2}{dt} + b_0(t)x_2; \\ d_1(t) \frac{dx}{dt} + d_0(t)x = x_1; \\ c_2(t) \frac{d^2x_1}{dt^2} + c_1(t) \frac{dx_1}{dt} + c_0(t) = y - x_3 - x_4; \\ x_4 = e_1(t) \frac{dx}{dt} + e_0(t)x. \end{cases} \quad (3.1)$$

Введем дифференциальные операторы (начинаем с уравнения максимального порядка)

$$V_1 = c_2 p^2 + c_1 p + c_0; F_2 = b_1 p + b_0;$$

$$V_2 = a_1 p + a_0; F_3 = e_1 p + e_0;$$

$$V_3 = d_1 p + d_0$$

и перепишем (3.1) в следующем виде:

$$\begin{cases} V_1 x_1 = y - x_3 - x_4 = \varepsilon - x_3; \\ V_2 x_2 = x_1; \\ F_2 x_2 = x_3; \\ F_3 x = x_4; \\ V_3 x = x_1; \\ \varepsilon = y - x_4. \end{cases}$$

Структурная схема системы изображена на рис. 3.1.

Преобразуем сначала внутренний контур I в один эквивалентный элемент, т.е. найдем уравнение, связывающее координаты $\varepsilon(t)$ и $x_1(t)$.

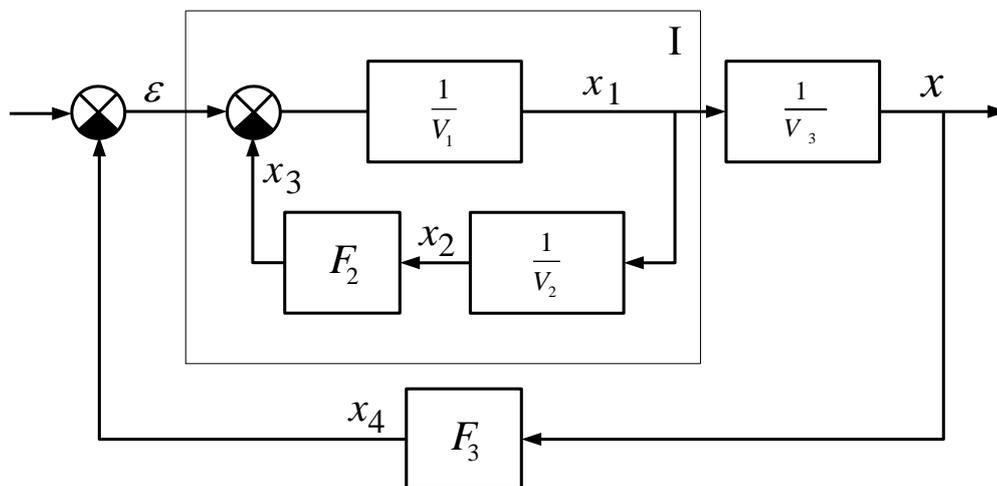


Рис. 3.1. Структурная схема системы

Для контура I имеем уравнения

$$\begin{aligned} V_2 x_2 &= x_1; \\ F_2 x_2 &= x_3; \\ V_1 x_1 &= \varepsilon - x_3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Применяя метод уравнивающих операторов, исключим промежуточную переменную x_2 . Умножим для этого обе части первого и второго уравнений (3.2) на уравнивающие операторы U_1 и U_2 .

Имеем

$$\begin{aligned} [U_1 * V_2] x_2 &= U_1 x_1; \\ [U_2 * F_2] x_2 &= U_2 x_3. \end{aligned}$$

При выполнении тождества

$$U_1 * V_2 = U_2 * F_2 \quad (3.3)$$

переменная x_2 исключается, в результате чего получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} U_1 x_1 &= U_2 x_3; \\ V_1 x_1 &= \varepsilon - x_3 \end{aligned}$$

Из этих уравнений подстановкой исключим переменную x_3 :

$$U_1 x_1 = U_2 [\varepsilon - V_1 x_1] = U_2 \varepsilon - U_2 * V_1 x_1,$$

или

$$U_2 \varepsilon = [U_1 + U_2 * V_1] x_1. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) можно записать также в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} x_5 = U_2 \varepsilon; \\ [U_1 + U_2 * V_1] x_1 = x_5. \end{cases} \quad (3.5)$$

Структурная схема системы, учитывающая (3.5), представлена на рис. 3.2.

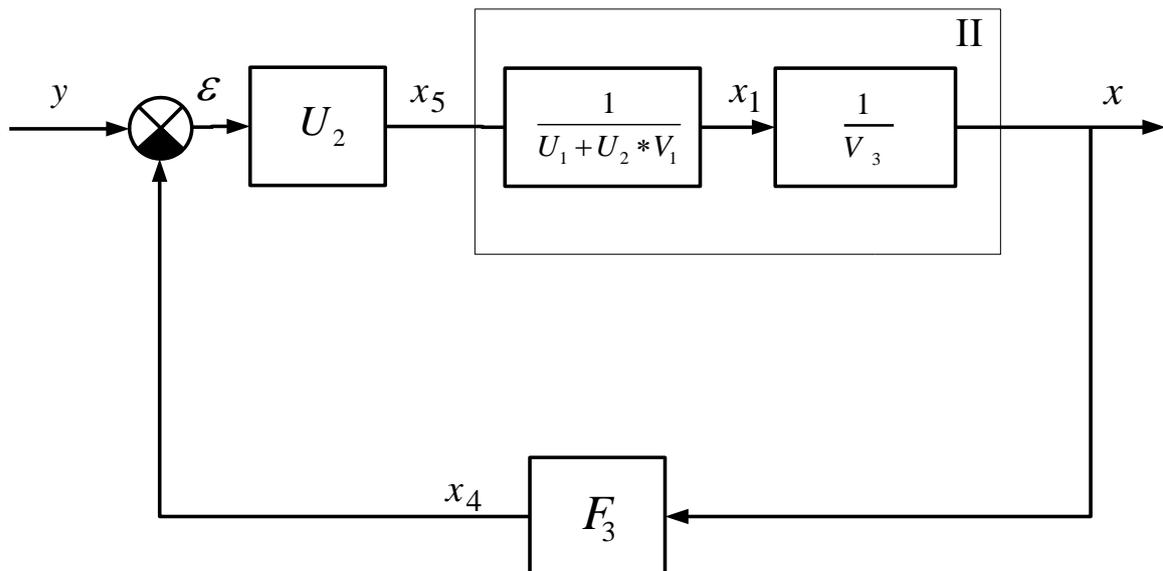


Рис. 3.2. Структурная схема системы

Определим операторы U_1 и U_2 . Операторы V_2 и F_2 имеют соответственно порядок $n = 1$ и $m = 1$, так что их общий порядок $r = n + m = 2$. Порядок операторов U_1 и U_2 должен быть соответственно равен $\nu = m = 1$ и $\mu = n = 1$, поэтому они могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{cases} U_1 = \alpha_1 p + \alpha_0; \\ U_2 = \beta_1 p + \beta_0. \end{cases}$$

Составим на основании тождества (3.3) систему из $r + 1 = 3$ уравнений для определения коэффициентов $\alpha_0, \beta_1, \beta_0$ (коэффициент α_1 примем равным единице):

$$\begin{cases} a_1 = \beta_1 b_1; \\ \mathbf{p}a_1 + \alpha_0 a_1 + a_0 = \beta_1 \mathbf{p}b_1 + \beta_0 b_1 + \beta_1 b_0; \\ \mathbf{p}a_0 + \alpha_0 a_0 = \beta_1 \mathbf{p}b_0 + \beta_0 b_0. \end{cases}$$

Решая ее, находим следующие значения коэффициентов операторов U_1 и U_2 :

$$\beta_1 = \frac{a_1}{b_1}; \beta_0 = \frac{-a_1 [b_1 \mathbf{p}a_0 + a_0 (\mathbf{p}b_1 + b_0) - a_1 \mathbf{p}b_0] + a_0 b_1 (\mathbf{p}a_1 + a_0)}{b_1 (a_0 b_1 - a_1 b_0)};$$

$$\alpha_1 = 1; \alpha_0 = \frac{b_1 [a_1 \mathbf{p}b_0 + b_0 (\mathbf{p}a_1 + a_0) - b_1 \mathbf{p}a_0] + b_0 a_1 (\mathbf{p}b_1 + b_0)}{b_1 (a_0 b_1 - a_1 b_0)}.$$

Найдём произведение операторов $U_2 * V_1$, входящее в выражение (3.5):

$$U_2 * V_1 = U_2 \cdot V_1 + \frac{dU_2}{dp} V_1 p = (\beta_1 p + \beta_0)(c_2 p^2 + c_1 p + c_0) + \beta_1 (c_2 p^2 + c_1 p + c_0) \mathbf{p} =$$

$$= \beta_1 c_2 p^3 + (\beta_1 \mathbf{p}c_2 + \beta_0 c_2 + \beta_1 c_1) p^2 + (\beta_1 \mathbf{p}c_1 + \beta_0 c_1 + \beta_1 c_0) p + (\beta_1 \mathbf{p}c_0 + \beta_0 c_0).$$

Определим значение суммы операторов

$$U_1 + U_2 * V_1.$$

Очевидно,

$$[U_1 + U_2 * V_1] \equiv V_4 = a_{43} p^3 + a_{42} p^2 + a_{41} p + a_{40},$$

где коэффициенты $a_{43}, a_{42}, a_{41}, a_{40}$ имеют следующие значения:

$$a_{43} = \beta_1 c_2;$$

$$a_{42} = \beta_1 \mathbf{p}c_2 + \beta_0 c_2 + \beta_1 c_1;$$

$$a_{41} = \beta_1 \mathbf{p}c_1 + \beta_0 c_1 + \beta_1 c_0 + \alpha_1;$$

$$a_{40} = \beta_1 \mathbf{p}c_0 + \beta_0 c_0 + \alpha_0.$$

Произведем дальнейшее преобразование структурной схемы. Найдём эквивалентное звено для звеньев, входящих в контур II.

Для этих звеньев имеем систему уравнений

$$\begin{cases} [U_1 + U_2 * V_1] x_1 = x_5; \\ x_1 = V_3 x. \end{cases} \quad (3.6)$$

Подставляя значение x_1 , из второго уравнения (3.6) в первое, получим

$$\{[U_1 + U_2 * V_1] * V_3\} x = x_5. \quad (3.7)$$

Вычислим значение оператора левой части уравнения (3.7)

$$\{[U_1 + U_2 * V_1] * V_3\} = V_4 * V_3 = V_4 V_3 + \frac{dV_4}{dp} V_3 \mathbf{p} + \frac{d^2 V_4}{dp^2} V_3 \frac{\mathbf{p}^2}{2} + \frac{d^3 V_4}{dp^3} V_3 \frac{\mathbf{p}^3}{3!} =$$

$$= b_{44} p^4 + b_{43} p^3 + b_{42} p^2 + b_{41} p^1 + b_{40} p^0,$$

где коэффициенты $b_{44}, b_{43}, b_{42}, b_{41}, b_{40}$ определяются соотношениями

$$b_{44} = a_{43}d_1;$$

$$b_{43} = 3a_{43}pd_1 + a_{42}d_1 + a_{43}d_0;$$

$$b_{42} = 3a_{43}p^2d_0 + a_{42}d_0 + a_{41}d_1 + 2a_{42}pd_1 + 3a_{43}p^2d_1;$$

$$b_{41} = a_{41}d_0 + 2a_{42}pd_0 + 3a_{43}p^2d_0 + a_{40}d_1 + a_{41}pd_1 + a_{42}p^2d_1 + a_{43}p^3d_1;$$

$$b_{40} = a_{40}d_0 + a_{41}pd_0 + a_{42}p^2d_0 + a_{43}p^3d_0.$$

Структурная схема системы, преобразованная с учетом уравнения (7), изображена на рис. 3.3.

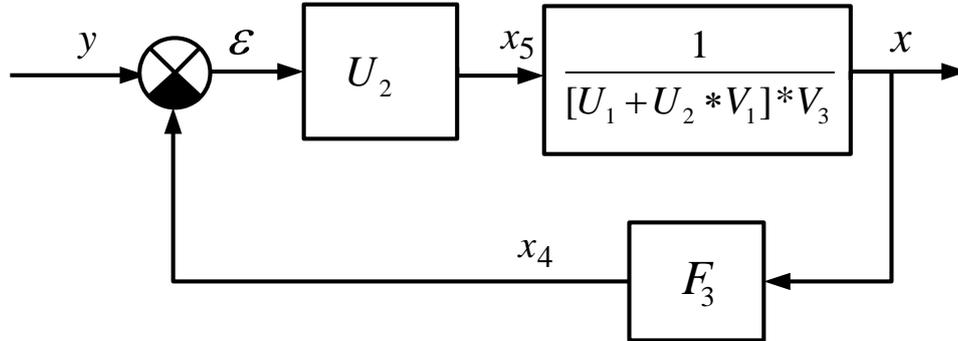


Рис. 3.3. Структурная схема системы

Перейдем к последнему преобразованию структурной схемы – к установлению связи между сигналами $y(t)$ и $x(t)$.

Для структурной схемы, изображенной на рис. 3.3, имеет место система уравнений

$$\begin{cases} x_5 = U_2 \varepsilon; \\ x_4 = F_3 x; \\ x_5 = \{ [U_1 + U_2 * V_1] * V_3 \} x; \\ \varepsilon = y - x_4. \end{cases} \quad (3.8)$$

Применяя метод подстановки, исключим из системы уравнений (3.8) промежуточные переменные x_4 и x_5 . Получаем последовательно

$$\begin{aligned} U_2 \varepsilon &= \{ [U_1 + U_2 * V_1] * V_3 \} x; \\ \varepsilon &= y - F_3 x. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Далее из уравнений (3.9) находим

$$U_2 [y - F_3 x] = \{ [U_1 + U_2 * V_1] * V_3 \} x;$$

или

$$U_2 y = \{ U_2 * F_3 + [U_1 + U_2 * V_1] * V_3 \} x.$$

Обозначая оператор в фигурной скобке через L_0 :

$$\{ U_2 * F_3 + [U_1 + U_2 * V_1] * V_3 \} = L_0,$$

окончательно получим

$$U_2 y = L_0 x. \quad (3.10)$$

Чтобы найти выражение для оператора L_0 , нужно определить значение только первого слагаемого $U_2 * F_3$, так как второе слагаемое уже найдено. Получим

$$U_2 * F_3 = U_2 F_3 + \frac{dU_2}{dp} F_3 \mathbf{p} = (\beta_1 e_1) p^2 + (\beta_1 \mathbf{p} e_1 + \beta_0 e_1 + \beta_1 e_0) p + (\beta_0 e_0 + \beta_1 \mathbf{p} e_0).$$

Для оператора L_0 находим следующую зависимость:

$$L_0 = b_{44} p^4 + b_{43} p^3 + (b_{42} + \beta_1 e_1) p^2 + (b_{41} + \beta_1 e_0 + \beta_0 e_1 + \beta_1 \mathbf{p} e_1) p + (b_{40} + \beta_0 e_0 + \beta_1 \mathbf{p} e_0).$$

Эквивалентная структурная схема, соответствующая уравнению (3.10), имеет простой вид и изображена на рис. 3.4.

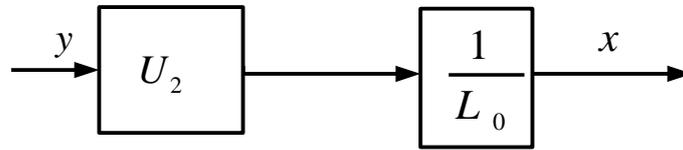


Рис. 3.4. Структурная схема системы

4. Математическая модель системы управления самонаводящейся ракеты в форме скалярного дифференциального уравнения

Расчетная схема системы управления самонаводящейся ракеты представлена на рис 4.1.

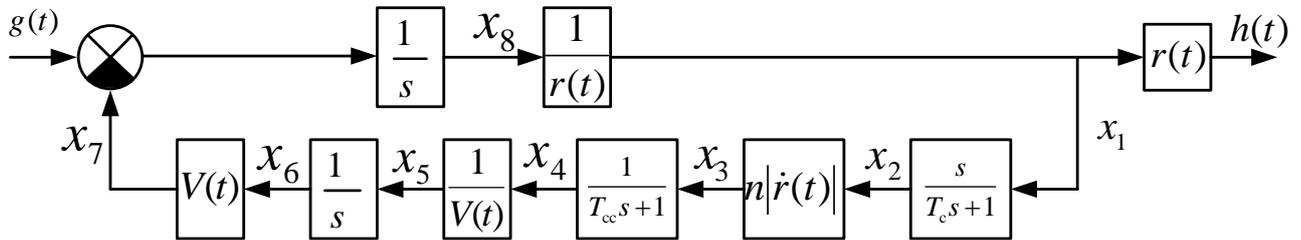


Рис. 4.1. Расчетная схема системы управления самонаводящейся ракеты

С использованием дифференциальных операторов данная схема может быть представлена в форме (рис. 4.2), когда каждому из функциональных блоков, входящих в состав системы управления, соответствует свой дифференциальный оператор. Запись оператора в виде обратного (B_i^{-1} , $i = \overline{1,9}$) означает, что соответствующий дифференциальный оператор действует на соответствующий выход, а в виде прямого (A_1) – на соответствующий вход.

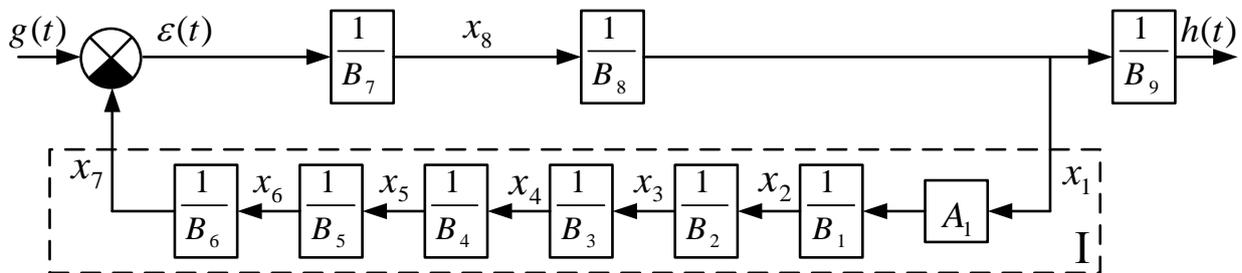


Рис. 4.2. Структурная схема системы управления самонаводящейся ракеты в операторной форме

Структурной схеме рис. 4.2 соответствует следующая система операторных уравнений:

$$\begin{cases} A_1 x_1(t) = B_1 x_2(t); \\ x_2(t) = B_2 x_3(t); \\ x_3(t) = B_3 x_4(t); \\ x_4(t) = B_4 x_5(t); \\ x_5(t) = B_5 x_6(t); \\ x_6(t) = B_6 x_7(t); \\ x_7(t) = g(t) - \varepsilon(t); \\ x_8(t) = B_8 x_1(t); \\ \varepsilon(t) = B_7 x_8(t); \\ x_1(t) = B_9 h(t); \end{cases} \quad (4.1)$$

где дифференциальные операторы определяются следующими зависимостями:

$$p = d / dt;$$

$$A_1 = p;$$

$$B_1 = T_c p + 1 = b_{11} p + b_{10};$$

$$B_2 = \frac{1}{n|\dot{r}(t)|} = b_{20};$$

$$B_3 = T_{cc} p + 1 = b_{31} p + b_{30};$$

$$B_4 = V(t) = b_{40};$$

$$B_5 = p;$$

$$B_6 = 1/V(t) = b_{60};$$

$$B_7 = p;$$

$$B_8 = r(t) = b_{80};$$

$$B_9 = 1/r(t) = b_{90}.$$

Далее необходимо привести структурную схему (рис. 4.2), описываемую системой дифференциальных уравнений (4.1), к эквивалентной простой схеме, описываемой одним скалярным дифференциальным уравнением, связывающим вход $g(t)$ и выход $h(t)$.

Для этого сначала преобразуем группу функциональных элементов в обратной связи I (рис 4.2).

1. Исключаем переменную $x_2(t)$:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 x_1 = B_1 x_2, \\ x_2 = B_2 x_3 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 x_1 = [B_1 * B_2] x_3 = F_0 x_3;$$

$$F_0 = B_1 * B_2 = f_{00} + f_{01} p;$$

$$f_{00} = \left(T_c \mathbf{P} \left(\frac{1}{n|\dot{r}(t)|} \right) + \frac{1}{n|\dot{r}(t)|} \right); \quad f_{01} = \frac{T_c}{n|\dot{r}(t)|}.$$

2. Исключаем переменную $x_3(t)$:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 x_1 = F_0 x_3, \\ x_3 = B_3 x_4 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 x_1 = [F_0 * B_3] x_4 = F_1 x_4;$$

$$F_1 = F_0 * B_3 = f_{10} + f_{11} p + f_{12} p^2;$$

$$f_{10} = f_{00} b_{30} + f_{01} \mathbf{P} b_{30};$$

$$f_{11} = f_{00} b_{31} + f_{01} \mathbf{P} b_{31} + f_{01} b_{30};$$

$$f_{12} = f_{01} b_{31}.$$

3. Исключаем переменную $x_4(t)$:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 x_1 = F_1 x_4, \\ x_4 = B_4 x_5 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 x_1 = [F_1 * B_4] x_5 = F_2 x_5;$$

$$F_2 = F_1 * B_4 = f_{20} + f_{21} p + f_{22} p^2;$$

$$f_{20} = f_{12} \mathbf{P}^2 b_{40} + f_{11} \mathbf{P} b_{40} + f_{10} b_{40};$$

$$f_{21} = 2 f_{12} \mathbf{P} b_{40} + f_{11} b_{40};$$

$$f_{22} = f_{12} b_{40}.$$

4. Исключаем переменную $x_5(t)$:

$$\left. \begin{aligned} A_1 x_1 &= F_2 x_5, \\ x_5 &= B_5 x_6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1 x_1 = [F_2 * B_5] x_6 = F_3 x_6;$$

$$F_3 = F_2 * B_5 = f_{30} + f_{31}p + f_{32}p^2 + f_{33}p^3;$$

$$f_{30} = 0; f_{31} = f_{20}; f_{32} = f_{21}; f_{33} = f_{22}.$$

5. Исключаем переменную $x_5(t)$:

$$\left. \begin{aligned} A_1 x_1 &= F_3 x_6, \\ x_5 &= B_6 x_7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1 x_1 = [F_3 * B_6] x_7 = F_4 x_7;$$

$$F_4 = F_3 * B_6 = f_{40} + f_{41}p + f_{42}p^2 + f_{43}p^3;$$

$$f_{40} = f_{33}p^3 b_{60} + f_{32}p^2 b_{60} + f_{31}p b_{60};$$

$$f_{41} = 3f_{33}p^2 b_{60} + 2f_{32}p b_{60} + f_{31} b_{60};$$

$$f_{42} = 3f_{33}p b_{60} + f_{32} b_{60};$$

$$f_{43} = f_{33} b_{60}.$$

Таким образом, группа элементов в обратной связи описывается следующим уравнением с дифференциальным оператором:

$$A_1 x_1(t) = F_4 x_7(t);$$

$$F_4 = [B_1 * B_2 * B_3 * B_4 * B_5 * B_6].$$

Структурная схема (рис. 4.2) с учетом преобразованной обратной связи примет следующий вид (рис. 4.3):

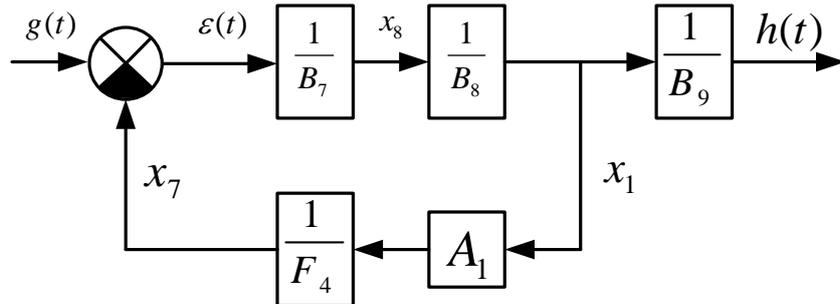


Рис. 4.3. Структурная схема системы управления с преобразованной обратной связью.

Преобразуем схему, исключив переменные $x_7(t)$, $\varepsilon(t)$, $x_8(t)$, $x_1(t)$. Структурная схема рис. 4.3 описывается следующей системой уравнений с дифференциальными операторами:

$$\begin{cases} x_7(t) = g(t) - \varepsilon(t); \\ A_1 x_1(t) = F_4 x_7(t); \\ \varepsilon(t) = B_7 x_8(t); \\ x_8(t) = B_8 x_1(t); \\ x_1(t) = B_9 h(t). \end{cases}$$

Из системы соответствующей подстановкой получим

$$x_7(t) = g(t) - B_7 x_8(t),$$

или

$$x_7(t) = g(t) - [B_7 * B_8] x_1(t).$$

Исключим переменную $x_7(t)$:

$$A_1 x_1(t) = F_4 \{g(t) - [B_7 * B_8] x_1(t)\},$$

или

$$A_1 x_1(t) = F_4 g(t) - [F_4 * B_7 * B_8] x_1(t).$$

Учитывая, что $x_1(t) = B_9 h(t)$, окончательно получаем

$$\{[A_1 * B_9] + [F_4 * B_7 * B_8 * B_9]\} h(t) = F_4 g(t).$$

Найдем дифференциальный оператор левой части уравнения:

1.

$$B_7 * B_8 * B_9 = C = c_1 p + c_0;$$

$$c_0 = b_{80} p b_{90} + p b_{80} b_{90};$$

$$c_1 = b_{80} b_{90}.$$

2.

$$A_1 * B_9 = b_{90} p + p b_{90}.$$

3.

$$F_4 * C + A_1 * B_9 = L = l_4 p^4 + l_3 p^3 + l_2 p^2 + l_1 p + l_0;$$

$$l_0 = f_{43} p^3 c_0 + f_{42} p^2 c_0 + f_{41} p c_0 + f_{40} c_0 + p b_{90};$$

$$l_1 = 3f_{43} p^2 c_0 + 2f_{42} p c_0 + f_{41} c_0 + f_{43} p^3 c_1 + f_{42} p^2 c_1 + f_{41} p c_1 + f_{40} c_1 + b_{90};$$

$$l_2 = 3f_{43} p c_0 + f_{42} c_0 + 3f_{43} p^2 c_1 + 2f_{42} p c_1 + f_{41} c_1;$$

$$l_3 = f_{43} c_0 + 3f_{43} p c_1 + f_{42} c_1;$$

$$l_4 = f_{43} c_1.$$

4. Для удобства переобозначим

$$D = F_4 = d_3 p^3 + d_2 p^2 + d_1 p + d_0;$$

$$d_3 = f_{43}; d_2 = f_{42}; d_1 = f_{41}; d_0 = f_{40}.$$

Структурная схема с учетом последних преобразований примет вид (рис. 4.4):

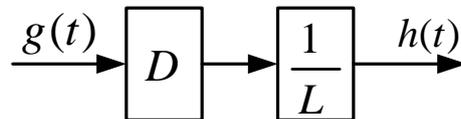


Рис. 4.4. Преобразованная структурная схема системы управления самонаводящейся ракетой

Искомое скалярное дифференциальное уравнение, описывающее поведение системы управления самонаводящейся ракетой в операторной форме запишется так:

$$Lh(t) = Dg(t),$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} l_4(t) \frac{d^4 h(t)}{dt^4} + l_3(t) \frac{d^3 h(t)}{dt^3} + l_2(t) \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + l_1(t) \frac{dh(t)}{dt} + l_0(t) h(t) = \\ = d_3(t) \frac{d^3 g(t)}{dt^3} + d_2(t) \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + d_1(t) \frac{dg(t)}{dt} + d_0(t) g(t). \end{aligned}$$

Действие дифференциального оператора определяется зависимостями

$$pb_0(t) = \frac{db_0(t)}{dt} = b_0'(t); p^2b_0(t) = \frac{d^2b_0(t)}{dt^2} = b_0''(t);$$

$$c_0(t)pb_0(t)a_0(t) = c_0(t) \frac{db_0(t)}{dt} a_0(t) = c_0(t)b_0'(t)a_0(t);$$

$$c_0(t)p^2b_0(t)a_0(t) = c_0(t) \frac{d^2b_0(t)}{dt^2} a_0(t) = c_0(t)b_0''(t)a_0(t).$$

Пример. Если в системе управления самонаводящейся ракеты принять скорость ракеты – $V(t) = 200(1+t)м/с$;

скорость цели – $V_{ц}(t) = 400м/с$;

изменение расстояния между ракетой и целью – $r(t) = 100(45 - 6t - t^2)м$;

задающее воздействие – $g(t) = V_{ц}\Delta\Theta_{ц}(t) - V(t)\Delta\Theta_o(t) = V_{ц} \cdot 0,05 - V(t) \cdot 0,05$,

то коэффициенты дифференциального уравнения будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0,54/n & 2,16/n & 3,42/n & 2,72/n & 1,14/n & 0,24/n & 0,02/n & 0,00/n & 0,00/n \\ -17,31+4,05n & -44,89+14,31n & -29,87+18,63n & 2,7+10,41n & 3,56+1,79n & -0,0125-0,39n & -0,0815-0,15n & -0,005-0,01n & 0,00 \\ 17,31 & 62,21 & 74,77 & 27,17 & -6,26 & -3,55 & 0,094 & 0,087 & 0,005 \\ 10,935 & 34,55 & 35,89 & 10,45 & -3,27 & -1,42 & 0,055 & 0,036 & 0,002 \\ 0,911 & 2,79 & 2,81 & 0,78 & -0,26 & -0,11 & 0,0045 & 0,0027 & 0,00015 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} d_0(t) \\ d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -17,3 & -44,89 & -29,87 & 2,7 & 3,56 & -0,0125 & -0,082 & -0,005 & 0,00 \\ 17,31 & 62,2 & 74,77 & 27,17 & -6,26 & -3,55 & 0,094 & 0,087 & 0,005 \\ 10,935 & 34,55 & 35,89 & 10,45 & -3,27 & -1,42 & 0,055 & 0,0357 & 0,002 \\ 0,911 & 2,79 & 2,81 & 0,775 & -0,261 & -0,11 & 0,0045 & 0,0027 & 0,00015 \end{bmatrix},$$

где n – константа навигации.

5. Математическая модель системы управления самонаводящейся ракеты в нормальной форме Коши

Рассмотрим математическую модель системы управления самонаводящейся ракеты в нормальной форме Коши.

Скалярное дифференциальное уравнение системы управления самонаводящейся ракеты имеет вид

$$\begin{aligned} l_4(t) \frac{d^4 h(t)}{dt^4} + l_3(t) \frac{d^3 h(t)}{dt^3} + l_2(t) \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + l_1(t) \frac{dh(t)}{dt} + l_0(t) h(t) = \\ = d_3(t) \frac{d^3 g(t)}{dt^3} + d_2(t) \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + d_1(t) \frac{dg(t)}{dt} + d_0(t) g(t). \end{aligned}$$

Разделим на $l_4(t)$ и сделаем следующие переобозначения для коэффициентов этого уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 h(t)}{dt^4} + a_1(t) \frac{d^3 h(t)}{dt^3} + a_2(t) \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + a_3(t) \frac{dh(t)}{dt} + a_4(t) h(t) = \\ = b_1(t) \frac{d^3 g(t)}{dt^3} + b_2(t) \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + b_3(t) \frac{dg(t)}{dt} + b_4(t) g(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_1(t) = \frac{l_3(t)}{l_4(t)}; a_2(t) = \frac{l_2(t)}{l_4(t)}; a_3(t) = \frac{l_1(t)}{l_4(t)}; a_4(t) = \frac{l_0(t)}{l_4(t)}; \\ b_1(t) = \frac{d_3(t)}{l_4(t)}; b_2(t) = \frac{d_2(t)}{l_4(t)}; b_3(t) = \frac{d_1(t)}{l_4(t)}; b_4(t) = \frac{d_0(t)}{l_4(t)}; \end{aligned}$$

Тогда скалярному уравнению соответствует следующая система уравнений в нормальной форме Коши:

$$\dot{x}_1 = x_2 + F_1(t)g(t);$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + F_2(t)g(t);$$

$$\dot{x}_3 = x_4 + F_3(t)g(t);$$

$$\dot{x}_4 = -a_1(t)x_4(t) - a_2(t)x_3(t) - a_3(t)x_2(t) - a_4(t)x_1(t) + F_4(t)g(t),$$

где $x_1(t) = h(t) - F_0(t)g(t)$, $F_0(t) = b_0(t)$, а функции $F_i(t)$, $i = \overline{1,4}$ вычисляются с помощью рекуррентной формулы

$$F_i(t) = b_i(t) - \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{i-k} C_{n+s-i}^{n-i} a_{i-k-s}(t) \frac{d^s F_k(t)}{dt^s}, \quad i = \overline{1,4},$$

в которой

$$C_{n+s-i}^{n-i} = \frac{(n-i+s)!}{(n-i)!s!}.$$

Начальные условия должны быть согласованы таким образом, чтобы не было свободного движения.

В матричной форме последняя система имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)g(t),$$

где

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4(t) & -a_3(t) & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ F_4(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, от скалярного уравнения 4-го порядка мы перешли к системе из 4-х дифференциальных уравнений первого порядка – к нормальной форме Коши. Переменные x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , называются переменными состояния, или фазовыми координатами.

6. Импульсные переходные функции нестационарных систем

Пример 1.

Линейная нестационарная система описывается дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x}(t) + 0,2\dot{x}(t) + 0,25\exp(0,4t)x(t) = y(t).$$

Построим нормальную ИПФ системы на интервале $t, \tau \in [0, 15]$. Шаг интегрирования при построении нормальной фундаментальной системы решений примем равным 0,005. Решение задачи проведем в пакете Matlab. На рис. 6.1 представлены элементы нормальной фундаментальной системы решений уравнения. На рис. 6.2 приводятся графики $k(t, \tau)$ при различных фиксированных значениях τ . На рис. 6.3 представлена ИПФ $k(t, \tau)$.

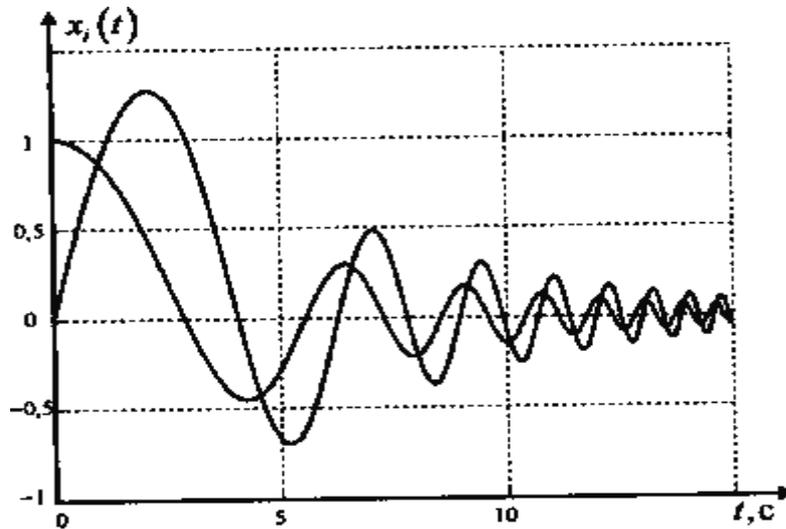


Рис. 6.1. Графики элементов нормальной фундаментальной системы решений

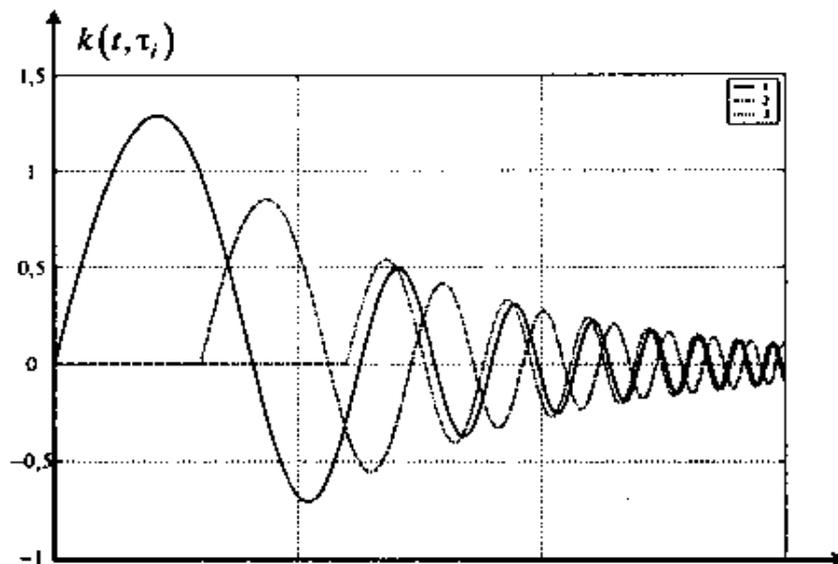


Рис. 6.2. График нормальной ИПФ $k(t, \tau)$ при $\tau = 0(1)$, $\tau = 3(2)$, $\tau = 6(3)$

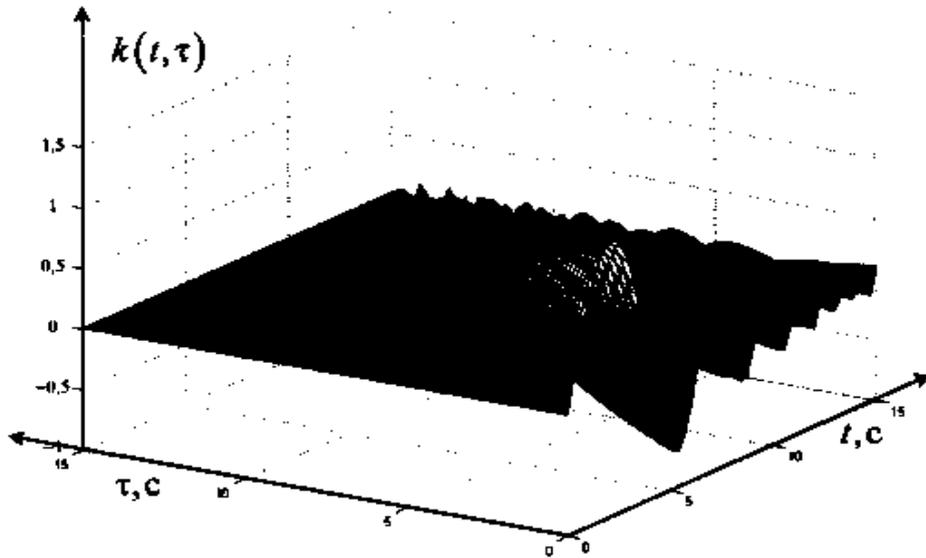


Рис. 6.3. ИПФ нестационарной системы

Только для простейших случаев можно получить зависимости, определяющие ИПФ. Например, если ЛНС имеет структурную схему (рис. 6.4),

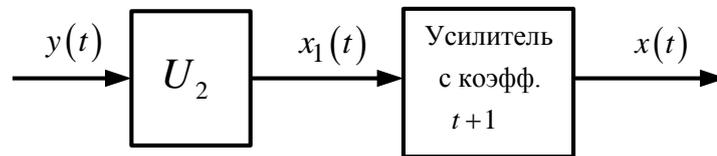


Рис. 6.4. Структурная схема ЛНС

то ее ИПФ определяется выражением (рис. 6.5)

$$k(t, \tau) = (t+1)1(t-\tau)1(\tau).$$

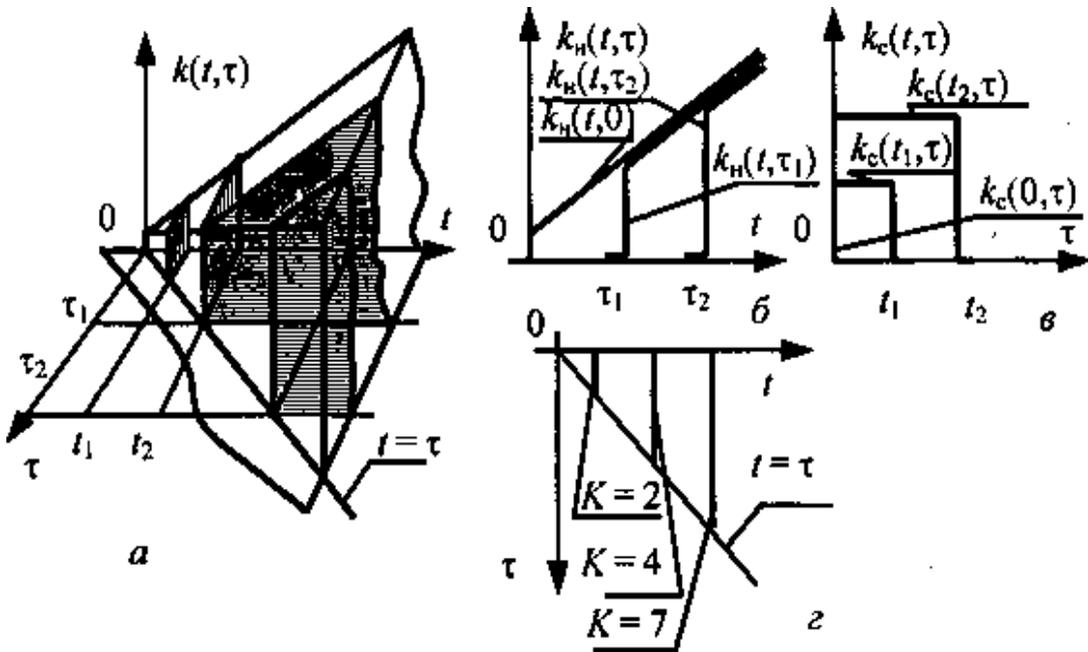


Рис. 6.5. Вид ИПФ и различных ее сечений

Если же ДУ ЛНС имеет вид

$$(t+1)\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = (\sin t)\dot{y}(t) + (\cos t)y(t),$$

то

$$k(t, \tau) = \frac{\sin \tau}{\tau + 1} 1(t - \tau) 1(\tau).$$

Вид ИПФ представлен на рис. 6.6.

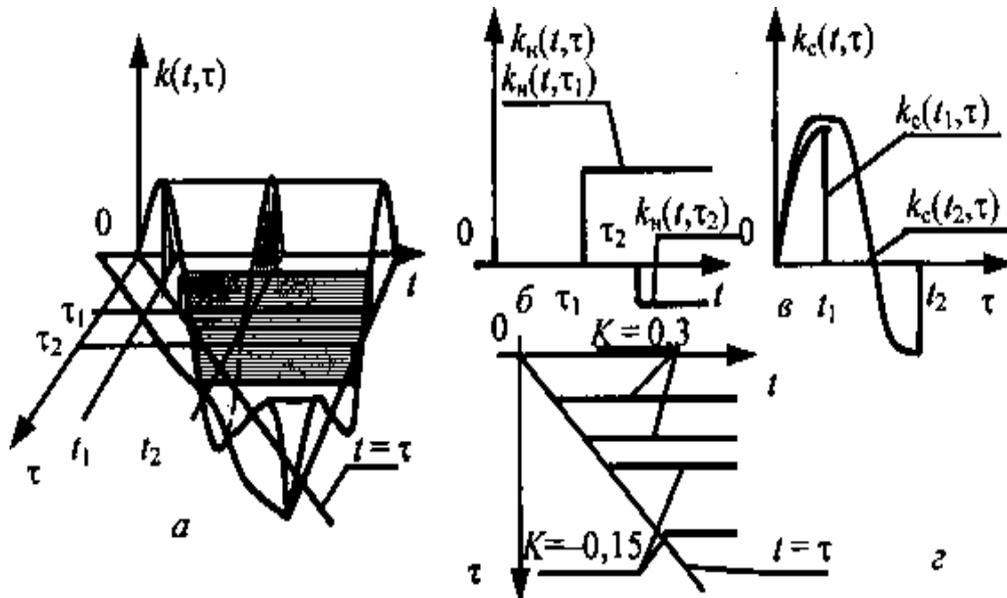


Рис. 6.6. Вид ИПФ и ее сечений

ИПФ достаточно просто определяется только для простых систем – систем невысокого порядка с нестационарностями, описываемыми несложными функциями. Но многие сложные нестационарные системы удастся представить в виде совокупности стандартных соединений более простых систем. Стандартными называются последовательное, параллельное соединения и соединения типа «обратная связь». Эти соединения остаются в классе линейных систем, если входящие в их состав звенья линейны. Исследование стандартных соединений звеньев проводится в рамках той же теории, которой подчиняются входящие в состав этих соединений звенья. Тогда имеет место возможность достаточно просто и удобно исследовать сложные системы, если известны правила, позволяющие определять по ИПФ соединяемых систем ИПФ их стандартных соединений. Часто разбиение исходных систем на более простые составные части удастся выполнить так, что все «инерционности» оказываются стационарными, а все нестационарности – безынерционными (в виде усилителей с изменяющимися известным образом во времени коэффициентами усиления – в виде безынерционных нестационарных звеньев). Тогда анализ упрощается еще более, так как для его проведения оказывается достаточным знать ИПФ лишь элементарных стационарных звеньев и ИПФ безынерционного нестационарного звена.

Пример 2.

Найти ИПФ системы, представляющей собой последовательное соединение стационарного аperiodического звена и двух усилительных нестационарных звеньев с коэффициентами, изменяющимися по закону e^t и e^{-t} (рис. 6.7).

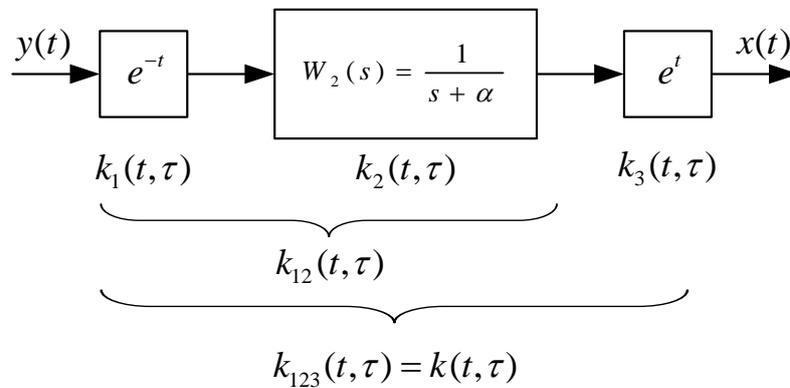


Рис. 6.7. Структурная схема системы

Согласно известным формулам:

$$k_1(t, \tau) = e^{-t} \delta(t - \tau);$$

$$k_2(t, \tau) = e^{-\alpha(t-\tau)} 1[t - \tau];$$

$$k_3(t, \tau) = e^t \delta(t - \tau).$$

Применив соотношение

$$k(t, \tau) = \int_{\tau}^t k_2(t, \lambda) k_1(\lambda, \tau) d\lambda \quad (6.1)$$

к первым двум звеньям, получим

$$k_{12}(t, \tau) = \int_{\tau}^t e^{-\alpha(t-\lambda)} e^{-\lambda} \delta(\lambda - \tau) d\lambda = e^{-\alpha(t-\lambda)} e^{-\lambda} \Big|_{\lambda=\tau} = e^{-\alpha(t-\tau)} e^{-\tau} \cdot 1(t - \tau);$$

$$k_{12}(t, \tau) = e^{-\alpha(t-\tau)} e^{-\tau} 1[t - \tau].$$

Применяем соотношение (6.1) к $k_{12}(t, \tau)$ и $k_3(t, \tau)$:

$$\begin{aligned} k(t, \tau) &= \int_{\tau}^t e^t \delta(t - \lambda) e^{-\alpha(\lambda-\tau)} e^{-\tau} d\lambda = e^t e^{-\tau} \int_{\tau}^t \delta(t - \lambda) e^{-\alpha(\lambda-\tau)} d\lambda = e^{(t-\tau)} e^{-\alpha(\lambda-\tau)} \Big|_{\lambda=t} = \\ &= e^{(1-\alpha)(t-\tau)} \cdot 1(t - \tau). \end{aligned}$$

Таким образом, ИПФ системы (рис. 6) зависит только от разности $t - \tau$, т.е. данная нестационарная система ведёт себя как система стационарная (как стационарное апериодическое звено с постоянной времени и коэффициентом передачи $1/(1-\alpha)$), передаточная функция которого есть

$$W(s) = \frac{1}{s + (1-\alpha)}.$$

7. Математические модели нестационарных САУ в форме векторно-матричного интеграла Коши

Пример.

Записать векторно-матричный интеграл Коши для САУ, описываемой уравнением

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix} \mathbf{X}(t), \quad t > 0.$$

Одна из фундаментальных матриц имеет вид

$$\mathbf{X}_\Phi(t) = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}.$$

Вычислим

$$\mathbf{X}_\Phi^{-1}(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} & 0 \\ -\frac{1}{\tau^3} & \frac{1}{\tau^2} \end{bmatrix}.$$

Переходная матрица имеет вид

$$\mathbf{X}_\Phi(t)\mathbf{X}_\Phi^{-1}(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{t}{\tau} & 0 \\ \frac{1}{\tau} - \frac{t^2}{\tau^3} & \frac{t^2}{\tau^2} \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(t, \tau).$$

Если имеет место система управления с уравнением

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{Y}(t),$$

то

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{t}{\tau} & 0 \\ \frac{1}{\tau} - \frac{t^2}{\tau^3} & \frac{t^2}{\tau^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \end{bmatrix} d\tau.$$

8. Математические модели нестационарных САУ в форме передаточных функций

Пример.

Пусть система описывается уравнением

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = y(t); \quad [x(t)]|_{t=\tau} = 0.$$

Его точное решение в квадратурах

$$x(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t a(\tau_1) d\tau_1} \int_{\tau}^{\lambda} e^{\int_{\tau}^{\lambda} a(\tau_1) d\tau_1} y(\lambda) d\lambda. \quad (7.1)$$

Тогда импульсная переходная функция данной системы

$$k(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t a(\tau_1) d\tau_1} \cdot 1(t - \tau),$$

и решение дифференциального уравнения в квадратурах примет следующий вид:

$$x(t, \tau) = \int_{\tau}^t e^{-\int_{\lambda}^t a(\tau_1) d\tau_1} \cdot 1(t - \lambda) y(\lambda) d\lambda.$$

Пусть $a(t) = t$, тогда

$$e^{-\int_{\lambda}^t a(\tau_1) d\tau_1} = e^{-\left. \frac{\tau^2}{2} \right|_{\lambda}^t} = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

и

$$x(t, \tau) = e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\tau}^{\lambda} e^{\frac{\lambda^2}{2}} \cdot 1(t - \lambda) y(\lambda) d\lambda, \quad (7.2)$$

откуда видно, что преобразование Лапласа от $x(t, \tau)$ по переменной t можно было бы вычислить с помощью повторного применения теоремы свертки в комплексной области, теоремы об интегрировании оригинала и теоремы сдвига, если функции, составляющие

правую часть выражения (7.2), – оригиналы. Но $e^{\frac{\lambda^2}{2}} \notin \Theta$, поэтому $L_t \{x(t, \tau)\}$ вычислять таким образом нельзя. При этом следует учитывать также, что в общем случае здесь используются смещенные преобразования Лапласа

$$X(s, t) = \int_0^{\infty} x(\theta + \tau, \tau) e^{-s\theta} d\theta = \int_0^{\infty} x_1(\theta) e^{-s\theta} d\theta$$

и

$$Y(s, t) = \int_0^{\infty} y(\theta + \tau, \tau) e^{-s\theta} d\theta = \int_0^{\infty} y_1(\theta) e^{-s\theta} d\theta,$$

где

$$x_1(\theta) = x(\theta + \tau, \tau); \quad y_1(t) = y(\theta + \tau).$$

В случае стационарной системы ($a(t) = a = const$) выражение (7.1) примет вид

$$\begin{aligned}
 x_1(\theta) &= \int_{\tau}^{\theta+\tau} e^{-a(\theta+\tau-\lambda)} \cdot 1(\theta+\tau-\lambda) y(\lambda) d\lambda = \int_0^{\theta} e^{-a(\theta-\mu)} \cdot 1(\theta-\mu) y(\mu+\tau) d\mu = \\
 &= \int_0^{\theta} e^{-a(\theta-\mu)} \cdot 1(\theta-\mu) y_1(\mu) d\mu.
 \end{aligned}$$

Это – свертка в вещественной области, поэтому

$$X(s, \tau) = L\{x_1(\theta)\} = L\{e^{-a\theta} \cdot 1(\theta)\} \cdot L\{y_1(\theta)\},$$

т.е.

$$X(s, \tau) = \frac{1}{s+a} Y(s, \tau).$$

Учитывая, что

$$Y(s, \tau) = Y(s, 0) \cdot e^{s\tau} = Y(s) \cdot e^{s\tau},$$

получаем подтверждение факту независимости формы реакции стационарных систем от изменения момента приложения входного воздействия (при сдвиге входного воздействия реакция стационарной системы также сдвигается без изменения формы).

Это свойство позволяет принять момент приложения воздействия τ равным нулю, что приводит к зависимости

$$X(s) = \frac{1}{s+a} Y(s) = W(s)Y(s),$$

где $W(s) = \frac{1}{s+a}$ – передаточная функция апериодического звена с постоянной времени $1/a$ и коэффициентом передачи $1/a$.

9. Исследование устойчивости линейных нестационарных систем

Пример 1.

Пусть задана ЛНС

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{t+2}x(t) + y(t).$$

При $y(t) = 1[t]$, $[x(t)]_{t=t_0} = x_0$, $t_0 = 0$ имеем

$$x(t) = e^{-\int_0^t \frac{d\tau}{\tau+2}} x_0 + e^{-\int_0^t \frac{d\tau}{\tau+2}} \int_0^t e^{\int_0^\tau \frac{d\tau}{\tau+2}} d\tau.$$

Так как

$$e^{-\int_0^t \frac{d\tau}{\tau+2}} = e^{[-\ln(\tau+2)]_0^t} = e^{-\ln(t+2)+\ln 2} = e^{-\ln(t+2)} e^{\ln 2} = \frac{2}{t+2},$$

то

$$x(t) = \frac{2}{t+2} x_0 + \frac{2}{t+2} \int_0^t \frac{\tau+2}{2} d\tau = \frac{2}{t+2} x_0 + \frac{(\tau+2)^2}{t+2} \Big|_0^t = \frac{2}{t+2} x_0 + \frac{t+2}{2} - \frac{2}{t+2}$$

Отсюда видно, что свободная составляющая движения ЛНС

$$x_{\text{св}}(t) = \frac{2}{t+2} x_0$$

с течением времени стремится к нулю (т.е. эта система устойчива по отношению к начальным условиям), а вынужденная составляющая

$$x_{\text{в}}(t) = \frac{t+2}{2} - \frac{2}{t+2}$$

неограниченно возрастает (по отношению к управлению система неустойчива). Поэтому необходимо исследовать устойчивость ЛНС не только относительно начальных условий, но и ее устойчивость относительно управления.

Пример 2.

Пусть в ЛНС

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{Y}(t),$$

где

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1-a \cos 2t) & 0 \end{bmatrix},$$

требуется найти ограничения на параметр a , обеспечивающие выполнение неравенства

$$\ln \frac{\|\mathbf{X}(t)\|}{\|\mathbf{X}(0)\|} \leq 2$$

для всех t , принадлежащих интервалу $[0, 2\pi]$.

Из условия задачи следует, что здесь требуется обеспечить устойчивость на конечном интервале для η, ε, T_y по отношению к начальным условиям системы, где $T_y = 2\pi$ секунд,

$\ln \frac{\varepsilon}{\eta} = 2$. Для этого (см. критерий в лекции №14) нужно вычислить собственные значения матрицы $\bar{\mathbf{A}}(t)$

$$\bar{\mathbf{A}}(t) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -(1-a \cos 2t) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a \cos 2t}{2} \\ \frac{a \cos 2t}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы $\bar{\mathbf{A}}(t)$

$$|\bar{\mathbf{A}}(t) - \lambda \mathbf{I}_{2 \times 2}| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{a \cos 2t}{2} \\ \frac{a \cos 2t}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \left(\frac{a \cos 2t}{2} \right)^2 = 0.$$

Получаем корни

$$\lambda_{1,2}(t) = \pm \frac{a \cos 2t}{2},$$

являющиеся собственными значениями матрицы $\bar{\mathbf{A}}(t)$.

Из рисунка, где показано изменение собственных значений матрицы во времени, наглядно следует, что максимальное собственное значение этой матрицы изменяется во времени по закону

$$\lambda_m(t) = \frac{|a|}{2} |\cos 2t|.$$

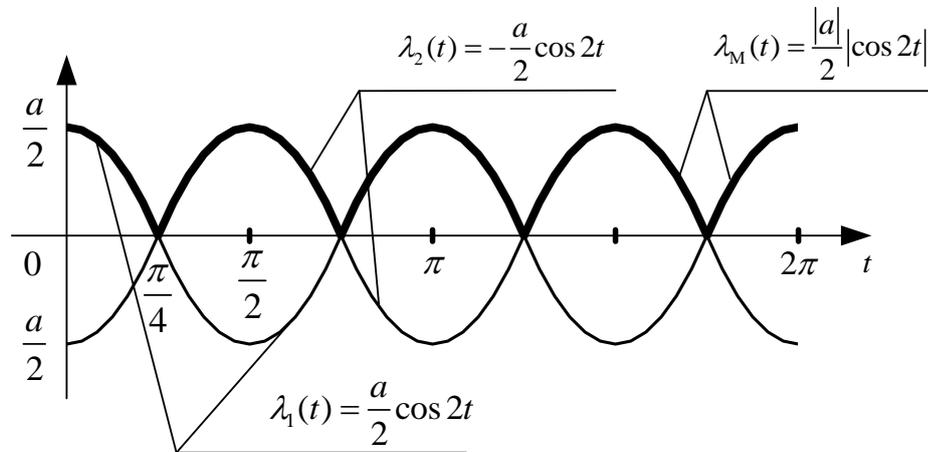


Рис. 9.1. График изменения собственных значений матрицы во времени

Согласно критерию 4, для всех $t \in [0, 2\pi]$ должно выполняться условие

$$\int_0^t \frac{|a| |\cos 2\tau_1|}{2} d\tau_1 \leq \frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon}{\eta} = 1.$$

Откуда

$$|a| \leq \frac{2}{\int_0^t |\cos 2\tau_1| d\tau_1} \quad \text{для всех } t \in [0, 2\pi].$$

Чем больше знаменатель правой части, тем более жесткие ограничения накладывает это условие на параметр a . В заданном диапазоне изменения t знаменатель принимает максимальное значение на границе интервала:

$$\int_0^{2\pi} |\cos 2\tau_1| d\tau_1 = 8 \int_0^{\pi/4} \cos 2\tau_1 d\tau_1 = 4 \sin 2\tau_1 \Big|_0^{\pi/4} = 4,$$

поэтому

$$|a| \leq \frac{1}{2}.$$

Если для решения этой задачи воспользоваться критериями 5, 6 (см. лекцию №14), то результаты соответственно

$$|a| \leq \frac{1}{\pi}; \quad |a| \leq \frac{1}{4}.$$

получаются более просто, но, как это видно, они накладывают ограничения на исследуемый параметр со все большим запасом.

10. Математические модели линейных САУ в форме уравнений с проекционно-матричными операторами

Пример 1.

Найти проекционно-матричный оператор замкнутой системы (рис. 9.1), если A_i – проекционно-матричные операторы элементарных звеньев: интегратора, дифференциатора, умножителя.

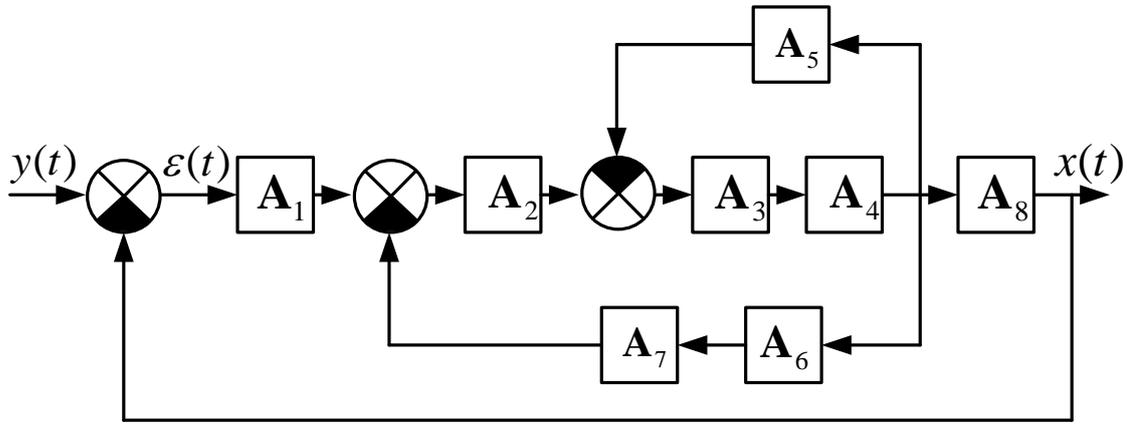


Рис. 9.1. Структурная схема системы

Проекционно-матричный оператор заданной структурной схемы:

$$\text{I) } A_4 A_3 (I + A_5 A_4 A_3)^{-1};$$

$$\text{II) } A_4 A_3 (I + A_5 A_4 A_3)^{-1} \cdot A_2 \left[I + A_7 A_6 A_4 A_3 (I + A_5 A_4 A_3)^{-1} \cdot A_2 \right]^{-1};$$

$$\text{III) } A_p = A_8 A_4 A_3 (I + A_5 A_4 A_3)^{-1} \cdot A_2 \left[I + A_7 A_6 A_4 A_3 (I + A_5 A_4 A_3)^{-1} \cdot A_2 \right]^{-1} \cdot A_1.$$

Проекционно-матричный оператор замкнутой схемы имеет вид

$$A = A_p (I + A_p)^{-1},$$

и схема может быть представлена

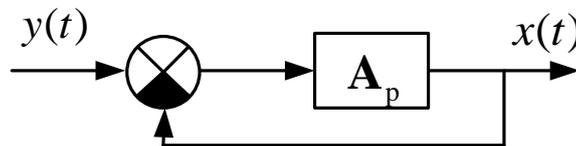


Рис. 9.2. Расчётная структурная схема системы

Структурная схема линейной системы любой степени сложности может быть представлена в виде соответствующего соединения элементарных звеньев: интегратора, дифференциатора, умножителя, сумматора.

Пример 2. Математическая модель системы наведения на конечном временном интервале с использованием аппарата проекционно-матричных операторов

Построить описание системы наведения на конечном временном интервале $[0, T]$ с использованием аппарата проекционно-матричных операторов. Структурная схема системы самонаведения представлена на рис. 9.3.

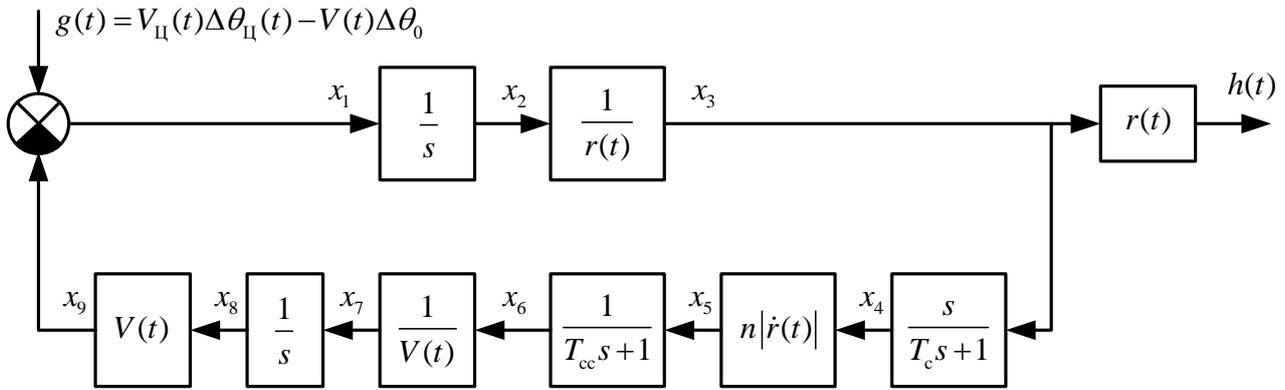


Рис. 9.3. Структурная схема системы самонаведения

$g(t)$ – внешнее воздействие, эквивалентное маневру цели и начальной ошибке прицеливания,

$\Delta\Theta_u(t)$ – приращение угла траектории цели,

$V(t)$ – скорость ракеты,

$\Delta\Theta_0(t)$ – приращение угла траектории ракеты,

$V_u(t)$ – скорость цели,

$r(t)$ – расстояние между ракетой и целью на опорной траектории,

$\dot{r}(t) = V_u(t) - V(t)$,

n – константа навигации.

Запишем соотношения «вход-выход» для каждого элементарного звена, входа и выхода системы:

$$x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau) d\tau + x_2(0); \quad x_3(t) = \frac{1}{r(t)} x_2(t);$$

$$x_4(t) = \frac{1}{T_c} \int_0^t \dot{x}_3(\tau) d\tau - \frac{1}{T_c} \int_0^t x_4(\tau) d\tau + x_4(0) = \frac{x_3(t)}{T_c} - \frac{1}{T_c} \int_0^t x_4(\tau) d\tau + x_4(0);$$

$$x_5(t) = n \cdot |\dot{r}(t)| x_4(t);$$

$$x_6(t) = \frac{1}{T_{cc}} \int_0^t x_5(\tau) d\tau - \frac{1}{T_{cc}} \int_0^t x_6(\tau) d\tau + x_6(0);$$

$$x_7(t) = \frac{1}{V(t)} x_6(t); \quad x_8(t) = \int_0^t x_7(\tau) d\tau + x_8(0);$$

$$x_9(t) = V(t) \cdot x_8(t); \quad x_1(t) = g(t) - x_9(t); \quad h(t) = r(t) \cdot x_3(t).$$

Пусть $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис с весом $\rho(t) = 1$ в пространстве $L^2[0, T]$; $\Phi(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_l(t)]^T$ – вектор-столбец базисных функций, имеет размерность $\dim \Phi(t) = l \times 1$. Тогда, согласно методу проекционно-матричных операторов, векторы коэффициентов Фурье разложений входных и выходных сигналов каждого из элементов системы, а также входа и выхода системы по базису $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ будут связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{x_2} &= \mathbf{A}_u \mathbf{C}^{x_1} + x_2(0) \Phi_N; \quad \mathbf{C}^{x_3} = \mathbf{A} \left(\frac{1}{r(t)} \right) \mathbf{C}^{x_2}; \\
\mathbf{C}^{x_4} &= \left(\mathbf{I} + \frac{1}{T_c} \mathbf{A}_u \right)^{-1} \frac{1}{T_c} \mathbf{C}^{x_3} + \left(\mathbf{I} + \frac{1}{T_c} \mathbf{A}_u \right)^{-1} x_4(0) \Phi_N; \\
\mathbf{C}^{x_5} &= \mathbf{A} (n \cdot |\dot{r}(t)|) \mathbf{C}^{x_4}; \\
\mathbf{C}^{x_6} &= \left(\mathbf{I} + \frac{1}{T_{cc}} \mathbf{A}_u \right)^{-1} \frac{1}{T_{cc}} \mathbf{A}_u \mathbf{C}^{x_5} + \left(\mathbf{I} + \frac{1}{T_{cc}} \mathbf{A}_u \right)^{-1} x_6(0) \Phi_N; \\
\mathbf{C}^{x_7} &= \mathbf{A} \cdot \left(\frac{1}{V(t)} \right) \mathbf{C}^{x_6}; \quad \mathbf{C}^{x_8} = \mathbf{A}_u \mathbf{C}^{x_7} + x_8(0) \Phi_N; \\
\mathbf{C}^{x_9} &= \mathbf{A} (V(t)) \mathbf{C}^{x_8}; \quad \mathbf{C}^{x_i} = \mathbf{C}^g - \mathbf{C}^{x_9}; \quad \mathbf{C}^h = \mathbf{A} (r(t)) \mathbf{C}^{x_9}.
\end{aligned}$$

В данных соотношениях: \mathbf{A}_u – проекционно-матричный оператор интегрирования в базисе $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^l$; $A(f(t))$ – проекционно-матричный оператор умножения на функцию $f(t)$ в базисе $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^l$; \mathbf{I} – единичная матрица;

$$\Phi_N^T = \left[\int_0^T \varphi_0(t) dt \quad \dots \quad \int_0^T \varphi_l(t) dt \right].$$

Положим начальные условия для системы самонаведения нулевыми и введем ряд обозначений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &\triangleq \mathbf{A}_u; \quad \mathbf{A}_2 \triangleq \mathbf{A}(1/r(t)); \quad \mathbf{A}_3 \triangleq \left[\mathbf{I} + \frac{1}{T_c} \mathbf{A}_u \right]^{-1} \frac{1}{T_c}; \\
\mathbf{A}_4 &\triangleq \mathbf{A}(n|\dot{r}(t)|); \quad \mathbf{A}_5 \triangleq \left[\mathbf{I} + \frac{1}{T_{cc}} \mathbf{A}_u \right]^{-1} \frac{1}{T_{cc}} \mathbf{A}_u; \\
\mathbf{A}_6 &\triangleq \mathbf{A}(1/V(t)); \quad \mathbf{A}_7 \triangleq \mathbf{A}_u; \quad \mathbf{A}_8 \triangleq \mathbf{A}(V(t)); \quad \mathbf{A}_9 \triangleq \mathbf{A}(r(t)).
\end{aligned}$$

На рис. 9.4 представлена структурная схема системы самонаведения с учетом введенных обозначений.

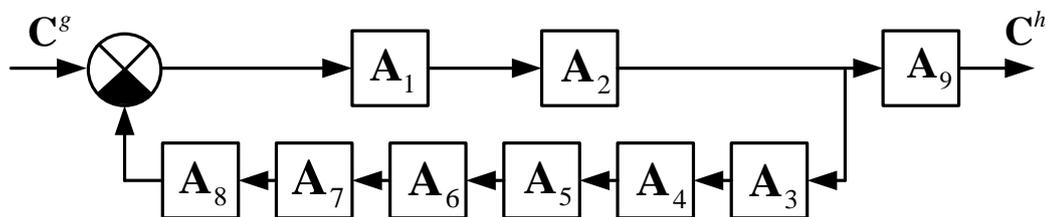


Рис. 9.4. Структурная схема системы самонаведения

Воспользуемся аппаратом структурных преобразований для нахождения проекционно-матричного оператора системы. Обозначим

$$\mathbf{A}_{10} \triangleq \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1; \quad \mathbf{A}_{11} \triangleq \mathbf{A}_8 \mathbf{A}_7 \mathbf{A}_6 \mathbf{A}_5 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_3.$$

Структурная схема системы самонаведения после данных структурных преобразований изображена на рис. 9.5.

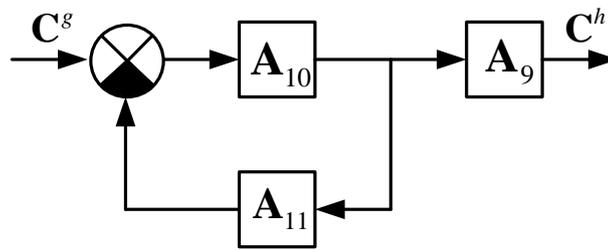


Рис. 9.5. Структурная схема системы самонаведения

Обозначив

$$\mathbf{A}_{12} \triangleq \mathbf{A}_{10}[\mathbf{I} + \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{10}]^{-1},$$

запишем выражение для проекционно-матричного оператора системы:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_9\mathbf{A}_{12}.$$

Таким образом, векторы коэффициентов Фурье разложения входного и выходного сигналов системы самонаведения по базису $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, при нулевых начальных условиях связаны соотношением

$$\mathbf{C}^h = \mathbf{A}\mathbf{C}^g.$$

Сигналы на входе и выходе системы определяются выражениями

$$\tilde{g}(t) = \Phi^T(t)\mathbf{C}^g;$$

$$\tilde{h}(t) = \Phi^T(t)\mathbf{C}^h.$$

Библиографический список

Основная литература

1. Коновалов Б.И., Лебедев Ю.М. Теория автоматического управления: учебное пособие / Б.И. Коновалов, Ю.М. Лебедев – 3-е изд. доп. и переработ. – СПб.: Лань, 2010. – 224 с. – ISBN 978-5-8114-1034-7. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=538. – ЭБС Biblio online (Издательство «Лань») по паролю
2. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник для вузов : в 5 т. Т. 1. Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / К. А. Пупков [и др.] ; под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : МГТУ им.Баумана, 2004 .— 656 с. : ил. — (Методы теории автоматического управления / под ред. К. А. Пупкова) .— Библиогр. в конце кн. — ISBN 5-7038-2189-4 (Т. 1) .— ISBN 5-7038-2194-0. (12 экз.)
3. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник для вузов : в 5 т. Т. 5. Методы современной теории автоматического управления / К. А. Пупков [и др.] ; под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : МГТУ им.Баумана, 2004 .— 784 с. : ил. — (Методы теории автоматического управления/под общ.ред.К.А.Пупкова) .— Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-7038-2190-8 (Т. 5) .— ISBN 5-7038-2194-0. (12 экз.)

Дополнительная литература

1. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического управления : [Учебное издание] / В.А.Бесекерский,Е.П.Попов .— 4-е изд.,перераб.и доп. — СПб. : Профессия, 2004 .— 752с. : ил. — (Специалист) .— Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-93913-035-6 /в пер./ : 176.00.
2. Горячев О.В. Основы теории компьютерного управления : учеб. пособие / О. В. Горячев, С. А. Руднев; ТулГУ .— Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. — 220 с.: ил. — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-7679-1194-3. — Режим доступа: [:https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2013040914342128499900001265](https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2013040914342128499900001265)
3. Макаров Н.Н., Феофилов С.В. Анализ и синтез систем автоматического управления с использованием системы MATLAB: учеб. пособие / Н. Н. Макаров, С. В. Феофилов; ТулГУ. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2010 .— 68 с.: ил. — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-7679-1805-8
4. Макаров Н.Н., Феофилов С.В. Применение пакета Mathcad в анализе и синтезе систем автоматического управления: учебное пособие / Н.Н. Макаров, С.В. Феофилов. – Тула: ТулГУ, 2007. – 169 с.: ил. — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-7679-1109-7
5. Методы моделирования ситуационного управления движением беспилотных летательных аппаратов / РАРАН; А.С. Шалыгин, Л.Н. Лысенко, О.А. Толпегин; под ред. А.В. Ноздрачева и Л.Н. Лысенко. – М.: Машиностроение, 2012. – 584 с.: ил. – ISBN 978-5-94275-668-0. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/book/5807/page516/> – ЭБС Biblio online (Издательство «Лань») по паролю
6. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: учебное пособие / А.А. Первозванский. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2015. – 624 с. – ISBN 978-5-8114-0995-2. Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=68460. – ЭБС Biblio online (Издательство «Лань») по паролю

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://www.exponenta.ru> - Образовательный математический сайт
2. <http://www.elibrary.ru> - Научная электронная библиотека в области науки, технологии
3. <https://tsutula.bibliotech.ru/> - Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.

4. <http://www.iprbookshop.ru/> - ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.
5. <http://cyberleninka.ru/> - НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа
6. <http://window.edu.ru> - Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]