

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева
Кафедра систем автоматического управления

Утверждено на заседании кафедры
«Системы автоматического управления»
«13» января 2021 г., протокол № 8

Заведующий кафедрой



О.В.Горячев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)

«Теория автоматического управления»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы специалитета

по специальности

24.05.06 Системы управления летательными аппаратами

со специализацией

Системы управления беспилотными летательными аппаратами

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 240506-01-21

Тула 2021 год

Разработчик(и) методических указаний

Морозова Е.В., доцент, к.т.н., доцент
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

Е.В. Морозова

(подпись)

Исполнительный директор

И.И.И.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению лабораторных работ

по дисциплине «Физика»

«Физика» (специальность «Физика»)

Утверждено на заседании кафедры физики
от «___» _____ 20__ г.

Протокол № _____

Секретарь кафедры физики _____

Содержание

1. Примеры систем автоматического управления. Системы стабилизации.
 2. Следящие системы.
 3. Составление уравнений САУ.
 4. Импульсная переходная функция. Переходная характеристика.
 5. Передаточные функции и структурные схемы. Структурные преобразования.
 6. Построение частотных характеристик типовых звеньев.
 7. Анализ устойчивости САУ с использованием алгебраических и частотных критериев.
 8. Анализ устойчивости с использованием логарифмических частотных характеристик. Метод Д-разбиения.
 9. Анализ точности в установившемся режиме.
 10. Анализ качества переходных процессов. Интегральные оценки качества.
 11. Синтез САУ. Общий подход.
 12. Синтез последовательного корректирующего устройства (КУ) по желаемой логарифмической амплитудной частотной характеристике.
 13. Синтез параллельного корректирующего устройства
- Библиографический список

ПРИМЕРЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.

1.1. Системы стабилизации.

ПРИМЕР. Система управления угловой скорости двигателя постоянного тока, работающая по разомкнутому циклу.

Упрощенная принципиальная схема системы представлена на рис.1. На этой схеме обозначено:

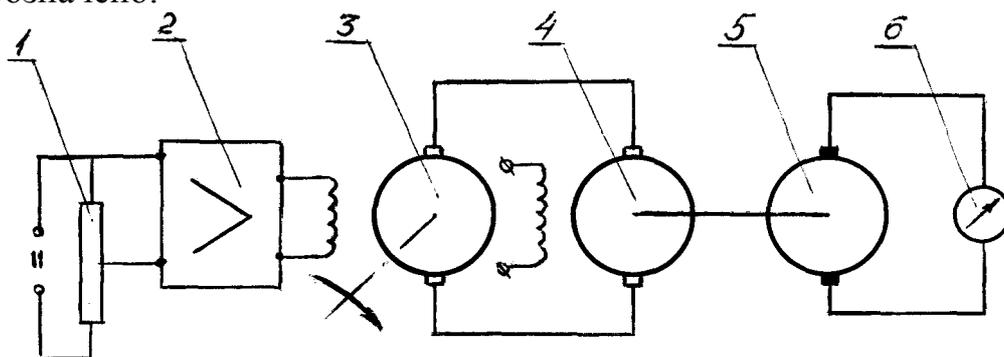


Рис. 1. Упрощенная принципиальная схема системы, работающей по разомкнутому циклу .

1 - потенциометр; 2 - электронный усилитель постоянного тока;

5 - генератор постоянного тока; 4 - двигатель постоянного тока с независимым возбуждением; 5 - тахогенератор; 6-вольтметр.

В этой системе с помощью движка потенциометра I устанавливается управляющая величина в зависимости от требуемой угловой скорости вала двигателя 4, определяемой по вольтметру 6. Угловая скорость указанного вала преобразуется в напряжение тахогенератором 5, т.е. тахогенератор позволяет контролировать угловую скорость. Однако результат этого контроля не используется для управления. Усилитель 2 и генератор 5 служат для усиления управляющей величины по уровню и мощности.

С помощью этой схемы можно пояснить принцип управления по возмущениям. Пусть требуется, чтобы угловая скорость вала двигателя 4 в процессе работы оставалась постоянной вне зависимости от изменения момента сопротивления на этом валу. В этом случае указанный момент должен измеряться с помощью управляющего-устройства и в зависимости от результата измерения это устройство должно автоматически перемещать движок потенциометра так, чтобы компенсировать вредное влияние этого момента сопротивления.

Если в рассматриваемой системе на вход усилителя 2 будет автоматически подаваться напряжение, представляющее собой разность напряжений, снимаемых с потенциометра I и генератора 5, то будем иметь систему с обратной связью (с замкнутым циклом), или систему, у которой реализуется принцип управления по отклонению. ПРИМЕР 2. Система стабилизации угловой скорости вала двигателя постоянного тока с независимым возбуждением.

Упрощенная принципиальная схема системы представлена на рис.2.

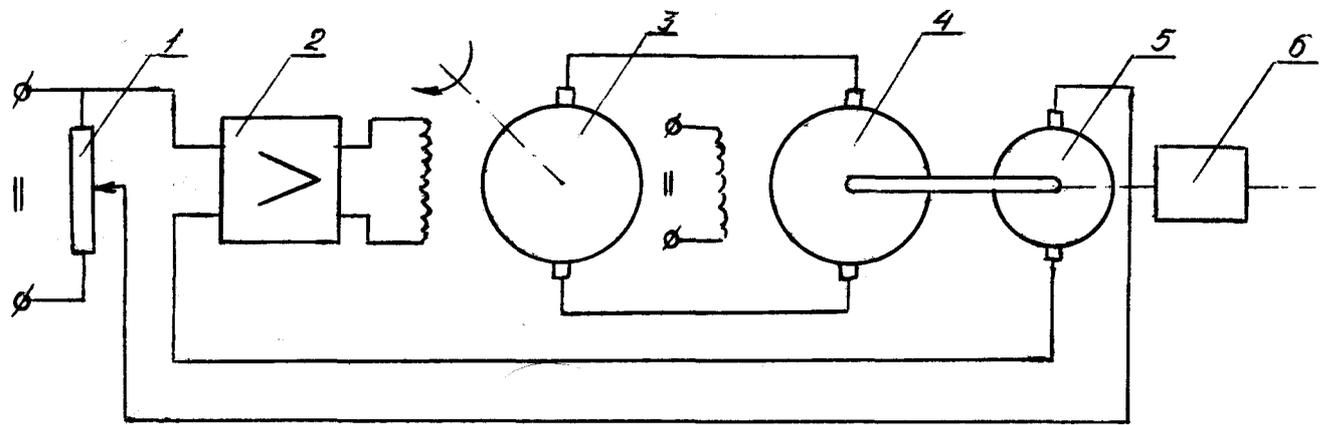


Рис.2. Упрощенная принципиальная схема системы стабилизации.

На этой схеме обозначено:

1 - делитель напряжения; 2 - электрический генератор постоянного тока; 3 - усилитель постоянного тока; 4 - двигатель постоянного тока с независимым возбуждением; 5 - тахогенератор постоянного тока; 6 - редуктор.

Данная система предназначена для обеспечения постоянства угловой скорости вала двигателя 4 вне зависимости от изменения момента нагрузки, момента трения на этом валу и других факторов. Это осуществляется следующим образом: В зависимости от требуемой скорости с помощью делителя напряжения 1 устанавливается определенная величина напряжения (производится настройка). Но скорость вала зависит в первую очередь от разности напряжений, получаемых на делителе и на тахогенераторе. Причем напряжение на этом тахогенераторе пропорционально скорости вала двигателя. Напряжение U_{HA} делителе в процессе работы должно оставаться постоянным. Поэтому, например, при уменьшении угловой скорости вала двигателя указанная разность (сигнал ошибки) возрастает. Это приводит к возрастанию тока (управления) в обмотке якоря генератора 3. В свою очередь повышение тока приводит к возрастанию движущего момента и, следовательно, к повышению скорости. Подобным образом осуществляется автоматическое управление скоростью вала двигателя при ее возрастании. Отметим, что процесс управления происходит не мгновенно, а по времени.

При установившейся (постоянной) скорости вала двигателя равнодействующий момент, приложенный к нему, будет равен нулю. Это говорит о том, что при постоянном моменте нагрузки в установившемся процессе движущий момент, выражаемый через ток в обмотке якоря, также будет постоянным, отличным от нуля. Наличие движущего момента приводит к постоянному сигналу ошибки. Это позволяет утверждать о том, что данная система является статической по отношению к моменту нагрузки.

Из рассмотренного выше видно, что в рассматриваемой системе осуществляется принцип управления по отклонению, и что она является одномерной статической системой автоматического управления.

Элементы, указанные на рис.2, выполняют следующие функции:

1 - задающий; 2 - усилительный и элемент сравнения (вход усилителя); 3 - исполнительный; 4 - управляемый (регулируемый) объект; 5 - чувствительный.

В соответствии с этим функциональная схема данной системы будет на рис. 3.

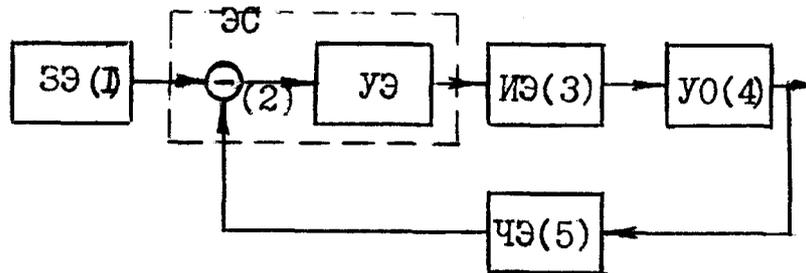


Рис. 3. Функциональная схема системы стабилизации угловой скорости.

ПРИМЕР. Система стабилизации напряжения генератора постоянного тока.

Упрощенная принципиальная схема системы изображена на рис.4.

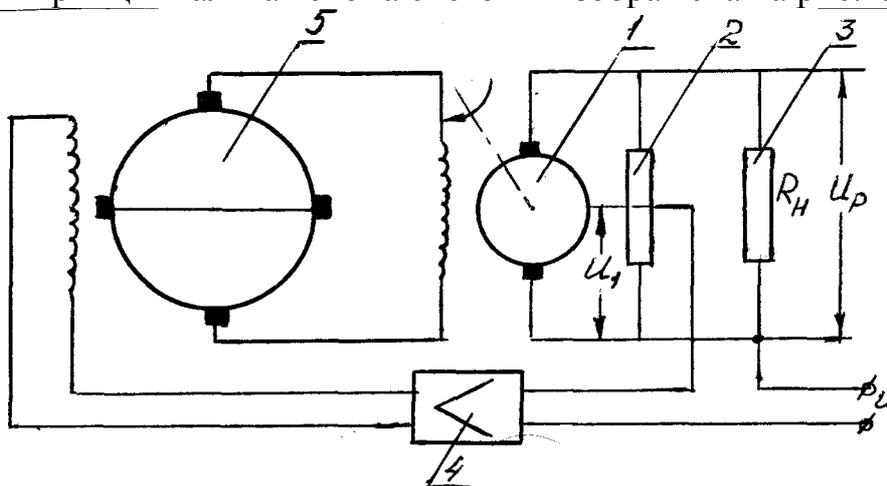


Рис.4. Схема системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока.

На этом рисунке обозначено:

- 1 - генератор постоянного тока с независимым возбуждением;
- 2 - делитель напряжения (потенциометр), с помощью которого измеряется напряжение на сопротивлении нагрузки $R_n(3)$ и осуществляется деление этого напряжения;
- 4 - электронный усилитель постоянного тока;
- 5 - электромашинный усилитель (ЭМУ).

Рассматриваемая система предназначена для поддержания напряжения на нагрузке U_p - постоянным «Это осуществляется следующим образом. Пусть, для определенности, напряжение U_p уменьшилось. Тогда также уменьшится напряжение U_1 , а $U - U_1$ увеличится. Это приведет в свою очередь к возрастанию магнитного потока, создаваемого обмоткой возбуждения генератора 1.

Таким образом, напряжение U_p также будет увеличиваться.

Функциональная схема рассматриваемой системы изображена на рис.5.

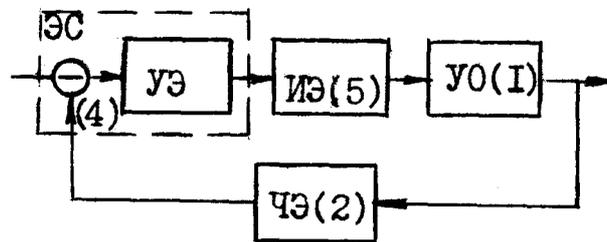


Рис.5. Функциональная схема системы стабилизации напряжения генератора постоянного тока.

В этой системе функции между элементами распределены следующим образом:

1) функцию элемента сравнения (ЭС) и усилительного элемента (УЭ) выполняет усилитель 4;

2) функцию исполнительного элемента (ИЭ) выполняет-электромашинный усилитель 5;

3) функцию чувствительного элемента (ЧЭ) выполняет делитель напряжения 2. Генератор 1 является управляемым объектом (УО).

ПРИМЕР. Система автоматического управления угловой скоростью вала двигателя постоянного тока.

Упрощенная принципиальная схема системы представлена на рис.6.

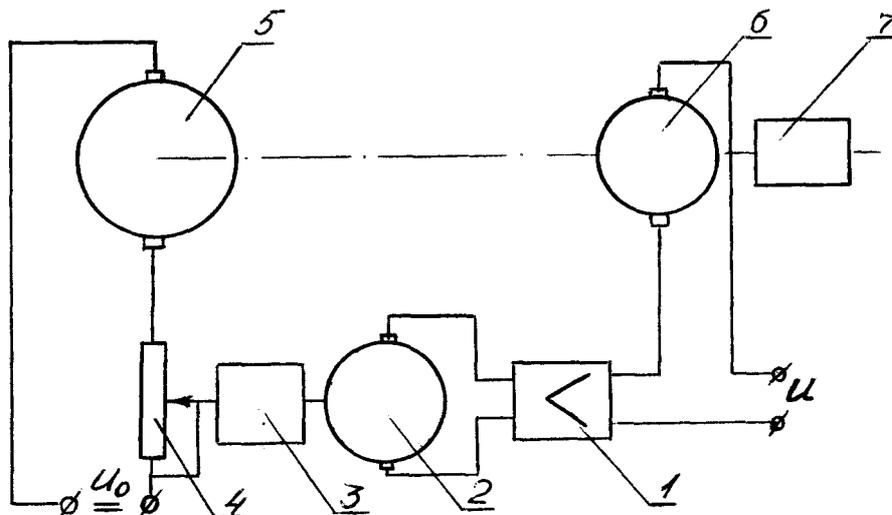


Рис. 6. Упрощенная принципиальная схема.

На этой схеме обозначено:

1 - электронный усилитель; 2 - исполнительный двигатель постоянного тока с независимым возбуждением; 3 - редуктор исполнительного двигателя; 4 - реостат; 5 - двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, угловой скоростью вала которого необходимо управлять; 6 - тахогенератор постоянного тока; 7 - редуктор.

U_0 , U - напряжения, подводимые к системе из вне.

Рассматриваемая система предназначена для поддержания угловой скорости вала двигателя 5 в виде постоянной величины или ее изменения по программе, задаваемой изменением напряжения U . Принцип работы данной системы такой же, как и принцип работы системы, описанной в примере 2. Отличие

состоит в том, что вместо генератора (пример 2) в рассматриваемой системе непосредственно на двигатель 5 (управляемый объект) воздействует исполнительный двигатель 2. Его наличие обеспечивает в системе астатизм по отношению к моментам нагрузки на валу управляемого двигателя. Это означает, что при $U=const$ сигнал, подаваемый на усилитель 1, в установившемся процессе (когда скорость вала двигателя 5 - постоянная) будет равен нулю.

§ 1.2. Следящие системы.

ПРИМЕР. Следящая система на постоянном токе.

Упрощенная принципиальная схема следящей системы представлена на рис. 7.

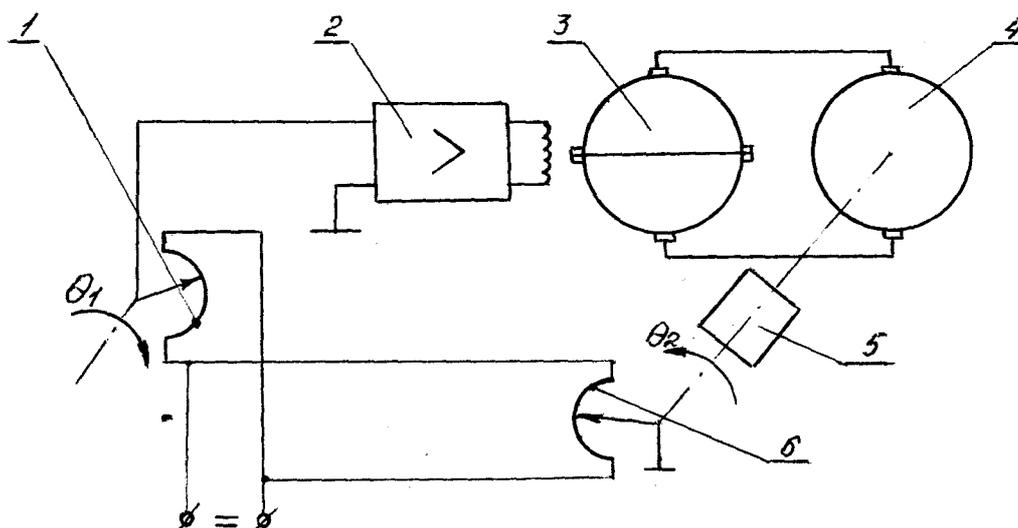


Рис. 7. Упрощенная принципиальная схема следящей системы на постоянном токе.

На этом рисунке обозначено:

1 - задающий потенциометр, движок которого связан с валом, имеющим угол поворота θ_1 ; 2 - электронный усилитель; 3 - электромашинный усилитель; 4 - двигатель постоянного тока с независимым возбуждением; 5 - редуктор; 6 - измерительный потенциометр, движок которого жестко связан с выходным валом редуктора, имеющим угол поворота θ_2 .

Система предназначена для осуществления автоматического слежения движка потенциометра 6 за движком потенциометра 1. Слежение осуществляется следующим образом. Потенциометры 1 и 6 образуют мост, в диагональ которого включен усилитель 2. Как только движок потенциометра 1 займет положение, отличное от положения движка потенциометра 6, на входе усилителя 2. появится сигнал. Этот сигнал, усиленный по уровню и мощности усилителями 2. и 5, воздействует на двигатель 4 так, чтобы разность между положениями указанных выше движков свести к нулю.

УРАВНЕНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И ИХ ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Составление уравнений систем автоматического управления рассмотрим на примерах.

Пример. Составить уравнения для системы, упрощенная принципиальная схема которой изображена на рис.2. Введем обозначения:

U - напряжение на делителе;

U_1 - напряжение на входе усилителя 2

U_2 - напряжение на выходе усилителя;

k_1 - коэффициент усиления усилителя по напряжению;

i_b - ток в обмотке управления генератора 3;

R_b - сопротивление обмотки управления генератора;

L_b - индуктивность обмотки управления генератора;

E_n - э.д.с. , возникающая в обмотке якоря генератора;

m_1 - коэффициент передачи генератора (в/а);

Ω - угловая скорость вала двигателя;

L - индуктивность обмоток якоря генератора и двигателя;

J - момент инерции якоря двигателя с учетом приведенного момента инерции всех вращающихся частей, связанных с ним;

R - сопротивление обмоток якорей генератора 3 и двигателя 4;

i_a - ток в обмотках якорей генератора и двигателя;

C_e, C_m - коэффициенты передачи двигателя соответственно по напряжению и по моменту;

U_3 - напряжение на выходе тахогенератора 5;

k_5 - коэффициент передачи тахогенератора;

i - передаточное число редуктора

1. Уравнение усилителя

$$U_2 = k_1 U_1$$

2. Уравнения генератора:

$$L_b \frac{di_b}{dt} + R_b i_b = U_2,$$

$$E_n = m_1 i_b$$

3. Уравнения двигателя:

$$L_b \frac{di_a}{dt} + R i_a = E_n - C_e \Omega,$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_m i_a - \frac{M}{i}$$

4. Уравнение тахогенератора

$$U_3 = k_5 \Omega$$

5. Уравнение обратной связи

$$U_1 = U - U_3$$

Преобразуем уравнения генератора и двигателя:

$$T_1 \frac{dE_n}{dt} + E_n = k_2 U_2 ;$$

$$i_n = \frac{1}{C_M} J \frac{d\Omega}{dt} + \frac{M}{C_m j} ;$$

$$LJ \frac{d^2\Omega}{dt^2} + RJ \frac{d\Omega}{dt} + LJ \frac{dM}{dt} + \frac{R}{i} M = C_M E_n - C_M C_e \Omega ;$$

$$\frac{1}{C_M C_e} LJ \frac{d^2\Omega}{dt^2 + T_2} \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = k_3 \left(E_n - \frac{L}{C_M C_e j} \frac{dM}{dt} - k_4 M \right) ;$$

где $T_1 = \frac{L_b}{R_b} ; \quad k_2 = \frac{m_1}{R_b} ; \quad T_2 = \frac{RJ}{C_M C_e} ;$

$$k_3 = \frac{1}{C_e} ; \quad k_4 = \frac{R}{i C_M C_e} .$$

Тогда пренебрегая L , получаем следующую систему уравнений:

$$U_1 = U - U_3 , \quad (1)$$

$$U_2 = k_1 U_1 , \quad (2)$$

$$T_1 \frac{dE_n}{dt} + E_n = k_2 U_2 , \quad (3)$$

$$T_2 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = k_3 (E_n - k_4 M) , \quad (4)$$

$$U_3 = k_5 \Omega , \quad (5)$$

Приведем полученную систему уравнений (1)÷(5) к одному уравнению относительно неизвестной угловой скорости Ω , полагая при этом известным момент M .

После исключения U_2 из уравнения (3) с учетом (1), (2) и (5) имеем:

$$T_1 \frac{dE_n}{dt} + E_n = k_1 k_2 (U - k_5 \Omega) , \quad (6)$$

Теперь, используя уравнение (4), составим левую часть уравнения (6):

$$\frac{dE_n}{dt} = \frac{T_2}{K_3} \frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{1}{k_3} \frac{d\Omega}{dt} + k_4 \frac{dM}{dt} ;$$

$$T_1 \frac{dE_n}{dt} + E_n = \frac{T_1 T_2}{k_3} \frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{T_1 + T_2}{k_3} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\Omega}{k_3} + T_1 k_4 \frac{dM}{dt} + k_4 M .$$

Тогда, после замены девой части в (6) имеем:

$$\frac{T_1 T_2}{k_3} \frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{T_1 + T_2}{k_3} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\Omega}{k_3} + T_1 k_4 \frac{dM}{dt} + k_4 M = k_1 k_2 (U - k_5 \Omega) ,$$

или

$$T_1 T_2 \frac{d^2\Omega}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\Omega}{dt} + (1 + k) \Omega = kU - k_3 k_4 (T_1 \frac{dM}{dt} + M) , \quad (7)$$

где $k = k_1 k_2 k_3 k_5$. Данное уравнение будет представлять собой уравнение всей системы в целом относительно Ω . Оно, как и система (1) - (5), показывает, что рассматриваемая система является системой второго порядка.

Уравнение (7) можно получить из системы (1)÷(5), пользуясь символическим методом. Покажем применение этого метода,

Заменяем в системе (1) --(5)

$$\frac{d}{dt} = p.$$

Тогда будем иметь систему линейных алгебраических уравнений:

$$U_1 = U - U_3,$$

$$U_2 = k_1 U_1,$$

$$(T_1 p + 1)E_n = k_2 U_2,$$

$$(T_2 + 1)\Omega = k_3(E_n - k_4 M),$$

$$U_3 = k_5 \Omega.$$

Решая эту систему уравнений относительно Ω получаем:

$$E_n = k_1 k_2 \frac{U - k_5 \Omega}{T_1 p + 1};$$

$$(T_2 p + 1)\Omega = k \frac{U - k_5 \Omega}{T_1 p + 1} - k_3 k_4 M;$$

$$[(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k k_5]\Omega = k U - k_3 k_4 (T_1 p + 1) M;$$

Раскрывая скобки и заменяя

$$p^2 \Omega = \frac{d^2 \Omega}{dt^2}; \quad p \Omega = \frac{d \Omega}{dt}; \quad p M = \frac{d M}{dt}.$$

приходим к уравнению (7).

Пример. Составить уравнение системы, упрощенная принципиальная схема которой представлена на рис.4., в предположении, что нагрузка представляет собой активное сопротивление. Для составления уравнения системы введем обозначения:

L_y и R_y - индуктивность и сопротивление обмотки управления ЭМУ;

i_y - ток в обмотке управления ЭМУ;

L_n и R_n - индуктивность и сопротивление поперечной обмотки ЭМУ;

i_y - ток в поперечной обмотке ЭМУ;

L и R - индуктивность и сопротивление продольной обмотки ЭМУ и обмотки возбуждения генератора;

i - ток в продольной обмотке ЭМУ и в обмотке возбуждения генератора;

E - э.д.с. в продольной обмотке ЭМУ;

$L_{я}$ и $R_{я}$ - индуктивность и сопротивление обмотки якоря генератора;

$i_{я}$ - ток в обмотке якоря генератора;

R_2 и R_l - сопротивление потенциометра и его части;

R_n - сопротивление нагрузки;

U_1 - задающее напряжение;

k_1 - коэффициент усиления электронного усилителя;

U_2 - напряжение на выходе электронного усилителя.

Пользуясь принципом Даламбера, составляем уравнения для каждого элемента, входящего в систему:

1. Электронного усилителя

$$U_2 = k_1 (U - U_1)$$

2. Электромашинного усилителя

$$L_y = \frac{di_y}{dt} + R_y i_y = U_2,$$

$$L_n = \frac{di_n}{dt} + R_n i_n = m_1 i_y,$$

3. Генератора постоянного тока

$$L \frac{di}{dt} + Ri = m_2 i_n,$$

$$L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + R_{\text{я}} i_{\text{я}} + U_n = m_3 i,$$

$$U_n = R_0 i_{\text{я}},$$

$$R_0 = \frac{R_n R_2}{R_2 + R_n}.$$

4. Потенциометра

$$U_1 = \frac{R_1}{R_2} U_n,$$

где m_1, m_2, m_3 - коэффициенты передачи, U_n - напряжение на нагрузке.

Преобразуем полученную систему уравнений. Для этого применим символический метод. Из уравнений для электромашинного усилителя имеем

$$(L_n p + R_n)(L_y p + R_y) i_n = m_1 (L_y p + R_y) = m_1 U_2;$$

или, пренебрегая произведением $L_y L_n$ и заменяя $i_n = \frac{E}{m_2}$, получаем

$$(T_2 p + 1)E = k_2 U_2$$

где $T_2 = \frac{L_n}{R_n} + \frac{L_y}{R_y}; \quad k_2 = \frac{m_1 m_2}{R_y R_n}$

После замены $i_{\text{я}}$ через U_n и введения обозначений

$$T_3 = \frac{L}{R}; \quad k_3 = \frac{R_n}{R}; \quad T_4 = \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}} + R_0}; \quad k_4 = \frac{m_3 R_0}{R_0 + R_{\text{я}}};$$

уравнения для генератора принимают вид:

$$(T_3 p + 1)i = k_3 E,$$

$$(T_4 p + 1)U_n = k_4 i.$$

Таким образом, система уравнений будет:

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= k_1 (U - U_1), \\ T_2 \frac{dE}{dt} + E &= k_2 U_2, \\ T_3 \frac{di}{dt} + i &= k_3 E, \\ T_4 \frac{dU_n}{dt} + U_n &= k_4 i, \\ U_1 &= k_5 U_n, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где

$$k_5 = \frac{R_1}{R_2}.$$

Пример. Составить уравнения системы, упрощенная принципиальная схема которой представлена на рис.4.

Предварительно введем обозначения:

k_1 - коэффициент усиления электронного усилителя;

U_2 - напряжение на выходе электронного усилителя;

T_1 - электромеханическая постоянная времени исполнительного двигателя, т.е.

$$T_1 = \frac{R_1 J_1}{C_{M_1} C_{e_1}};$$

Ω_n - угловая скорость якоря исполнительного двигателя;

i - передаточное число редуктора исполнительного двигателя;

R_0 - сопротивление обмотки якоря регулируемого двигателя;

α - угол поворота выходного вала редуктора исполнительного двигателя;

k - коэффициент пропорциональности реостата;

U_0 - напряжение питания якорной обмотки;

L - индуктивность обмотки якоря регулируемого двигателя;

J - момент инерции якоря регулируемого двигателя с учетом частей, вращающихся вместе с ним;

i_a - ток в обмотке якоря регулируемого двигателя;

C_M, C_e - коэффициенты передачи регулируемого двигателя соответственно по моменту и по напряжению;

Ω - угловая скорость якоря регулируемого двигателя;

U_T - напряжение на выходе тахогенератора;

k_T - коэффициент передачи тахогенератора;

U - напряжение;

U_1 - напряжение на входе электронного усилителя,

Пользуясь принципом Даламбера, разбиваем всю систему на элементы и для каждого элемента составляем уравнения.

1. Электронный усилитель

$$U_1 = U - U_T, \quad U_2 = k_1 U_1.$$

2. Исполнительный двигатель

$$T_1 \frac{d\Omega_u}{dt} + \Omega_u = \frac{1}{C_{e_1}} U_2 - \frac{M R_1}{i C_{M_1} C_{e_1}};$$

$$\frac{d}{dt} \alpha = \frac{\Omega_u}{i};$$

M - момент, приложенный к выходному валу редуктора, 3. Регулируемый двигатель с реостатом.

3. Регулируемый двигатель с реостатом

$$L \frac{di_a}{dt} + R i_a = U_0 - C_e \Omega,$$

$$R = R_0 - k_0 \alpha,$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_M i_a - M_n;$$

где M_n - момент нагрузки, привеченный к валу регулируемого двигателя.

4. Тахогенератор

$$U_T = k_7 \Omega.$$

Первое уравнение с учетом второго для регулируемого двигателя является *нелинейным* уравнением, если принять условие, что моменты M и M_H не зависят от введенных переменных. Считаем, эти моменты постоянными. Принимая это условие, проведем линеаризацию указанных нелинейных уравнений. При этом предполагаем, что переменные i_α и α мало изменяются относительно своих установившихся значений, соответствующих постоянной регулируемой величине. Установившиеся значения переменных обозначим соответственно:

$$U_1 - U_{1y}, \quad U_T - U_{Ty}, \quad U_2 - U_{2y}, \quad \Omega_u - \Omega_{uy}, \quad \alpha - \alpha_y, \quad R - R_y, \quad i_\alpha - i_{\alpha y}, \quad \Omega - \Omega_y.$$

Для определения их значений применяем записанные выше уравнения, в которых учитываем, что

$$\frac{d}{dt} \alpha_y = 0, \quad \Omega_{uy} = 0, \quad \frac{d\Omega_y}{dt} = 0.$$

Это дает:

$$U_{1y} = U - U_{Ty};$$

$$U_{2y} = k_1 U_{1y};$$

$$\Omega_{uy} = \frac{1}{C_{e1}} U_{2y} - \frac{MR_1}{iC_{M1}C_{e1}},$$

$$0 = \frac{1}{i} \Omega_{uy},$$

$$R_y i_{\alpha y} = U_0 - C_e \Omega_y,$$

$$R_y = R_0 - k_p \alpha_y,$$

$$0 = C_M i_{\alpha y} - M_H,$$

$$U_{Ty} = k_7 \Omega_y.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$i_\alpha = \frac{M_H}{C_M}; \quad R_y = \frac{1}{i_{\alpha y}} (U_0 - C_e \Omega_y); \quad U_{2y} = \frac{MR_1}{iC_{M1}};$$

$$U_{1y} = \frac{U_{2y}}{k_2}; \quad U_{Ty} = U - U_{1y}; \quad \Omega_y = \frac{1}{k_7} U_{Ty}.$$

Теперь проводим линеаризацию нелинейной функции, входящей в уравнение для регулируемого двигателя:

$$\begin{aligned} Ri_\alpha &= [R_0 - k_p(\alpha_y + \Delta\alpha)](i_{\alpha y} + \Delta i_\alpha) \approx (R_0 + k_p \alpha_y) i_{\alpha y} + (R_0 - k_p \alpha_y) \Delta i_\alpha - k_p i_{\alpha y} \Delta\alpha = \\ &= R_y i_{\alpha y} + R_y (i_\alpha - i_{\alpha y}) - k_p i_{\alpha y} (\alpha - \alpha_y) = R_y i_\alpha - k_p i_{\alpha y} \alpha + k_p i_{\alpha y} \alpha_y \end{aligned}$$

Тогда из указанных уравнений имеем:

$$L \frac{di_\alpha}{dt} + R_y i_\alpha = U_{01} + k_p i_{\alpha y} \alpha - C_e \Omega,$$

$$i_{\alpha y} = \frac{U_{01} + k_p i_{\alpha y} \alpha - C_e \Omega}{R_y},$$

$$T_2 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{C_e} U_{01} + \frac{K_p i_{\alpha y}}{C_e} \alpha - \frac{R_y M_H}{C_e C_M},$$

где $U_{01} = U_0 - k_p i_{яy} \alpha_y,$

$$T_2 = \frac{R_y J}{C_e C_M}; \quad L=0$$

После этого получаем *линеаризованную* систему уравнений в виде:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U - U_T, \\ U_2 &= k_1 U_1, \\ T_1 \frac{d\Omega_u}{dt} + \Omega_u &= \frac{1}{C_{e1}} U_2 - \frac{MR_1}{i C_{M1} C_{e1}}; \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\Omega_u}{i}; \\ T_2 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega &= \frac{1}{C_e} U_{01} + \frac{k_p i_{яy}}{C_e} \alpha - \frac{R_y M_u}{C_e C_M}; \\ U_T &= k_7 \Omega \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Пример. Составить уравнения следящей системы, упрощенная принципиальная схема которой представлена на рис.7.

Данная система имеет элементы, которые уже встречались в рассмотренных выше примерах. Поэтому уравнения для элементов, учитывая это, запишем уже в окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= k_{II} (\theta_1 - \theta_2), \\ U_2 &= k U_1, \\ T_1 \frac{dE}{dt} + E &= k_2 U_2, \\ T_2 \frac{d\Omega}{dt} + \Omega &= k_3 (E - k_4 M); \\ \frac{d}{dt} \theta_2 &= \frac{\Omega}{i}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

k_{II} - коэффициент передачи потенциометрического моста;

U_1 - напряжение на входе электронного усилителя;

U_2 - напряжение на выходе электронного усилителя;

k_1 - коэффициент усиления электронного усилителя;

T_1 - постоянная времени электромашинного усилителя;

E - э.д.с. в продольной обмотке электромашинного усилителя;

k_2 - коэффициент усиления электромашинного усилителя;

T_2 - электромеханическая постоянная времени двигателя с учетом сопротивления продольной обмотки электромашинного усилителя;

k_3, k_4 - коэффициента передачи;

M - момент, приложенный к выходному валу редуктора, имеющего передаточное отношение i ;

Ω - угловая скорость вала якоря электродвигателя.

Пример. Составить уравнения гидравлического сервомеханизма с применением уравнений Лагранжа второго ряда, принципиальная схема которого изображена на рис.8.

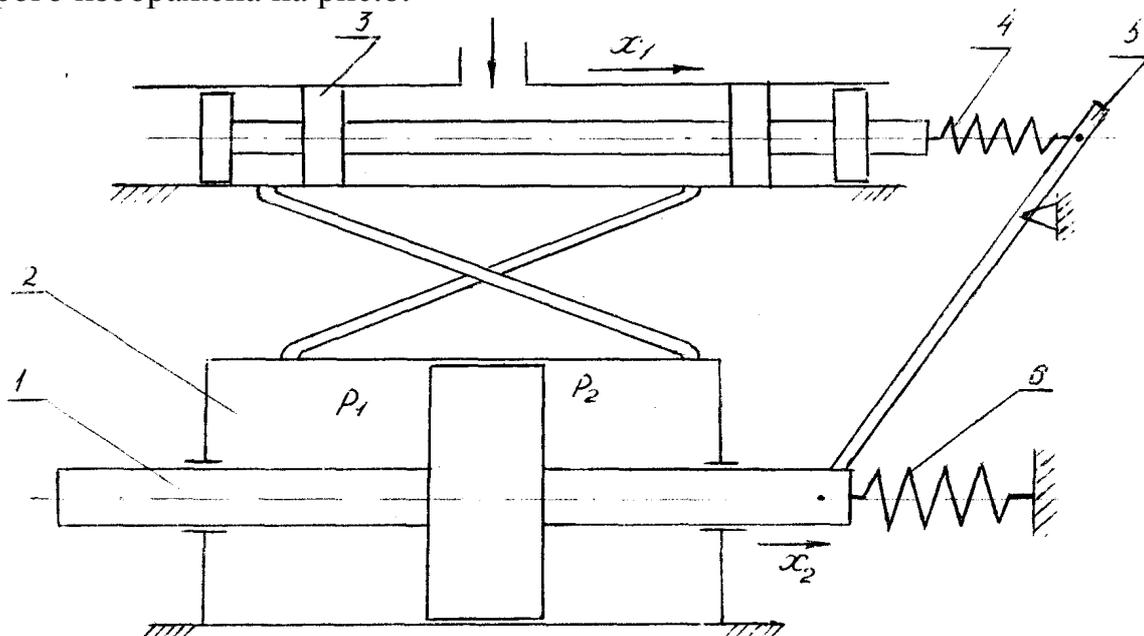


Рис.8. Принципиальная схема гидравлического сервомеханизма.

На этом рисунке обозначено:

- 1 - шток с поршнем;
- 2 - цилиндр сервомеханизма;
- 3 - золотник;
- 4 - пружина золотника;
- 5 - коромысло;
- 6 - пружина, имитирующая нагрузку;
- x_1, x_2 - перемещения соответственно золотника и поршня;
- p_1, p_2 силы давления жидкости в цилиндре.
- $f(t)$ - сила, управляющая золотников.

Для составления уравнений сервомеханизма определяем кинетическую энергию системы и обобщенные силы, принимая за обобщенные координаты x_1 и x_2 (динамические процессы в жидкости не учитываем):

$$T = m_1 \frac{\dot{x}_1^2}{2} + m_2 \frac{\dot{x}_2^2}{2},$$

$$Q_1 = f(t) + \eta_1(x_1 + x_2) - h_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2),$$

$$Q_2 = P_1 - P_2 - \eta_2 x_2 - h_2 \dot{x}_2 - \eta_1(x_1 + x_2) - h_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2),$$

где

T - кинетическая энергия системы (золотника, поршня и коромысла);

m_1, m_2 - масса соответственно золотника, поршня со штоком с учетом приведенной массы коромысла;

Q_1, Q_2 - обобщенные силы;

η_1, η_2 - жесткость соответственно пружины 1 и 2;

h_1, h_2 - коэффициенты пропорциональности.

Применяя уравнения Лагранжа второго рода для рассматриваемой системы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = Q_2,$$

получаем:

$$m_1 \ddot{x}_1 = f(t) - \eta_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - h_1(x_1 + x_2),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = P_1 - P_2 - h_1(x_1 + x_2) - h_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - \eta_2 x_2 - h_2 \dot{x}_2,$$

Предположим, что

$$P_1 - P_2 = P(x_1, x_2, \dot{x}_2)$$

Заменяем эту функцию в окрестности начала координат линейной функцией.

Тогда имеем:

$$\ddot{x}_1 = f(t) - a_{11}x_1 - a_{12}\dot{x}_1 - a_{13}x_2 - a_{14}\dot{x}_2,$$

$$\ddot{x}_2 = P_0 - a_{21}x_1 - a_{22}\dot{x}_1 - a_{23}x_2 - a_{24}\dot{x}_2,$$

где $P_0 = P(0,0,0), \quad a_{11} = a_{13} = \eta_1,$

$$a_{12} = a_{14} = h_1, \quad a_{21} = \eta_1 - \left[\frac{\partial P}{\partial x_1} \right]_0, \quad a_{22} = h_1,$$

индекс "нуль" означает значение соответствующей производной в начале координат.

Из полученных уравнений можно подучить уравнения для относительных переменных, а также уравнения в относительных переменных с безразмерными коэффициентами. Для получения первого вида уравнений необходимо разделить данные уравнения на постоянную величину, имеющую размерность силы, и переменные x_1 и x_2 выразить через относительные величины:

$$x_1 = x_{1m} \bar{x}_1,$$

$$\dot{x}_1 = x_{1m} \dot{\bar{x}}_1,$$

$$\ddot{x}_1 = x_{1m} \ddot{\bar{x}}_1,$$

$$x_2 = x_{2m} \bar{x}_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_{2m} \dot{\bar{x}}_2,$$

$$\ddot{x}_2 = x_{2m} \ddot{\bar{x}}_2,$$

$$\frac{x_{1m}}{f_m} \ddot{\bar{x}}_1 = f(t) - \frac{x_{1m}}{f_m} a_{11} \bar{x}_1 - \frac{x_{1m}}{f_m} a_{12} \dot{\bar{x}}_1 - \frac{x_{2m}}{f_m} a_{13} \bar{x}_2 - \frac{x_{2m}}{f_m} a_{14} \dot{\bar{x}}_2,$$

$$\frac{x_{2m}}{f_m} \ddot{\bar{x}}_2 = \frac{P_0}{P_m} - \frac{x_{1m}}{f_m} a_{21} \bar{x}_1 - \frac{x_{1m}}{f_m} a_{22} \dot{\bar{x}}_1 - \frac{x_{2m}}{f_m} a_{23} \bar{x}_2 - \frac{x_{2m}}{f_m} a_{24} \dot{\bar{x}}_2,$$

где f_m и P_m - максимальные значения соответствующих функций: Эти уравнения содержат коэффициенты, имеющие размерность времени, причем в степени, равной порядку соответствующей производной. Если перейти к относительному времени то получим уравнения, у которых коэффициенты будут безразмерными.

ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕХОДНАЯ ФУНКЦИЯ. ПЕРЕХОДНАЯ
ХАРАКТЕРИСТИКА.
ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМЫ

Определение импульсных переходных функций и переходных характеристик рассмотрим на примерах.

ПРИМЕР I. Определить импульсные переходные функции всех звеньев и импульсную переходную функций системы в целом, описываемой уравнениями (I) - (5) .

Заметим, что, если звено имеет несколько входных сигналов, то импульсная переходная функция определяется относительно каждого из сигналов или, если эти входные сигналы объединить в один, то тогда для этого звена будет одна импульсная переходная функция. Итак, из указанной системы уравнений имеем

$$U = \delta(t - \tau), \quad U_3 = 0, \quad U_1 = \omega_{11}(t - \tau) = \delta(t - \tau)$$

$$U = 0, \quad U_3 = \delta(t - \tau), \quad U_1 = \omega_{12}(t - \tau) = -\delta(t - \tau),$$

$$U - U_3 = \delta(t - \tau), \quad U_1 = \omega_1(t - \tau) = \delta(t - \tau),$$

$$U_1 = \delta(t - \tau), \quad U_2 = \omega_2(t - \tau) = k_1 \delta(t - \tau),$$

$$U_2 = \delta(t - \tau), \quad E_{II} = \omega_3(t - \tau),$$

$$T_1 \frac{d}{dt} \omega_3(t - \tau) + \omega_3(t - \tau) = k_2 \delta(t - \tau),$$

$$(T_1 p + 1)W_3(p) = k_2, \quad W_3(p) = \frac{k_2}{T_1 p + 1}; \quad W_3(t - \tau) = 1(t - \tau) \frac{k_2}{T_1} e^{-\frac{(t-\tau)}{T_1}},$$

$$E_{II} - k_4 M = \delta(t - \tau), \quad \Omega = \omega_4(t - \tau) = 1(t - \tau) \frac{k_3}{T_2} e^{-\frac{(t-\tau)}{T_2}},$$

$$\Omega = \delta(t - \tau), \quad U_3 = \omega_5(t - \tau) = k_5 \delta(t - \tau),$$

где $W_3(p)$ и $W_4(p)$ - преобразования Лапласа соответственно для $\omega_3(t - \tau)$ и $\omega_4(t - \tau)$. Теперь, используя уравнение (7), находим импульсную переходную функцию всей системы. При этом определяем импульсную переходную функцию системы по отношению к управляющей величине "U" и по отношению к моменту нагрузки отдельно.

Из последнего уравнения системы (10) , полагая $\Omega = \delta(t - \tau)$ и вводя обозначение $\theta_2 = \omega_3$, имеем:

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{\delta(t - \tau)}{j}; \quad \omega_3 = \frac{1}{j} \int_{-\infty}^t \delta(t - \tau) dt = \frac{1}{j} \cdot 1(t - \tau)$$

Переходную характеристику рассмотренных звеньев будем определять на основе зависимости, связывающей эту характеристику с импульсной переходной функцией;

$$h_1(t - \tau) = 1(t - \tau) \int_{\tau}^t \omega(t - \tau) dt.$$

Применяя ее, получаем:

$$h_1(t - \tau) = 1(t - \tau) \int_{\tau}^t \omega_1(t - \tau) dt = 1(t - \tau) \frac{k_{II} k_1 k_2}{T_1} \int_{\tau}^t e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} dt = 1(t - \tau) k_{II} k_1 k_2 (1 - e^{-\frac{t-\tau}{T_1}}),$$

$$h_2(t-\tau) = 1(t-\tau) \int_{\tau}^t \omega_2(t-\tau) dt = 1(t-\tau) \frac{k_3}{T_2} \int_{\tau}^t e^{-\frac{t-\tau}{T_2}} dt = 1(t-\tau) k_3 (1 - e^{-\frac{t-\tau}{T_2}}),$$

$$h_3(t-\tau) = 1(t-\tau) \int_{\tau}^t \omega_3(t-\tau) dt = 1(t-\tau) \frac{1}{j} \int_{\tau}^t dt = 1(t-\tau) \frac{1}{j} (t-\tau),$$

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМЫ

ПРИМЕР I. Определить передаточные функции звеньев системы, уравнения которой имеют вид (I) - (5), и по ним построить структурную схему. Определить передаточные функции замкнутой и разомкнутой системы.

По уравнениям (I) - (5) определяем преобразования Лапласа по которым находим передаточные функции звеньев:

$$U_1(p) = U(p) - U_3(p), \quad K_1(p) = \frac{U_1(p)}{U(p) - U_3(p)} = 1;$$

$$U_2(p) = k_1 U_1(p), \quad K_2(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = k_1;$$

$$(T_1 p + 1) E_{II}(p) = k_2 U_2(p), \quad K_3(p) = \frac{E_{II}(p)}{U_2(p)} = \frac{k_2}{T_1 p + 1};$$

$$(T_2 p + 1) \Omega(p) = k_3 [E(p) - k_4 M(p)], \quad K_4(p) = \frac{\Omega(p)}{E_{II}(p) - k_4 M(p)} = \frac{k_3}{T_2 p + 1};$$

$$U_3(p) = k_5 \Omega(p), \quad K_5(p) = \frac{U_3(p)}{\Omega(p)} = k_5.$$

По полученным передаточным функциям строим структурную схему рис.9

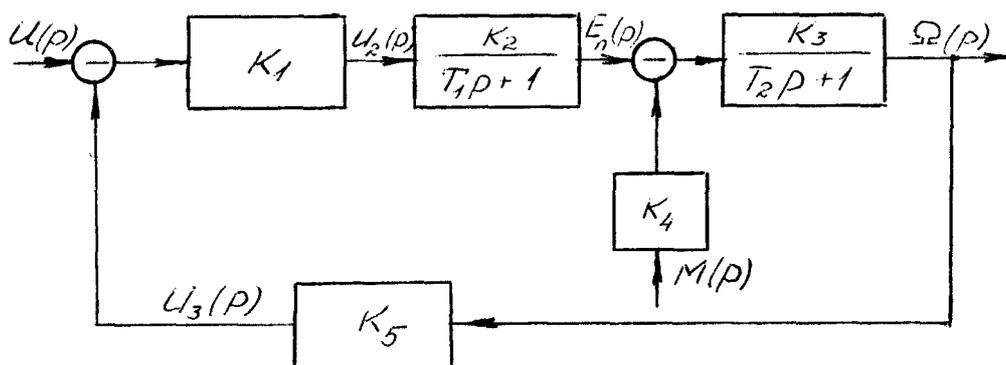


Рис. 9. Структурная схема системы стабилизации угловой скорости вала электродвигателя.

Теперь определяем передаточные функции замкнутой и разомкнутой системы. Отметим, что искомые передаточные функции можно определить как по уравнениям, так и на основе структурной схемы. Здесь воспользуемся структурной схемой. При этом для упрощения предварительно входной сигнал $M(p)$ приведем к входу системы, т.е. заменим эквивалентным сигналом $M_{II}(p)$, приложенным к входу системы. Этот сигнал определяем из условия

$$M_{II}(p)k_1 \frac{k_2}{T_1 p + 1} = -k_4 M(p),$$

$$M_{II}(p) = -\frac{k_4}{k_1 k_2} (T_1 p + 1) M(p).$$

Передаточная функция разомкнутой системы $W(p)$ будет

$$W(p) = \frac{U_3(p)}{U(p) + M_{II}(p)} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (11)$$

где по-прежнему $k = k_1 k_2 k_3 k_5$

Используя связь между передаточной функцией разомкнутой и замкнутой системы, имеем:

$$\Phi_x(p) = \frac{U(p) - U_3(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + W(p)} (M(p) \equiv 0),$$

$$\Phi_1(p) = \frac{U_3(p)}{U(p) + M_{II}(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)};$$

$$\Phi_2(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p) + M_{II}(p)} = \frac{1}{k_5} \frac{W(p)}{1 + W(p)}.$$

ПРИМЕР 2. Определить передаточные функции звеньев системы (8) и по ним построить структурную схему.

По уравнениям (8) определяем преобразования Лапласа, которые позволяют найти передаточные функции:

$$U_2(p) = k_1 [U(p) - U_1(p)], \quad K_1(p) = \frac{U_2(p)}{U(p) - U_1(p)} = k_1;$$

$$E(p) = \frac{k_2 U_2(p)}{T_2 p + 1}, \quad K_2(p) = \frac{E(p)}{U_2(p)} = \frac{k_2}{T_2 p + 1},$$

$$J(p) = \frac{k_3 E(p)}{T_3 p + 1}, \quad K_3(p) = \frac{J(p)}{E(p)} = \frac{k_3}{T_3 p + 1},$$

$$U_H(p) = \frac{k_4 J(p)}{T_4 p + 1}, \quad K_4(p) = \frac{U_H(p)}{J(p)} = \frac{k_4}{T_4 p + 1},$$

$$U_1(p) = k_5 U_H(p), \quad K_5(p) = \frac{U_1(p)}{U_H(p)} = k_5.$$

Структурная схема, построенная по данным передаточным функциям, изображена на рис. 10.

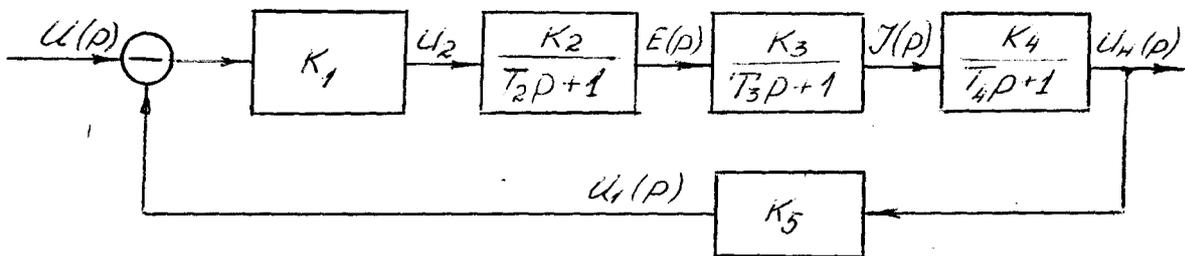


Рис. 10. Структурная схема системы стабилизации напряжения.

ПРИМЕР 3. Определить передаточные функции звеньев системы (9) и по ним построить структурную схему.

Применяя преобразование Лапласа, из системы (9) получаем:

$$\begin{aligned}
 U_2(p) &= k_1[U(p) - U_T(p)], & K_1(p) &= \frac{U_2(p)}{U(p) - U_T(p)} = k_1, \\
 \Omega_4(p) &= k_2 \frac{U_2(p) - k_3 M(p)}{T_1 p + 1}, & K_2(p) &= \frac{\Omega_4(p)}{U_2(p) - k_3 M(p)} = k_2, \\
 \alpha(p) &= \frac{\Omega_4(p)}{ip}, & K_3(p) &= \frac{\alpha(p)}{\Omega_4(p)} = \frac{1}{ip}, \\
 \Omega(p) &= k_4 \frac{k_5 U_{01}(p) + \alpha(p) - k_6 M_H(p)}{T_2 p + 1}, \\
 K_4(p) &= \frac{\Omega(p)}{k_5 U_{01}(p) + \alpha(p) - k_6 M_H(p)} = \frac{k_4}{T_2 p + 1}, \\
 U_T(p) &= k_7 \Omega(p), & K_5(p) &= \frac{U_T(p)}{\Omega(p)} = k_7,
 \end{aligned}$$

где

$$k_2 = \frac{1}{C_{e1}}; \quad k_3 = \frac{R_1}{iC_{M1}}; \quad k_4 = \frac{k_p i_{xy}}{C_e}; \quad k_5 = \frac{1}{k_p i_{xy}}; \quad k_6 = \frac{R_y}{k_p i_{xy} C_M};$$

По этим передаточным функциям построена структурная схема системы, которая представлена на рис. 11.

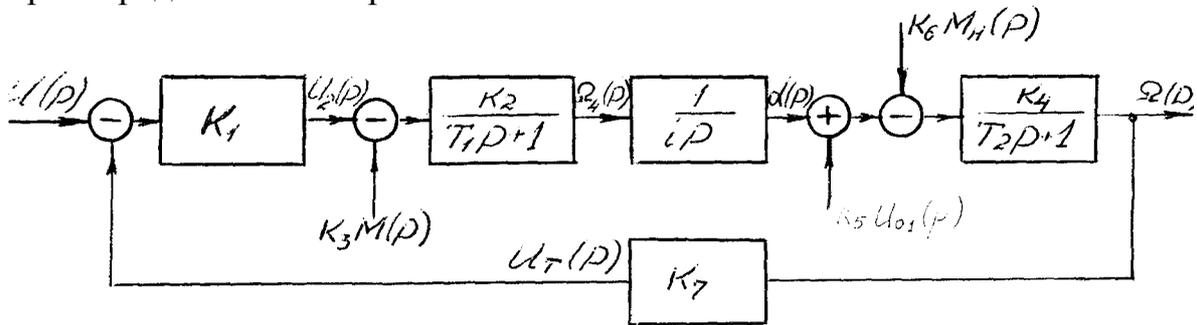


Рис. 11. Структурная схема астатической системы стабилизации угловой скорости.

ПРИМЕР 4. Определить передаточные функции системы (10), построить структурную схему системы и найти передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы.

Переходя к преобразованию Лапласа, из уравнений (10) определяем передаточные функции:

$$\begin{aligned}
 U_1(p) &= k_{II}[\theta_1(p) - \theta_2(p)], & K_1(p) &= \frac{U_1(p)}{\theta_1(p) - \theta_2(p)} = k_{II}; \\
 U_2(p) &= k_1 U_1(p), & K_2(p) &= \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = k_1; \\
 E(p) &= \frac{k_2 U_2(p)}{T_1 p + 1}, & K_3(p) &= \frac{E(p)}{U_2(p)} = \frac{k_2}{T_1 p + 1}; \\
 \Omega(p) &= \frac{k_3 [E(p) - k_4 M(p)]}{T_2 p + 1}, & K_4(p) &= \frac{\Omega(p)}{E(p) - k_4 M(p)} = \frac{k_3}{T_2 p + 1}; \\
 \theta_2(p) &= \frac{\Omega(p)}{ip}, & K_5(p) &= \frac{\theta_2(p)}{\Omega(p)} = \frac{1}{ip};
 \end{aligned}$$

По этим передаточным функциям строим структурную схему (рис. 12).

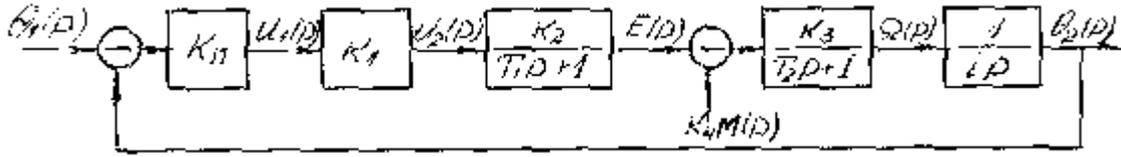


Рис. 12. Структурная схема следящей системы.

Теперь определяем передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы :

$$W(p) = \frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p) - \theta_2(p)} = \frac{k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (\text{где } M(p) \equiv 0), \quad (13)$$

$$\Phi_x(p) = \frac{\theta_1(p) - \theta_2(p)}{\theta_1(p)} = \frac{1}{1 + W(p)} \quad (M(p) \equiv 0),$$

$$\Phi_1(p) = \frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p) + M_{II}(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)};$$

$$\Phi_2(p) = \Phi_1(p),$$

где

$$k = k_{II} k_1 k_2 k_3 \frac{1}{i};$$

$$M_{II}(p) = \frac{-k_4}{k_{II} k_1 k_2} M(p)(T_1 p + 1).$$

ПРИМЕР 5. Составить и преобразовать структурную схему систем, уравнения которой имеют вид:

$$T_1 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = k_1 [f_1(t) - x],$$

$$T_2 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = k_{21} x_1,$$

$$x_3 = k_{22} x_1,$$

$$T_4 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k_3 (x_2 + x_3) - k_4 f_2(t).$$

Переходя к преобразованию Лапласа, находим передаточные функции:

$$(T_1 p + 1)X_1(p) = k_1 [F_1(p) - X(p)], \quad K_1(p) = \frac{X_1(p)}{F_1(p) - X(p)} = \frac{k_1}{T_1 p + 1};$$

$$(T_2 p + 1)X_2(p) = k_{21} X_1(p), \quad K_2(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{k_{21}}{T_2 p + 1};$$

$$X_3(p) = k_{22} X_1(p), \quad K_3(p) = \frac{X_3(p)}{X_1(p)} = k_{22};$$

$$(T_4 p + 1)X(p) = k_3[X_2(p) + X_3(p)] - k_4 F_2(p),$$

$$K_4(p) = \frac{X(p)}{X_2(p) + X_3(p) - \frac{k_4}{k_3} F_2(p)} = \frac{k_3}{p(T_4 p + 1)}$$

Теперь по найденным передаточным функциям строим структурную схему (рис. 13а)

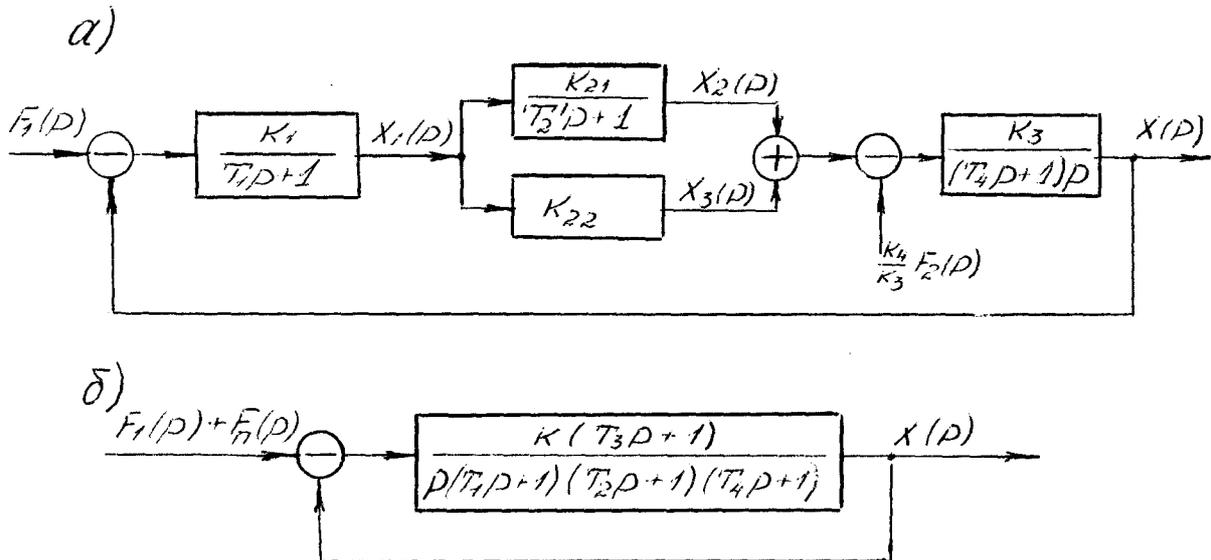


Рис. 13. Структурная схема системы: а) - исходная ;
б) - преобразованная.

Преобразуем эту структурную схему так, что после преобразования система была бы заменена одним эквивалентным звеном, охваченным отрицательной обратной связью, с этой целью два звена, соединенных между собой параллельно, заменяем одним эквивалентным звеном:

$$K_{13}(p) = \frac{k_{21}}{T_2 p + 1} + k_{22} = \frac{k_{21} + k_{22}(T_2 p + 1)}{T_2 p + 1} = k_2 \frac{T_3 p + 1}{T_2 p + 1},$$

где

$$k_2 = k_{21} + k_{22},$$

$$T_3 = \frac{k_{22} T_2}{k_{21} + k_{22}}$$

Тогда получаем последовательное соединение звеньев, передаточная функция (эквивалентная) которых будет представлять собой передаточную функцию разомкнутой системы :

$$W(p) = \frac{k(T_3 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_4 p + 1)},$$

где $k = k_1 k_2 k_3$. Структурная схема после ее преобразования представлена на рис. 13б, где

$$F_{II}(p) = -\frac{k_1 k_2 k_4}{k_3} \cdot \frac{F_2(p)(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_3 p + 1)}.$$

ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК.

ПРИМЕР 1. Определить частотные характеристики разомкнутой и замкнутой системы, структурная схема которой изображена на рис. 9, в различных формах.

Пользуясь передаточной функцией разомкнутой системы (II) находим :

$$W(j\omega) = \frac{k}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)} = k \frac{(1 - T_1 j\omega)(1 - T_2 j\omega)}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)} = k[U(\omega) + j\nu(\omega)],$$

$$H_p(\omega) = |W(j\omega)| = kH_1(\omega)H_2(\omega), \quad \varphi_p(\omega) = \arg W(j\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega),$$

где

$$U(\omega) = (1 - T_1 T_2 \omega^2) \frac{1}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}; \quad \nu(\omega) = -\frac{(T_1 + T_2)\omega}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)};$$

$$H_1(\omega) = \sqrt{\frac{(1 + T_1^2 \omega^2)}{(1 + T_2^2 \omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)}}; \quad H_2(\omega) = \sqrt{\frac{(1 + T_2^2 \omega^2)}{(1 + T_2^2 \omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + T_2^2 \omega^2)}};$$

$$\varphi_1(\omega) = \operatorname{arctg}(-T_1 \omega); \quad \varphi_2(\omega) = \operatorname{arctg}(-T_2 \omega),$$

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg H_1(\omega) + 20 \lg H_2(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 10 \lg(1 - T_1^2 \omega^2) - 10 \lg(1 - T_2^2 \omega^2),$$

$$L_a(\omega) = 20 \lg k, \quad \text{при } 0 \leq \omega < \frac{1}{T_2} \quad (T_2 > T_1)$$

$$L_a(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T_2 - 20 \lg \omega \quad \text{при } \frac{1}{T_2} \leq \omega < \frac{1}{T_1};$$

$$L_a(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T_2 - 20 \lg T_1 - 40 \lg \omega \quad \text{при } \omega > \frac{1}{T_1}$$

При $k = 100$, $T_2 = 0,1$ сек, $T_1 = 0,01$ сек. на рис.14,15 представлены соответственно $W(j\omega)$ и логарифмические частотные характеристики.

Амплитудную и фазовую частотные характеристики замкнутой системы находим на основе передаточной функции (12):

$$\Phi_1(j\omega) = \frac{k}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1) + k} = \frac{k}{-T_1 T_2 \omega^2 + (T_1 + T_2)j\omega + 1 + k} = k \frac{1 + k - T_1 T_2 \omega^2 - (T_1 + T_2)j\omega}{(1 + k - T_1 T_2 \omega^2) + (T_1 + T_2)^2 \omega^2};$$

$$H(\omega) = |\Phi_1(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1 + k - T_1 T_2 \omega^2) + (T_1 + T_2)^2 \omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arg \Phi_1(j\omega) = \operatorname{arctg} \left[-\frac{(T_1 + T_2)\omega}{1 + k - T_1 T_2 \omega^2} \right]$$

ПРИМЕР 2. Определить частотные характеристики разомкнутой системы, структурная схема которой изображена на рис. 12.

На основе передаточной функции разомкнутой системы (13), имеем:

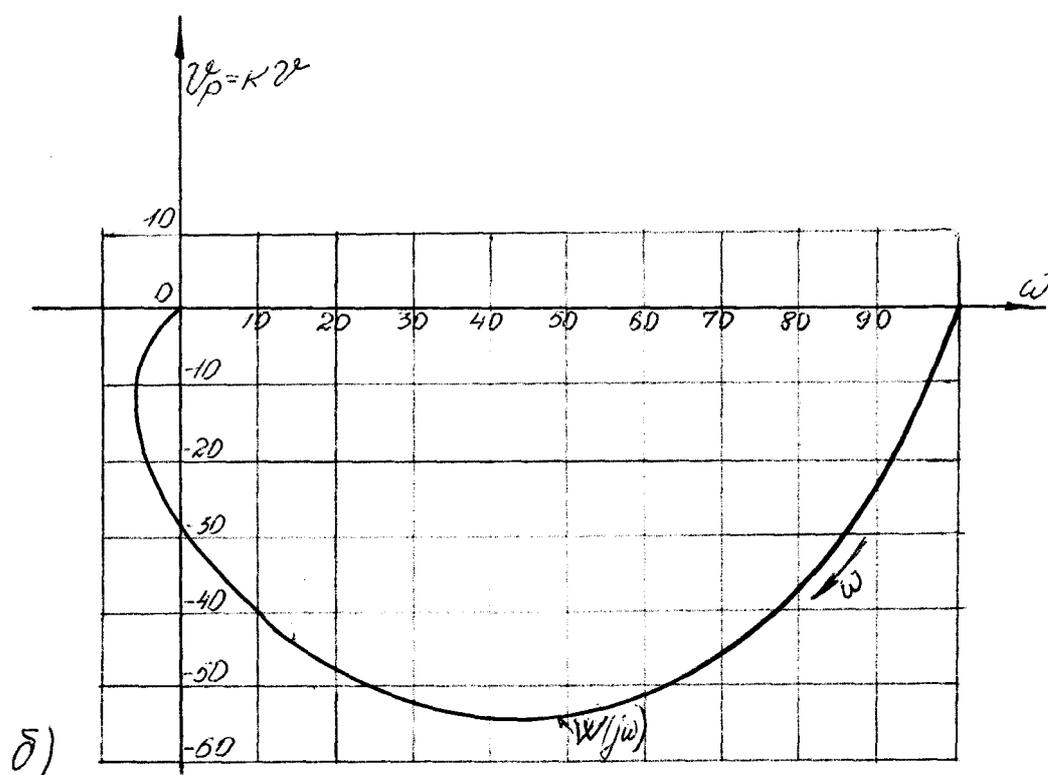
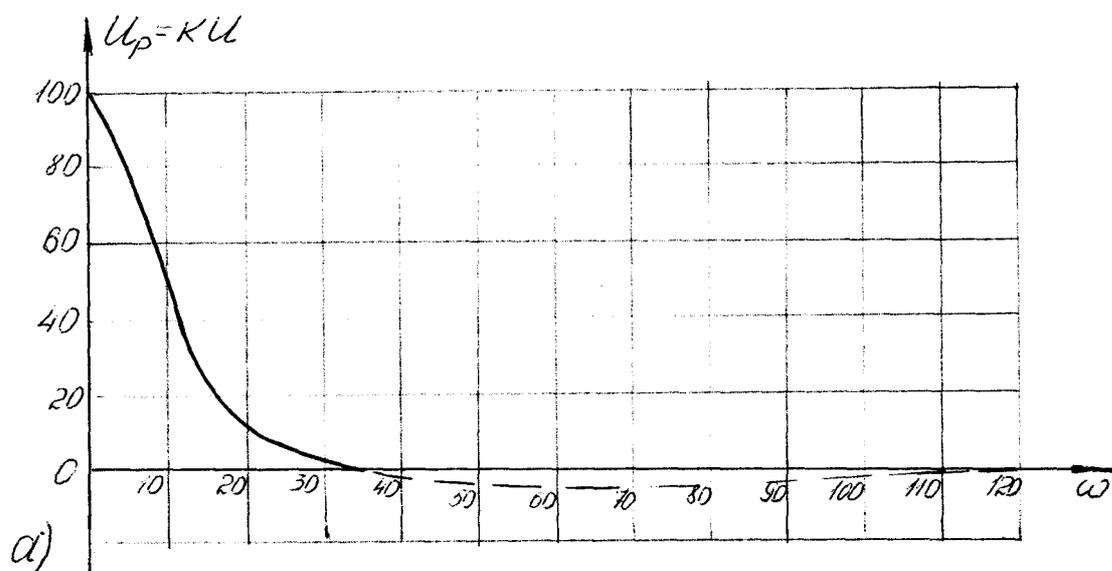


Рис. 14. Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы
 а) - действительная; б) - амплитудно-фазовая.

39.

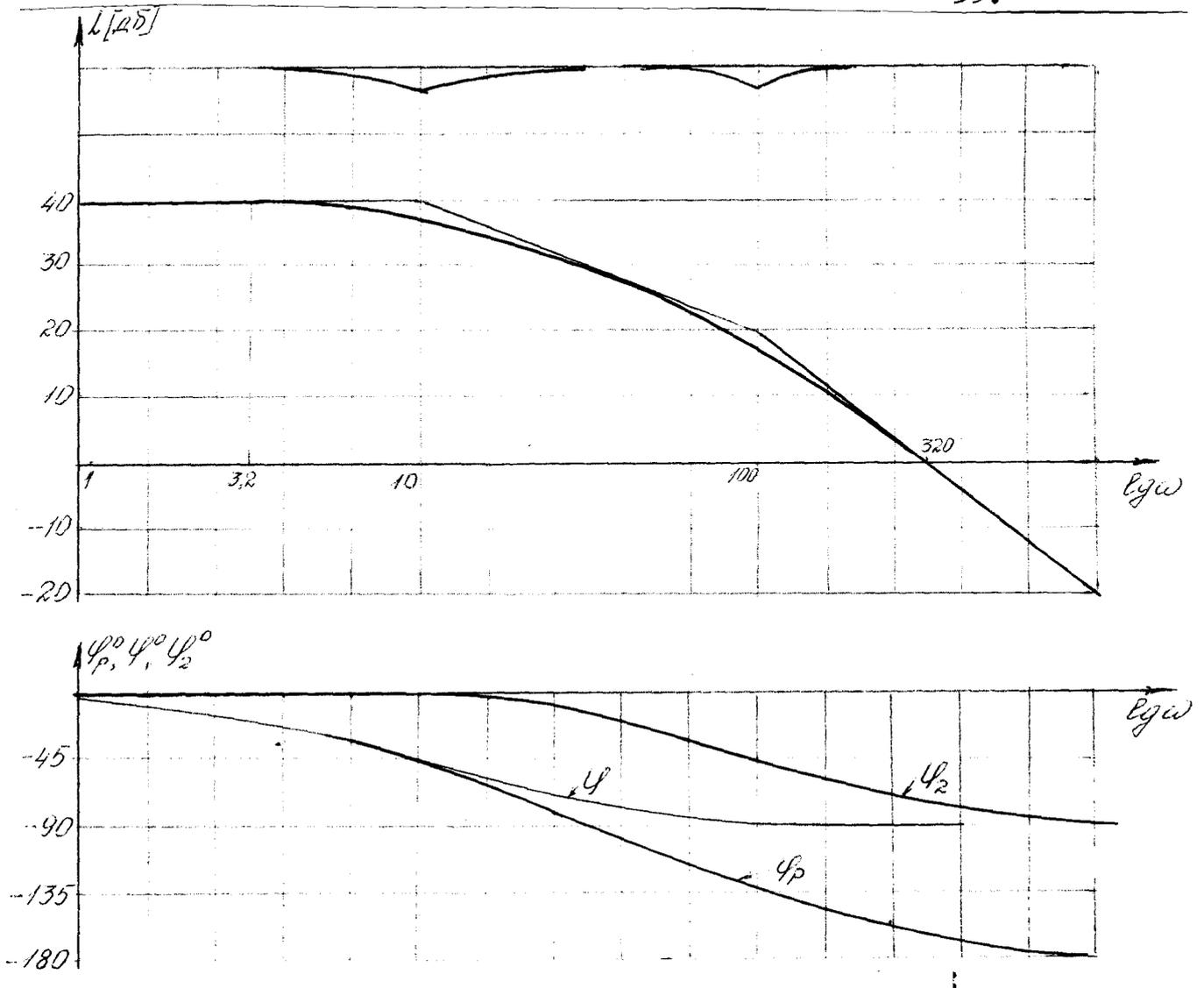


Рис. 15. Логарифмические частотные характеристики;
а)- амплитудная; б) - фазовая.

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)} = k \frac{-j(1 - T_1 j\omega)(1 - T_2 j\omega)}{\omega(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)} = k[U(\omega) + j\nu(\omega)],$$

$$H_p(\omega) = |W(j\omega)| = kH_1(\omega)H_2(\omega)\omega;$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = -90^\circ + \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega),$$

где

$$U(\omega) = -\frac{T_1 + T_2}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}; \quad \nu(\omega) = -\frac{1 - T_1 T_2 \omega^2}{\omega(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)};$$

$$H_1(\omega) = \frac{1}{|\omega| \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}; \quad H_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}};$$

$$\varphi_1(\omega) = \operatorname{arctg}(-T_1 \omega) - 90^\circ; \quad \varphi_2(\omega) = \operatorname{arctg}(-T_2 \omega),$$

$$L(\omega) = 20 \lg H_p(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 10 \lg(1 - T_1^2 \omega^2) - 10 \lg(1 - T_2^2 \omega^2),$$

$$L_a(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega \quad \text{при} \quad 0 \leq \omega < \frac{1}{T_2} \quad (T_2 > T_1)$$

$$L_a(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega \quad \text{при} \quad \frac{1}{T} \leq \omega < \frac{1}{T_1};$$

$$L_a(\omega) = 20 \lg k - 60 \lg \omega \quad \text{при} \quad \omega > \frac{1}{T_1}$$

На рис. 16 и 17 при $k = 50 \frac{1}{\text{сек}}$, $T_1 = 12 \cdot 10^{-3}$ сек, $T_2 = 80 \cdot 10^{-3}$ сек,

представлены соответственно амплитудно-фазовая и логарифмические частотные характеристики рассматриваемой системы, построенные на основе, записанных выше зависимостей.

Из зависимостей для $H_1(\omega)$ и $H_2(\omega)$ видно, что амплитудная характеристика разомкнутой системы монотонно убывает. Выражения для $U(\omega)$ и $\nu(\omega)$ показывают, что первая из них является монотонно возрастающей функцией, а вторая меняет свой знак, причем эта точка будет:

$$\nu(\omega) = 0,$$

$$1 - T_1 T_2 \omega^2 = 0,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{T_1 - T_2}} = \sqrt{\frac{1}{9,6}} \cdot 10^2 = 32,27;$$

$$U(\omega_1) = -0,01.$$

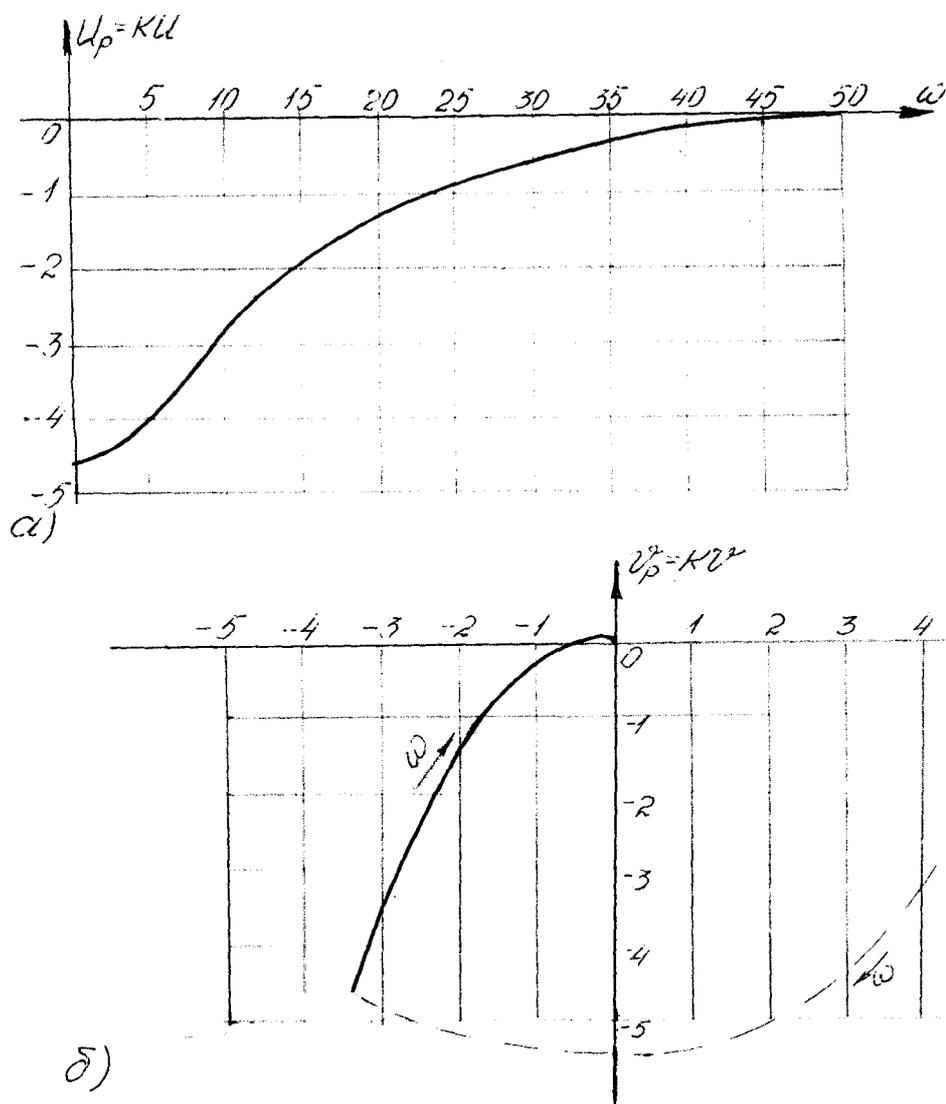


Рис. 16. Частотные характеристики разомкнутой системы:
 а) - действительная; б) - амплитудно-фазовая

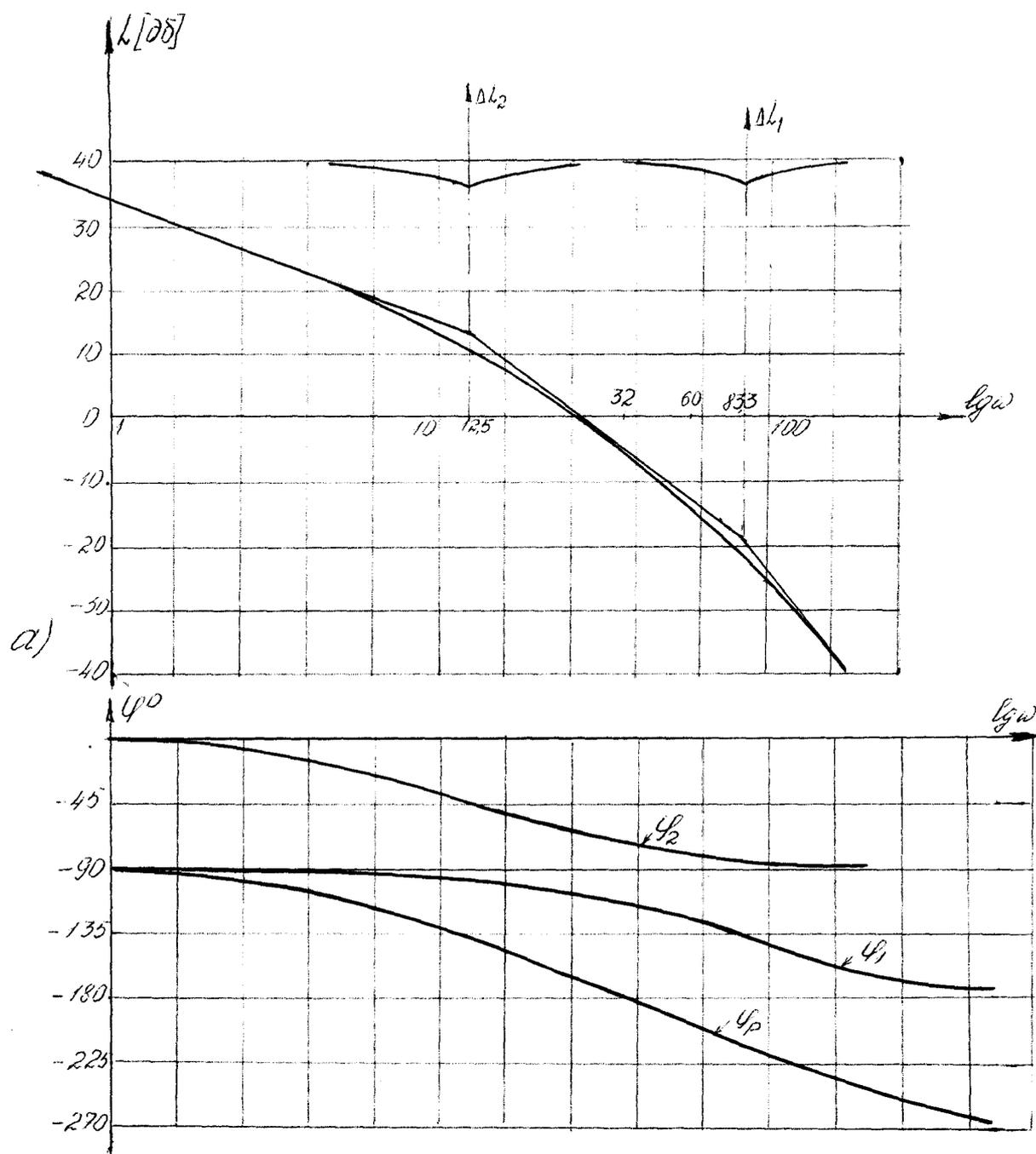


Рис. 17. Логарифмические частотные характеристики :
 а) - амплитудная; б) - фазовая.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.

1. Применение алгебраических критериев устойчивости.

Применение алгебраических критериев устойчивости рассмотрим для двух примеров.

ПРИМЕР 1. Применить для анализа устойчивости системы, структурная схема которой изображена на рис. 12 критерий Гурвица и критерий Льекара-Шипара.

На основании передаточной функции (15) находим характеристический многочлен системы:

46.

$$D(p) = p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 \quad (15)$$

где $a_3 = T_1 T_2$, $a_2 = T_1 + T_2$, $a_1 = 1$, $a_0 = k$,

и составляем определитель Гурвица :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_2; \quad \Delta_2 = a_2 a_1 - a_3 a_2, \quad \Delta_1 = a_2$$

Для нашего примера $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, поэтому условие устойчивости по критерию Гурвица будет : $\Delta_2 > 0$, $\Delta_2 = T_1 + T_2 - T_1 T_2 k > 0$

имеем

При $T_1 = 0,012$ сек; $T_2 = 0,08$ сек; $k = 50$ $1/\text{сек}$

$\Delta_2 = 0,092 - 0,048 > 0$ и поэтому данная система будет устойчивой,

Запишем применительно к рассматриваемому примеру критерий

Льенара-Шипара : $\Delta_1 > 0$; $\Delta_3 > 0$

или для указанных числовых значений коэффициентов имеем :

$$\Delta_1 = a_2 = 0,092 > 0, \quad \Delta_3 = (0,092 - 0,048)50 > 0.$$

ПРИМЕР 2. Для анализа устойчивости системы, структурная схема которой изображена на рис. 13Б, применить критерий устойчивости Гурвица и критерий устойчивости Льенара-Шипара.

Учитывая передаточную функцию (14), находим характеристический многочлен замкнутой системы:

$$D(p) = p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_4 p + 1) + k(T_3 p + 1) = p[T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1](T_4 p + 1) + k(T_3 p + 1) = T_1 T_2 T_4 p^4 + (T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4)p^3 + (T_1 + T_2 + T_4)p^2 + (1 + T_3 k)p + k,$$

или, вводя обозначения : $a_4 = T_1 T_2 T_4$, $a_3 = T_1 T_2 + T_1 T_4 + T_2 T_4$,

$$a_2 = T_1 + T_2 + T_4, \quad a_1 = 1 + T_3 k, \quad a_0 = k, \quad \text{имеем}$$

$$D(p) = a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 \quad (16)$$

Составляем определитель Гурвица и находим сам определитель и его диагональные миноры:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_3$$

$$\Delta_3 = -a_0 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & a_3 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_1(a_2 a_3 - a_1 a_4) - a_0 a_3^2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 a_3 - a_1 a_4, \quad \Delta_1 = a_3$$

Условия устойчивости на основе критерия устойчивости Гурвица будут :
 $a_4 > 0$, $\Delta_1 = a_3 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $a_0 > 0$.

Условия устойчивости системы на основе критерия устойчивости

Льенара-Шипара принимают вид : $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0$,

Проверим выполнение полученных условий устойчивости системы, имеющей параметры при следующих числовых значениях :

$$T_1 = 0,04 \text{ сек}; T_2 = 0,02 \text{ сек}; T_3 = 0,06 \text{ сек}; T_4 = 0,08 \text{ сек}; k = 50 \text{ }^1/\text{сек}$$

Находим :

$$a_0 = 50; a_1 = 1 + 0,06 * 50 = 4; a_2 = 0,04 + 0,02 + 0,08 = 0,14;$$

$$a_3 = (4 * 2 + 4 * 8 + 2 * 8) * 10^{-4} = 56 * 10^{-4},$$

$$\Delta_2 = 56 * 16 * 10^{-6} - 4 * 64 * 10^{-6} = 66 * 8 * 10^{-6} = 5,28 * 10^{-4} > 0,$$

$$\Delta_3 = 4 * 5,28 * 10^{-4} - 50(56)^2 * 10^{-8} = 8^2(33 - 24,5) * 10^{-6} = 0,64 * 8,5 * 10^{-4} = 5,44 * 10^{-4} > 0.$$

Откуда заключаем, что указанные выше условия устойчивости выполняются

2. Применение критерия устойчивости Михайлова.

Применение критерия устойчивости Михайлова рассмотрим для двух примеров, анализируемых в предыдущем параграфе.

ПРИМЕР 1. Применить для анализа устойчивости системы, рассмотренной в примере 4 параграфа 2.3. критерий Михайлова при следующих числовых данных : $T_1 = 0,08 \text{ сек}; T_2 = 0,012 \text{ сек}; k = 75 \text{ }^1/\text{сек}$. На основании зависимости (15) находим годограф Михайлова:

$$D(j\omega) = T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2)(j\omega)^2 + j\omega + k = -0,00096 j\omega^3 + j\omega - 0,092\omega^2 + 75 = X(\omega) + jY(\omega),$$

$$\text{где } X(\omega) = 75 - 0,092\omega^2, \quad Y(\omega) = \omega(1 - 0,00096\omega^2).$$

Для рассматриваемого примера система будет устойчивой, если годограф

вектора $D(j\omega)$ при $0 \leq \omega < \infty$, начинаясь на действительной (положительной) координатной оси OX , пройдет в положительном направлении на плоскости (X, Y) последовательно три квадранта. Проверим выполнение этого условия.

Для проверки указанного условия обычно строят годограф $D(j\omega)$. Поскольку рассматриваемая система имеет невысокий порядок, то определим точки пересечения годографом $D(j\omega)$ координатных осей и по ним установим, выполняется условие устойчивости или нет:

$$Y(\omega) = 0, \quad \omega(1 - 0,00096 \omega^2) = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{0,00096}} \cong 32,$$

$$X(\omega_1) = 75 > 0, \quad X(\omega_2) = 75 - 0,092 \omega_2^2 = 75 - 0,092 * 1041 = -20,77 < 0,$$

$$X(\omega) = 0, \quad 75 - 0,092 \omega^2 = 0, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{75}{0,092}} = 28,5,$$

$$Y(\omega_3) = 28,5(1 - 0,00096 * 815) = 28,5(1 - 0,7824) = 21,3.$$

Т.е. имеем последовательность точек пересечения годографом координатных осей :

$(75;0), (0;21,3), (-20,77;0)$, откуда заключаем, что критерий устойчивости Михайлова выполняется.

ПРИМЕР 2. Для анализа устойчивости системы, рассмотренной в примере 2 предыдущего параграфа, применить критерий Михайлова при следующих числовых данных :

$$T_1 = 0,04 \text{сек}; T_2 = 0,02 \text{сек}; T_3 = 0,05 \text{сек}, T_4 = 0,20 \text{сек}, k = 50 \text{ }^1/\text{сек.}, \text{ или}$$

$$a_0 = 50, a_1 = 4, a_2 = 0,26, a_3 = 1,61 * 10^{-2}, a_4 = 1,6 * 10^{-4},$$

На основании зависимости (16) определяем годограф Михайлова :

$$D(j\omega) = a_4(j\omega)^4 + a_3(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0 =$$

$$= a_4 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_0 + j\omega(a_1 - a_3 \omega^2) = 1,6 * 10^{-4} \omega^4 - 0,26 \omega^2 + 50 +$$

$$+ j\omega(4 - 1,61 * 10^{-2} \omega^2) = X(\omega) + jY(\omega), \text{ где}$$

$$X(\omega) = 1,6 * 10^{-4} \omega^4 - 0,26 \omega^2 + 50$$

$$Y(\omega) = \omega(4 - 1,61 * 10^{-2} \omega^2)$$

Для данного примера система будет устойчивой, если при $0 \leq \omega < \infty$ годограф $D(j\omega)$ начинаясь на положительной полуоси OX пройдет последовательно в положительном направлении на плоскости (X, Y) четыре квадранта .

Для проверки этого условия определяем точки пересечения годографом $D(j\omega)$ координатных осей OX и OY :

$$Y(\omega) = 0, \quad \omega(4 - 1,61\omega^2) = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{4}{1,61 * 10^{-2}} = 246,5$$

$$X(0) = 50 > 0, \quad X(\omega_2) 1,6 * 10^{-4} (246,5)^2 - 0,26 * 246,5 + 50 = 9,9 - 64,6 + 50 = -4,7 < 0$$

$$X(\omega) = 0, \quad 1,6 * 10^{-4} \omega^4 - 0,26\omega^2 + 50 = 0$$

$$\omega_{3,4}^2 = \frac{0,26 \pm \sqrt{0,0676 - 1,6 * 200 * 10^{-4}}}{3,2 * 10^{-4}} = \frac{0,26 \pm 0,188}{3,2 * 10^{-4}}$$

$$\omega_3^2 = 14 * 10^2, \quad \omega_3 = 37,4, \quad \omega_4^2 = 225, \quad \omega_4 = 25$$

$$Y(\omega_4) = 25(4 - 1,61 * 225 * 10^{-2}) \cong 9,44 > 0$$

$$Y(\omega_3) = 37,4(4 - 1,61 * 14) = -693,3 < 0$$

Т.е. получаем последовательность точек пересечения: (50,0) ,

(0;9,44), (-4,7;0), (0;-693,3) , откуда заключаем, что годограф

$D(j\omega)$ проходит последовательно в положительном направлении четыре квадранта и , следовательно, данная система является устойчивой.

Применение критерия устойчивости Найквиста-Михайлова рассмотрим на конкретных примерах.

ПРИМЕР 1. По частотным характеристикам, изображенным на рис.14. сделать заключение об устойчивости системы»

Отметим , что для получения заключения об устойчивости замкнутой системы на основании критерия Найквиста-Михайлова необходимо знать , кроме амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы, еще распределение корней характеристического уравнения этой системы. Поэтому, учитывая передаточную функцию (II), находим:

$$T(p) = (1 + T_1 p)(1 + T_2 p) = 0 \quad \text{откуда получаем:}$$

$$p_1 = \frac{1}{T_1} = -\frac{1}{0,01} < 0 ,$$

$$p_2 = -\frac{1}{T_2} = -\frac{1}{0,1} < 0$$

т.е. корни расположены в левой полуплоскости плоскости корней "р". Теперь по амплитудно-фазовой частотной характеристике разомкнутой системы , представленной на рис. 14, заключаем, что разомкнутая система является устойчивой, причем при любом значении коэффициента усиления.

ПРИМЕР 2. По частотным характеристикам разомкнутой системы, изображенным на рис.16, сделать заключение об устойчивости замкнутой системы.

Как и в предыдущем примере, сначала проверяем распределение корней характеристического уравнения разомкнутой системы. Для этого используем зависимость (13). Из этой зависимости видно, что один - нулевой и два другие

корня - отрицательные. Так как рассматриваемая система является астатической первого порядка, то амплитудно-фазовую частотную характеристику надо дополнить дугой большого радиуса, соединяющей точку на оси абсцисс с точкой $W(+0j)$. На рис.16 эта дуга показана пунктирной линией. Теперь заключаем, что замкнутая система будет устойчивой, так как годограф $W(j\omega)$ (рис.16) не охватывает точки $(-1, j0)$. Причем критическое значение коэффициента передачи разомкнутой системы (добротности) $K_{кр}$, т.е. значения, при котором замкнутая система находится на границе устойчивости будет определяться из зависимости (стр. 40):

$$K_{кр}U(\omega_1) = -1 ,$$

$$K_{кр} = -\frac{1}{U(\omega_1)} = \frac{(1+T_1^2\omega_1^2)(1+T_2^2\omega_1^2)}{T_1+T_2} = \frac{1}{0,0089} = 115 ,$$

где учтено, что $\omega_1^2 = 1250$, которое найдено из уравнения $V(\omega_1) = 0$.

ПРИМЕР 3. Проверить с помощью критерия Найквиста-Михайлова устойчивость системы, структурная схема которой представлена на рис.12, при следующих данных: $K = 25$ 1/сек; $T_1 = 0,02$ сек; $T_2 = 0,2$ сек. Если система окажется устойчивой, то определить запас устойчивости по амплитуде и по фазе.

Пользуясь передаточной функцией (13):
$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)} ,$$

определяем знаки у действительных частей корней уравнения :

$$p(1+T_1p)(1+T_2p) = 0 ,$$

$$p_1 > 0 , \quad p_2 = -\frac{1}{T_1} < 0 , \quad p_3 = -\frac{1}{T_2} < 0 .$$

Откуда видим, что рассматриваемая система имеет два отрицательных корня и является астатической первого порядка. Теперь строим амплитудно-фазовую частотную характеристику системы при $0 < \omega \leq \infty$.

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+T_1j\omega)(1+T_2j\omega)} = U_p(\omega) + jV_p(\omega)$$

$$U_p(\omega) = -\frac{(T_1+T_2)k}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$V_p(\omega) = -\frac{(1-T_1T_2\omega^2)k}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

или после подстановки числовых значений коэффициентов имеем:

$$U_p(\omega) = -\frac{0,22 * 25}{(1+4 * 10^{-4} \omega^2)(1+4 * 10^{-2} \omega^2)} ; \quad V_p(\omega) = -\frac{(1-0,004\omega^2) * 25}{\omega(1+4 * 10^{-4} \omega^2)(1+4 * 10^{-2} \omega^2)}$$

Исследуем эти функции:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} U_p(\omega) = -0,22 * 25 = -5,5; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} V_p(\omega) = -\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} U_p(\omega) = 0; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} V_p(\omega) = 0$$

Из зависимости для $U_p(\omega)$ видно, что эта функция монотонно возрастает. Зависимость для $V_p(\omega)$ показывает, что эта функция меняет свой знак один раз. Находим эту точку:

$$V_p(\omega) = 0, \quad 1 - 0,004\omega^2 = 0, \quad \omega_1^2 = \frac{1}{0,004} = 250; \quad \omega_1 = 15,8$$

$$U_p(\omega_1) = -\frac{0,22 * 25}{1,1 * 11,0} = -\frac{5,5}{12,5} = -0,44$$

По найденным точкам можно судить о характере характеристики $W(j\omega)$. Но для определения запасов устойчивости необходимо иметь более точный вид этой кривой в диапазоне ω от 0 до 15,8 (при $\omega \geq 15,8$ $|W| < 0,44$). Рассчитанные значения $U_p(\omega)$ и $V_p(\omega)$ для этого диапазона даны в таблице 3.1.

Таблица 3.1.

ω	0.0	2,0	4.0	6.0	8.0	10	12	15,8	20
U_p	-5,50	-4,70	-3,35	-2,23	-1,51	-1,06	-0,77	-0,44	-0,28
V_p	$-\omega$	-10,9	-3,8	-1.68	-0,84	-0,46	-0,28	0,00	0,038

По данным этой таблицы построен график амплитудно-фазовой частотной характеристики (рис. 20).

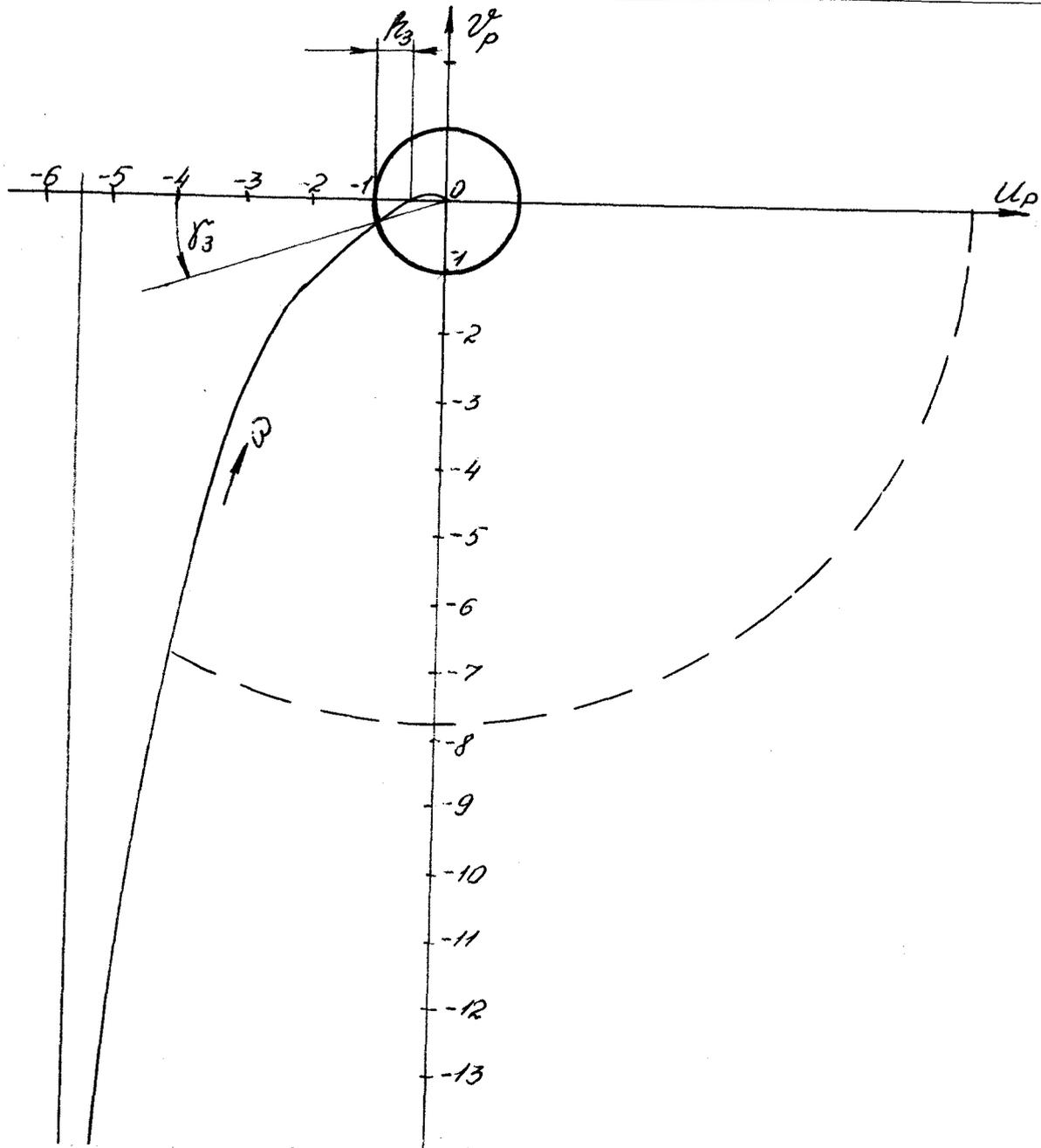


Рис.20. График амплитудно-фазовой частотной характеристики $W(j\omega)$ астатической системы первого порядка.

Данный график дополнен дугой, соединяющей точку действительной оси с кривой $W(j\omega)$ (в пределе с прямой $U_p = -5,5$). По этому графику заключаем, что замкнутая система является устойчивой. Теперь определяем запас устойчивости по амплитуде h_3 и по фазе γ_3 . Их значения показаны на рис. 20. Как они определяются также видно из этого рисунка.

ПРИМЕР 4. Проверить с помощью критерия Найквиста-Михайлова устойчивость системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид (14), при следующих данных: $T_1 = 0,04$ сек, $T_2 = 0,02$ сек, $T_3 = 0,06$ сек, $T_4 = 0,08$ сек,

$k = 200$ 1/сек и определить критическое значение коэффициента передачи разомкнутой системы.

По передаточной функции (14) находим амплитудно-фазовую частотную характеристику разомкнутой системы:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= k \frac{1 + T_3 j\omega}{j\omega(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)(1 + T_4 j\omega)} = \\ &= k \frac{-j(1 + T_3 j\omega)(1 + T_1 j\omega)(1 + T_2 j\omega)(1 - T_4 j\omega)}{\omega(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)(1 + T_4^2 \omega^2)} = \\ &= k(-j) \frac{[1 + (T_3 - T_1)j\omega + T_1 T_3 \omega^2] [1 - (T_2 + T_4)j\omega - T_2 T_4 \omega^2]}{\omega(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)(1 + T_4^2 \omega^2)} = U_p(\omega) + jV_p(\omega), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U_p(\omega) &= k \frac{-(1 + T_1 T_3 \omega^2)(T_2 + T_4) + (T_3 - T_1)(1 - T_2 T_4 \omega^2)}{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)(1 + T_4^2 \omega^2)}, \\ V_p(\omega) &= k \frac{(1 + T_1 T_3 \omega^2)(T_2 T_4 \omega^2 - 1) - (T_3 - T_1)(T_2 + T_4) \omega^2}{\omega(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)(1 + T_4^2 \omega^2)}; \end{aligned}$$

Подставляем числовые значения в зависимости для $U_p(\omega)$ и $V_p(\omega)$:

$$U_p(\omega) = 200 \frac{-0,08(1 + 0,08 * 10^{-2} \omega^2)}{(1 + 0,04 * 10^{-2} \omega^2)(1 + 0,16 * 10^{-2} \omega^2)(1 + 0,64 * 10^{-2} \omega^2)};$$

$$V_p(\omega) = 200 \frac{3,84 * 10^{-6} \omega^4 - 0,28 * 10^2 \omega^2 - 1}{\omega(1 + 0,04 * 10^2 \omega^2)(1 + 0,16 * 10^{-2} \omega^2)(1 + 0,64 * 10^{-2} \omega^2)}$$

и после этого исследуем их при изменении ω от 0 до ∞ :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} U_p(\omega) = -16; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} V_p(\omega) = -\infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} U_p(\omega) = 0; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} V_p(\omega) = 0$$

из зависимости для $U_p(\omega)$ видно, что эта функция - отрицательная и не меняет своего знака. Поэтому годограф $W(j\omega)$ не пересекает ось OV_p , функция $U_p(\omega)$ меняет свой знак. Это говорит о том, что $W(j\omega)$ пересекает отрицательную полуось OU_p . Находим эту точку пересечения:

$$V_p(\omega) = 0, \quad 3,84 * 10^{-6} \omega^4 - 0,28 * 10^2 \omega^2 - 1 = 0,$$

$$\omega_{1,2} = \frac{0,14 * 10^{-2} \pm \sqrt{1,96 * 10^{-6} + 3,84 * 10^{-6}}}{3,84 * 10^{-6}} = \frac{0,14 * 10^{-2} \pm 2,4 * 10^{-3}}{3,84 * 10^{-6}},$$

$$\omega_1^2 = 990, \quad \omega_2^2 < 0, \quad U_p(\omega_1) = -25,5$$

По проведенному исследованию на рис. 21 изображен годограф $W(j\omega)$. Поскольку анализируемая система является астатической первого

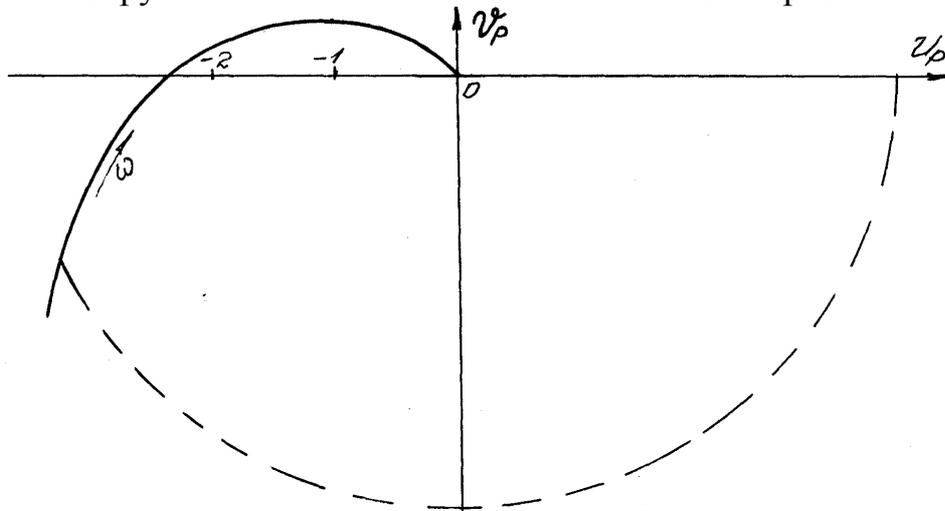


Рис. 21. Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы порядка, так как знаменатель $W(p)$ (14) имеет один нулевой корень, а остальные - с отрицательной действительной частью, то этот годограф необходимо дополнить дугой, радиуса больше единицы, соединяющей произвольные точки положительной полуоси OU_p и $W(j\omega)$ (в пределах прямой $U_p = -16$). Теперь по годографу, изображенному на рис. 21 (включая и пунктирную линию), сделаем заключение об устойчивости замкнутой системы. Так как, кроме нулевого корня, все остальные корни характеристического многочлена разомкнутой системы - отрицательные, а указанный годограф охватывает точку $(-1, j 0)$, то замкнутая система является неустойчивой.

Определяем критическое значение коэффициента передачи $k = k_{кр}$,

т.е. то значение, которое соответствует тому, что замкнутая система находится на границе устойчивости, т.е. $U_p(\omega_1) = -1$. Поскольку значение ω для точки пересечения годографом $W(j\omega)$ действительной полуоси не зависит от k , то

$$\frac{U_p(\omega_1)}{200} k_{кр} = -1, \quad \text{где } U_p(\omega_1) = -2,55.$$

$$\text{Тогда } k_{кр} = \frac{200}{2,55} = 78,4$$

Следовательно, если выбрать $k < 78,4$ 1/сек, то замкнутая система будет устойчивой.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ.

Применение логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы для анализа устойчивости соответствующей замкнутой системы рассмотрим на двух примерах.

ПРИМЕР 1. Сделать заключение об устойчивости замкнутой системы по логарифмическим характеристикам, изображенным на рис. 17.

Передаточная функция разомкнутой системы, на основе которой построены логарифмические частотные характеристики, изображенные на рис.17, имеет вид (13). По ней видно, что характеристический многочлен имеет один нулевой и два отрицательные корня. По рис.17 видно, что число положительных и отрицательных переходов равно нулю. Поэтому замкнутая система является устойчивой.

ПРИМЕР 2. Сделать заключение об устойчивости системы по логарифмическим частотным характеристикам, изображенным на рис.18.

Передаточная функция рассматриваемой системы в разомкнутом состоянии имеет вид (14). По ней видно, что характеристический многочлен разомкнутой системы имеет один нулевой и три отрицательные корня. Рисунок 18 показывает, что логарифмическая характеристика данной системы имеет нуль положительных переходов и один отрицательный переход. Следовательно, их разность будет – 1. Поэтому разомкнутая система будет неустойчивой.

Определение областей устойчивости рассмотрим для двух примеров.

ПРИМЕР 1. Определить область устойчивости, пользуясь методом Д-разбиения, для коэффициента передачи разомкнутой системы, структурная схема замкнутой системы которой изображена на рис. 12. , при следующих значениях параметров : $T_1 = 0,02$ сек, $T_2 = 0,4$ сек.

На основе передаточной функции (13) находим характеристическое уравнение замкнутой системы :

$$D(p) = p(T_1 p + 1)(1 + T_2 p) + k = 0.58.$$

Полагаем в этом уравнении k с комплексной величиной. Заменяем $P = j\omega$ и производим Д-разбиение по этому коэффициенту:

$$j\omega(1 - T_1 T_2 \omega^2) - (T_1 + T_2)\omega^2 + k = 0$$

$$\operatorname{Re} k = (T_1 + T_2 \omega^2), \quad \operatorname{Im} k = \omega(T_1 T_2 \omega^2 - 1)$$

Из этих выражений видно, что $\operatorname{Re} k \geq 0$, а $\operatorname{Im} k$ меняет свой знак, т.е. кривая $\operatorname{Re} k + j\operatorname{Im} k$ пересекает действительную ось $O, \operatorname{Re} k$.

Находим точку пересечения:

$$Jm k = 0, \quad \omega(\omega^2 T_1 T_2 - 1) = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$$

$$Re k(\omega_1) = 0, \quad Re k(\omega_{2,3}) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{0,02 + 0,4}{0,02 * 0,4} = 52,5$$

Граничная кривая Д-разбиения изображена на рис.22. Заметим, что нас интересуют только точки на действительной оси, так как k - действительная величина. Поэтому на данном рисунке отражен лишь характер кривой Д-разбиения.

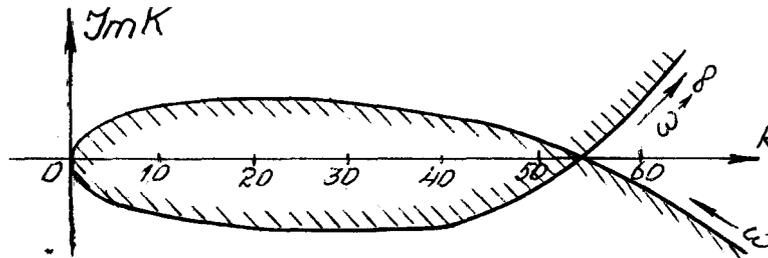


Рис.22. Д-разбиение плоскости параметра K .

Теперь определяем область устойчивости по коэффициенту K . Рассматриваемая система имеет третий порядок. Для нее возможны области $D(0)$, $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$. На рис.22 имеем три области. Область внутри петли соответствует наибольшему числу корней характеристического уравнения, имеющих отрицательную действительную часть. При $K=1$ условие устойчивости выполняется. Поэтому эта область - область устойчивости. Следовательно, для действительного коэффициента передачи областью устойчивости будет область $(0, 52,5)$.

ПРИМЕР 2. Определить область устойчивости, пользуясь методом Д-разбиения по параметру T_3 системы, структурная схема которой изображена на рис. 13Б. при следующих значениях остальных параметров : $T_1 = 0,04$ сек, $T_2 = 0,02$ сек, $T_4 = 0,08$ сек, $K = 50$ 1/сек.

Для решения данной задачи воспользуемся характеристическим многочленом анализируемой системы (16). Для нашего случая характеристическое уравнение принимает вид :

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + (1 + T_3 a_0) p + a_0, \quad \text{где:}$$

$$a_0 = 50, \quad a_2 = 0,14, \quad a_3 = 56 * 10^{-4}, \quad a_4 = 6,4 * 10^{-6}.$$

Теперь для определения граничной кривой Д-разбиения полагаем T_3 комплексной величиной. Заменяя $P = j\omega$, находим уравнение для этой кривой:

$$a_4 \omega^4 - ja_3 \omega^3 - a_2 \omega^2 + (1 + T_3 a_0)(j\omega) + a_0 = 0,$$

$$- ja_4 \omega^4 - a_3 \omega^3 + ja_2 \omega^2 + (1 + T_3 a_0)\omega - ja_0 = 0,$$

$$Re T_3 = \frac{a_3 \omega^2 - 1}{a_0}; \quad Jm T_3 = \frac{a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4}{\omega a_0}$$

Подставим числовые значения коэффициентов и проведем анализ полученных зависимостей.

$$\operatorname{Re} T_3 = \frac{56 \cdot 10^{-4} \omega^2 - 1}{50}; \quad \operatorname{Im} T_3 = \frac{50 - 0,14 \omega^2 + 64 \cdot 10^{-6} \omega^4}{50 \omega};$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} T_3 = -\frac{1}{50} = -0,02; \quad \lim_{\omega \rightarrow +0} \operatorname{Im} T_3 = +\infty,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow -0} \operatorname{Im} T_3 = -\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Re} T_3 = \infty,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \operatorname{Im} T_3 = -\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Im} T_3 = \infty$$

Находим точки пересечения мнимой оси:

$$\operatorname{Re} T_3 = 0,1 - 56 \cdot 10^{-4} \omega^2 = 0, \quad \omega_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{56 \cdot 10^{-4}}} = \pm 13,4$$

$$\operatorname{Im} T_3(\omega_1) = \frac{50 - 25 + 2,04}{50} = 0,54, \quad \operatorname{Im} T_3(\omega_2) = -0,54$$

Определяем точки пересечения кривой действительной оси:

$$\operatorname{Im} T_3 = 0, \quad 64 \cdot 10^{-6} \omega^4 - 0,14 \omega^2 + 50 = 0,$$

$$\omega_{3,4}^2 = \frac{0,14 \pm \sqrt{196 \cdot 10^{-4} - 128 \cdot 10^{-4}}}{128 \cdot 10^{-6}} = \frac{0,14 \pm 0,08}{128 \cdot 10^{-6}};$$

$$\omega_3^2 = 1720, \quad \omega_4^2 = 460$$

$$\operatorname{Re} T_3(\omega_3) = \frac{56 \cdot 10^{-4} \cdot 1720 - 1}{50} = 0,17; \quad \operatorname{Re} T_3(\omega_4) = \frac{56 \cdot 10^{-4} \cdot 460 - 1}{50} = 0,031$$

Определение других точек кривой Д-разбиения не имеет смысла, так как нас интересует область на действительной оси и характер кривой определяют найденные выше точки.

Строим граничную кривую Д-разбиения плоскости T_3 (рис.23) с нанесением штриховки.

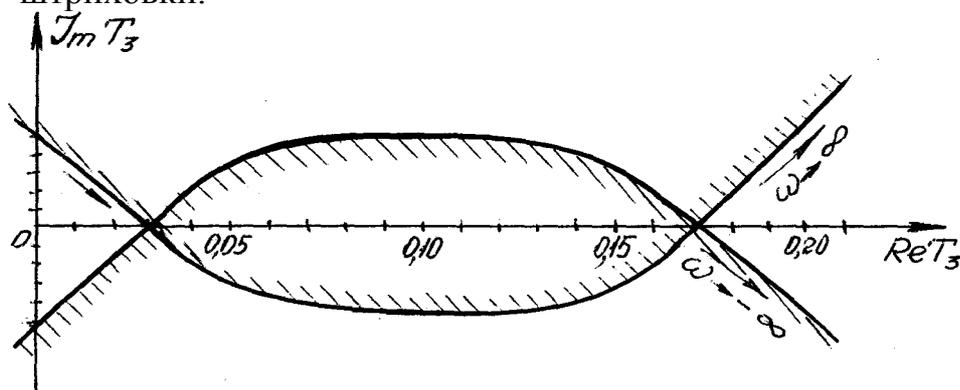


Рис.23. Д-разбиение плоскости параметра T_3 .

Из этого видно, что претендентом на область устойчивости является область внутри петли. Выбираем из этой области, например, $T_3 = 0,06$ сек и проверяем устойчивость по критерию Гурвица (пример 2, параграф 3.1). Система оказывается устойчивой. Поэтому область $0,031 < T_3 < 0,17$ является областью устойчивости.

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.

ПРИМЕНЕНИЕ ТРАПЕЦЕИДАЛЬНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ АНАЛИЗА КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.

1. Точность систем в установившемся процессе.

Точность систем автоматического управления характеризуется ошибкой в установившемся процессе. Поэтому для анализа точности будем определять ошибку, возникающую в установившемся процессе.

ПРИМЕР 1. Определить ошибку в установившемся процессе для системы, упрощенная принципиальная схема которой изображена на рис. 2. Эта система описывается уравнением (7) и представляет собой систему стабилизации. Под ошибкой ε будем понимать разность $\varepsilon = \Omega_{жс} - \Omega$,

где $\Omega_{жс}$ - желаемое значение угловой скорости. За это значение принимаем значение скорости при отсутствии внешнего момента M . Полагаем в уравнении

(7) $U = \text{const}$, $M = \text{const}$. Тогда в установившемся процессе $\frac{d_2 \Omega}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dt} = 0$ и

из этого уравнения получаем: $\Omega_{жс} = \frac{kU}{1 + kk_5}$; $\Omega_y = \frac{kU}{1 - kk_5} - k_3 k_4 M$,

$$E_y = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \Omega_{жс} - \Omega_y = k_3 k_4 M,$$

ПРИМЕР 2. Определить ошибку в установившемся процессе для следящей системы, упрощенная принципиальная схема которой изображена на рис. 7, при входных сигналах $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = M_0$ и

1) $\theta_1(t) = \theta_{10} = \text{const}$, 2) $\theta_1(t) = 1(t) \Omega_0 t$ ($\Omega_0 = \text{const}$),

3) $\theta_1(t) = 1(t) \theta_0 \sin \omega_0 t$ ($\theta_0 = \text{const}$, $\omega_0 = \text{const}$). Для данной следящей системы ошибка ε будет $\varepsilon = \theta_1(t) - \theta_2(t)$.

Для ее определения воспользуемся передаточными функциями $\Phi_{\Delta X}(p)$, $\Phi_1(p)$, (13) и принципом суперпозиции. Учитывая это получаем:

$$E(p) = \frac{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)\theta_1(p)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k} + \frac{k_4 k_3}{i} \cdot \frac{(T_1 p + 1)M(p)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k} \quad (17)$$

Теперь определяем ошибку в установившемся процессе ε_y :

$$1) \quad \theta_1(p) = \frac{\theta_{10}}{p}; \quad \varepsilon_y = \lim_{p \rightarrow 0} PE(p) = \frac{k_4 k_3 M_0}{ik};$$

$$2) \quad \theta_1(p) = \frac{\Omega_0}{p^2};$$

$$\varepsilon_y = \lim_{p \rightarrow 0} \left[p \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) \frac{\Omega_0}{p}}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k} \right] + \frac{k_4 k_3 M_0}{ik} = \frac{\Omega_0}{k} + \frac{k_4 k_3 M_0}{ik};$$

$$3) \quad \varepsilon_y = H(\omega_0) \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k_4 k_3 M_0}{ik};$$

$$\text{где} \quad H(\omega_0) = \left| \frac{j\omega_0 (T_1 j\omega_0 + 1)(T_2 j\omega_0 + 1)}{j\omega_0 (T_1 j\omega_0 + 1)(T_2 j\omega_0 + 1) + k} \right|,$$

$$\varphi = \arg \left| \frac{j\omega_0 (T_1 j\omega_0 + 1)(T_2 j\omega_0 + 1)}{j\omega_0 (T_1 j\omega_0 + 1)(T_2 j\omega_0 + 1) + k} \right|,$$

2. Анализ качества переходных процессов.

Анализ качества переходного процесса проведем для следующего примера. Определить время регулирования и перерегулирования для системы, упрощенная принципиальная схема которой изображена на рис.7 (структурная схема – рис.12), если $\theta_1 = 1(t)\Omega_0 t$, где $\Omega_0 = const$, $T_1 = 0,012$ сек, $T_2 = 0,08$ сек, $K = 50$ 1/сек и $M = M_0 = const$ при движении и $M = M_g$ при отсутствии движения, причем $M \leq M_0$.

Для определения указанных характеристик находим процесс регулирования $\theta_2(t)$. При этом учитывая (17), получаем

$$\theta_2(p) = \frac{k\theta_1(p)}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0} - \frac{k_1 k_3}{j} \cdot \frac{(T_1 p + 1)M(p)}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0}, \quad (18)$$

$$\text{где} \quad a_3 = T_1 T_2 = 9,6 * 10^{-4}, \quad a_2 = T_1 + T_2 = 9,2 * 10^{-2}, \quad a_0 = 50.$$

$M(p)$ - пока неизвестная функция, так как $M(t)$ также неизвестна при $0 \leq t \leq t_1$;

t_1 - время, определяемое из условия $M_g(t_1) = M_0$. Определяем сначала закон изменения $M(t)$ при $0 \leq t < t_1$ из (10) при условии, что

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = 0, \quad \theta_2 = 0,$$

$$U_2 = k_n k_1 \theta_1, \quad T_1 \frac{dE}{dt} + E = k_2 U_2, \quad k_4 M = E$$

из этих уравнений находим $M(t)$, полагая, что они справедливы для любого t .
Имеем:

$$T_1 \frac{dE}{dt} + E = k_1 k_2 k_n \theta_1,$$

$$E(p) = k_1 k_2 k_n \frac{\theta_1(p)}{T_1 p + 1},$$

$$E(p) = k_1 k_2 k_n \frac{\Omega_0}{p^2 (T_1 p + 1)},$$

$$E_1(t) = 1(t) k_1 k_2 k_n \Omega_0 \left(t - T_1 + T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \right),$$

$$M(t) = \frac{k_1 k_2 k_n \Omega_0}{k_4} \left(t - T_1 + T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \right).$$

Откуда для определения t_1 получаем уравнение

$$M_0 = \frac{k_1 k_2 k_n \Omega_0}{k_4} \left(t_1 - T_1 + T_1 e^{-\frac{t_1}{T_1}} \right) \quad (19).$$

Решаем это уравнение графически. Для этого строим графики функций, которые изображены на рис.24. Они построены при

$k_1 k_2 k_n = 500$, $k_4 = 10$, $\frac{M_0}{\Omega_0} = 1$. Это дает $t_1 = 0,0315$ сек.

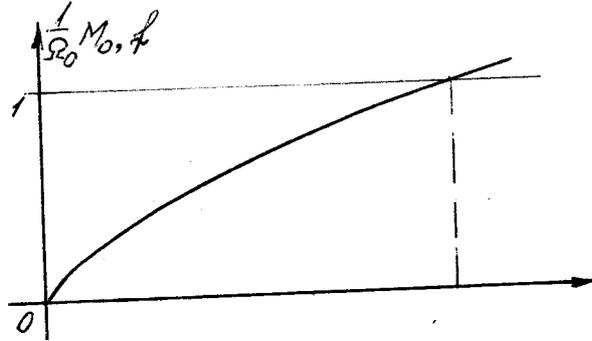


Рис.24. Графическое решение уравнения (19)

Определяем преобразование Лапласа $M(p)$:

$$\begin{aligned}
 M(p) &= \int_0^{t_1} \frac{k_1 k_2 k_n \Omega_0}{k_4} \left(t - T_1 + T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \right) e^{-pt} dt + \int_{t_1}^{\infty} M_0 e^{-pt} dt = \\
 &= \frac{k_1 k_2 k_n \Omega_0}{k_4} \left[-\frac{t_1 e^{-pt}}{p} \Big|_0^{t_1} + p \int_0^{t_1} e^{-pt} dt + \frac{1}{p} T_1 e^{-pt} \Big|_0^{t_1} - T_1^2 \frac{e^{-\left(\frac{1}{T_1} + p\right)t}}{T_1 p + 1} \Big|_0^{t_1} \right] + \frac{M_0}{p} e^{-pt_1} = \\
 &= \frac{k_1 k_2 k_n \Omega_0}{k_4} \left[-\frac{t_1 e^{-pt}}{p} - \frac{e^{-pt}}{p^2} + \frac{1}{p^2} - \frac{T_1}{p} + T_1 \frac{e^{-pt_1}}{p} - T_1^2 \frac{e^{-\left(\frac{1}{T_1} + p\right)t_1} - 1}{T_1 p + 1} \right] + \\
 &+ \frac{k_1 k_2 k_n \Omega_0}{k_4} \left(t_1 - T_1 + T_1 e^{-\frac{t_1}{T_1}} \right) e^{-pt_1} \frac{1}{p} = \frac{k_1 k_2 k_n \Omega_0}{k_4} \bullet \\
 &\bullet \left[\frac{1}{p^2} - \frac{e^{-pt}}{p^2} - \frac{T_1}{p} + T_1 \frac{(T_1 p + 1 - T_1 p) e^{-\left(\frac{1}{T_1} + p\right)t_1} + T_1 p}{p(T_1 p + 1)} \right] = \\
 &= \frac{k_1 k_2 k_n \Omega_0}{k_4} \left[\frac{T_1 e^{-\left(\frac{1}{T_1} + p\right)t_1} + T_1 p}{p(T_1 p + 1)} + \frac{T_1 p + 1}{p^2(T_1 p + 1)} \right]
 \end{aligned}$$

$$M(p) = \frac{k_1 k_2 k_n \Omega_0}{k_4} \left[\frac{1}{p^2 (T_1 p + 1)} + T_1 \frac{e^{-\left(\frac{1}{T_1} + p\right)t_1}}{p(T_1 p + 1)} - \frac{e^{-pt_1}}{p^2} \right]$$

Учитывая это и, что $k_1 k_2 k_n k_3 \frac{1}{i} = k = a_0$, из (18) имеем:

$$\theta_2(p) = \frac{a_0 \Omega_0}{p^2 (a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0)} - a_0 \Omega_0 \left[\frac{\frac{1}{p^2} + \frac{T_1}{p} e^{-\left(\frac{1}{T_1} + p\right)t_1} - \frac{e^{-pt_1}}{p^2} (T_1 p + 1)}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0} \right] =$$

$$= \theta_3(p) + p \theta_3(p) T_1 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}} \right), \text{ где } \theta_3(p) = \frac{a_0 \Omega_0 e^{-pt_1}}{p^2 (a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0)}$$

$$\text{Тогда } \theta_2(t) = \theta_3(t) + T_1 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}} \right) \frac{d}{dt} \theta_3(t)$$

Определяем $\theta_3(t)$. Для этого определяем корни характеристического уравнения:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0 = 0, \quad 9,6 \cdot 10^{-4} p^3 + 9,2 \cdot 10^{-2} p^2 + p + 50 = 0$$

Преобразуем это уравнение к виду: $U^3 + BU^2 + AU + 1 = 0$

и применим формулу Кардана:

$$U_1 = \alpha + \beta, \quad U_{2,3} = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \pm j \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sqrt{3},$$

где учтено, что

$$A = \frac{1}{3\sqrt{a_0 a_3}} = 0,747; \quad B = \frac{a_2}{3\sqrt{a_0 a_3^2}} = 2,56;$$

$$\text{Так как } P = u^3 \sqrt{\frac{a_0}{a_3}},$$

$$\text{То } p_1 = -90,68; \quad P_{2,3} = -2,58 + 23,83j \text{ и}$$

$$\theta_3(p) = a_0 \Omega_0 e^{-pt_1} \left(\frac{C_1}{p_2} + \frac{C_2}{p} + \frac{C_3}{p - p_2} + \frac{C_4}{p - p_2} + \frac{C_5}{p_3} \right),$$

где

$$C_1 = \frac{1}{(a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0)_{p=0}} = \frac{1}{a_0},$$

$$C_2 = \left\{ \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0} \right) \right\}_{p=0} = -\frac{1}{a_0^2},$$

$$C_3 = \frac{1}{\left\{ \frac{d}{dp} p^2 (a_3 p^3 + a_2 p^2 + 1) p_2^2 \right\}_{p=0}} = \frac{1}{(3a_3 p_3^2 + 2a_2 p_3 + 1) p_1^2},$$

$$C_4 = \frac{1}{(3a_3 p_2^2 + 2a_2 p_2 + 1) p_2^2}; \quad C_5 = \frac{1}{(3a_3 p_3^2 + 2a_2 p_3 + 1) p_3^2},$$

Или для наших числовых данных имеем:

$$C_1 = 0,02, \quad C_2 = -4 \cdot 10^{-4},$$

$$C_3 = \frac{1}{\{3 \cdot 9,6 \cdot 10^{-4} (90,68)^2 - 2 \cdot 9,2 \cdot 10^{-2} \cdot 90,68 + 1\} (90,68)^2} = 1,7 \cdot 10^{-5},$$

$$C_4 =$$

$$= \frac{1}{\{3a_3(b^2 - 2w_0j - w_0^2) + 2a_2(-b + jw_0) - 1\}(b^2 - w_0^2 2bw_0j)} =$$

$$= \frac{1}{\{0,000288(2,58^2 - 23,83^2 - 5,16 \cdot 23,83j) + 0,184(-2,58 + 23,83j) + 1\}(2,58^2 - 23,83^2 - 5,16 \cdot 23,83j)} =$$

$$= \frac{1}{1006,3 - 2109j} = 1,86 \cdot 10^{-4} j,$$

$$C_5 = 1,86 \cdot 10^{-4} - 3,8 \cdot 10^{-4} j,$$

$$-b + jw_0 = p_{2,3}.$$

Определим относительную ошибку: по которой определяем перерегулирование X_m и время регулирования T_p . Для их определения строим график (рис.25) относительной ошибки. По этому графику находим: $X_m = 0,076$, $t_p = 0,93$ с. Максимальная относительная ошибка будет:

$$\frac{E_m}{\theta_2(0,11)} = \frac{0,076}{0,11} = 0,69.$$

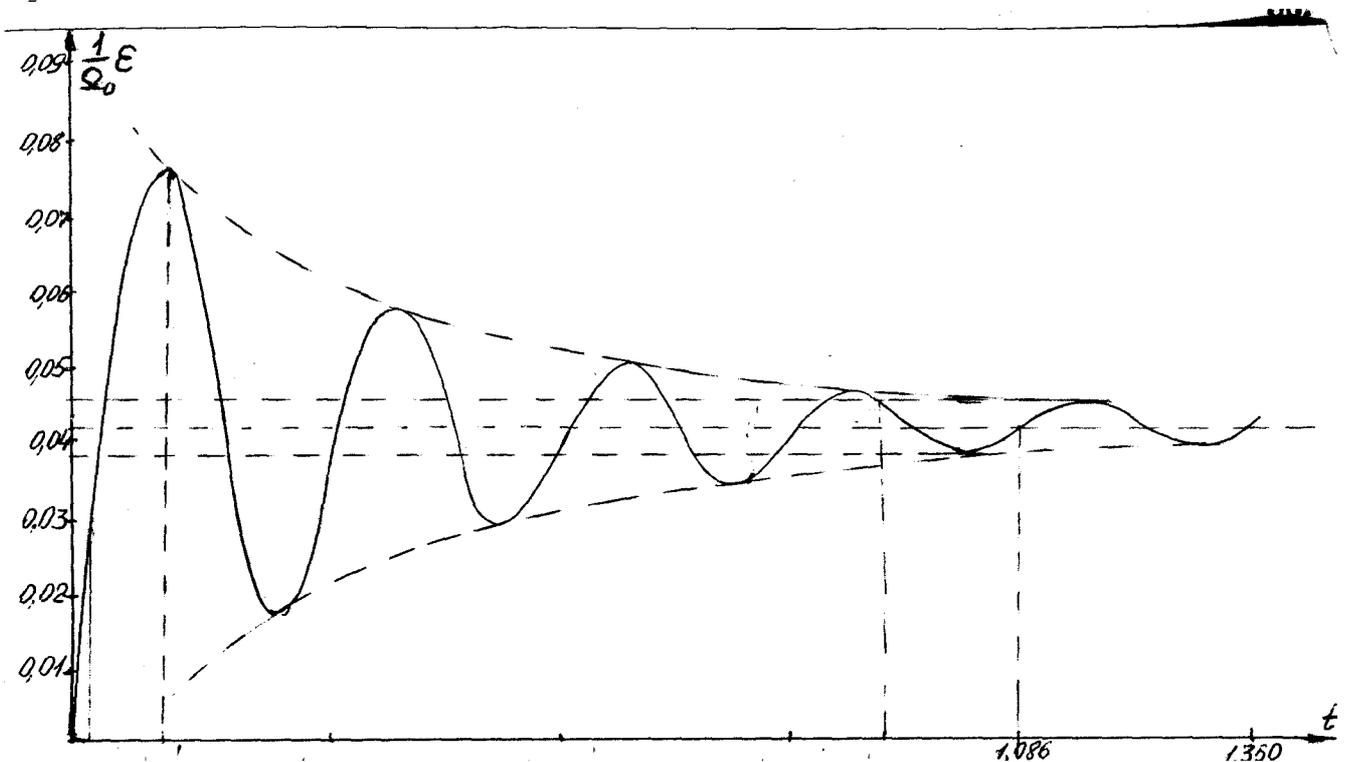


Рис.25 График относительной ошибки.

ПРИМЕНЕНИЕ ТРАПЕЦЕИДАЛЬНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ АНАЛИЗА КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.

Рассмотрим применение трапецеидальных частотных характеристик при построении переходного процесса для системы, анализируемой в предыдущем параграфе. Будем определять ошибку при $\theta_1(p) = 1(t)\Omega_0 t$ из (18) имеем

$$E(p) = \frac{\Omega_0}{P^2} \left\{ 1 - \frac{a_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0} \right\},$$

тогда

$$E(t) = \frac{2\Omega_0}{\Pi} \frac{p(\varpi)}{\varpi} \sin wtdw$$

где

$$P(w) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{jw} - \frac{a_0}{jw(-a_3 j w^3 - a_2 w^2 + jw + a_0)} \right\} = \left\{ \frac{1}{jw} - \frac{1}{jw} (U + ju) \right\},$$

Итак, для определения $P(w)$ необходимо найти мнимую частотную характеристику замкнутой системы. Эту характеристику можно определить либо по мнимой круговой диаграмме, либо номограмме замыкания для мнимой частотной характеристики {3}

Сначала рассмотрим применение круговой диаграммы. Зададимся параметрами: $T_1 = 0,004$ сек, $T_2 = 0,02$ сек, $K = 20^1$ /сек. Введем относительный параметр $\alpha = \frac{w}{b}$ Тогда $E(r) = \frac{2\Omega_0}{\delta\Pi} \frac{p(\alpha)}{\alpha} \sin \alpha r d d$,

Где $r = bt$. Теперь требуется определить, $\mathcal{Y}(\alpha)$ по характеристикам разомкнутой системы

$$U_p(\alpha) = \frac{-\beta_0(\beta_1 + \beta_2)}{(1 - \beta_1^2 \alpha^2)(1 + \beta_2^2 \alpha^2)};$$

$$V_p(\alpha) = \frac{-\beta_0(1 - \beta_1 \beta_2 \alpha^2)}{(1 - \beta_1^2 \alpha^2)(1 + \beta_2^2 \alpha^2)};$$

$$\beta_0 = \frac{K}{\delta}; \quad \beta_1 = T_1 \delta; \quad \beta_2 = T_2 \delta.$$

По этим формулам рассчитаны $U_p(\alpha)$ и $V_p(\alpha)$ при $\delta = 22$.

Значения их даны в таблице 4.1.

Таблица 4.1.

α	0,00	0,25	0,50	1,00	2,00	4,7	6,0
U_p	-0,436	-0,430	-0,470	-0,410	-0,270	-0,076	-0,045
V_p	$-\infty$	-3,60	-1,72	-0,72	-0,20	-0,00	0,009

Эти значения использованы для построения $u_p(\alpha)$ (рис. 26) и мнимой круговой диаграммы (рис. 27)

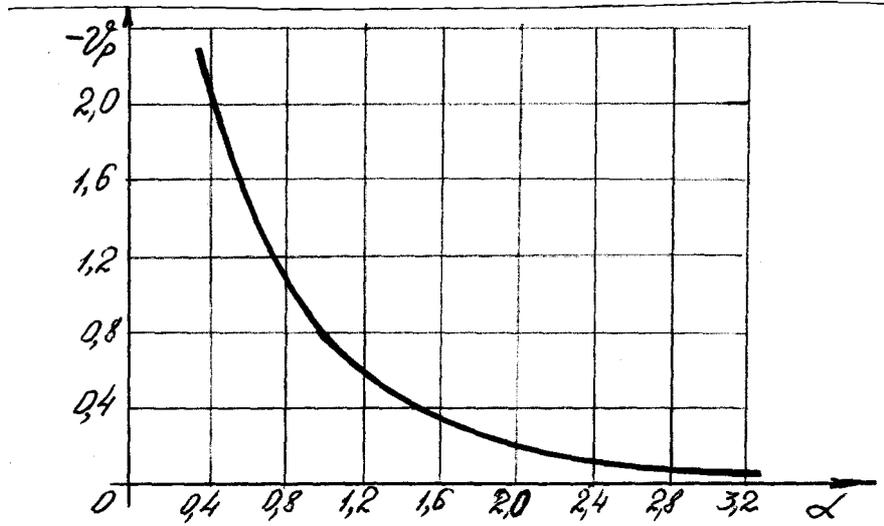
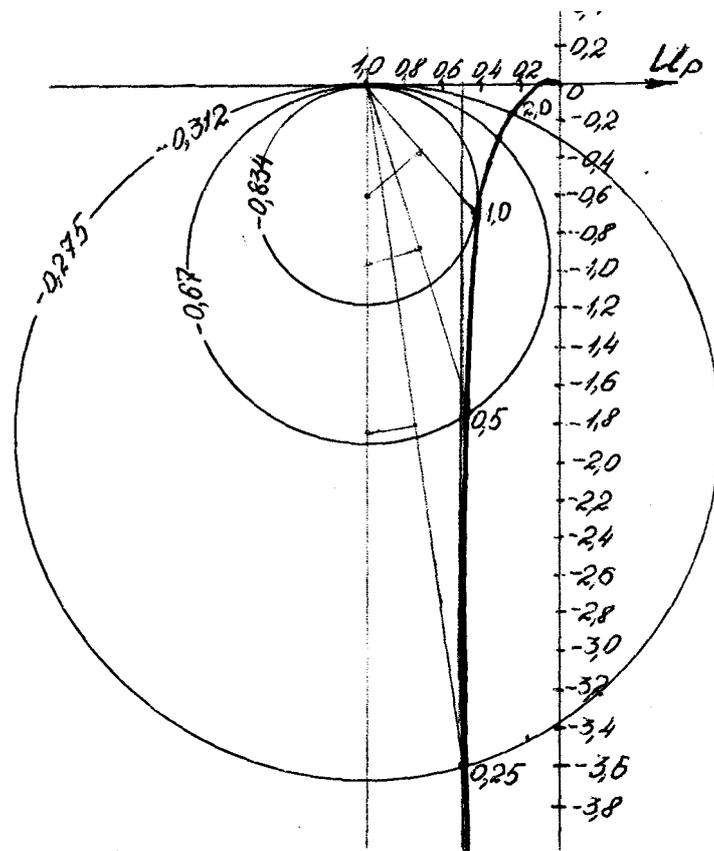
Рис. 26. График функции $V_p(\alpha)$.

Рис. 27. Мнимая круговая диаграмма.

По мнимой круговой диаграмме (рис.27) графику, изображенному на рис. 26, с учетом зависимости (20) находим:

$$P(\alpha) = -\frac{V(\alpha)}{\alpha}$$

Результаты представлены графиком (рис. 28)

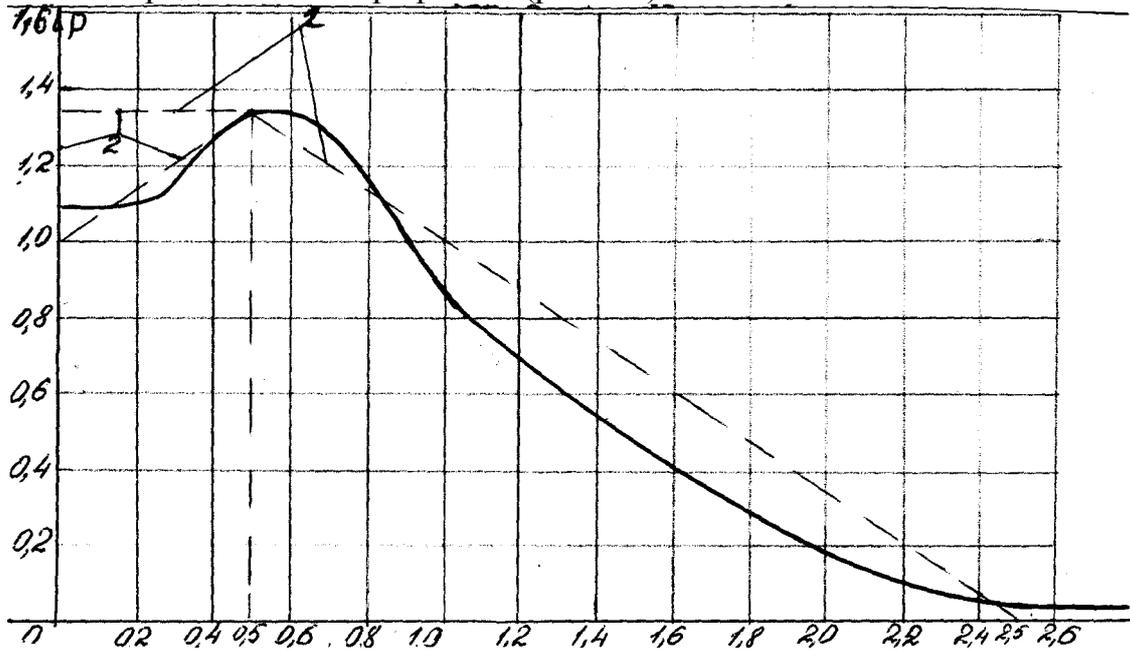


Рис.28. График функции $P(\alpha)$.

Полученную кривую заменяем ломаной линией так, чтобы получились трапеция 1 и трапеция 2 (рис. 28), которая выродилась в треугольник. Они имеют параметры:

Теперь по таблицам h - функции [3] находим $h_1(\Gamma_m)$ и $h_2(\Gamma_m)$.

От них переходим к функциям $h_1(\Gamma)$ и $h_2(\Gamma) = h_2(\frac{\Gamma_m}{0,5})$. Значения этих функций занесены соответственно в таблицы 4.2. и 4.3.

Таблица 4.2.

Γ	0,0	0,16	0,32	0,48	0,64	0,96	1,28	1,6	1,82	2,24	2,56	2,88	3,2	4,0	5,0
H_1	0,0	0,15	0,30	0,44	0,57	0,78	0,93	1,01	1,04	1,04	1,03	1,02	1,02	1,03	1,02

Таблица 4.3.

Γ	0,0	0,8	1,6	3,2	4,0	4,8	5,6	6,4	7,2	8,0	8,8	9,6
H_2	0,0	0,13	0,37	0,48	0,57	0,66	0,72	0,78	0,82	0,86	0,88	0,89

Тогда имеем

$$\frac{\delta E(\Gamma)}{\Omega_0} = \Gamma_{01} h_1(\Gamma) - \Gamma_{02} h_2(\Gamma).$$

Эти функции изображены на рис. 29. По графику $\frac{\delta E(\Gamma)}{\Omega_0}$ находим: $\Gamma_p = 4$, $\delta = 18\%$.

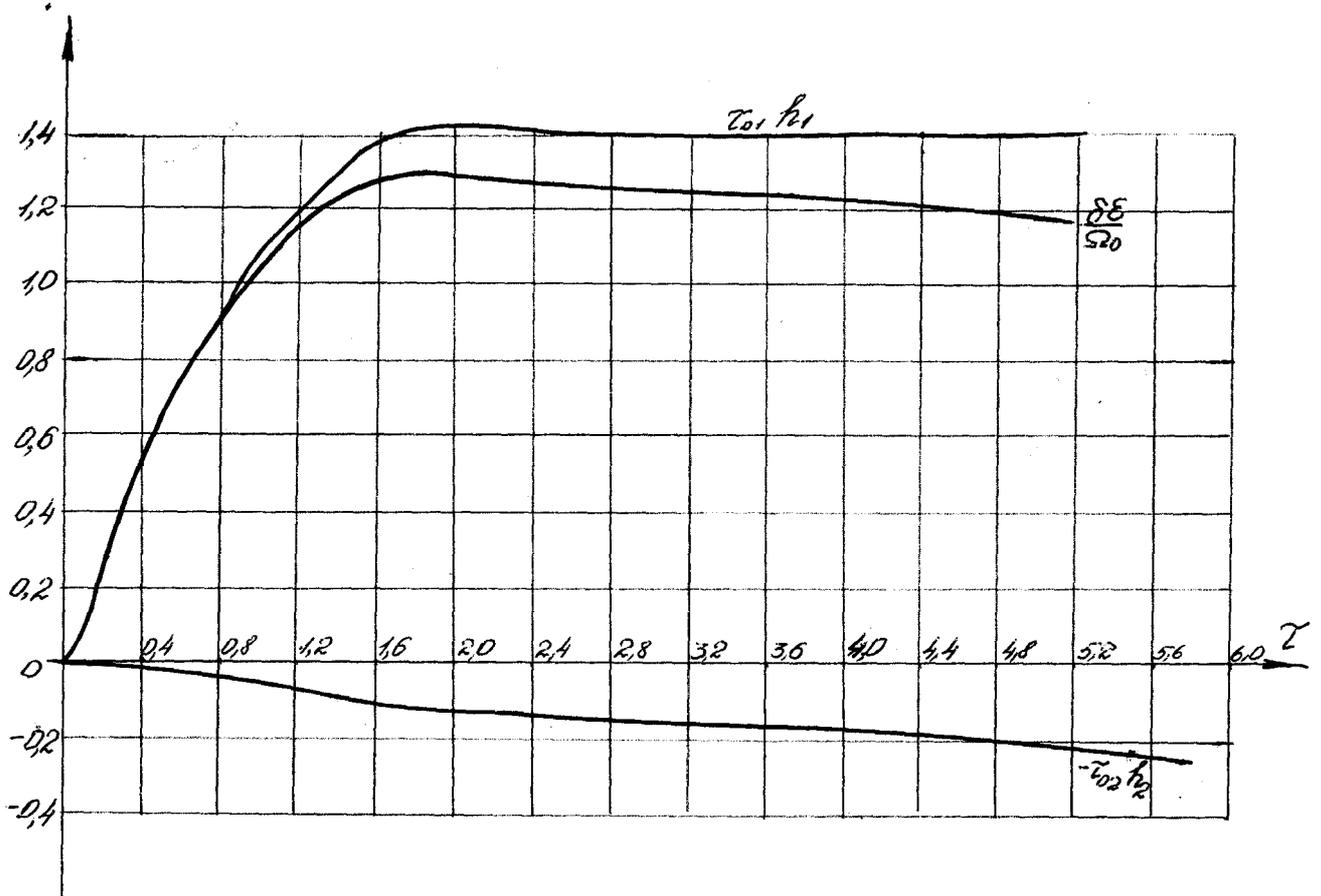


Рис. 29. Графики функций: $\Gamma_{01}h_1(\Gamma)$, $\Gamma_{02}h_2(\Gamma)$ и $\frac{\delta E}{\Omega_0}E(\Gamma)$

4. Определение интегральных оценок.

Интегральные оценки будем рассматривать для системы, уравнение которой имеет вид (18). Причем для упрощения выкладок принимаем $M(p)=0$. Входной сигнал принимаем, как и ранее $\theta_1(t) = \Omega_0^1 t \cdot 1(t)$.

Будем определять линейные и квадратичные интегральные оценки.

I. Линейные интегральные оценки.

Подынтегральная функция при $t \rightarrow \infty$ должна стремиться к нулю. Это требование сходимости интеграла. Для определения оценки

$$X_{00} = \int_0^{\infty} X(t) dt$$

Принимаем

$$X(t) = E(t) = E_y - E(t),$$

где $E(t)$ - ошибка, а E_y - установившееся значение ошибки. Поскольку

$$E_y = \frac{\Omega_0}{K} = \frac{\Omega}{a_0};$$

$$E(p) = \frac{\Omega_0}{a_0 p} - \theta_2(p) = \Omega_0 \frac{a_3 p^3 + a_2 p^2 + p}{(a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0 a_0)},$$

$$\text{То } E(p) = \frac{\Omega_0}{a_0 p} - E(p) = \Omega_0 \frac{a_3 p^2 + (a_0 - a_0 a_3) p + 1 - a_0 a_2}{(a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0) a_0}$$

$$\text{Тогда } X_{00} = \lim E(p) = \frac{1 - a_0 a_2}{a_0^2} \Omega_0.$$

Линейную интегральную оценку

$$X_{00} = \int_0^{\infty} x(t) t^m dt$$

чаще всего связывают с коэффициентами ошибки C_m : $C_m = (-1)^m x_{0m}$. Поэтому эти значения использованы для построения $u_p(\alpha)$ (рис. 26) и мнимой круговой диаграммы (рис. 27). Поэтому $X(t) = W(t)$, где $W(t)$ - импульсная переходная функция по сигналу ошибки.

$$\text{Тогда } C_m = \lim \Phi_{\Delta x}^{(m)}(p),$$

Тогда $\Phi_{\Delta x}(p)$ - переходная даточная функция по сигналу ошибки, для вашего примера имеем:

$$\Phi_{\Delta x}(p) = \frac{a_3 p^3 + a_2 p^2 + p}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + p + a_0},$$

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{a_0}, \quad C_2 = 2 \frac{a_2 a_0 - 1}{a_0^2}.$$

2. Квадратичные интегральные оценки.

Для рассматриваемого примера определим интегральную оценку:

$$J_{03} = \int_0^{\infty} E^2(t) dt = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\infty} |E(jw)|^2 dw,$$

где

$$\left| Y(jw) \right|^2 = \Omega_0^2 \frac{(1 - a_0 a_2 - a_3 w^2)^2 + (a_2 - a_0 a_3)^2 w^2}{[a_3 (jw)^3 + a_2 (jw)^2 + jw + a_0][a_3 - (jw)^3 + a_2 (-jw) - jw + a_0]}$$

Значения этих интегралов известны. Например, они даны в [1]

$$J_{0n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(jw)}{A(jw)A(-jw)} dw,$$

Где

$$A(jw) = a_n (jw)^n + a_{n-1} (jw)^{n-1} + \dots + a_1 jw + a_0,$$

$$G(jw) = b_{n-1} (jw)^{2(n-1)} + b_{n-2} (jw)^{2(n-2)} + \dots + b_1 (jw)^2 + b_0$$

Для нашего примера

$$J_{03} = \frac{-b_2 a_1 + a_3 b_1 - \frac{a_3 a_2 b_0}{a_0}}{2a_3(a_3 a_0 - a_2 a_1)} = \frac{a_0 a_3 b_1 - a_0 a_1 b_2 - a_2 a_3 b_0}{2a_0 a_3 (a_3 a_0 - a_2 a_1)},$$

$$\text{Где } b_2 = a_3^2, \quad b_1 = 2a_3(1 - a_0 a_2) - (a_2 - a_0 a_3)^2, \quad b_0 = (1 - a_0 a_2)^2, \quad a_1 = 1.$$

Отметим, что интегральные оценки могут быть применены не только для косвенной оценки качества переходного процесса, но и для определения параметров системы, исходя из условия их минимума.

СИНТЕЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.

1. Синтез корректирующих устройств по ведаемой логарифмической амплитудной характеристике.

Дана некорректированная следящая система, структурная схема которой изображена на рис. 12, и имеющая параметры:

$$U = 0,1 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,5 \text{ сек}, \quad K = 0,1^{1/\text{сек}}, \quad K_4 = 0,25 \text{ Внм}.$$

К скорректированной системе предъявляются следующие требования :

1. Время регулирования не более 1 сек;
2. Перерегулирование не более 20%;
5. Максимальное значение второй производной регулируемой величины $100^{1/\text{сек}}$.
4. Порядок астатизма I;
5. Установившееся значение относительной ошибки , связанной с моментом нагрузки, равным $m/i=2\text{мн}$ не превышает 0,03. Названные требования указаны для управляющей величины $\theta_1(t) = 1(t)$.

Для определения логарифмической амплитудной характеристики последовательного корректирующего устройства сначала строим желаемую логарифмическую характеристику и характеристику неизменяемой части с новым коэффициентом передачи разомкнутой системы, Предварительно по заданной относительной ошибке определяем коэффициент передачи разомкнутой системы:

$$E_y = \frac{K_4 K_3 M}{ik}; \quad \theta_{2y} = 1; \quad \frac{E_y}{\theta_{2y}} = \frac{K_4 K_3}{ik} M \leq 0,03; \quad K \geq \frac{K_4 K_3}{0,03i} M; \quad K \geq 16,8.$$

где учтена зависимость (17) Принимая $K = 20$.

Теперь строим желаемую логарифмическую амплитудную характеристику в следующем порядке:

1. Желаемая логарифмическая амплитудная характеристика будет иметь низкочастотную асимптоту с наклоном - 20 дб/дек, которая проходит при $w = 1$ через точку $20 \text{ед} K = 20 \text{ед} 20 = 26 \text{дб}$.

2. Строим среднечастотную асимптоту с наклоном - 20 дб/дек, выбирая частоту среза из неравенств $W_{cm} \angle W_c \angle W_{con}$,

где W_{con} - частота среза для оптимального процесса;

W_{cm} - частота среза, определяемая из графика по заданному перерегулированию и времени регулирования.

из графика {3, кн 2} находим : $P_{max} = 1,08$, $\alpha = 2,2$, где α входит в выражение

$$\frac{\alpha \pi}{W_{cm}} = T_{max}, \quad W_{cm} = \frac{\alpha \pi}{T_{max}} = \frac{2,2 \cdot 3,14}{1} = 6,9 \left\{ \frac{1}{\text{сек}} \right\}, \quad W_{con} = \frac{2}{T_{min}},$$

$$T_{con} = 2 \sqrt{\frac{g_0}{g_{max}}} = 2 \sqrt{\frac{1}{100}} = 0,2, \quad W_{con} = \frac{2}{0,2} = 10 \left\{ \frac{1}{\text{сек}} \right\}.$$

Выбираем $W_c = 1/\text{сек}$.

3. Строим высокочастотную асимптоту по передаточной функции

$$W_{(p)} = \frac{20}{(0,5p+1)(0,1p+1)p},$$

$$L = 20 \lg 20 - 20 \lg w - 20 \lg T_2 - 20 \lg w - 20 \lg T_1$$

4. Сопрягаем низкочастотную со среднечастотной асимптотой и среднечастотную о высокочастотной. Для этого находим минимальный избыток по фазе.

По графику находим $\delta(p_{\max}) \{3, \text{кн. 2}\}$

$$P_{\max} = 1,075, \quad P_{\min} = 1,0 - 1,075 = -0,075, \quad \gamma_1 = 60^\circ$$

Избыток по фазе должен быть $\gamma(w) \geq \gamma_1$ при $L(w) \leq 23 \text{ дБ}$

сопряжении мы должны стремиться к тому, чтобы желаемая характеристика мало отличалась от логарифмической характеристики неизменяемой части с новым коэффициентом передачи. Строим эту характеристику по передаточной функции

$$W(p) = \frac{20}{(0,5p+1)(0,1p+1)p}$$

Низкочастотная асимптота

$$L_1 = 20 \lg 20 - 20 \lg w, \quad w < w_1$$

среднечастотная асимптота

$$L_2 = 20 \lg 20 - 40 \lg w - 20 \lg 0,5 - 20 \lg 0,1 \quad w > w_2 \quad \text{Высокочастотная асимптота}$$

Здесь

$$w_1 = \frac{1}{0,5} = 2, \quad w_2 = \frac{1}{0,1} = 10.$$

По полученным данным на рис. 50 изображены асимптоты желаемой ЛАХ. из построения видим, что частота среза заданной системы с новым коэффициентом передачи ниже $w_{\text{см}}$.

При сопряжении среднечастотной асимптоты с низкочастотной (рис. 30) за частоты сопряжения принимаем: $w_1 = 2, \quad w_2 = 4$.

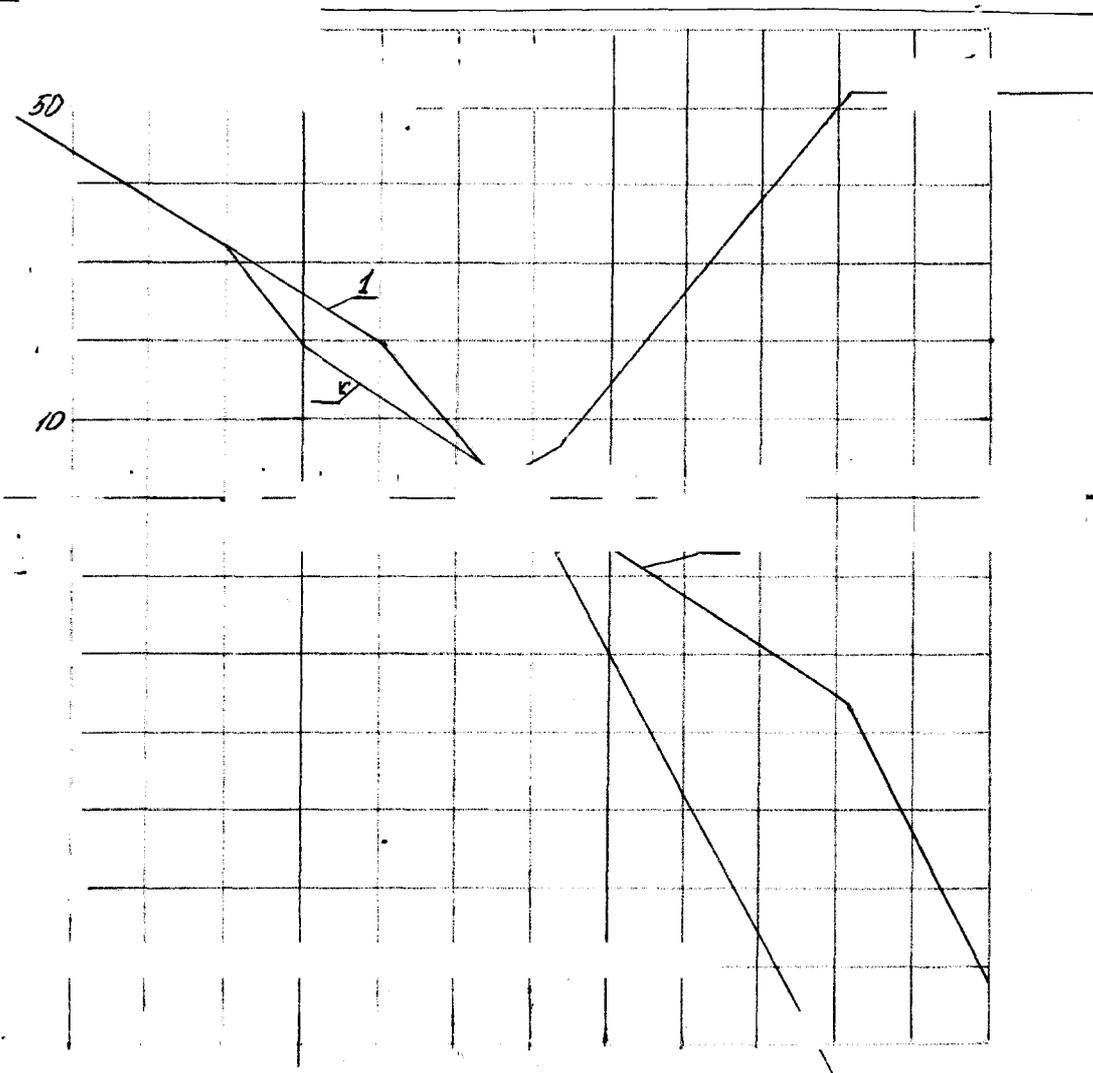


Рис. 30. Логарифмические амплитудные характеристики: 1ж - желаемая; I - располагаемая; 2-последовательного корректирующего устройства.

Проверяем избыток по фазе $\gamma = \Pi - \frac{\Pi}{2} - \left(\frac{\Pi}{2} - \frac{w_i}{w}\right) + \left(\frac{\Pi}{2} - \frac{w_k}{w}\right)$,

где частоты сопряжения w_i и w_k больше w . При $w < 2$, $\gamma = \frac{\Pi}{2} > \gamma_1$ при $2 < w < 4$

$$\gamma = \frac{2}{w} < \gamma_1$$

Из этого видим, что точки сопряжения можно взять левее $w = 1$.
выбираем $w_1 = 0,45$, $w_2 = 0,9$

Проверяем избыток по фазе правее точки $w_2 = 0,9$

$$\gamma = \Pi - \frac{\Pi}{2} - \left(\frac{\Pi}{2} - \frac{w_1}{w}\right) + \left(\frac{\Pi}{2} - \frac{w_2}{w}\right) \quad w=1$$

$$\gamma = \frac{w_1}{w} + \frac{\Pi}{2} - \frac{w_2}{w} = \frac{\Pi}{2} + 0,45 - 0,9 = 1,12 > \gamma_1 = 1,05.$$

Теперь сопрягаем среднечастотную асимптоту с высокочастотной, которая имеет наклон - 60 дб/сек. По формуле для избытка по фазе

$\gamma = \Pi - \frac{\Pi}{2} - \sum_{q=1}^m \frac{w}{w_q} \geq \gamma_1$ видим, что первая частота сопряжения, находящаяся правее частот среза, должна быть гораздо больше частоты, определяемой из равенств

$L(w)=-23\text{дб}$. Выбираем $w_3=170$, $w_4=512$.

$$\gamma = \Pi = \frac{\Pi}{2} - \frac{w}{w_3} - \frac{w}{w_4}$$

Вычитаем из желаемой логарифмической характеристики логарифмическую характеристику заданной части с новым коэффициентом передачи (рис. 30, кривые I ж. и I). Видим, что корректирующее устройство получается очень сложное.

Для того, чтобы проще было корректирующее устройство, необходимо повысить коэффициент передачи скорректированной системы.

2. Синтез параллельного корректирующего устройства по желаемой передаточной функции.

По требованиям, указанным в предыдущем параграфе, определим передаточную функцию параллельного корректирующего устройства

I. Выбор желаемой передаточной функции и определение масштаба по времени.

Заданная часть системы имеет порядок $n = 3$, поэтому $\Phi_{1ж}(p) = \frac{b_{1p}}{(p^4 a_1)^4}$;

$$\Phi_{2ж}(p) = \frac{a_2}{(p + \sqrt[3]{a_2})^3};$$

Где $\Phi_{1ж}(p)$, $\Phi_{2ж}(p)$ - передаточные функции, обеспечивающие протекание регулирования соответственно по верхней и нижней граничным кривым;

$$b_1 = b_H \alpha_1^3; \quad a_1 = \alpha_1^4, \quad a_2 = \alpha_2^3,$$

Для определения b_H , α_1 и α_2 используем нормированные процессы:

$$X_{1H}(p) = \frac{b_H p + 1}{p(p+1)^4}; \quad X_{2H}(p) = \frac{1}{p(p+1)^3};$$

$$X_{1H}(t) = 1 + \left(\frac{C_{1H}}{6} t^3 + \frac{C_{1H}}{2} t^2 + C_{3H} t + C_{4H} \right) e^{-t}, \quad X_{2H}(t) = 1 + \left(\frac{C_1}{2} t^2 + C_2 t + C \right) e^{-t},$$

где постоянные определяются:

$$\frac{b_H p + 1}{p(p+1)^4} = \frac{1}{p} + \frac{C_1}{(p+1)^4} + \frac{C_2}{(p+1)^3} + \frac{C_3}{(pH)^2} + \frac{C_4}{p+1};$$

$$\frac{b_H p + 1}{p} = \frac{(p+1)^4}{p} + C_1 + C_2(p+1) + C_3(p+1)^2 + C_4(p+1)^3,$$

$$C_1 = \frac{-b_H}{-1} = b_H - 1,$$

$$C_2 = \left[\frac{d}{dp} \frac{b_H + 1}{p} \right]_{p=-1} = \left[\frac{b_H}{p} - \frac{b_H + 1}{p^2} \right]_{p=-1} = -b_H + b_H - 1 = -1,$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dp^2} \frac{b_H + 1}{p} \right]_{p=-1} = \frac{1}{2} \left[-\frac{b_H}{p^2} - \frac{b_H}{p^2} + 2 \frac{b_H + 1}{p^3} \right]_{p=-1} \\ = \frac{1}{2} \left(-b_H - b_H + 2 \frac{-b_H + 1}{-1} \right) = \frac{1}{2} (-b_H + 2b_H - 2) = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$C_4 = \frac{1}{6} \left[\frac{d^3}{dp^3} \frac{b_H + 1}{p} \right]_{p=-1} = \frac{1}{6} \left[4 \frac{b_H}{p^3} + \frac{2b_H}{p^3} - 6 \frac{b_H + 1}{p^4} \right]_{p=-1} = -6 \cdot \frac{1}{6} = -1.$$

Тогда $X_{1H}(t) = 1 + \left(\frac{b_H - 1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t^2 - t - 1 \right) e^{-t},$

$$\Delta X(t) = \left(\frac{b_H - 1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t^2 - t - 1 \right) e^{-t},$$

$$\Delta X^1(t) = \left(\frac{b_H - 1}{2} t^2 - t - 1 \right) e^{-t} - e^{-t} \left(\frac{b_H - 1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t^2 - t + 1 \right) = \left(\frac{b_H - 1}{2} - \frac{b_H - 1}{6} t + \frac{1}{2} \right) t^2 e^{-t},$$

откуда имеем

$$\frac{b_H - 1}{6} tm = \frac{b_H}{2}; \quad tm = \frac{3b_H}{b_H - 1}; \quad tm = \frac{3b_H}{b_H - 1}; \quad tm = \frac{3b_H}{b_H - 1}; \quad \frac{3b_H}{b_H - 1};$$

$$\Delta X_{\max} = \frac{3b_H}{b_H - 1} \left(\frac{9b_H^2}{6(b_H - 1)} - \frac{3b_H}{2(b_H - 1)} - 1 \right) \frac{3b_H}{e^{1-b_H}} - \frac{3b_H}{e^{1-b_H}},$$

$$\Delta X_{\max} = \left[\frac{3b_H}{b_H - 1} \left(3b_H \cdot \frac{1}{2} - 1 \right) e^{\frac{3b_H}{1-b_H}} - e^{\frac{3b_H}{1-b_H}} \right] = \left[\frac{3b_H(3b_H - 2)}{2(b_H - 1)} - 1 \right] e^{\frac{3b_H}{1-b_H}} = \left[\frac{9b_H}{2} + \frac{3b_H}{2(b_H - 1)} - 1 \right] e^{\frac{3b_H}{1-b_H}}$$

$$(b_H \geq 1 \text{ и } \text{pub} = 1 \quad \Delta X_{\max} = 0).$$

Определяем b_H по заданному перерегулированию:

$b_H = 3,2 - \Delta X_{\max} = 0,22$; $b_H = 5,15 - \Delta X_{\max} = 0,194$. Принимаем $b_H = 3,18$ и рассчитываем $X_{1H}(t)$. Результаты расчета сведены в таблицу 5.1. По данным этой таблицы построен график $X_{1H}(t)$ рис. 51).

Таблица 5.1.

t	0,0	1	2	5	4	5	6	7	8	9
X_{1H}	0,0	0,30	0,71	1,06	1,18	1,19	1,15	1,08	1,05	1,025

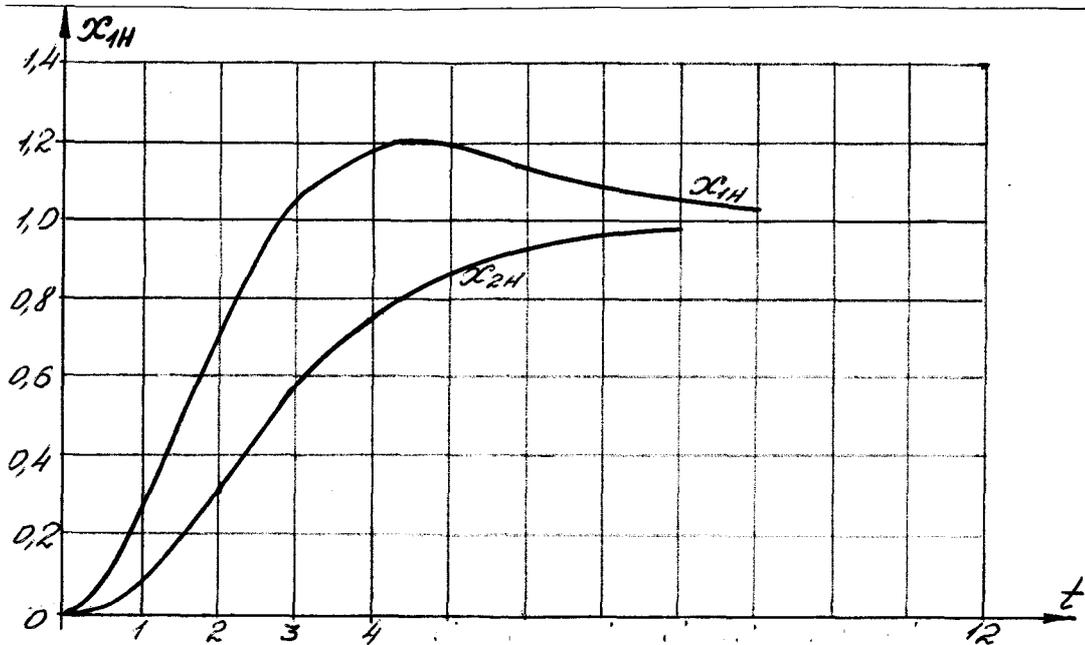


Рис. 51. Графики нормированных процессов.

Из данного графика имеем $T_{1H} = 8(\text{сек})$.

Определяем масштаб по времени $a_1 u a_1 : b_1 = 3,15 \cdot 8^3 = 1615; \quad a_1 = 4090$

Для определения выражения $X_{2H}(t)$ в выражении $X_{1H}(t)$ следует принять $b_H = 1$.

Тогда имеем: $X_{2H}(t) = 1 - \left(\frac{1}{2}t^2 + t - 1\right)e^{-t}$.

По этой	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
X_{2H}	0,0	0,08	0,55	0,58	0,76	0,87	0,94	0,97	0,99

График $X_{2H}(t)$ представлен на рис. 31. Из этого графика находим

$T_{2H} = 6,5(\text{сек})$. Тогда $\alpha_2 = \frac{6,5}{1} = 6,5; \quad a_2 = 274$.

Теперь определяем коэффициенты усиления» Для этого предварительно необходимо выбрать двигатель. Он выбирается по потребной мощности [5]. Для этого надо определить скорость и ускорение вала, связанного непосредственно с нагрузкой (к этому валу приложен момент нагрузки). Эти величины определяются путем дифференцирования функции $X_{1ж}(t) = X_{1H}(\alpha, t)$. Обычно наибольшая мощность получается, если процесс регулирования совпадает с верхней граничной кривой. Поэтому при выборе двигателя используем $X_{1ж}(t)$.

Пусть выбрали мы двигатель» Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид: Тогда коэффициенты усиления будут $K_1 = v_1 A_0 = 1615 \cdot 0,05 = 80,75$
 $K_2 = a_2 A_0 = 274 \cdot 0,05 = 13,7$.

3. Определение передаточной функции.

Определяем передаточные функции корректирующих устройств. Причем сначала определяем, передаточную функцию корректирующего устройства, обеспечивающего совпадение процесса регулирования с нижней граничной кривой, так как этот процесс является желательным:

$$K_{2к}(p) = B_1(p) \frac{(p + \sqrt{a_2})^3 - B_0(p) - K_2 / A_0}{K_1 B_0(p)}, \text{ где } B_0(p) = P^3 + \frac{1}{0,05} p = p^3 + 12p^2 + 20p.$$

Из этого выражения видно, что если $\hat{b}^p = Y$, то C^{\wedge} /Сбудет дробной функцией Р. Следовательно, охватываем обратной связью электронный усилитель. Тогда

$$K_{2к}(p) = \frac{p^3 + 3\alpha_2 p^2 + \alpha_2^3 - 12p^2 - 20p - a_2}{K_1(p^3 + 12p^2 + 20p)} = -\frac{3\alpha_2 p + 3\alpha_2^2 - 12p - 20}{K_1(p^2 + 12p + 20)}$$

K_1 = коэффициент усиления электронного усилителя. Откуда видно, что эта передаточная функция может быть реализована. При этом необходимо для гарантии взять $K_2 = K_1 \alpha_2 = \alpha_1 \sqrt{\hat{b}_n} = 8^3 \sqrt{3,18} = 11,75$

В этом случае при $K_1 = 100$ имеем:

$$K_k(p) = \frac{3 \cdot 11,75 + 3(11,75)^2 - 12p - 20}{100(p^2 + 12p + 20)} = \frac{35,25p + 415 - 12p - 20}{100(p^2 + 12p + 20)} = 0,198 \frac{0,059 + 1}{0,05p^2 + 0,6p + 1}.$$

Библиографический список

Основная литература

1. [Бесекерский, В.А.](#) Теория систем автоматического управления : [Учебное издание] / В.А.Бесекерский, Е.П.Попов .— 4-е изд., перераб. и доп. — СПб. : Профессия, 2004 .— 752с. : ил. — (Специалист) .— Библиогр. в конце кн. — ISBN 5-93913-035-6 /в пер./ : 176.00.
2. Коновалов Б.И., Лебедев Ю.М. Теория автоматического управления: учебное пособие / Б.И. Коновалов, Ю.М. Лебедев – 3-е изд. доп. и переработ. – СПб.: Лань, 2010. – 224 с. – ISBN 978-5-8114-1034-7. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=538. – ЭБС Biblio online (Издательство «Лань») по паролю
3. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: учебное пособие / А.А. Первозванский. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2015. – 624 с. – ISBN 978-5-8114-0995-2. Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=68460. – ЭБС Biblio online (Издательство «Лань») по паролю

Дополнительная литература

1. Горячев О.В. Основы теории компьютерного управления : учеб. пособие / О. В. Горячев, С. А. Руднев; ТулГУ .— Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. — 220 с.: ил. — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-7679-1194-3. — <URL: <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2013040914342128499900001265>
2. Макаров Н.Н., Феофилов С.В. Анализ и синтез систем автоматического управления с использованием системы MATLAB: учеб. пособие / Н. Н. Макаров, С. В. Феофилов; ТулГУ .— Тула: Изд-во ТулГУ, 2010 .— 68 с.: ил. — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-7679-1805-8

3. Макаров Н.Н. Математический пакет MATHCAD и его применение в задачах анализа и синтеза систем автоматического управления: учеб. пособие / Н.Н. Макаров. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2020. –189 с. (10 экз.)

4. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы : учебное пособие для вузов / И.В. Мирошник .— М.и др. : Питер, 2006 .— 272с. (23 экз.)

5. Теория автоматического управления : учебник для вузов. Ч.2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / А.А.Воронов [и др.]; под ред. А.А. Воронова .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Вышш.шк., 1986 .— 504с. : ил. — Библиогр.в конце кн. — ISBN /В пер./ : 1,10.

6. Фалдин Н.В., Морозова Е.В. Специальные разделы математики (для специалистов по автоматическому управлению) : учебное пособие / Н.В. Фалдин, Е.В. Морозова; ТулГУ . — 2-е изд., перераб. и доп. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2018 .— 174 с. : ил. — Библиогр.: 173 с. — ISBN 978-5-7679-4175-9 .—
<URL:<https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2018092709244937540700003076>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://www.exponenta.ru> - Образовательный математический сайт
2. <http://www.elibrary.ru> - Научная электронная библиотека в области науки, технологии
3. <https://tsutula.bibliotech.ru/> - Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.
4. <http://www.iprbookshop.ru/> - ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.
5. <http://cyberleninka.ru/> - НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа
6. <http://window.edu.ru> - Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]