

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева
Кафедра систем автоматического управления

Утверждено на заседании кафедры
«Системы автоматического управления»
«13» января 2021 г., протокол № 8

Заведующий кафедрой



О.В.Горячев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)

«Задачи и методы оптимизации систем автоматического управления»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы специалитета

по специальности

24.05.06 Системы управления летательными аппаратами

со специализацией

Системы управления беспилотными летательными аппаратами

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 240506-01-21

Тула 2021 год

Разработчик(и) методических указаний

Морозова Е.В., доцент, к.т.н., доцент
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

Методические указания

к выполнению лабораторных работ по предмету «Физика»

для студентов направления подготовки «Физика» специальности «Физика»

разработаны профессором Е.В. Морозовой, кандидатом технических наук

Е.В. Морозовой, кандидатом технических наук

Согласовано: _____

Физика

СОДЕРЖАНИЕ

1. Принцип максимума Понтрягина.....	4
2. Синтез оптимального управления методом фазового пространства. Поверхность переключения, ее структура.....	22
3. Синтез оптимального управления для простых модельных объектов при разнообразных критериях оптимизации.....	30
4. Применение динамического программирования для определения оптимального управления.....	37
5. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов (АКОР).....	41
6. Оптимизация в конечномерном пространстве (Метод множителей Лагранжа. Теорема Куна-Таккера. Градиентный поиск с постоянным шагом. Метод наискорейшего спуска. Метод Ньютона. Метод проекции градиента. Проекция градиента на одно ограничение, на несколько ограничений)	43
Библиографический список	50
Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»	50

1. Принцип максимума Понтрягина

Пример 1. Рассмотрим объект, движение которого задаётся уравнением

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = u, \quad (1)$$

здесь u - управляющий параметр, который должен удовлетворять условию

$$|u| \leq A; \quad (2)$$

где A - заданное положительное число. В соответствии с формализмом принципа максимума представим уравнение (1) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u. \quad (3)$$

Будем решать задачу о наибоыстрейшем переводе фазовой точки системы (3) из заданного начального положения в начало координат (точку $x^I = 0$). В качестве начальной точки будем рассматривать любую точку фазового пространства. Это позволит выделить всю совокупность оптимальных траекторий.

Воспользуемся теоремой 2.2. Составим функцию Гамильтона

$$\bar{H}(\psi, x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Принимая во внимание неравенство (2), из условия максимума функции Гамильтона найдём

$$u = A \operatorname{sign} \psi_2(t). \quad (4)$$

Вспомогательные переменные $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ находятся из системы уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1. \quad (5)$$

Выпишем решение системы уравнений (5):

$$\psi_1(t) = C_1, \quad \psi_2(t) = -C_1 t + C_2,$$

где C_1 и C_2 - произвольные константы. Тогда условие (4) принимает вид

$$u = A \operatorname{sign} (-C_1 t + C_2) \quad (6)$$

Графиком функции $\psi_2(t)$ является прямая линия, и поэтому функция $\psi_2(t)$ может изменять знак не более одного раза. Из (6), таким образом, следует, что оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией,

принимая значения A и $-A$ и имеющей не более двух интервалов постоянства управления. Обратно, любая такая функция $u(t)$ может быть получена из (6) при соответствующем выборе постоянных C_1 и C_2 .

Найдём фазовую траекторию системы (3) при $u = A$. Имеем:

$$x_2 = At + s_1, \quad x_1 = \frac{1}{2}At^2 + s_1t + s_2. \quad (7)$$

Выразив из первого уравнения (7) время t и подставив его во второе уравнение, получим

$$x_1 = \frac{1}{2A}x_2^2 + s^*, \quad (8)$$

где $s^* = s_2 - \frac{1}{2A}s_1^2$ - произвольная постоянная. Аналогичным образом легко показать, что при $u = -A$ фазовые траектории системы (3) являются парабололами вида

$$x_1 = -\frac{1}{2A}x_2^2 + s^{**}, \quad (9)$$

здесь s^{**} - произвольная постоянная.

На рис. 1 и 2 представлены параболы семейств (8) и (9) соответственно.

По параболам семейства (8) фазовая точка движется снизу вверх, а по параболам семейства (9) - сверху вниз, так как в соответствии со вторым уравнением (3) при $u = A$ координата x_2 возрастает, и при $u = -A$ убывает.

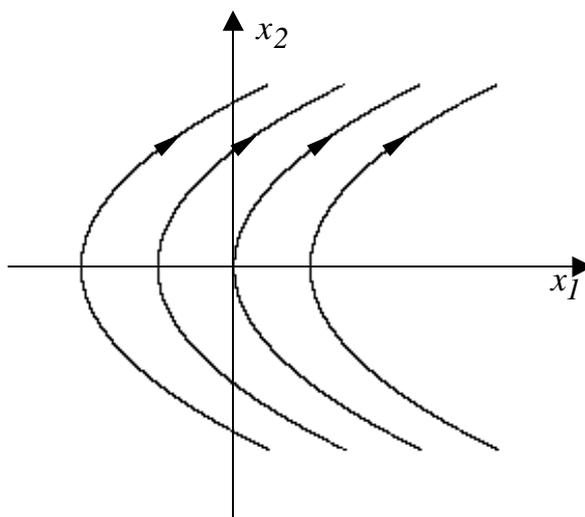


Рис. 1.

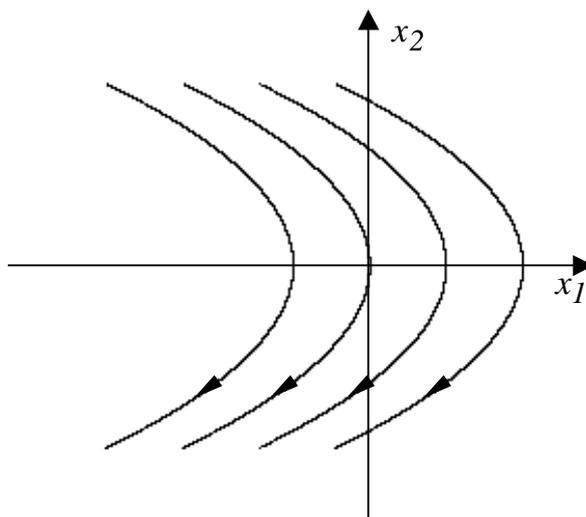


Рис. 2.

Рассмотрим фазовую траекторию, на начальном участке которой фазовая точка движется под воздействием управления $u = A$ по параболе семейства (8), а заканчивается движение под воздействием управления $u = -A$ по параболе семейства (9). При этом заканчивается движение по той из парабол семейства (9), которая проходит через начало координат, так как конечной целью управления является перевод фазовой точки в начало координат. Указанная траектория изображена на рис. 3. (линия MRO).

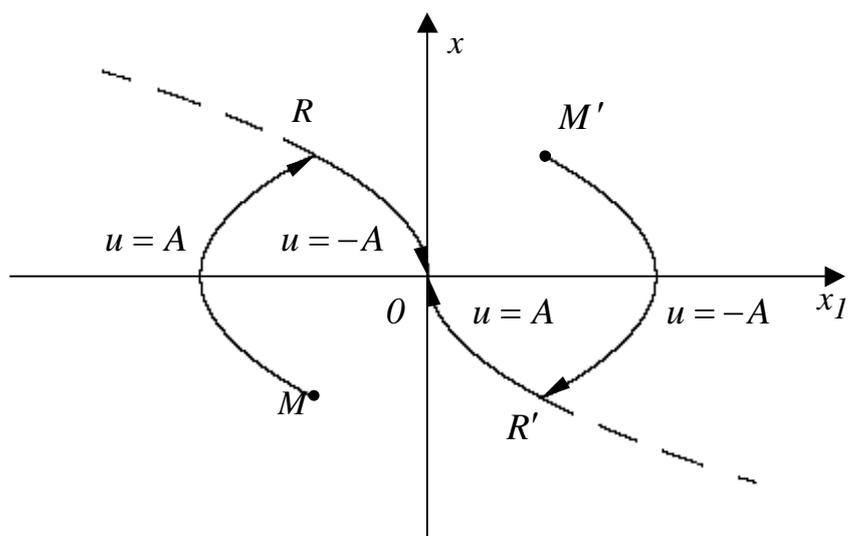


Рис. 3.

Если на начальном участке фазовая точка движется под воздействием управления $u = -A$, а заканчивается движение под воздействием управления

$u = A$, то движение происходит по траектории $M'R'O$, которая симметрична относительно начала координат траектории MRO .

На рис. 4 изображена совокупность всевозможных оптимальных траекторий.

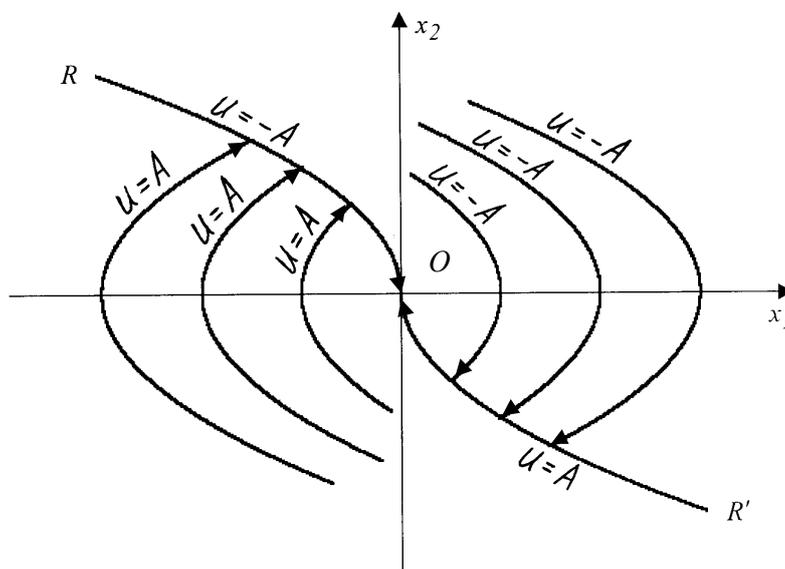


Рис. 4.

Эти траектории действительно являются оптимальными, так как для каждой начальной точки x^0 существует единственная траектория, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности (теореме 2.2), а по условию задачи ясно, что оптимальное управление существует.

Из рис. 4 видно, что переключение управления происходит на линии ROR' . Выше линии ROR' оптимальное управление $u = -A$, а ниже линии ROR' оптимальное управление $u = A$. Линия RO является частью параболы семейства (9) и задаётся уравнением

$$x_1 = -\frac{1}{2A} x_2^2, \quad x_2 \geq 0,$$

а линия $R'O$ - частью параболы семейства (2.24) и задаётся уравнением

$$x_1 = \frac{1}{2A} x_2^2, \quad x_2 \leq 0.$$

Введём функцию

$$v(x) = \begin{cases} -A & \text{выше линии } ROR' \text{ и на линии } RO, \\ A & \text{ниже линии } ROR' \text{ и на линии } R'O. \end{cases}$$

Тогда в каждый момент времени t оптимальное управление

$$u = v(x(t)).$$

Если в уравнениях (3) положить $u = v(x)$, то при каждом начальном условии решением системы уравнений (3) будет идущая в начало координат оптимальная по быстродействию траектория.

Пример 2. По-прежнему рассматривается объект, движение которого задаётся уравнениями (3). Будем предполагать, что на управляющий параметр u наложено ограничение

$$|u| \leq 1. \quad (10)$$

В качестве критерия оптимизации рассмотрим функционал

$$J = \int_0^T (k + |u|) dt, \quad (11)$$

здесь k - некоторое положительное число.

Функционал (11) является линейной комбинацией двух функционалов

$$J_1 = \int_0^T dt \text{ и } J_2 = \int_0^T |u| dt,$$

один из которых задаёт время движения, а второй - расходуемые на управление ресурсы. Число k является весовым коэффициентом, с помощью которого устанавливается компромисс между двумя этими критериями.

Требуется найти управление и траекторию, переводящие фазовую точку из заданного начального состояния в начало координат и минимизирующие функционал (11). В качестве начальных предполагается рассмотреть все точки фазовой плоскости.

В соответствии с теоремой 2.1 функция Гамильтона

$$H(\psi, x, u) = \psi_0(k + |u|) + \psi_1 x_2 + \psi_2 u. \quad (12)$$

Вектор $\psi(t)$ определяется уравнениями

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1. \quad (13)$$

Выше уже отмечалось, что теоремой 2.1 вектор $\psi(t)$ определяется с точностью до постоянного положительного множителя. Далее, поскольку $\psi_0(t) = \text{const} \leq 0$, положим $\psi_0(t) = -1$. Тогда функция (2.28) примет вид

$$H(\psi, x, u) = -k - |u| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u. \quad (14)$$

Для определения оптимального управления необходимо максимизировать функцию Гамильтона, как функцию управления, и в соответствии с (14) максимизация функции Гамильтона выливается в максимизацию функции

$$\Delta H = -|u| + \psi_2 u.$$

Представим ΔH в виде

$$\Delta H = \begin{cases} (\psi_2 - 1)u & \text{при } u \geq 0, \\ (\psi_2 + 1)u & \text{при } u \leq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Из условия максимума функции (15), принимая во внимание ограничение (2.26), найдём

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi_2(t) > 1, \\ -1, & \text{если } \psi_2(t) < -1, \\ 0, & \text{если } |\psi_2(t)| < 1, \\ \in [0, 1], & \text{если } \psi_2(t) = 1, \\ \in [-1, 0], & \text{если } \psi_2(t) = -1, \end{cases} \quad (16)$$

здесь символом $u^*(t)$ обозначено управление, максимизирующее функцию Гамильтона.

Введём в рассмотрение функцию “зоны нечувствительности” $y = \text{dez}(x)$, которая определяется соотношениями

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| < 1, \\ \text{sign } x, & \text{если } |x| > 1, \\ \in [0, 1], & \text{если } x = 1, \\ \in [-1, 0], & \text{если } x = -1. \end{cases}$$

На рис. 5 приведён график функции $y = \text{dez}(x)$.

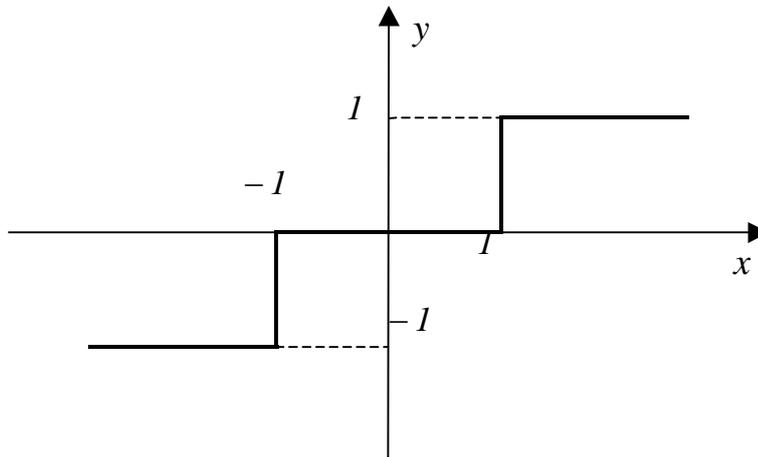


Рис. 5.

Равенство (2.32) можно записать в виде

$$u^*(t) = \text{dez}(\psi_2(t)). \quad (17)$$

В конечный момент времени T $x(T) = 0$, так как конечной целью управления является перевод фазовой точки в начало координат. Покажем, что

$$|\psi_2(T)| > 1. \quad (18)$$

Запишем равенство

$$H(\psi(T), x(T), u^*(T)) = -k - |u^*(T)| + \psi_1(T) \cdot x_2(T) + \psi_2(T) \cdot u^*(T). \quad (19)$$

Если $|\psi_2(T)| < 1$, то в соответствии с (17) $u(T) = 0$, и из (2.35) следует

$$H(\psi(T), x(T), u^*(T)) = -k \neq 0. \quad (20)$$

Соотношение (2.36) противоречит второму условию (2.10). При $\psi_2(T) = 1$ $u(T) \in [0, 1]$, а при $\psi_2(T) = -1$ $u(T) \in [-1, 0]$. Равенство (18) в этом случае также приводит к соотношению (20).

Из неравенства (18) следует, что в начало координат фазовая точка может попасть либо с управлением $u(t) = 1$, либо с управлением $u(t) = -1$.

Проинтегрируем уравнения (13):

$$\psi_1(t) = \psi_1(0), \quad \psi_2(t) = -\psi_1(0)t + \psi_2(0). \quad (21)$$

Строго говоря, уравнения (13) допускают решение

$$\psi_1(t) = 0, \quad \psi_2(t) = \pm 1. \quad (22)$$

В этом случае соотношение (17) не определяет управление $u^*(t)$ однозначным образом. Однако решение (20), как легко убедиться, противоречит условию

$$M(\psi(t), x(t)) = 0,$$

и поэтому его следует исключить из дальнейшего рассмотрения.

В соответствии с (21) график функции $\psi_2(t)$ является прямой линией.

Вид этой прямой определяется начальными условиями $\psi_1(0)$ и $\psi_2(0)$. Далее, если

$$\psi_2(t) = \psi_2(0),$$

то в соответствии с неравенствами (18) $|\psi_2(0)| > 1$.

Рассмотрим оптимальное управление и оптимальную траекторию, соответствующие функции $\psi_2(t)$, представленной на рис 6.

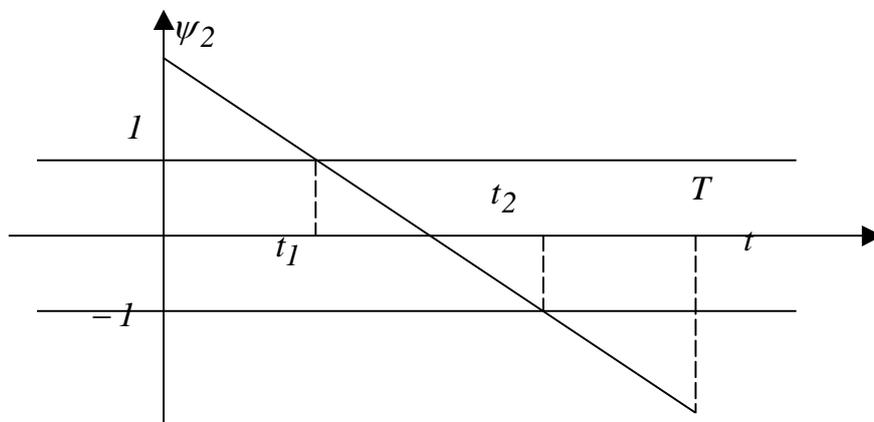


Рис. 6.

Управление $u^*(t)$ в этом случае имеет вид, изображённый на рис 7.

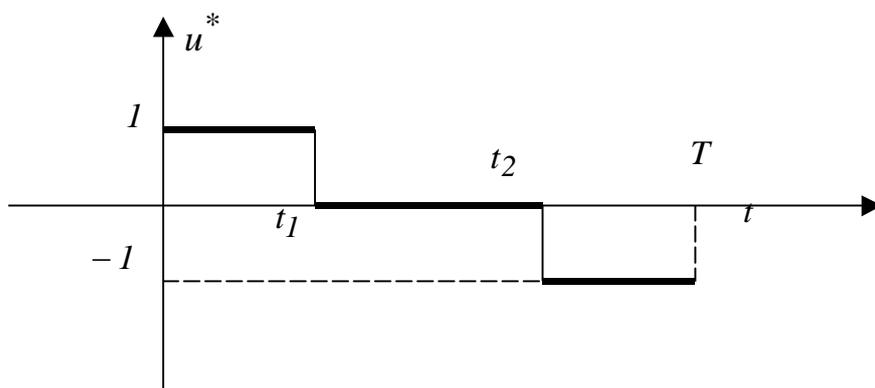


Рис. 7.

Как следует из (8) и (9), при $u = 1$ фазовая точка движется по параболе семейства

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + s^*, \quad (23)$$

а при $u = -1$ - по параболе семейства

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + s^{**}, \quad (24)$$

здесь s^* и s^{**} - произвольные константы. При $u(t) \equiv 0$

$$x_2(t) = x_2(0),$$

$$x_1(t) = x_2(0)t + x_1(0),$$

т. е. при $u \equiv 0$ фазовая точка движется по прямой линии

$$x_2(t) = x_2(0). \quad (25)$$

На рис. 8 изображено семейство прямых (25).

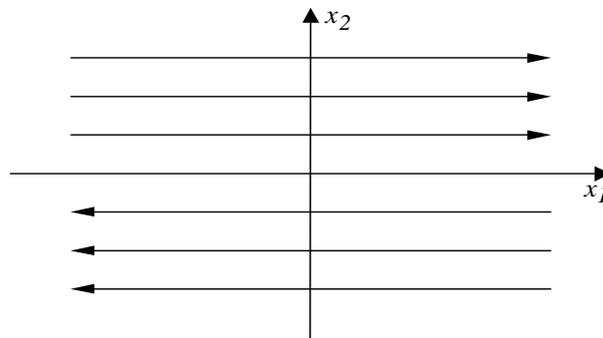


Рис. 8.

Таким образом, траектория, соответствующая изображённому на рис. 7 управлению $u^*(t)$, состоит из парабол соответственно семейств (23) и (24), соединенных между собой отрезком прямой (25) (рис. 9).

На заключительном участке фазовая точка движется по параболе семейства (24), причём по той из парабол семейства (24), которая проходит через начало координат. Эта парабола задаётся уравнением

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2,$$

а участок параболы, по которому фазовая точка переводится в начало координат - уравнением

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2, \quad x_2 \geq 0. \quad (26)$$

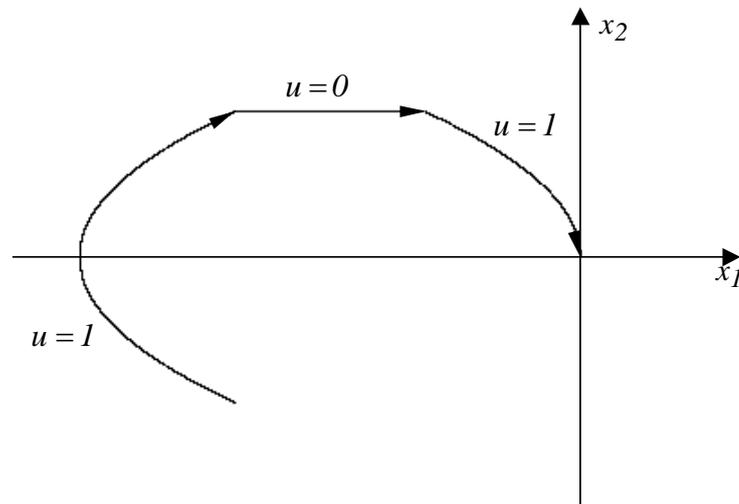


Рис. 9.

Переключение управления с $u^*(t) = 0$ на $u^*(t) = -1$ происходит именно в точках участка параболы (26). Таким образом, можно записать

$$x_1(t_2) = -\frac{1}{2}x_2^2(t_2).$$

Линию, которая задаётся уравнением (26) обозначим γ_1^- .

Найдём линию, в точках которой происходит переключение уравнения с $u^*(t) = 1$ на $u^*(t) = 0$.

Воспользуемся равенством $M(\psi(t), x(t)) = 0$. Для момента времени t_2 имеем

$$-k - |u(t_2 + 0)| + \psi_1(t_2)x_2(t_2) + \psi_2(t_2)u(t_2 + 0) = 0. \quad (27)$$

В соответствии с рис. 6 и 7

$$u(t_2 + 0) = -1, \quad \psi_2(t_2) = -1.$$

Из (2.43) следует

$$\psi_1(t_2) = \psi_1 = -\frac{k}{x_2(t_2)}. \quad (28)$$

Найдём время движения с управлением $u^*(t) = 0$. Так как $\psi_2(t_1) = 1$, $\psi_2(t_2) = -1$, то из равенства

$$\psi_2(t_2) = \psi_1(t_2 - t_1) + \psi_2(t_1)$$

следует

$$t_2 - t_1 = \frac{2}{\psi_1}$$

или, принимая во внимание (28),

$$t_2 - t_1 = -\frac{2x_2(t_2)}{k}. \quad (29)$$

В интервале $t_1 < t < t_2$ фазовая точка движется под воздействием управления $u^*(t) = 0$. Поэтому

$$x_1(t_2) = x_2(t_1)(t_2 - t_1) + x_1(t_1)$$

или

$$x_1(t_2) = x_2(t_1) \frac{2x_2(t_2)}{k} + x_1(t_1).$$

Поскольку $x_2(t_1) = x_2(t_2)$, то можно записать

$$x_1(t_2) = \frac{2}{k} x_2^2(t_2) + x_1(t_1). \quad (30)$$

Точка $x(t_2)$ лежит на линии γ_1^- и следовательно

$$x_1(t_2) = -\frac{1}{2} x_2^2(t_2). \quad (31)$$

Подставив (31) в (30), получим

$$x_1(t_1) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{k}\right) x_2^2(t_2).$$

Далее, учитывая, что $x_2(t_2) = x_2(t_1)$, можно записать

$$x_1(t_1) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{k}\right) x_2^2(t_1).$$

Итак, переключение управления с $u^*(t) = 1$ на $u^*(t) = 0$ происходит в точках кривой

$$x_1 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{k}\right) x_2^2, \quad x_2 \geq 0. \quad (32)$$

Линию, задаваемую уравнением (32) обозначим γ_2^+ .

Рассмотрев управление $u^*(t)$, представленное на рис. 10, аналогичным образом можно показать, что переключение управления с $u^*(t) = -1$ на $u^*(t) = 0$ происходит на линии

$$x_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{k} \right) x_2^2, \quad x_2 \leq 0, \quad (33)$$

а переключение управления с $u^*(t) = 0$ на $u^*(t) = 1$ происходит на линии

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2, \quad x_2 \leq 0 \quad (34)$$

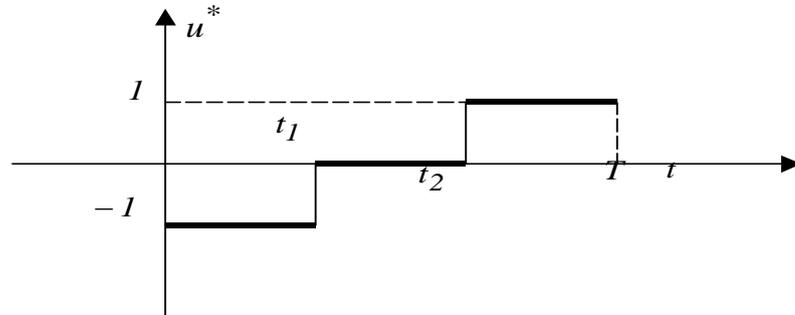


Рис. 10.

Линии, задаваемые уравнениями (33) и (34), обозначим соответственно γ_2^- и γ_2^+ . Пусть далее $\gamma_1 = \gamma_1^- \cup \gamma_1^+$, а $\gamma_2 = \gamma_2^- \cup \gamma_2^+$.

Таким образом, на фазовой плоскости существуют две линии переключения γ_1 и γ_2 (см. рис. 11). Выше линии γ_1 и γ_2 управление $u^*(t) = -1$, ниже линии γ_1 и γ_2 управление $u^*(t) = +1$. В промежутке между линиями γ_1 и γ_2 $u^* = 0$. На рис. 11 жирными линиями выделены две фазовые траектории, которые удовлетворяют теореме 2.1. Только управления и траектории, задаваемые рис. 11, могут быть оптимальными.

Далее, поскольку для каждой начальной точки существует только одна траектория, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности (условиям теоремы 2.1), а по физическим соображениям существование оптимальных траекторий представляется вполне очевидным фактом, то это позволяет заключить, что полученные выше управления и траектории являются оптимальными.

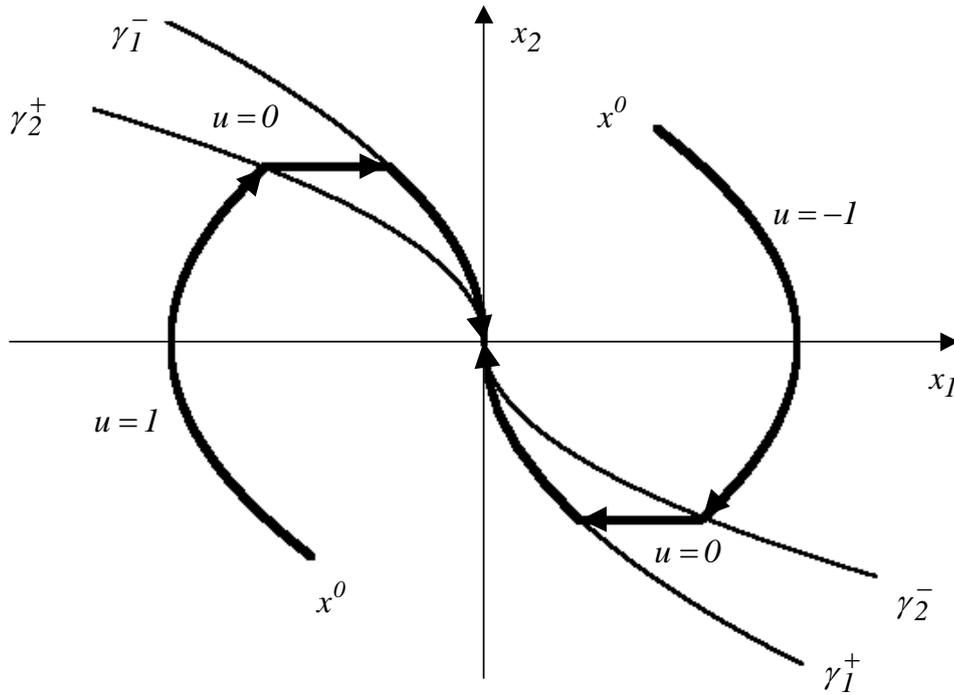


Рис. 11.

Пусть

$$x_1 = f_1(x_2)$$

- уравнение линии γ_1 , а

$$x_1 = f_2(x_2)$$

- уравнение линии γ_2 . Тогда оптимальное управление можно задать равенством

$$u = \begin{cases} -1, & \text{если } x_1 - f_1(x_2) > 0 \text{ и } x_1 - f_2(x_2) > 0, \\ 1, & \text{если } x_1 - f_1(x_2) < 0 \text{ и } x_1 - f_2(x_2) < 0, \\ 0, & \text{если } \text{sign}[x_1 - f_1(x_2)] = -\text{sign}(x_1 - f_2(x_2)). \end{cases} \quad (35)$$

Строго говоря, равенство (35) не задает значение оптимального управления на линии γ_1 , хотя линия γ_1 образована двумя оптимальными фазовыми траекториями системы (3).

На рис. 12 изображена структурная схема оптимальной системы.

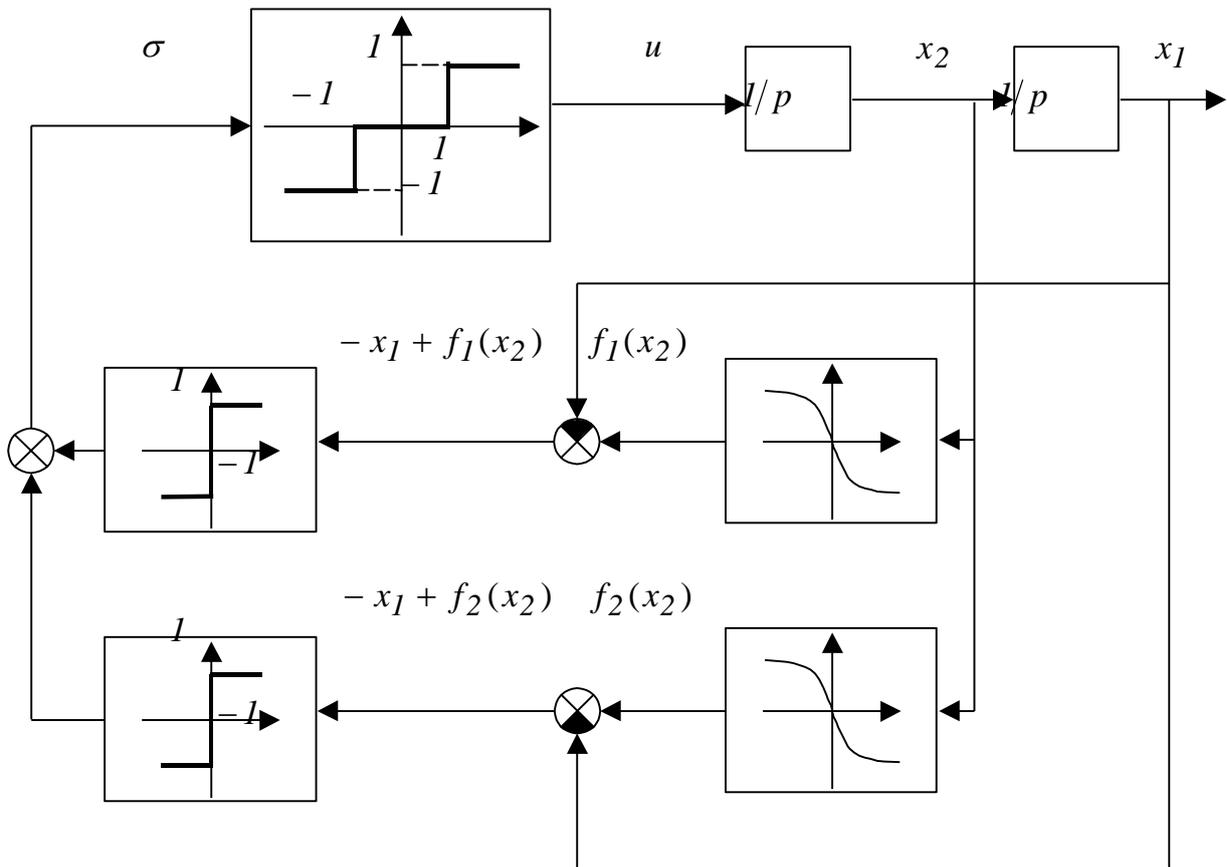


Рис. 12.

Если функции $x_1 - f_1(x_2)$ и $x_1 - f_2(x_2)$ имеют разные знаки, то $\sigma(t) = 0$ и управление $u(t) = 0$. Если указанные функции имеют одинаковые знаки, то $\sigma(t) = -2\text{sign}[x_1 - f_1(x_2)]$ и сигнал управления $u(t) = -\text{sign}[x_1 - f_1(x_2)]$.

Пример 3. Внесем некоторые изменения в пример 2. По-прежнему полагается, что движение объекта управления задается уравнениями (3) при ограничении на параметр управления (10), и в качестве критерия оптимизации рассматривается функционал (11). Однако вместо заданной конечной точки (в примере 2 – это начало координат) будем рассматривать перевод фазовой точки на многообразии, которое задается уравнением

$$x_1 = 0.$$

К условиям оптимальности, задаваемым теоремой 2.1, необходимо добавить условия трансверсальности на правом конце траектории, которые имеют вид

$$\psi_1(T) = \rho, \quad \psi_2(T) = 0. \quad (36)$$

Так как ρ является произвольным вещественным числом, то первое

равенство (36) не накладывает никаких условий на функцию $\psi_1(t)$. Далее, в соответствии с (21) $\psi_2(t)$ - линейная функция, которая может обращаться в нуль только один раз. Поэтому в интервале $0 \leq t \leq T$ функция $\psi_2(t)$ не может изменять свой знак.

Как следует из (36) и (16), на заключительном участке фазовая точка движется под воздействием управления $u^*(t) = 0$ по траектории семейства (25). На начальном участке в зависимости от знака $\psi_2(0)$ движение происходит либо под воздействием управления $u^* = 1$; либо - $u^* = -1$. Возможен также вариант ($\psi_2(0) = 0$), когда на всей траектории движения $u^*(t) \equiv 0$.

На рис. 13 изображены управление $u^*(t)$ и соответствующая ему траектория $x(t)$ при $\psi_2(0) > 1$.

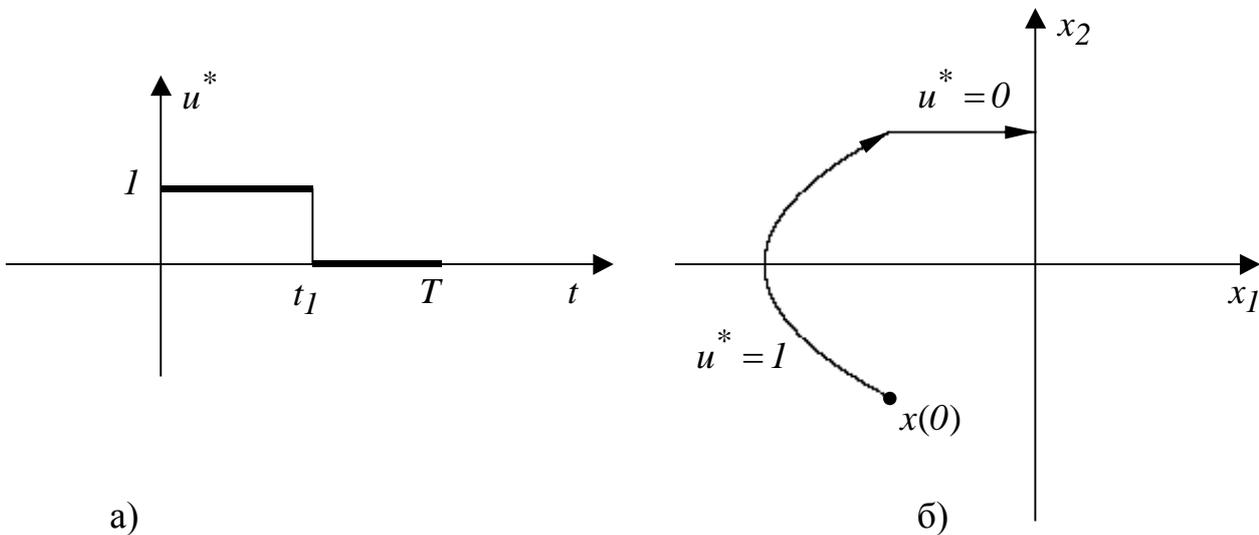


Рис. 13.

Найдем на фазовой плоскости совокупность точек, в которых происходит переключение управления с $u^*(t) = 1$ на $u^*(t) = 0$.

Запишем равенство

$$\begin{aligned} H(\psi(T), x(T), u^*(T)) &= -k - |u^*(T)| + \psi_1(T) \cdot x_2(T) + \psi_2(T) \cdot u^*(T) = \\ &= -k + \psi_1(T) \cdot x_2(T) = 0 \quad , \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$x_1(t_1) = \psi_1(T) = \frac{k}{x_2(T)}. \quad (37)$$

В интервале $t_1 \leq t \leq T$

$$\psi_2(T) = -\psi_1(t_1) \cdot (T - t_1) + \psi_2(t_1).$$

В соответствии с (2.32) $\psi_2(t_1) = 1$ и, очевидно,

$$T - t_1 = \frac{1}{\psi_1(t_1)}.$$

Так как $\psi_1(t_1) = \psi_1(T)$, то из (2.64) следует

$$T - t_1 = \frac{x_2(T)}{k}. \quad (38)$$

В интервале $t_1 < t \leq T$ $u^*(t) = 0$, и потому

$$x_1(T) = x_2(t_1) \cdot (T - t_1) + x_1(t_1).$$

Принимая во внимание (38) и равенство $x_1(T) = 0$, найдем

$$x_1(t_1) = -\frac{1}{k} \cdot x_2(t_1) \cdot x_2(T).$$

Но так как $x_2(T) = x_2(t_1)$, то окончательно получим

$$x_1(t_1) = -\frac{1}{k} \cdot x_2^2(t_1). \quad (39)$$

Равенство (39) задает на фазовой плоскости параболу. Однако, как следует из рис. 13, переключение управления с $u^*(t) = 1$ на $u^*(t) = 0$ возможно только при $x_2(t_1) > 0$ (в противном случае прямая $x_1 = 0$ не может быть достигнута), т. е. уравнение (39) необходимо дополнить неравенством $x_2(t_1) > 0$. Обозначим γ^+ линию на фазовой плоскости, определяемую соотношениями

$$x_1 = -\frac{1}{k} \cdot x_2^2, \quad x_2 \geq 0.$$

Именно в точках линии γ^+ происходит переключение управления $u^*(t)$ с +1 на 0.

Если рассмотреть управление $u^*(t)$, вид которого представлен на рис. 14, и

соответствующую ему фазовую траекторию, то указанным выше способом легко установить, что переключение управления $u^*(t)$ с -1 на 0 происходит на линии γ^- , которая задается соотношениями

$$x_1 = \frac{1}{k} \cdot x_2^2, \quad x_2 \leq 0.$$

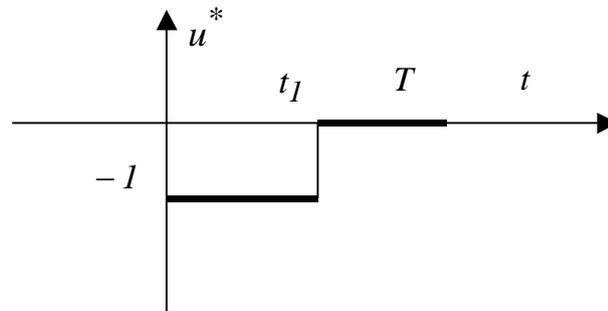


Рис. 14.

Обозначим γ объединение линий γ^+ и γ^- : $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$. Для каждой фазовой траектории $x(t)$ переключение управления $u^*(t)$ происходит на линии γ . На рис. 15 изображены линия “переключения” и вид выделенных необходимыми условиями оптимальности фазовых траекторий. Только изображенные на рис. 15 траектории могут быть оптимальными траекториями.

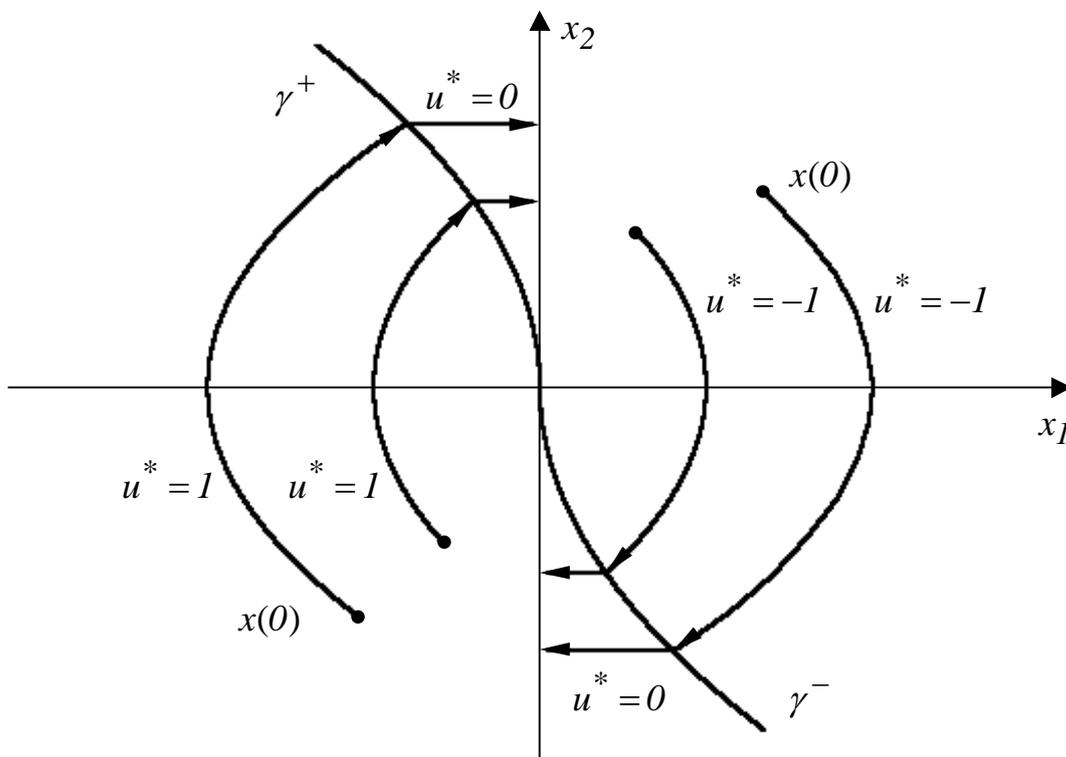


Рис. 15.

На рис. 15 видно, что каждая оптимальная траектория целиком лежит либо в левой, либо в правой полуплоскости.

Обозначим

$$x_1 = \varphi(x_2) -$$

уравнение линии γ . Оптимальное управление задается равенством

$$u = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 - \varphi(x_2) < 0 \text{ и } x_1 < 0, \\ -1, & \text{если } x_1 - \varphi(x_2) < 0 \text{ и } x_1 > 0, \\ 0, & \text{если } x_1 - \varphi(x_2) > 0 \text{ и } x_1 < 0, \\ & \text{или } x_1 - \varphi(x_2) < 0 \text{ и } x_1 > 0. \end{cases}$$

2. Синтез оптимального управления методом фазового пространства. Поверхность переключения, ее структура

Пример 1. Рассмотрим объект, имеющий передаточную функцию

$$W(p) = \frac{k}{(Tp + 1)p}.$$

Такую передаточную функцию имеет, например, летательный аппарат по каналу крена на некоторых из режимов полёта. Движение объекта описывается уравнением

$$T \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = ku. \quad (1)$$

Будем предполагать, что на управляющий параметр u наложено ограничение

$$|u| \leq A,$$

а задающее воздействие $y_0 = g_0$, здесь g_0 - произвольная константа.

Ошибка

$$x = y_0 - y = g_0 - y,$$

и уравнение (1) принимает вид

$$T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -ku. \quad (2)$$

Так как уравнение (1) имеет второй порядок, то $S = L_1$, т. е. поверхность переключения имеет размерность 1 и, следовательно, представляет собой линию на фазовой плоскости.

Для определения линии переключения L_1 воспользуемся принципом “попятного движения” Фельдбаума. Введём обратное время $\tau = t_1 - t$, здесь t_1 - конечное время, t - текущее время. Если в прямом времени траектория $x(t)$ проходится от начала к концу, то в обратном времени τ ($0 \leq \tau \leq t_1$) - от конца к началу. Справедливы следующие соотношения:

$$\frac{d x}{d t} = \frac{d x}{d t} \cdot \frac{d \tau}{d \tau} = \frac{d x}{d \tau} \cdot \frac{d \tau}{d t} = -\frac{d x}{d \tau},$$

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d}{d t} \cdot \left[\frac{d x}{d t} \right] = -\frac{d}{d \tau} \cdot \left[-\frac{d x}{d \tau} \right] = \frac{d^2 x}{d \tau^2},$$

$$\frac{d^n x}{d \tau^n} = (-1)^n \frac{d^n x}{d t^n}.$$

Уравнение (2) можно записать в виде

$$T \frac{d^2 x}{d \tau^2} - \frac{d x}{d \tau} = -ku. \quad (3)$$

Полагая $u = \text{const}$, найдём решение уравнения (3.11):

$$\frac{d x}{d \tau} = C_1 e^{\tau/T} + ku, \quad (4)$$

$$x = C_1 T e^{\tau/T} + ku\tau + C_2.$$

Перейдём в уравнениях (4) к производной по прямому времени:

$$\frac{d x}{d \tau} = C_1 e^{\tau/T} + ku, \quad (5)$$

$$x = C_1 T e^{\tau/T} + ku\tau + C_2.$$

Так как в обратном времени траектории L'_1 и L''_1 исходят из начала координат, то постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдём из условий:

$$x|_{\tau=0} = 0, \quad \left. \frac{d x}{d \tau} \right|_{\tau=0} = 0.$$

Окончательно получим

$$\frac{d x}{d \tau} = k u e^{\tau/T} - ku, \quad (6)$$

$$x = -T k u e^{\tau/T} + ku\tau + kuT.$$

Уравнения (6) определяют (в функции параметра τ) в фазовом пространстве с декартовыми координатами $\frac{d x}{d t}$ и x при $u = A$ линию L'_1 , а при $u = -A$ - линию L''_1 .

На рис. 1 изображены линии L'_1 и L''_1 . Рассмотрев первые участки оптимальной траектории, легко установить, что выше линии L_1 оптимальное управление $u = A$, а ниже линии L_1 оптимальное управление $u = -A$.

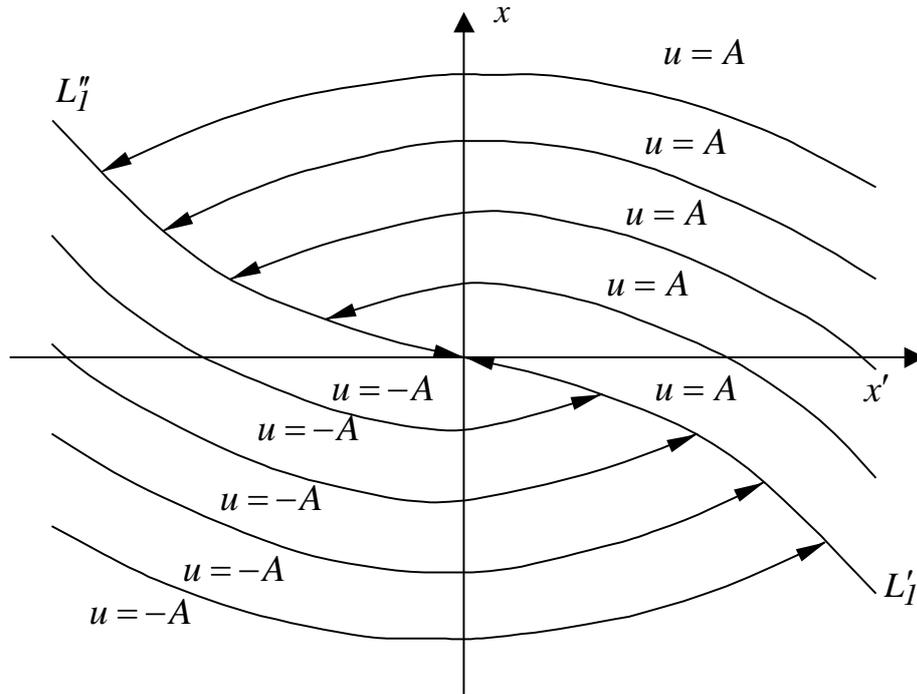


Рис. 1.

Обозначим $x = \varphi(x')$ - уравнение линии L_1 . Тогда оптимальное управление будет задаваться равенством $u = A \operatorname{sign} [x - \varphi(x')]$.

На рис. 2 представлена структурная схема оптимальной системы.

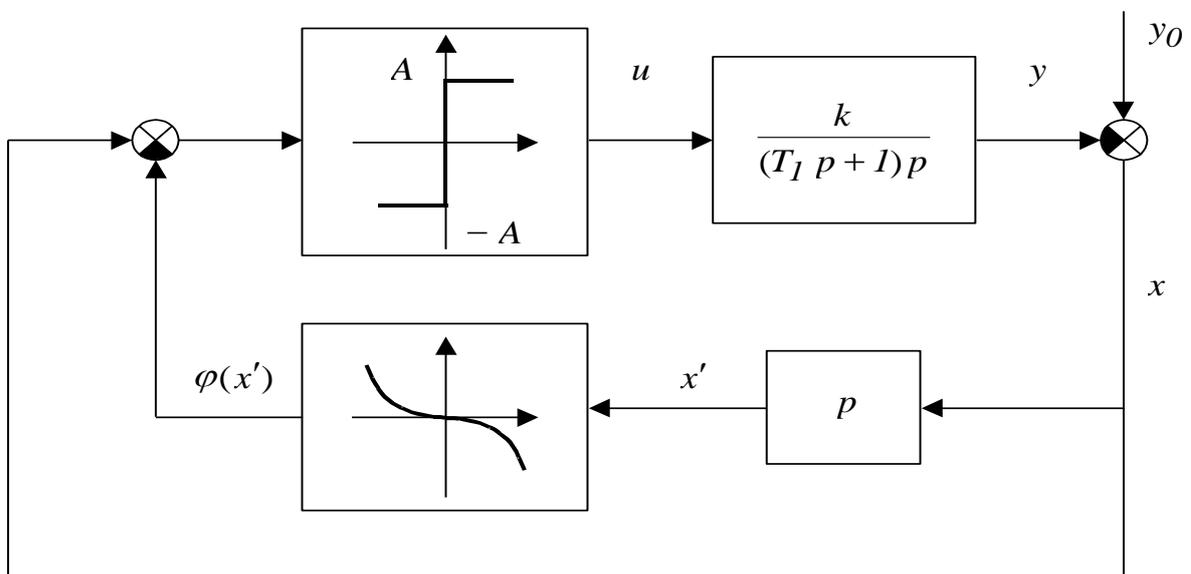


Рис. 2.

Пример. 2. Рассмотрим синтез оптимальной системы третьего порядка. Пусть движение объекта задаётся уравнением

$$\frac{d^3 y}{d t^3} = u. \quad (7)$$

На управляющий параметр u наложено ограничение

$$|u| \leq A.$$

Задающее воздействие имеет вид

$$y_0 = g_2 t^2 + g_1 t + g_0,$$

где g_2, g_1, g_0 - произвольные числа.

Введём ошибку

$$x = y_0 - y = g_2 t^2 + g_1 t + g_0 - y. \quad (8)$$

Из равенства (8) следует, что

$$\frac{d^3 x}{d t^3} = -\frac{d^3 y}{d t^3}.$$

Тогда уравнение (7) можно записать в виде

$$\frac{d^3 x}{d t^3} = -u. \quad (9)$$

В соответствии с теоремой о числе переключений оптимальное по быстродействию управление релейно и в переходном процессе допускается не более двух переключений реле. Так как уравнение (9) имеет третий порядок, то в фазовом пространстве системы с декартовыми координатами $x, dx/dt, d^2x/dt^2$ существует поверхность переключения $S = L_2$, по одну сторону от которой - оптимальное управление $u = A$, а по другую - $u = -A$.

В обратном времени уравнение (9) принимает вид

$$\frac{d^3 x}{d \tau^3} = u. \quad (10)$$

Найдём решение уравнения (3.18), предполагая, что $u = \text{const}$:

$$\frac{d^2 x}{d \tau^2} = u \tau + C_1,$$

$$\frac{d x}{d \tau} = u \frac{\tau^2}{2} + C_1 \tau + C_2,$$

$$x = u \frac{\tau^3}{6} + C_1 \frac{\tau^2}{2} + C_2 \tau + C_3, \quad \square \quad (11)$$

где C_1, C_2 и C_3 - константы интегрирования.

Перейдём в уравнениях (11) к производным по прямому времени:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = u\tau + C_1, \quad \frac{dx}{dt} = -u \frac{\tau^2}{2} - C_1\tau - C_2,$$

$$x = u \frac{\tau^3}{6} + C_1 \frac{\tau^2}{2} + C_2\tau + C_3.$$

Константы C_1, C_2, C_3 определяются из условий

$$\left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_{\tau=0} = x_{30}, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\tau=0} = x_{20}, \quad x|_{\tau=0} = x_{10}.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= u\tau + x_{30} \\ \frac{dx}{dt} &= -u \frac{\tau^2}{2} - x_{30}\tau + x_{20} \\ x &= u \frac{\tau^3}{6} + x_{30} \frac{\tau^2}{2} - x_{20}\tau + x_{10} \quad \square \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (12) позволяют рассчитать любую траекторию, входящую в совокупность L_2 (см. рис. 3.4).

Назовём полутраекторией траекторию движения системы (9) (или (10)), соответствующую постоянному знаку управления u . Будем предполагать, что обратное время τ вводится отдельно для каждой полутраектории.

Положим в уравнениях (12) $x_{10} = x_{20} = x_{30} = 0$. Уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = u\tau, \quad \frac{dx}{dt} = -u \frac{\tau^2}{2}, \quad x = u \frac{\tau^3}{6}. \quad (13)$$

при $u = A$ задают (в функции параметра τ) линию L'_1 , а при $u = -A$ - линию L''_1 . Отметим, что параметр τ необходимо изменять от нуля в положительную сторону.

В результате численных расчётов, выполненных с помощью уравнений (13), линия $L_1 = L'_1 \cup L''_1$ задаётся совокупностью дискретных точек. На рис. 3 представлена проекция линии L_1 на плоскость $x=0$. Если над каждой расчётной точкой записать соответствующее ей значение координаты x , то с помощью рис. 3 можно задать линию L_1 .

Поверхность переключения образуют полутраектории, примыкающие к линии L_1 . Для определения, например, полутраектории CD (рис. 4), примыкающей с управлением $u = -A$ к линии L'_1 , необходимо в уравнениях (12) положить $u = -A$, а в качестве начальных значений x_{10}, x_{20}, x_{30} взять координаты точки D . Параметр τ при этом по-прежнему отсчитывается от нуля в положительную сторону. Аналогичным образом строятся другие полутраектории, образующие совокупность L''_2 .

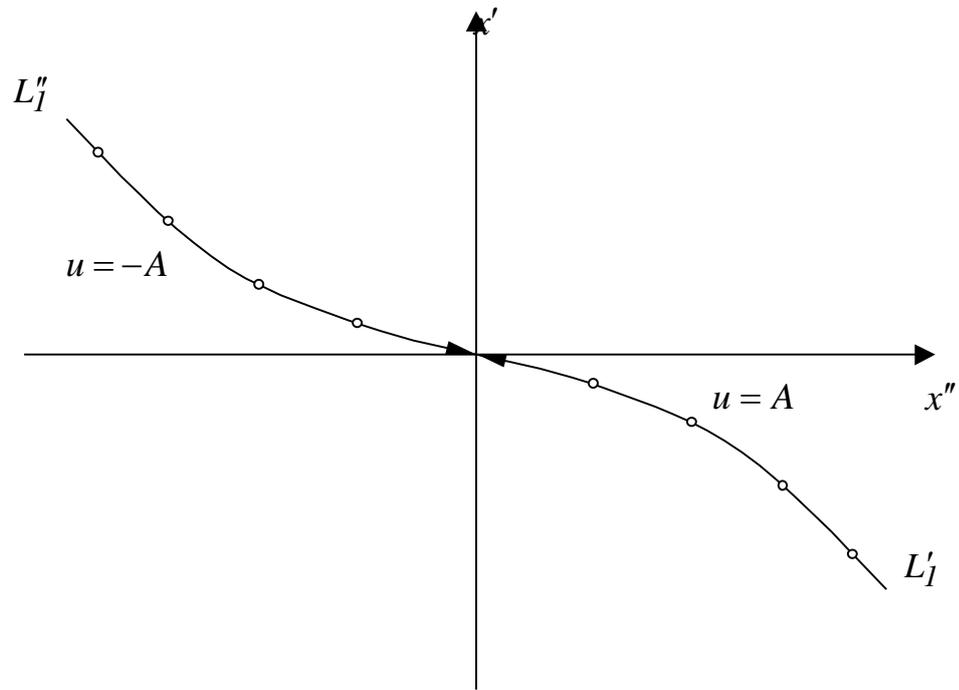


Рис. 3.

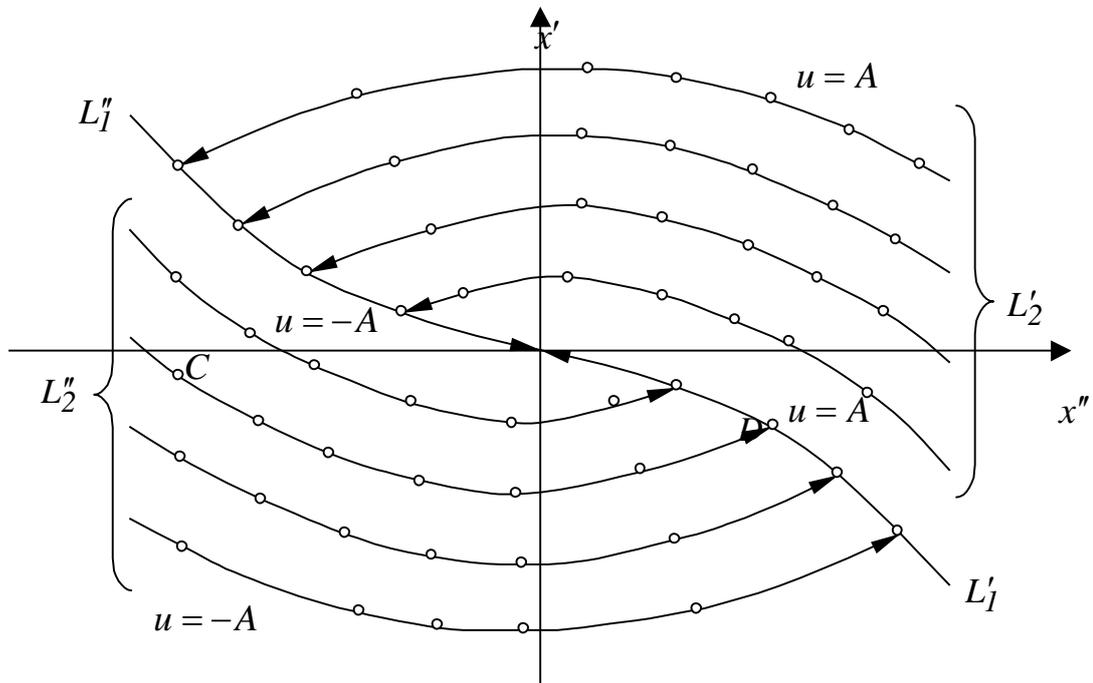


Рис. 4.

Полутраектории, входящие в совокупность L_2' , характеризуются управлением $u = A$ и примыкают к линии L_1' . Каждая из этих полутраекторий может быть рассчитана по уравнениям (12). Для этого в уравнениях (12) следует положить $u = A$, а начальные значения должны совпадать с координатами соответствующей точки линии L_1'' . Легко видеть,

что полутраектории, входящие в совокупность L'_2 , симметричны относительно начала координат полутраекториям, входящим в совокупность L''_2 .

На рис. 4 изображены проекции образующих поверхность переключения траекторий на плоскость $x=0$. Рис. 4 позволяет задать поверхность переключения. Для этого над каждой расчётной точкой необходимо записать соответствующее ей значение координаты x . Отметим, что с практической точки зрения результаты расчётов целесообразно оформлять в виде рис. 4.

Поверхность переключения часто задают в виде таблицы с двумя входами. Для получения такой таблицы необходимо на рис. 4 наложить координатную сетку и с помощью интерполяции определить значения координаты x в узлах этой сетки. В верхней строке таблицы записываются значения координаты d^2x/dt^2 , в левом столбце - значения координаты dx/dt , а на пересечении строки и столбца - соответствующее им значение координаты x .

Таблица.

x'' x	x''_1	x''_2	x''_3	⋮	x''_i	⋮	x''_s
x'							
x'_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	⋮	x_{1i}	⋮	x_{1s}
x'_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	⋮	x_{2i}	⋮	x_{2s}
x'_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	⋮	x_{3i}	⋮	x_{3s}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x'_j	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}	⋮	x_{ji}	⋮	x_{js}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x'_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	⋮	x_{mi}	⋮	x_{ms}

Положим, что $x = f(x', x'')$ - уравнение поверхности переключения. Нетрудно установить, что выше поверхности переключения $u = A$, а ниже поверхности переключения $u = -A$. Оптимальный закон управления, таким образом, можно записать в виде

$$u = A \operatorname{sign} [x - f(x', x'')].$$

На рис. 5 представлена структурная схема оптимальной по быстродействию системы управления.

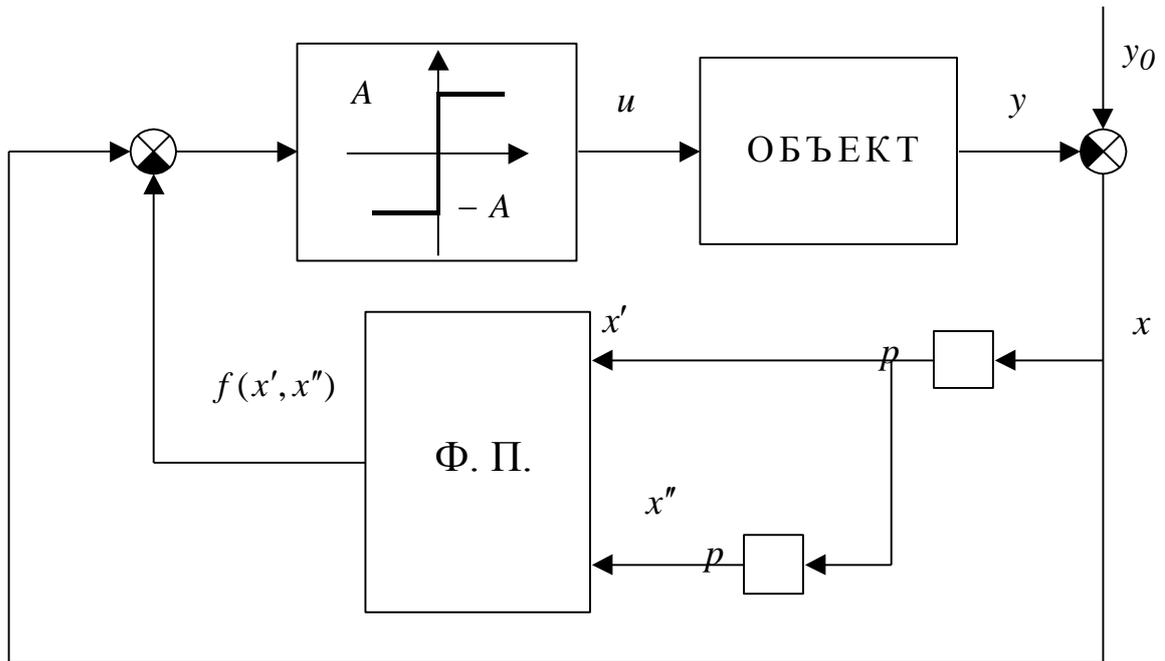


Рис. 5.

3. Синтез оптимального управления для простых модельных объектов при разнообразных критериях оптимизации

При определении с помощью принципа максимума оптимального управления целесообразно положить $\psi_0 = -1$. Далее, при нахождении оптимального управления, как правило, приходится использовать все условия принципа максимума. Иногда оптимальное управление находится непосредственно из условия $\mathcal{H}(\psi(t), \mathbf{x}(t), u_{opt}) = 0$.

В некоторых случаях для нахождения оптимального управления следует обращаться к принципу попятного движения Фельдбаума. При переходе от производных по прямому времени t к обратному τ справедливо равенство

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{dx}{dt}.$$

Пример решения задачи.

Для объекта $\dot{x} + ax = u$, $|u| \leq 1$, $a > 0$, $J = \int_0^T (k + |u|) dt$, $k > 0$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

Составим функцию Гамильтона

$$\mathcal{H} = -k - |u| + \psi \cdot (u - ax).$$

Оптимальное управление доставляет функции

$$\Delta \mathcal{H} = -|u| + \psi \cdot u = \begin{cases} (\psi - 1) \cdot u & \text{при } u \geq 0; \\ (\psi + 1) \cdot u & \text{при } u \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

максимум. Из условия максимума функции (1) находим

$$u = \begin{cases} 1 & \text{при } \psi > 1, \\ -1 & \text{при } \psi < -1, \\ 0 & \text{при } |\psi| < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Воспользуемся равенством

$$\mathcal{H}(\psi(T), x(T), u_{opt}(T)) = 0$$

или

$$-k - |u(T)| + \psi(T) \cdot u_{opt}(T) = 0. \quad (3)$$

Из (3) следует, что $u_{opt}(T) \neq 0$, т.е. $|\psi(T)| > 1$. При $u(T) = 1$

$$\psi(T) = k + 1, \quad (4)$$

а при $u(T) = -1$

$$\psi(T) = -k - 1. \quad (5)$$

Выпишем дифференциальное уравнение для ψ :

$$\frac{d\psi}{dt} = a\psi.$$

Перейдем к обратному времени τ :

$$\frac{d\psi}{d\tau} + a\psi = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет решение

$$\psi(\tau) = \psi(0) \cdot e^{-a\tau}.$$

Если в момент $t = T$ $u(T) = 1$, то, принимая во внимание (4), получим

$$\psi(\tau) = (k + 1) \cdot e^{-a\tau}. \quad (7)$$

На рисунке 1 представлен график функции $\psi(\tau)$.

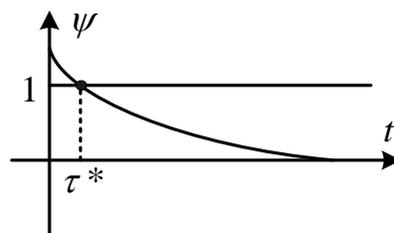


Рис. 1

В соответствии с равенством (2)

$$u(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau < \tau^*, \\ 0 & \text{при } \tau > \tau^*. \end{cases} \quad (8)$$

В обратном времени движение происходит из точки $x = 0$ и задается

уравнением

$$\frac{dx}{d\tau} = -u + ax.$$

Решив это уравнение при $u=1$ и $x(0)=0$ в интервале $0 \leq \tau \leq \tau^*$ найдем точку $x(\tau^*)$. Таким образом, при $x(\tau^*) \leq x < 0$ движение происходит с управлением $u=1$, а при $x < x(\tau^*)$ – с управлением $u=0$ (см. рис. 2).

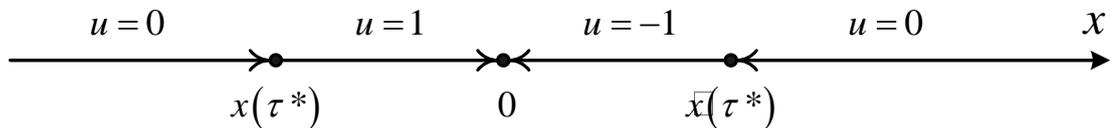


Рис. 2

Аналогичным образом находится точка $x(\tau^*) = -x(\tau^*)$, которая определяет переключение управления с $u=0$ на $u=-1$.

Окончательно получим

$$u_{opt} = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > x(\tau^*), \\ -\text{sign}(x) & \text{при } |x| < x(\tau^*). \end{cases}$$

Задания

1. Для объекта $\dot{x} = u$, $J = \int_0^T (k + u^2) dt$, $k > 0$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.
2. Для объекта $\dot{x} + ax = u$, $a > 0$, $J = \int_0^T (k + u^2) dt$, $k > 0$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.
3. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T x^2 dt$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.
4. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T (k + u) dt$, $k > 0$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.
5. Для объекта $\dot{x} = u$, $J = \int_0^T (k + u^2) dt$, $k > 0$ решить задачу об оптимальном

переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

6. Для объекта $\dot{x} + ax = u$, $|u| \leq 1$, $a > 0$, $J = \int_0^T (k + |u|) dt$, $k > 0$ решить задачу

об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

8. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T (k + |u|) dt$, $k > 0$ решить задачу об

оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

9. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T x^2 dt$ решить задачу об оптимальном

переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

10. Для объекта $\dot{x} = u$, $J = \int_0^T (k + u^2) dt$, $k > 0$ решить задачу об оптимальном

переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

11. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T (k + u) dt$, $k > 0$ решить задачу об

оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

12. Для объекта $\dot{x} = u - ax$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T (k + |u|) dt$, $a > 0$, $k > 0$ найти

оптимальное управление (в функции фазовой координаты), переводящее фазовую точку из любого начального положения в начало координат.

13. Для объекта $\dot{x} = u - ax$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T |u| dt$, $a > 0$ найти оптимальное

управление (в функции фазовой координаты), переводящее фазовую точку из любого начального положения в начало координат.

14. Для объекта $\dot{x} = u - ax$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T |u| dt$, $a > 0$ найти оптимальное

управление (в функции фазовой координаты), переводящее фазовую точку из любого начального положения в точку $x = 0$.

15. Для объекта $\dot{x} + ax = ku$, $|u| \leq A$, $k > 0$ осуществить синтез оптимального по быстродействию управления, полагая, что входной сигнал $y_0 = g_0$, где g_0 – произвольная константа.

16. Для объекта $\dot{x} = ku$, $|u| \leq A$, $k > 0$ осуществить синтез оптимального по быстродействию управления, полагая, что входной сигнал $y_0 = g_1 t + g_0$, где g_1 и g_0 – произвольные константы.

17. Для объекта

$$\dot{x} = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq 1$$

найти оптимальное по быстродействию управление, переводящее фазовую точку системы из произвольного начального состояния на прямую $x_2 = 0$.

18. Для объекта

$$\dot{x} = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq 1$$

найти оптимальное по быстродействию управление, переводящее фазовую точку системы из произвольного начального состояния на прямую $x_1 = x_2$.

19. Для объекта $\dot{x} = u - ax$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T |u| dt$, $a > 0$ найти оптимальное

управление (в функции фазовой координаты), переводящее фазовую точку из любого начального положения в точку $x = 0$.

20. Для объекта $\dot{x} + 3x = u$, $J = \int_0^T (k + u^2) dt$, $k > 0$ решить задачу об

оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

21. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 10$, $J = \int_0^T x^2 dt$ решить задачу об оптимальном

переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

22. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 5$, $J = \int_0^T (k + u) dt$, $k > 0$ решить задачу об

оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

23. Для объекта $\dot{x} = u$, $J = \int_0^T (k + u^2) dt$, $k > 0$ решить задачу об оптимальном

переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

24. Для объекта $\dot{x} + 7x = u$, $|u| \leq 2$, $J = \int_0^T (k + |u|) dt$, $k > 0$ решить задачу об

оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

25. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 10$, $J = \int_0^T x^2 dt$ решить задачу об оптимальном

переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

26. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 2$, $J = \int_0^T (k + |u|) dt$, $k > 0$ решить задачу об

оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

27. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 3$, $J = \int_0^T x^2 dt$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

28. Для объекта $\dot{x} = u$, $J = \int_0^T (k + u^2) dt$, $k > 0$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

29. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 5$, $J = \int_0^T (k + u) dt$, $k > 0$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

30. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T (k + u) dt$, $k > 0$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

31. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 3$, $J = \int_0^T (k + u) dt$, $k > 0$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

32. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 3$, $J = \int_0^T x^2 dt$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

33. Для объекта $\dot{x} = u - 3x$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T (k + |u|) dt$, $k > 0$ найти оптимальное управление (в функции фазовой координаты), переводящее фазовую точку из любого начального положения в начало координат.

34. Для объекта $\dot{x} = u - 6x$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T |u| dt$ найти оптимальное управление (в функции фазовой координаты), переводящее фазовую точку из любого начального положения в начало координат.

35. Для объекта $\dot{x} = u - 2x$, $|u| \leq 2$, $J = \int_0^T |u| dt$ найти оптимальное управление (в функции фазовой координаты), переводящее фазовую точку из любого начального положения в точку $x = 0$.

36. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 4$, $J = \int_0^T x^2 dt$ решить задачу об оптимальном переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

37. Для объекта $\dot{x} = u$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T (4 + |u|) dt$ решить задачу об оптимальном

переводе системы из произвольного начального состояния в точку $x = 0$.

38. Для объекта $\dot{x} + ax = 2u$, $|u| \leq 10$ осуществить синтез оптимального по быстродействию управления, полагая, что входной сигнал $y_0 = g_0$, где g_0 – произвольная константа.

39. Для объекта $\dot{x} = ku$, $|u| \leq A$, $k > 0$ осуществить синтез оптимального по быстродействию управления, полагая, что входной сигнал $y_0 = g_1 t + g_0$, где g_1 и g_0 – произвольные константы.

40. Для объекта

$$\dot{x}_1 = 2x_2,$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq 1$$

найти оптимальное по быстродействию управление, переводящее фазовую точку системы из произвольного начального состояния на прямую $x_2 = 0$.

41. Для объекта

$$\dot{x}_1 = 2x_2,$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq 1$$

найти оптимальное по быстродействию управление, переводящее фазовую точку системы из произвольного начального состояния на прямую $x_1 = x_2$.

42. Для объекта $\dot{x} = u - 6x$, $|u| \leq 1$, $J = \int_0^T |u| dt$ найти оптимальное управление

(в функции фазовой координаты), переводящее фазовую точку из любого начального положения в точку $x = 0$.

43. Для многошагового процесса $p, p^1, p^2, \dots, p^N, u^0, u^1, u^2, \dots, u^N$;

$$p^{k+1} = p^k + u^k, \quad |u^k| \leq 1, \quad J = \sum_{k=0}^N (p^k + u^k)$$

Записать основное функциональное уравнение Беллмана.

4. Применение динамического программирования для определения оптимального управления

Пример 1. Рассмотрим объект, движение которого задается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u.$$

В качестве конечной точки x^* выберем начало координат, т.е. положим $x^* = 0$.

Качество процесса управления будем оценивать функционалом

$$J = \int_0^T (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt. \quad (1)$$

Таким образом, речь идет об определении оптимальной стратегии $u = \mathcal{A}(x_1, x_2)$, которая обеспечивает перевод фазовой точки из произвольного начального состояния в начало координат и при том так, чтобы на траекториях движения функционал (1) принимал наименьшее значение.

Выпишем функциональное уравнение Беллмана

$$0 = \min_u \left[x_1^2 + x_2^2 + u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u \right]. \quad (2)$$

Так как на управляющий параметр u не наложено никаких ограничений, то для определения минимума необходимо продифференцировать правую часть уравнения (2) по u :

$$2u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0. \quad (3)$$

Из (3) находим

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2}, \quad (4)$$

и уравнение Беллмана принимает вид

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 = 0. \quad (5)$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде квадратичной формы

$$S(x) = C_1 x_1^2 + C_2 x_1 x_2 + C_3 x_2^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 2C_1x_1 + C_2x_2, \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = C_2x_1 + 2C_3x_2.$$

Уравнение (5) принимает вид

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{4}(4C_3^2x_2^2 + 4C_2C_3x_1x_2 + C_2^2x_1^2) + 2C_1x_1x_2 + C_2x_2^2 = 0.$$

Коэффициенты C_1, C_2, C_3 определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4}C_2^2 &= 0, \\ 1 - C_3^2 + C_2 &= 0, \\ 2C_1 - C_2C_3 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Система нелинейных алгебраических уравнений (6) имеет два вещественных решения

$$\begin{aligned} C_2 = 2, \quad C_3 = \sqrt{3}, \quad C_1 = \sqrt{3}; \\ C_2 = 2, \quad C_3 = -\sqrt{3}, \quad C_1 = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Эти решения в соответствии с (4) приводят к двум синтезирующим функциям

$$u = -x_1 - \sqrt{3}x_2, \tag{7}$$

$$u = -x_1 + \sqrt{3}x_2. \tag{8}$$

В результате получаем две линейные системы, причем линейная система, порождаемая функцией (8), оказывается неустойчивой и, следовательно, не может обеспечить перевод фазовой точки в начало координат.

Таким образом, оптимальная синтезирующая функция (оптимальная стратегия) задается равенством (7). На рис. 1 изображена структурная схема оптимальной системы.

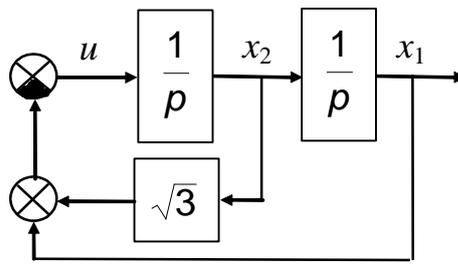


Рис. 1.

Пример 2. Рассмотрим простейшее уравнение

$$\dot{x} = u - x, \quad (9)$$

полагая, что на управляющий параметр u наложено ограничение

$$|u| \leq 1.$$

Будем решать задачу перевода переменной x из произвольного начального значения в нуль.

Уравнение Беллмана (см. (4.26) лекций) имеет вид

$$-1 = \min_{|u| \leq 1} \frac{dS}{dx} (u - x). \quad (10)$$

Оптимальное по быстродействию управление

$$u = -\text{sign} \frac{dS}{dx}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получим уравнение

$$-1 = -\frac{dS}{dx} x - \frac{dS}{dx} \cdot \text{sign} \frac{dS}{dx}. \quad (12)$$

Найдем решение уравнения (12), полагая $\frac{dS}{dx} > 0$. Из соотношения

$$\frac{dS}{dx} (1 + x) = 1$$

следует, что

$$S(x) = \ln(x + 1) + C^*, \quad (13)$$

здесь C^* - произвольная константа. При $\frac{dS}{dx} < 0$ аналогичным образом

найдем

$$S(x) = \ln(1 - x) + C^{**}. \quad (14)$$

Полагая, что равенства (12) и (13) справедливы при $x=0$, то в соответствии с граничным условием (см. (4.25) лекций) $C^* = C^{**} = 0$.

Функция $S(x)$ задает минимальное время движения и может быть только положительной величиной. Из (13) и (14) следует тогда, что

$$S(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{при } x \geq 0, \\ \ln(1-x) & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

Оптимальное по быстродействию управление, таким образом, определяется равенством

$$u = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Как следует из (15), производная $\frac{dS(x)}{dx}$ имеет разрыв в точке $x=0$. Это ставит под сомнение справедливость функционального уравнения Беллмана (12). Однако, поскольку в оптимальном движении переменная $x(t)$ не изменяет знак, функцию $S(x)$ можно отдельно рассматривать при $x > 0$ и при $x < 0$, а в каждой из этих областей функция $S(x)$ является непрерывно дифференцируемой. Это позволяет заключить о справедливости равенства (15).

Во избежании недоразумений отметим, что целью настоящего примера является не демонстрация того, как с помощью динамического программирования можно осуществлять синтез оптимального по быстродействию управления, а желание показать, что предположение о непрерывной дифференцируемости функции $S(x)$ является весьма существенным ограничением метода динамического программирования, когда он применяется для непрерывных процессов. Этот пример также показывает, что для синтеза оптимального по быстродействию управления целесообразно использовать принцип максимума Понтрягина.

5. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов (АКОР)

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

полагая, что матрицы A , B и вектор x имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

u - скалярное управление. Требуется найти управление, минимизирующее функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + r u^2) dt,$$

где матрица

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix},$$

r , q_1 , q_2 - положительные числа.

Матрицу K , с помощью которой задается функция $S(x)$, представим в виде:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (см. (4.62) лекция) запишем уравнение Риккати:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{r} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Из (1) следует система уравнений

$$\begin{aligned} q_1 - \frac{1}{r} k_{12}^2 &= 0, \\ k_{11} - \frac{1}{r} k_{12} k_{22} &= 0, \\ q_2 - \frac{1}{r} k_{22}^2 + 2k_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Система уравнений (4.68) имеет следующие решения:

$$\begin{aligned} k_{12} &= \pm\sqrt{rq_1}, & k_{22} &= \pm\sqrt{r(q_2 \pm 2\sqrt{rq_1})}, \\ k_{11} &= \pm\sqrt{q_1(q_2 \pm 2\sqrt{rq_1})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Выделим из (3) решение, соответствующее определенно положительной матрице K . Применяя *критерий Сильвестра*, найдем, что таким решением являются

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sqrt{q_1(q_2 + 2\sqrt{rq_1})}, & k_{12} &= \sqrt{rq_1}, \\ k_{22} &= \sqrt{r(q_2 + 2\sqrt{rq_1})}. \end{aligned}$$

В соответствии с (4.63) оптимальное управление

$$u = -\frac{1}{r}(k_{12}x_1 - k_{22}x_2).$$

6. Оптимизация в конечномерном пространстве (Метод множителей Лагранжа. Теорема Куна-Таккера. Градиентный поиск с постоянным шагом. Метод наискорейшего спуска. Метод Ньютона. Метод проекции градиента. Проекция градиента на одно ограничение, на несколько ограничений)

1. Найти минимум функции:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 6x_2^2$$

при ограничении

$$2x_1 + 4x_2 - 18 = 0.$$

2. Найти минимум функции:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 9x_2^2$$

при ограничении

$$2x_1 + 4x_2 - 20 = 0.$$

2. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = x_1 - x_2^2 + 4 \geq 0.$$

2. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2^2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

5. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2^2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 16 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

6. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 + 4x_2^2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \geq 0.$$

7. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4$$

при ограничении

$$g(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_2 = 0.$$

9. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 16$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2^2 + 4 \geq 0.$$

10. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2 + 3$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 18 - x_2 - 4x_1 \geq 0.$$

11. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 - 4x_2^2 - 16$$

при ограничении

$$g(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 12 = 0.$$

12. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2 + 3$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 18 - x_2 - 4x_1 \geq 0.$$

13. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_2^2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 16 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

14. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_2^2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 16 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

15. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = x_1 - x_2^2 + 6 \geq 0.$$

16. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 + 4x_2^2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 8 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

17. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 + 4x_2^2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 24 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

18. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 - 4x_2^2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 \geq 0.$$

19. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4$$

при ограничении

$$g(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 = 0.$$

20. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 8$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2^2 + 4 \geq 0.$$

21. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2 - 3$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 15 - x_2 - 4x_1 \geq 0.$$

22. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 + 4x_2^2 + 16$$

при ограничении

$$g(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 + 12 = 0.$$

23. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 - x_2^2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 9 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

24. С помощью теоремы Куна – Таккера найти минимум функции

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_2 + 2$$

при ограничении

$$h(\mathbf{x}) = 16 - x_2 - 2x_1 \geq 0.$$

25. Сделать один шаг по методу градиента с постоянным шагом $\lambda=1$:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

26. Сделать один шаг по методу градиента:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 - 8x_2^2, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda=1.$$

27. Сделать один шаг по методу градиента с постоянным шагом $\lambda=1$:

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1 + 8x_2, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

28. Сделать один шаг по методу градиента с постоянным шагом $\lambda=1$:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

29. Сделать один шаг по методу градиента:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 - 4x_2^2, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda=1.$$

30. Сделать один шаг по методу градиента с постоянным шагом $\lambda=1$:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 + 4x_2, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

31. Сделать один шаг по методу наискорейшего спуска:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

32. Сделать один шаг по методу наискорейшего спуска:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 17, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

33. Сделать один шаг по методу наискорейшего спуска:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 8x_2 + 20, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

34. Сделать один шаг по методу наискорейшего спуска:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

35. Сделать один шаг по методу наискорейшего спуска:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 5x_2^2, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

36. Сделать один шаг по методу наискорейшего спуска:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 15, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

37. Сделать один шаг по методу наискорейшего спуска:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 10, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

38. Сделать один шаг по методу наискорейшего спуска:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

39. Используя метод Ньютона, найти минимум функции:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 14, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

40. Используя метод Ньютона, найти минимум функции:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 8x_1 + 12x_2 + 52, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

41. Используя метод Ньютона, найти минимум функции:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1 + 4x_2 + 20x_3 + 120, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

42. Используя метод Ньютона, найти минимум функции:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 14, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

43. Используя метод Ньютона, найти минимум функции:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 12, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

44. Используя метод Ньютона, найти минимум функции:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 + 52, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

45. Используя метод Ньютона, найти минимум функции:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 100, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

46. Используя метод Ньютона, найти минимум функции:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 14, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

47. Используя метод Ньютона, найти минимум функции:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 120, \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

48. Сделать один шаг по методу проекции градиента:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + 10, \quad g(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 4 = 0,$$

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0, 1.$$

49. Сделать один шаг по методу проекции градиента:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 5, \quad g(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 3 = 0,$$

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0, 1.$$

50. Найти проекцию вектора $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ на два ограничения:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

51. Найти проекцию вектора $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ на два ограничения:

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0.$$

Библиографический список

Основная литература

1. [Мирошник И.В.](#) Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы : учебное пособие для вузов / И.В. Мирошник .— М.и др. : Питер, 2006 .— 272с. (23 экз.)
2. [Пупков К.А.](#) Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник для вузов: в 5 т. Т.4. Теория оптимизации систем автоматического управления / К.А. Пупков [и др.]; под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : МГТУ им. Баумана, 2004 .— 744с. (12 экз.)
3. [Пупков К.А.](#) Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник для вузов: в 5 т. Т.3. Синтез регуляторов систем автоматического управления / К.А. Пупков [и др.]; под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : МГТУ им. Баумана, 2004 .— 616с. (12 экз.)

Дополнительная литература

1. Горячев О.В. Основы теории компьютерного управления : учеб. пособие / О.В. Горячев, С. А. Руднев ; ТулГУ .— Тула : Изд-во ТулГУ, 2008 .— 220 с. (11 экз.)
2. Макаров Н.Н., Феофилов С.В. Анализ и синтез систем автоматического управления с использованием системы MATLAB: учеб. пособие / Н. Н. Макаров, С. В. Феофилов; ТулГУ .— Тула: Изд-во ТулГУ, 2010 .— 68 с. (10 экз.)
3. Макаров Н.Н. Математический пакет MATHCAD и его применение в задачах анализа и синтеза систем автоматического управления: учеб. пособие / Н.Н. Макаров. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2020. –189 с. (10 экз.)
4. Фалдин Н.В., Морозова Е.В. Специальные разделы математики (для специалистов по автоматическому управлению) : учебное пособие / Н.В. Фалдин, Е.В. Морозова; ТулГУ . — 2-е изд., перераб. и доп. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2018 .— 174 с. : ил. — Библиогр.: 173 с. — ISBN 978-5-7679-4175-9 .— <URL:<https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2018092709244937540700003076>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. <http://www.exponenta.ru> - Образовательный математический сайт
2. <http://www.elibrary.ru> - Научная электронная библиотека в области науки, технологии
3. <https://tsutula.bibliotech.ru/> - Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.
4. <http://www.iprbookshop.ru/> - ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.
5. <http://cyberleninka.ru/> - НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа

6. <http://window.edu.ru> - Единое окно доступа к образовательным ресурсам:
портал [Электронный ресурс]