

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
"Тульский государственный университет"

Институт Естественных наук  
Кафедра "Физика"

Утверждено на заседании кафедры  
"Физика"  
« 27 » января 2021 г., протокол № 6  
Заведующий кафедрой

 Р.Н. Ростовцев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
по выполнению лабораторных работ  
по дисциплине (модулю)  
"Физика"**

**основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки (специальности)  
**08.03.01 Строительство**

с направленностью (профилем)  
**Городское строительство и хозяйство**


Форма обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-03-21

Тула 2021 год

## **Разработчик(и) методических указаний**

Ростовцев Р.Н., зав. кафедрой, д.т.н., доц.  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

  
(подпись)

## Оглавление

### Часть 1

Лаб.1. Исследование косого удара о наклонную плоскость	5
Лаб.2. Упругий удар шаров	9
Лаб.3. Измерение скорости пули с помощью баллистического маятника	12
Лаб.4. Измерение скорости пули с помощью физического маятника	15
Лаб.5. Изучение скорости пули с помощью вращающейся платформы	19
Лаб.6. Изучение вращательного движения	22
Лаб.7. Определение моментов инерции методом колебаний	25
Лаб.8. Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности методом катающегося шарика	29
Лаб.9. Определение момента инерции тел методом крутильных колебаний	33
Лаб.10. Определение коэффициента трения качения	38
Лаб.11. Определение силы трения скольжения	42
Лаб.12. Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника	45
Лаб.13. Изучение колебаний пружинного маятника	48
Лаб.14. Определение показателя адиабаты методом Клемана и Дезорма	52
Лаб.15. Определение коэффициента поверхностного натяжения воды методом отрыва кольца	58
Лаб.16. Определение коэффициента вязкости жидкости по методу Стокса	61
Лаб.17. Определение длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха	65

### Часть 2

Лаб. 18. Исследование электрического поля проводника с током	68
Лаб. 19. Измерение сопротивлений проводников мостовыми схемами	71
Лаб. 20. Релаксационные колебания	78
Лаб. 21. Термоэлектрические явления	81
Лаб. 22. Определение удельного заряда электрона	86
Лаб. 23. Магнитное поле Земли	90
Лаб. 24. Исследование магнитного поля соленоида	94

Лаб. 25. Исследование электрических затухающих колебаний	98
Лаб. 26. Определение основных характеристик электрического колебательного контура методом резонанса	102
Лаб. 27. Определение ширины запрещённой зоны полупроводника и температурного коэффициента сопротивления металла	106
Лаб. 28. Исследование явления гистерезиса с помощью осциллографа	110
Лаб. 29. Определение точки Кюри	114
Лаб. 30. Исследование электрических характеристик полупроводника с помощью эффекта Холла	118

# Часть 1

## Лабораторная работа № 1

### Исследование косого удара о наклонную плоскость

**Цель работы:** рассмотреть кинематику движения шара после удара о плоскость; определить коэффициент восстановления скорости шара.

#### Теоретические сведения

В данной работе рассматривается кинематика движения тела под углом к горизонту в результате соударения с наклонной плоскостью.

Стальной шарик, падая с некоторой высоты, перед ударом о наклонную плоскость имеет скорость  $\vec{V}_0$ , а отскочив от нее,  $-\vec{U}_0$  (см. рис.1). Выберем систему координат, как показано на рис.1, поместив начало координат  $O$  в точку первого соударения шарика с наклонной плоскостью. Проекции скоростей  $\vec{V}_0$  и  $\vec{U}_0$  на ось  $X$  равны, то есть  $V_{0x} = U_{0x}$ , так как удар можно считать мгновенным, и

действие силы тяжести и силы трения за короткое время не окажет существенного влияния на импульс шарика вдоль оси  $X$  (**закон сохранения проекции импульса**). Р Рис. 1 механической энергии при ударе характеризуется коэффициентом восстановления скорости  $k_c$ .

**Коэффициентом восстановления скорости** тела при ударе о массивную неподвижную поверхность называется отношение  $k_c = |U_n/V_n|$ , где  $V_n$  и  $U_n$  – проекции скоростей тела соответственно до и после удара на нормаль к поверхности.

Для данной работы согласно рис.1

$$k_c = \frac{U_{0y}}{V_{0y}} \quad (1)$$

где  $V_{0y}$  и  $U_{0y}$  - проекции на ось  $y$  скоростей шарика соответственно до и после первого удара о наклонную плоскость.

Отскочив от наклонной плоскости в точке  $O$  со скоростью  $\vec{U}_0$ , шарик будет двигаться в воздухе с постоянным ускорением  $\vec{a} = \vec{g}$  (сопротивлением воздуха пренебрегаем) и второй раз ударится о наклонную плоскость. Положение шарика при втором соударении относительно точки  $O$  определим из закона движения в проекции на ось  $x$

$$x = x_0 + U_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

При выбранном начале координат и положительном направлении  $x$ , как показано на рис.1,  $x_0 = 0$ ,  $U_{0x} = V_{0x} = V_0 \sin \alpha$ ,  $a_x = g \sin \alpha$ , поэтому расстояние  $x$  между первым и вторым соударением

$$x = V_0 \sin \alpha \cdot t + \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2} \quad (2)$$

Время  $t$  между двумя соударениями найдем из закона движения в проекции на ось  $y$

$$y = y_0 + U_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

Здесь  $y = 0$ ,  $y_0 = 0$ , с учетом (1)  $U_{0y} = k_c |V_{0y}| = k_c V_0 \cos \alpha$ ,  $a_y = -g \cos \alpha$ . Поэтому

$$0 = 0 + k_c V_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2}$$

откуда 
$$t = \frac{2k_c V_0}{g} \quad (3)$$

$V_0$  определим из закона сохранения полной механической энергии (потерями на сопротивление воздуха пренебрегаем)

$$mgh = \frac{mV_0^2}{2} \quad (4)$$

где  $mgh$  – потенциальная энергия шарика в точке  $A$ , из которой он начинает падать без начальной скорости (в точке  $O$  потенциальную энергию шарика принимаем равной нулю);  $\frac{mV_0^2}{2}$  – кинетическая энергия шарика в точке  $O$  перед ударом о наклонную плоскость.

Из равенства (4) имеем

$$V_0 = \sqrt{2gh} \quad (5)$$

Подставив (3) и (5) в (2), найдем

$$x = 4k_c h \sin \alpha + 4k_c^2 h \sin \alpha$$

Отсюда  $k_c^2 + k_c - \frac{x}{4h \sin \alpha} = 0$ . Решив это квадратное уравнение, получим

$$k_c = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{x}{h \sin \alpha}} - 1 \right) \quad (6)$$

В реальных случаях  $0 < k_c < 1$ .

### Закон сохранения полной механической энергии

**Полная механическая энергия консервативной системы, находящейся в стационарном потенциальном поле, постоянна:**

$$K + U_{соб} + U_{внеш} = const$$

где  $U_{соб}$  – собственная потенциальная энергия системы – это энергия взаимодействия друг с другом всех частиц системы. Она зависит от взаимного расположения частиц системы;  $U_{внеш}$  – внешняя потенциальная энергия системы – это сумма потенциальных энергий всех ее частиц, находящихся во внешнем стационарном потенциальном поле;  $K$  – кинетическая энергия системы – это сумма кинетических энергий составляющих ее частиц.

Если работа сил стационарного поля над частицей не зависит от пути, пройденного частицей, а зависит только от начального и конечного положения частицы, то такие силы называются **консервативными**, а поле **потенциальным**.

### Неупругое соударение тел

Абсолютно упругим называется такое соударение тел, при котором их суммарная полная механическая энергия не меняется.

На практике абсолютно упругого соударения не встречается. За счет работы внутренних диссипативных сил часть полной механической энергии соударяющихся тел превращается в тепловую (внутреннюю) энергию. Полная механическая энергия системы убывает, а соударяющиеся тела деформируются (изменяют свою форму). Такой удар называется **неупругим**.

Если после соударения тела движутся с одной скоростью вместе, то удар называется абсолютно неупругим. Таким образом, при неупругом соударении полная механическая энергия не сохраняется.

### Объекты исследования, оборудование

Металлическая пластина, образующая наклонную плоскость. Металлические шарики, линейка.

### Рабочее задание

Измерить характеристики отскока шарика после упругого удара о наклонную плоскость. Определить коэффициент восстановления скорости шара.

### Порядок выполнения работы

1. Перемещением муфты А (рис.2) установить произвольный наклон плоскости (примерно 10-15°). Измерить высоты  $H_1$  и  $H_2$ , длину наклонной плоскости  $l$  между линиями  $L_1$  и  $L_2$  (см.рис. 2) и определить  $\sin \alpha : \sin \alpha = \frac{H_1 - H_2}{l}$ .

Примечание. Можно произвольно изменять длину наклонной плоскости  $l$ , изменяя при этом другие высоты  $H_1$  и  $H_2$ .

2. Перемещением муфты В установить произвольную высоту  $h$  (17 – 20 см) бункера С над наклонной плоскостью. Отцентрировать установку бункера так, чтобы шарик после отскока ударился еще один раз о наклонную плоскость в направлении ее продольной оси.

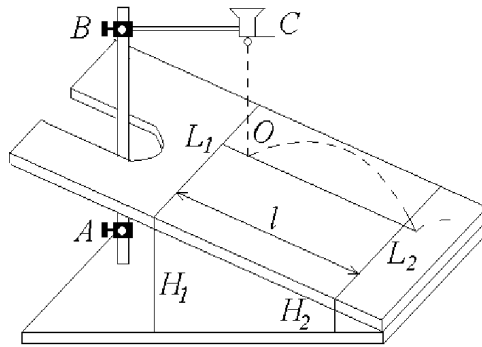


Рис.2

3. Положить на наклонную плоскость узкую полоску бумаги краем вдоль черты  $L_1$ , накрыть сверху копировальной бумагой и закрепить оба листа скобой. При проведении эксперимента скобу не трогать.

4. Поместить шарик в бункер С в слегка открытое отверстие (это позволит более точно фиксировать начальное положение шарика). Затем медленно открыть заслонку, дав шарiku провалиться. Ударившись о плоскость, шарик отскочит и оставит след на бумаге.

5. Обозначить точку удара на бумаге точкой 1. Отогнуть от линии  $L_1$  и полоску бумаги и копировальную бумагу таким образом, чтобы повторное падение шарика из бункера пришлось на металлическую поверхность; отскочив от нее, шарик второй раз ударится о поверхность и оставит след на бумаге. Эту точку обозначить цифрой 1'.

6. Повторить опыт при отогнутой бумаге 9 раз, обозначая следы от повторных ударов соответственно 1', 2', ..., 3'.

7. Снять листы с плоскости, определить расстояние  $x_i$  между точками 1-1', 1-2', 1-3', ..., 1-9' и занести в табл.1.

8. Вычислить среднее значение  $\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9}{9}$ .

9. Определить случайные отклонения  $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$  каждого измерения расстояния, среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta x_i)^2}$ . Вычислить погрешность  $\Delta x$  результата измерений:

$$\Delta x = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (n\text{-количество точек}).$$

10. Вычислить  $\langle k \rangle$  по формуле (6), подставляя  $x = \langle x \rangle$ . Принимаем радиус шарика  $r \ll h$ .

11. Вычислить абсолютную  $\Delta k_c$  и относительную  $E$  погрешности:  $\Delta k_c = \frac{\Delta x}{4(2k_c + 1)h \sin \alpha}$ ;

$$E = \frac{\Delta k_c}{k_c} 100\%.$$

### Содержание отчета

Результаты измерений и расчетов записать в табл.1 и 2.

Таблица 1

$x_i$ , мм	$\Delta x_i$ , мм	$(\Delta x_i)^2$ , мм <sup>2</sup>

Таблица 2

$l$ , мм	$h$ , мм	$H_1$ ,мм	$H_2$ ,мм	$\sin\alpha$	$S$ , мм	$\Delta x$ ,мм	$< k_c$ $>$	$\Delta k_c$	$E$ , %

Записать результат в виде:  $k_c = < k_c > \pm \Delta k_c$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое коэффициент восстановления скорости, какова методика его определения в данной работе?
2. Записать закон движения шарика между первым и вторым соударениями с наклонной плоскостью координатным способом. Как определить расстояние  $x$  и время  $t$  между этими соударениями?
3. Сформулировать закон сохранения полной механической энергии. Как он применяется в данной работе?

### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с. - гл. III, §19, 24, 25, 27



## Лабораторная работа № 2

### Упругий удар шаров

**Цель работы:** ознакомиться с явлением удара на примере соударения шаров, рассчитать коэффициент восстановления энергии, проверить закон сохранения импульса.

#### Теоретические сведения

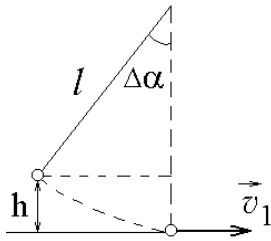


Рис.1

Отклоним шарик А с массой  $m_1$  на угол  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_0$  показания по шкале измерения. При этом шарик поднимется на высоту  $h$  (см. рис.1). Как видно из рисунка высоту подъема можно выразить через длину подвеса и угол отклонения  $\Delta\alpha$ :

$$h = l(1 - \cos \Delta\alpha) = l \cdot 2 \sin^2 \left( \frac{\Delta\alpha}{2} \right) \quad (1)$$

После освобождения шарика без начальной скорости он будет ускоряться и в нижней точке своей траектории приобретет горизонтальную скорость

$\vec{v}_1$ , которую можно найти из закона сохранения энергии:  $m_1 gh = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ , откуда следует

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl \cdot 2 \sin^2 \left( \frac{\Delta\alpha}{2} \right)} = 2 \sin \left( \frac{\Delta\alpha}{2} \right) \sqrt{gl} \quad (2)$$

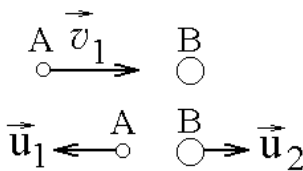


Рис.2

В нижней точке своей траектории шарик А сталкивается с шариком В, и после очень короткого удара они разлетаются в противоположные стороны с горизонтальными скоростями  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  (см. рис.2). Так как во время удара силы натяжения нитей и силы тяжести, действующие на шарики, направлены по вертикали, то должен выполняться закон сохранения горизонтальной проекции импульса системы:

$$m_1 v_1 = -m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (3)$$

В большинстве случаев реальные удары тел не являются упругими из-за возникновения диссипативных сил внутри этих тел (внутреннее трение), поэтому кинетическая энергия системы в целом при ударе уменьшается. Коэффициентом восстановления кинетической энергии называется величина, равная:

$$K_3 = \frac{\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}}{\frac{m_1 v_1^2}{2}} = \frac{m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} \quad (4)$$

Коэффициент восстановления энергии всегда меньше единицы:  $K_3 < 1$ . Равенство единице означает полное сохранение энергии, что может быть только в идеальном случае отсутствия диссипативных сил в системе.

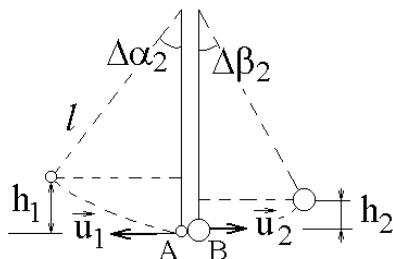


Рис.3

После столкновения (см. рис.3) действие диссипативных сил внутреннего трения прекращается, и, если пренебречь потерей энергии во время движения из-за сопротивления воздуха, можно воспользоваться законом сохранения энергии для каждого шара в отдельности. Шар А отклонится на угол  $\Delta\alpha_2$  и поднимется на высоту  $h_1$ , а шар В отклонится на угол  $\Delta\beta_2$  и поднимется на высоту  $h_2$

$$\text{Используя уравнения } m_1 gh_1 = \frac{m_1 u_1^2}{2} \text{ и } m_1 gh_2 = \frac{m_2 u_2^2}{2} \text{ анало-}$$

гичные уравнениям (1) и (2), выразим скорости шаров после удара:

$$u_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl \cdot 2 \sin^2 \left( \frac{\Delta\alpha_2}{2} \right)} = 2 \sin \left( \frac{\Delta\alpha_2}{2} \right) \sqrt{gl} \quad (5)$$

$$u_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2gl \cdot 2 \sin^2 \left( \frac{\Delta\beta_2}{2} \right)} = 2 \sin \left( \frac{\Delta\beta_2}{2} \right) \sqrt{gl}$$

Подставляя (2) и (5) в (4), получим выражение для расчета коэффициента восстановления энергии:

$$K_s = \frac{m_1 \cdot 4 \sin^2 (\Delta\alpha_2/2) \cdot gl + m_2 \cdot 4 \sin^2 (\Delta\beta_2/2) \cdot gl}{m_1 \cdot 4 \sin^2 (\Delta\alpha/2) \cdot gl} =$$

$$= \frac{m_1 \sin^2 (\Delta\alpha_2/2) + m_2 \sin^2 (\Delta\beta_2/2)}{m_1 \sin^2 (\Delta\alpha/2)} \quad (6)$$

Подставляя (2) и (5) в (3), получим закон сохранения импульса в виде:

$$m_1 \sin \left( \frac{\Delta\alpha}{2} \right) = -m_1 \sin \left( \frac{\Delta\alpha_2}{2} \right) + m_2 \sin \left( \frac{\Delta\beta_2}{2} \right) \quad (7)$$

### Объекты исследований. Оборудование

Стойка, к которой бифилярно подвешены массивные металлические шары. Шкала для измерения угла отклонения шаров.

### Рабочее задание

Измерить углы отклонения шаров после упругого соударения. Рассчитать коэффициент восстановления энергии, проверить закон сохранения импульса.

### Порядок выполнения работы

1. Записать начальные положения  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ , соответствующие точкам пересечения нитей бифилярных подвесов с линией деления шкалы, когда шары неподвижны. Здесь и в дальнейшем обозначение " $\alpha$ " относится к шару А с меньшей массой  $m_1$ , а " $\beta$ " – к шару В с меньшей массой  $m_2$ .

2. Отклонить шар А на угол  $\alpha_1$  от  $10^\circ$  до  $15^\circ$  и отпустить без начальной скорости. Произвести отсчет первого отброса обоих шаров  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  (так как сразу практически невозможно взять два отсчета, то поступают так: сначала берут отсчет для одного шара, затем производят повторный удар из того же положения шара А и берут отсчет для второго шара). Удар из данного положения производят не менее 10 раз, чтобы для каждого шара получить не менее пяти значений отбросов нитей после удара ( $\alpha_2$  и  $\beta_2$ ). Найти среднее  $\langle \alpha_2 \rangle$  и  $\langle \beta_2 \rangle$ .

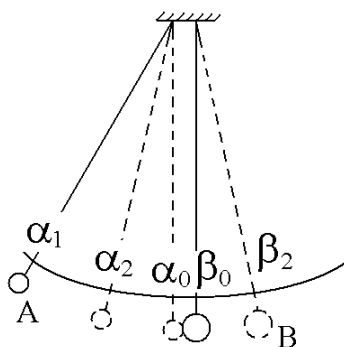
3. Опыт проделать для двух других значений  $\alpha_1$ . (от  $20^\circ$  до  $25^\circ$ , от  $30^\circ$  до  $35^\circ$ ). Заполнить таблицу 1.

4. Проверить закон сохранения импульса (7). Для этого рассчитать скорости  $v_1$ ,  $u_1$  и  $u_2$  по формулам (2) и (5), учитывая, что  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ ,  $\Delta\alpha_2 = \langle \alpha_2 \rangle - \alpha_0$ ,  $\Delta\beta_2 = \langle \beta_2 \rangle - \beta_0$ . Рассчитать левую часть уравнения (7)

$$\xi_1 = m_1 \sin (\Delta\alpha/2)$$

и правую часть уравнения (7)

$$\xi_2 = -m_1 \sin (\Delta\alpha_2/2) + m_2 \sin (\Delta\beta_2/2)$$



и занести в таблицу 2. Рассчитать, на сколько процентов отличаются левая и правая часть уравнения (7) по формуле:  $\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1} \cdot 100\%$

5. Вычислить коэффициент восстановления энергии по формуле (6).

### Содержание отчета

Результаты измерений и расчетов записать в табл.1 и 2.

Таблица 1.

$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$					$\langle \alpha_2 \rangle, ^\circ$	$\beta_2, ^\circ$					$\langle \beta_2 \rangle, ^\circ$

$\alpha_0, ^\circ = \dots$        $\beta_0, ^\circ = \dots$

Таблица 2.

$\Delta\alpha_1, ^\circ$	$\Delta\alpha_2, ^\circ$	$\Delta\beta_2, ^\circ$	$\xi_1$	$\xi_2$	$K_3$

Рассчитать, на сколько процентов отличаются левая и правая часть уравнения (7) по формуле:  $\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1} \cdot 100\%$ .

### Контрольные вопросы

1. Будет ли система шаров замкнутой?
2. Сформулировать закон сохранения импульса системы.
3. Сохраняется ли импульс системы шаров после удара? Почему?
4. Вид удара в данной работе. Проанализируйте полученный коэффициент восстановления энергии.
5. Когда полная механическая энергия системы сохраняется? Равны ли кинетические энергии системы шаров до и после удара?
6. Может ли в некоторой системе не сохраняться механическая энергия и оставаться постоянным момент импульса?
7. Получить расчетные формулы скоростей шаров после удара.

### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с.- гл. II, §23, с.75-77, гл. III, §27-30, с.89-106.

Лабораторная работа № 3  
Изучение скорости пули с помощью  
баллистического маятника

**Цель работы:** Использование на практике законов сохранения импульса и механической энергии для измерения скорости пули.

**Теоретические сведения**

Скорость поступательного движения пули определяем с помощью баллистического маятника. Он представляет собой открытый с одного конца пустотелый массивный цилиндр, подвешенный на двойном бифилярном подвесе. Внутренняя часть цилиндра заполнена пластилином, чтобы соударение летящего тела (пули), скорость которого нужно измерить, с баллистическим маятником носило неупругий характер. После неупругого соударения тела движутся как единое целое с общей скоростью.

Пуля массой  $m_1$ , движущаяся в горизонтальном направлении со скоростью  $\vec{V}$  влетает в цилиндр баллистического маятника и застревает в нем. После соударения цилиндр маятника массой  $m_2$  совместно с застрявшей в нем пулей приобретает некоторую скорость  $\vec{U}_2$ . На основании закона сохранения импульса можем записать в векторном виде

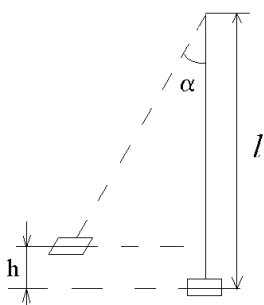
$$m_1 \vec{V} = (m_1 + m_2) \vec{U}$$

и в проекции на ось, совпадающую с направлением движения пули и маятника с пулей,

$$m_1 V = (m_1 + m_2) U \quad (1)$$

Непосредственно после удара система "маятник-застрявшая пуля" обладает кинетической энергией  $\frac{(m_1 + m_2) U^2}{2}$ , которая по мере отклонения маятника от вертикального положения превращается в потенциальную энергию  $(m_1 + m_2) gh$ . Если пренебречь потерями энергии на трение, то на основании закона сохранения механической энергии получим

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) U^2 = (m_1 + m_2) gh \quad (2)$$



где  $h$  – высота подъема центра масс системы "маятник-пуля". Из рисунка следует, что  $\cos \alpha = \frac{(l - h)}{l}$ ,

где  $\alpha$  – угол отклонения маятника от вертикального положения;  $l$  – длина подвеса.

Отсюда  $h = l \cdot (1 - \cos \alpha)$ ,

Подставляя значение  $h$  в (2), получаем

$$U = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{2gl2 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)} = 2\sqrt{gl} \sin(\alpha/2) \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получаем искомую скорость

$$V = \frac{m_1 + m_2}{m_1} 2\sqrt{gl} \sin(\alpha/2) \quad (4)$$

**Закон сохранения полной механической энергии**

**Полная механическая энергия консервативной системы, находящейся в стационарном потенциальном поле, постоянна:**

$$K + U_{\text{соб}} + U_{\text{внеш}} = \text{const}$$

где  $U_{\text{соб}}$  – собственная потенциальная энергия системы – это энергия взаимодействия друг с другом всех частиц системы. Она зависит от взаимного расположения частиц системы;  $U_{\text{внеш}}$  – внешняя потенциальная энергия системы – сумма потенциальных энергий всех ее частиц, находя-

щихся во внешнем стационарном потенциальном поле;  $K$  – кинетическая энергия системы – это сумма кинетических энергий составляющих ее частиц.

Если работа сил стационарного поля над частицей не зависит от пути, пройденного частицей, а зависит только от начального и конечного положения частицы, то такие силы называются **консервативными**, а поле **потенциальным**.

### Закон сохранения импульса

**Замкнутой системой** называется система, на которую не действуют никакие внешние тела (или их взаимодействием можно пренебречь).

**Импульс системы частиц остается постоянным, т.е. не меняется со временем, если система замкнута или сумма всех внешних сил, действующих на частицы этой системы, равна нулю:**

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i(t) = const$$

У незамкнутой системы может сохраняться не импульс  $\vec{p}$ , а его проекция  $p_x$  на направление  $x$ , если результирующая проекций всех внешних сил на это направление равна нулю.

### Объекты исследований. Оборудование

Пружинный пистолет, баллистический маятник, пуля, шкала для измерения угла отклонения маятника.

### Рабочее задание

Провести измерение скорости пули, выпущенной из пружинного пистолета.

### Порядок выполнения работы

1. В табл.1 записать значение массы пули  $m_1$ , массы маятника  $m_2$ , длины нити  $l$  и их погрешности ( $m_1$  и  $m_2$  в граммах указаны на пуле и цилиндре).

Таблица 1.

$m_1$ , кг	$\Delta m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$\Delta m_2$ , кг	$l$ , м	$\Delta l$ , м

2. Вставить пулю в ствол пружинного пистолета.

3. Нажимая на спуск, произвести выстрел и отсчитать по шкале угол отклонения маятника от вертикального положения.

4. Значение угла отклонения записать в табл.2.

Таблица 2

$\alpha_i^o$									
$\Delta \alpha_i^o$									
$(\Delta \alpha_i^o)^2$									

$$\langle \alpha \rangle = \dots ^\circ.$$

5. Измерения провести не менее 9 раз; определить среднее значение угла отклонения  $\langle \alpha \rangle$ , случайные отклонения каждого измерения  $\Delta \alpha_i$ , среднее квадратичное отклонение

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta \alpha_i)^2},$$

где  $n$  – число измерений ( $n=9$ ); погрешность результата измерений  $\Delta \alpha = S / \sqrt{n}$ .

6. По формуле (4) определить среднее значение скорости пули, подставляя среднее значение  $\langle \alpha \rangle$ .

7. Относительную и абсолютную погрешности результата рассчитать по формулам

$$E = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1 + \Delta m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \alpha}{\langle \alpha \rangle}\right)^2}, \quad \Delta V = E \cdot \langle V \rangle$$

и записать в табл.3.

Таблица 3

$\langle V \rangle$ , м/с	$\Delta V$ , м/с	$E$ , %

#### Содержание отчета

Заполнить таблицы 1 – 3, среднее значение угла отклонения  $\langle \alpha \rangle$ .

#### Контрольные вопросы

1. Когда импульс системы сохраняется?
2. Будет ли система "пуля-маятник" замкнутой?
3. Сохраняется ли импульс системы "пуля-маятник" при движении ее после удара? Почему?
4. Вид удара в данной работе.
5. Когда полная механическая энергия системы сохраняется? Равны ли кинетические энергии системы "пуля-маятник" до и после удара?
6. Получить расчетную формулу скорости пули.

#### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с.- гл.ІІІ, §24, с.27-29, 226-228;

# Лабораторная работа № 4

## Измерение скорости пули с помощью физического маятника

**Цель работы:** практическое использование законов сохранения момента импульса и механической энергии для определения скорости пули.

### Теоретические сведения

В данной работе физический маятник представляет собой цилиндр массой  $m_{\text{ц}}$  (частично наполненный пластилином), укрепленный на тонком стержне массой  $m_c$  и длиной  $l$  (рис.1). Стержень шарнирно закреплен на горизонтальной оси и может вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки  $O$ . Положение центра масс цилиндра относительно точки  $O$  зададим радиусом-вектором  $\vec{r}$ . В маятник стреляют в горизонтальном направлении пулей, имеющей массу  $m_{\text{п}}$  и скорость  $\vec{V}$ . Пуля входит в пластилин (неупругий удар) и сообщает физическому маятнику угловую скорость  $\vec{\omega}$ . В результате этого маятник отклонится на угол  $\alpha$  и его центр масс  $C$  поднимется на высоту  $h$  (рис.2).

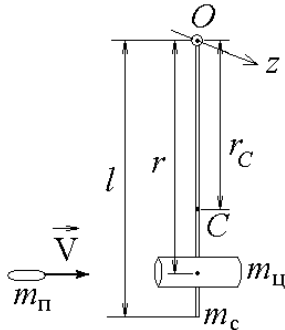


Рис.1

Система "пуля-маятник" незамкнутая. Но если считать удар мгновенным, то за время удара маятник не успеет существенно отклониться, и поэтому момент всех внешних сил относительно оси  $z$  в течение этого времени будет равен нулю ( $M_{z \text{ внеш}} = 0$ ).

Отсюда вывод: проекция момента импульса  $L_z$  данной системы будет оставаться постоянной относительно оси  $z$  ( $L_z = \text{const}$ ). Момент импульса  $\vec{L}_1$  относительно точки  $O$  (рис.1) для всей системы перед ударом

$$\vec{L}_1 = [\vec{r} \times \vec{p}_{\text{п}}] = m_{\text{п}} [\vec{r} \times \vec{V}],$$

где  $\vec{p}_{\text{п}} = m_{\text{п}} \vec{V}$  – импульс пули до удара (маятник находится в покое).

Направление вектора  $\vec{L}_1$  определяется правилом правого винта (см. приложение), а его модуль (и проекция на ось  $Z$ )

$$L_{z1} = m_{\text{п}} V r \sin 90^\circ = m_{\text{п}} V r.$$

Так как ось вращения маятника перпендикулярна плоскости его вращения, то момент импульса  $\vec{L}_2$  всей системы относительно той же точки  $O$  после удара (когда пуля застрянет в пластилине)

$$\vec{L}_2 = J \vec{\omega}.$$

Направление вектора  $\vec{L}_2$  совпадает с направлением вектора  $\vec{L}_1$ , а модуль (и проекция на ось  $Z$ )

$$L_2 = J \omega.$$

Поскольку система будет вращаться вокруг неподвижной оси  $Z$  (см. рис.1), то  $J$  – момент инерции всей системы "пуля-маятник" относительно этой оси.

На основании закона сохранения проекции момента импульса на ось  $z$  имеем

$$m_{\text{п}} V r = J \omega \quad (1)$$

Момент инерции  $J$  всей системы как величина аддитивная равен сумме моментов инерции составляющих ее тел относительно оси  $z$ , т.е.

$$J = J_{\text{под}} + J_c + J_{\text{ц}} + J_{\text{п}},$$

где  $J_{\text{под}}$  – момент инерции подшипника (величина его мала по сравнению с  $J_c$ ,  $J_{\text{ц}}$  и  $J_{\text{п}}$  и ею можно пренебречь);

$$J_c = \frac{m_c l^2}{3} \text{ – момент инерции стержня;}$$

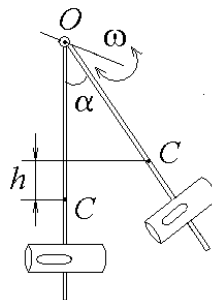


Рис.2

пуля  $\vec{L}_1$  относительно точки  $O$  равен моменту импульса пули:

маятник находится в покое).  
правилом правого винта (см. ось  $Z$ )

лярна плоскости его враще-

$J_{\text{ц}} = m_{\text{ц}} r^2$  – момент инерции цилиндра (т.к. радиус цилиндра мал по сравнению с  $r$ , то момент инерции его рассчитывается, как для материальной точки);

$J_{\text{п}} = m_{\text{п}} r^2$  – момент инерции пули.

Следовательно, в данной работе

$$J = \frac{1}{3} m_c l^2 + m_{\text{ц}} r^2 + m_{\text{п}} r^2, \quad (2)$$

Из равенства (1) скорость  $v$  пули перед ударом в маятник

$$V = \frac{J\omega}{m_{\text{п}} r}. \quad (3)$$

Угловая скорость  $\omega$  всей системы после удара может быть определена по закону сохранения механической энергии, который в данном случае запишется в виде

$$\frac{J\omega^2}{2} = mgh, \quad (4)$$

где  $\frac{J\omega^2}{2}$  – кинетическая энергия вращательного движения системы после удара пули;

$mgh$  – потенциальная энергия системы после отклонения ее на максимальный угол  $\alpha$ .

Здесь

$$m = m_{\text{под}} + m_c + m_{\text{ц}} + m_{\text{п}}, \quad (5)$$

где  $m$  – масса всей системы "пуля-маятник";  $m_{\text{под}}$  – масса подшипника.

Из рис.2 следует, что высота подъема центра масс  $S$  системы

$$h = r_c - r_c \cos \alpha = 2r_c \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (6)$$

Выразив  $\omega$  из (4) с учетом (6) и подставив в (3), найдем скорость  $V$  пули:

$$V = \frac{2 \sin(\alpha/2)}{m_{\text{п}} r} \sqrt{Jmgr_c}. \quad (7)$$

Центр масс (центр инерции) системы относительно точки  $O$  определим по формуле

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}, \quad (8)$$

где  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор центра масс отдельной детали системы;

$m_i$  – масса этой детали.

Из (8) и рис.1 видно, что

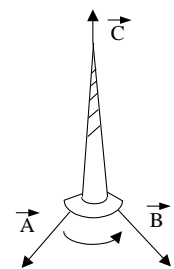
$$r_c = \frac{m_c \frac{l}{2} + m_{\text{ц}} r + m_{\text{п}} r}{m_{\text{под}} + m_c + m_{\text{ц}} + m_{\text{п}}}. \quad (9)$$

## Приложение

### Правило правого винта.

Чаще всего правило правого винта связано с определением направления векторного произведения двух векторов.

Векторное произведение, обозначаемое  $[\vec{A} \times \vec{B}]$ , двух векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  есть вектор  $\vec{C}$ , модуль которого  $C = A \cdot B \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – минимальный угол между векторами  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ .



Направление вектора  $\vec{C}$  перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его повороте от  $\vec{A}$  к  $\vec{B}$  на угол, меньший  $\pi$  (см. рис.).



## Объекты исследований, оборудование

Пружинная пушка, физический маятник, пуля, шкала для измерения угла отклонения маятника.

## Рабочее задание

Провести измерение скорости пули, выпущенной из пружинного пистолета.

## Порядок выполнения работы

1. Зарядить пружинную пушку. ударный стержень, взявшись за выступ В в вертикальное положение, стержень и пружину в сжатом состоянии заложить пулю (левый край пули

2. Записать начальное положение подвижном цилиндре. Цена шкалы 10' (угловых минут).

3. Повернуть выступ В на себя (приведя в горизонтальное положение), отсчитать положение отбросе маятника (рис.4)

4. Вычислить угол отклонения. Опыт повторить 5 раз (выстрел подвижному маятнику). Найти средний

5. Вычислить массу всей системы пуле (5). Масса пули указана на ней, установке.

6. Подсчитать момент инерции  $J$  (2).

7. Определить положение центра масс  $C$  системы "пуля-маятник" относительно точки  $O$  по формуле (9).

8. Среднюю скорость  $\langle V \rangle$  пули перед ударом в маятник рассчитать по формуле (7), подставляя  $\alpha = \langle \alpha \rangle$ .

Данные измерений и вычислений занести в таблицы 1 и 2.

Таблица 1.

$m_{\text{под}},$ кг	$m_c,$ кг	$l,$ м	$m_{\text{ц}},$ кг	$r,$ м	$m_{\text{п}},$ кг	$m,$ кг	$J,$ кг·м <sup>2</sup>	$r_c,$ м

$\alpha_0 = \dots^\circ$

Таблица 2.

Номер опыта						$\langle \alpha \rangle^\circ$	$\langle V \rangle,$ м/с
$\alpha_1^\circ$							
$\alpha^\circ = \alpha_1 - \alpha_0$							

## Содержание отчета

Заполненные таблицы 1 и 2.

## Контрольные вопросы

1. Будет ли система "пуля-маятник" замкнутой?
2. Когда момент импульса системы сохраняется?

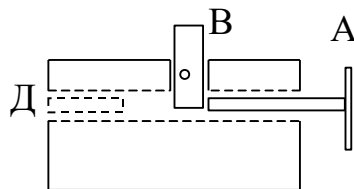


Рис.3

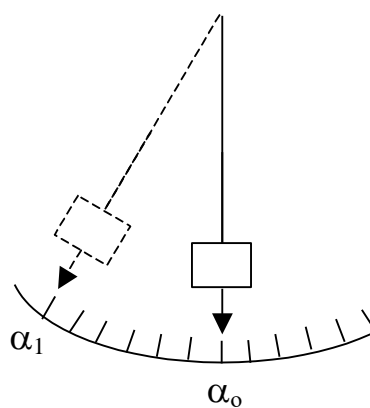


Рис.4

Для этого оттянуть назад ступ А (рис.3). Стержень рукой не удастся поставить в котором он удерживает янии. Затем в дуло Д пушки совместить с торцом Д).

$\alpha_0$  остря стержня при не-наименьшего деления

(приведя в горизонтальное остря  $\alpha_1$  при максималь-

маятника  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ . изводить только по непо-угол отклонения  $\langle \alpha \rangle$ .

"пуля-маятник"  $m$  по фор-а остальные массы – на

всей системы по формуле

3. Сохраняется ли момент импульса системы "пуля-маятник" при вращении ее после удара? Почему?
4. Вид удара в данной работе.
5. Когда полная механическая энергия системы сохраняется? Равны ли кинетические энергии системы "пуля-маятник" до и после удара?
6. Может ли в некоторой системе не сохраняться механическая энергия и оставаться постоянным момент импульса?
7. Получить расчетную формулу скорости пули.

#### **Список использованных источников**

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с.- гл. III, §24, с.27-29,
2. Иродов И.Е. Механика. – М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2006. – 309с. гл.3, §3.4, гл.4, §4.5, гл.5, §5.1, 5.2.

Лабораторная работа № 5  
**Изучение скорости пули с помощью  
вращающейся платформы**

**Цель работы:** Определение скорости пули при выстреле с помощью закона сохранения проекции момента импульса.

**Теоретические сведения**

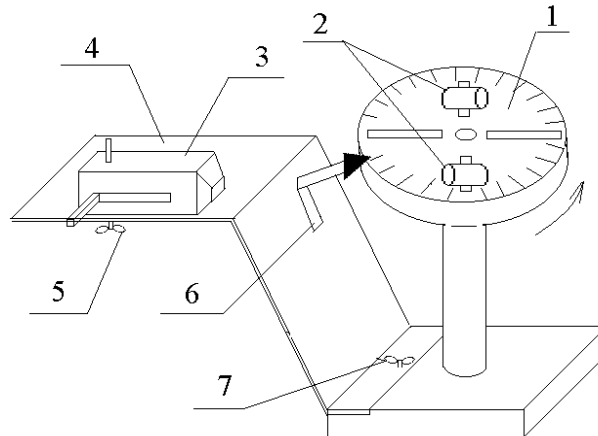


Рис.1. Схема установки

Установка представляет из себя диск 1 (платформу), закрепленный на оси (рис.1). На диске имеются продольные прорезы, вдоль которых могут перемещаться ловушки 2 и закрепляться на нужном расстоянии от оси вращения. Пистолет 3 закреплен сбоку на подставке 4, может поворачиваться и перемещаться для стрельбы в ловушку (по касательной) и закрепляется винтом-барашком 5. Подставка также может поворачиваться, перемещаться и закрепляется винтом-барашком 7. Угол поворота диска определяется с помощью делений на нем и указателя 6 на подставке.

Производя выстрел из пружинного пистолета в ловушку, установленную на вращающейся платформе (диске), приведем во вращательное движение платформу. На основании закона сохранения проекции момента импульса можно записать:

$$mVl = (J + ml^2)\omega, \quad (1)$$

где  $m$  – масса пули,  $l$  – плечо импульса пули, т.е. расстояние от оси вращения до линии импульса пули,  $V$  – скорость пули,  $J$  – момент инерции платформы с ловушкой относительно оси вращения,  $\omega$  – угловая скорость платформы сразу после удара. Отсюда следует

$$V = (J + ml^2)\omega / (ml) \quad (2)$$

Учтя, что после удара платформа вращается равнозамедленно и поворачивается до полной остановки на угол  $\varphi$ , выразим  $\omega$  через угловое ускорение  $\varepsilon$  и угол  $\varphi$ :  $\omega = \sqrt{2\varepsilon\varphi}$ . Величину  $\varepsilon$ , в свою очередь, можно найти из дополнительного наблюдения вращательного движения диска, вызванного толчком руки:

$$\varepsilon = \frac{2\alpha}{t^2}, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – угол поворота платформы до остановки,  $t$  – время этого поворота.

Окончательно для  $V$  имеем

$$V = \frac{J + ml^2}{ml} \sqrt{2\varepsilon\varphi}. \quad (4)$$

**Закон сохранения полной механической энергии**

*Полная механическая энергия консервативной системы, находящейся в стационарном потенциальном поле, постоянна:*

$$K + U_{\text{соб}} + U_{\text{внеш}} = \text{const}$$

где  $U_{\text{соб}}$  – собственная потенциальная энергия системы – это энергия взаимодействия друг с другом всех частиц системы. Она зависит от взаимного расположения частиц системы;  $U_{\text{внеш}}$  – внешняя потенциальная энергия системы – сумма потенциальных энергий всех ее частиц, находящихся во внешнем стационарном потенциальном поле;  $K$  – кинетическая энергия системы – это сумма кинетических энергий составляющих ее частиц.

Если работа сил стационарного поля над частицей не зависит от пути, пройденного частицей, а зависит только от начального и конечного положения частицы, то такие силы называются *консервативными*, а поле *потенциальным*.

### Закон сохранения момента импульса

*Замкнутой системой* называется система, на которую не действуют никакие внешние моменты сил (или их действием можно пренебречь).

*момент импульса системы остается постоянным, т.е. не меняется со временем, если система замкнута или суммарный момент всех внешних сил, действующих на частицы системы, равен нулю.*

Таким образом в инерциальной системе отсчета момент импульса замкнутой системы частиц

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i(t) = \text{const}$$

У незамкнутой системы может сохраняться не сам момент импульса  $\vec{L}$ , а его проекция на некоторую неподвижную ось  $z$ , если проекция суммарного момента  $\vec{M}_{\text{внеш}}$  всех внешних сил на эту ось  $z$  равна нулю.

### Объекты исследований, оборудование

Вращающийся диск, ловушка, пружинный пистолет, металлические пули.

### Рабочее задание

Определить момент инерции диска, угловое ускорение и скорость пули.

### Порядок выполнения работы

1. Массы диска, ловушки, пули указаны в описании или на самих телах.
2. Установить ловушки симметрично на произвольном расстоянии от оси вращения диска, закрепить их (отверстием в сторону пистолета).
3. Толкнуть диск рукой и пустить секундомер. Зафиксировать угол  $\alpha$  и время поворота  $t$  диска. Опыт проделать 9 раз, определить  $\alpha_i$  и  $t_i$ . Найти средние значения  $\langle \alpha \rangle$  и  $\langle t \rangle$ .

Таблица 1

$\alpha_i, ^\circ$	$t_i, \text{с}$

4. Зарядить пистолет, повернуть его так, чтобы при выстреле пуля попала в ловушку в направлении по касательной к траектории движения ловушки.

5. Произвести выстрел. Определить угол поворота  $\varphi$  диска. Опыт повторить 9 раз, определяя каждый раз  $\varphi_i$ , затем определить  $\langle \varphi \rangle$ .

6. Определить момент инерции диска с ловушками по формуле

$$J = \frac{1}{2} m_{\text{д}} r_{\text{д}}^2 + m_{\text{л}} l^2,$$

где  $m_{\text{д}}$  – масса диска,  $r_{\text{д}}$  – радиус диска,  $m_{\text{л}}$  – масса ловушки,  $l$  – расстояние до центра вращения.

Таблица 2

$m, \text{кг}$	$m_{\text{д}}, \text{кг}$	$m_{\text{л}}, \text{кг}$	$r_{\text{д}}, \text{м}$	$l, \text{м}$	$J, \text{кг} \cdot \text{м}^2$

8. Определить угловое ускорение по формуле (3), подставляя  $\alpha = \langle \alpha \rangle$ , скорость пули по формуле (4), подставляя  $\varphi = \langle \varphi \rangle$ .

Таблица 3

$\langle \alpha \rangle$ , рад	$\langle \varphi \rangle$ , рад	$\varepsilon$ , рад/с <sup>2</sup>	$V$ , м/с

### Содержание отчета

Заполненные таблицы 1-3.

### Контрольные вопросы

1. Когда момент импульса системы сохраняется?
2. Записать в векторной форме до и после удара момент импульса системы в данной работе, определить его модуль и направление.
3. Сохраняется ли момент импульса системы в данной работе при вращении ее после удара? Почему?
4. Вид удара в данной работе.
5. Когда полная механическая энергия системы сохраняется? Может ли в некоторой системе не сохраняться механическая энергия и оставаться постоянным момент импульса?
6. Получить расчетную формулу скорости пули.

### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с.- гл. III, §24, с.27-29;

## Лабораторная работа № 6

### Изучение вращательного движения

**Цель работы:** изучить зависимость углового ускорения тела, вращающегося относительно неподвижной оси, от результирующего момента действующих на него сил.

#### Теоретические сведения

Эксперимент проводится на маятнике Обербека, который устроен следующим образом (рис.1). На неподвижную горизонтальную ось надет шкив радиусом  $r$ . Со шкивом жестко скреплена крестовина. На стержнях крестовины находятся грузы массой  $m_1$ . Грузы можно смещать вдоль стержней, изменяя при этом момент инерции  $J$  маятника. На шкив наматывается шнур с грузом массой  $m$ . При опускании груза маятник вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси  $z$ . Измерив высоту  $h$  и время  $t$ , в течение которого груз из состояния покоя опустился на  $h$ , можно найти модуль постоянного ускорения из закона движения

$$y = y_0 + V_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

При выбранной оси  $y$ , направленной вниз,  
 $y - y_0 = h$ ,  $V_{0y} = 0$ ,  $a_y = a$ , поэтому

$$a = \frac{2h}{t^2} \quad (1)$$

Если нить нерастяжима, то любая точка поверхности шкива имеет тангенциальное ускорение, модуль которого равен модулю ускорения груза, т.е.  $a_\tau = a$ . Так как  $a_\tau = \varepsilon r$ , то с учетом (1) имеем

$$\varepsilon = \frac{2h}{t^2 r} \quad (2)$$

На груз действуют две силы: сила тяжести  $m\vec{g}$  со стороны Земли и сила  $\vec{F}$  со стороны нити.

Запишем второй закон Ньютона для груза, движущегося с постоянным ускорением  $\vec{a}$ , направленным вниз:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}$$

В проекции на ось  $y$  это уравнение перепишем так:

$$ma_y = mg_y - F_y$$

При выбранном положительном направлении оси  $y$  вниз,  $a_y = a$ ,  $g_y = g$ ,  $F_y = -F$ . Поэтому

$$ma = mg - F$$

откуда  $F = mg - ma$  или с учетом (1)

$$F = m \left( g - \frac{2h}{t^2} \right) \quad (3)$$

Вращение маятника создается моментом силы  $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}_1]$ , проекция которого на неподвижную ось  $z$   $M_z = F_1 \cdot r$ .

Направление  $\vec{M}$  определяется правилом правого винта.  $F_1 = F$  при условии невесомости нити, поэтому с учетом (3)

$$M_z = m \left( g - \frac{2h}{t^2} \right) \cdot r \quad (4)$$

В данной работе грузики  $m_1$  сняты и момент инерции  $J$  маятника постоянен.

Изменяя массу  $m$  груза, например, увеличивая ее, и измеряя время падения груза с одной и той же высоты  $h$ , по формулам

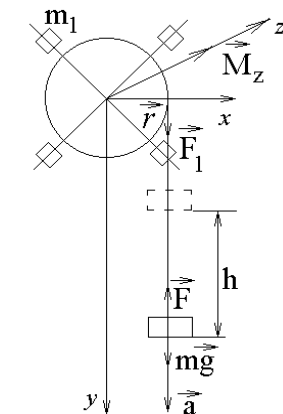


Рис.1

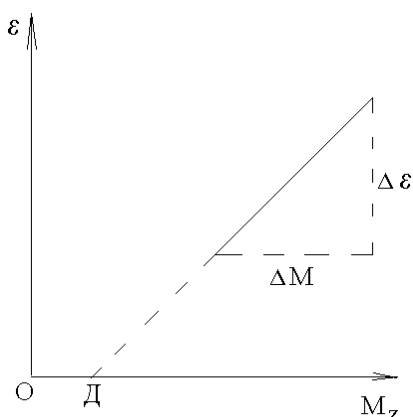


Рис. 2

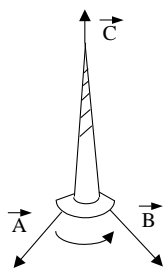
(2) и (4) найдем  $\varepsilon$  и  $M_z$  в каждом опыте с определенным грузом. По этим значениям построим график  $\varepsilon(M_z)$  (рис.2). Уравнение динамики вращения маятника в проекции на ось  $z$  имеет вид

$$J\varepsilon = M_z - M_{тр}.$$

Пользуясь рис.2, найдем модуль момента сил трения, равный отрезку  $ОД$ , и момент инерции маятника

$$J = \frac{\Delta M}{\Delta \varepsilon}.$$

### Правило правого винта (буравчика). Векторное произведение двух векторов



Векторное произведение, обозначаемое либо  $[\vec{A}, \vec{B}]$ , либо  $\vec{A} \times \vec{B}$ , двух векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  есть вектор  $\vec{C}$ , модуль которого

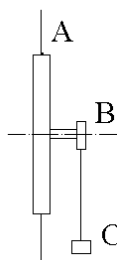
$$C = AB \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – наименьший угол между векторами  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ .

Направление вектора  $\vec{C}$  перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его повороте от  $\vec{A}$  к  $\vec{B}$  на угол, меньший  $\pi$ .

### Объекты исследования, оборудование

Маятник Обербека, набор грузов, секундомер.



### Рабочее задание

Определить момент инерции крестовины и момент силы трения.

### Порядок выполнения работы

1. Вращая маятник за спицы  $A$ , намотать нить на шкив  $B$  и поднять груз  $C$  массой  $m$ , указанной на нем, на максимально возможную высоту  $h$ .
2. Измерить время падения груза. Придерживая одной рукой маятник за любой из стержней, другой коснуться головки секундомера. Одновременно нажать головку секундомера и отпустить стержень маятника. В момент удара груза о подставку снова нажать на головку секундомера, остановив его. По секундомеру отсчитать  $t$  падения груза. Опыт повторить 5 раз, беря одно и то же  $h$ . Определить среднее время  $\langle t \rangle$  падения груза. Подсчитать вращающий момент  $M_z$  по формуле (4) и угловое ускорение  $\varepsilon$  по формуле (2), измерить линейкой  $h$ ,  $r = 2$  см – радиус шкива  $B$ , на который намотан шнур.
3. То же самое проделать, добавляя к грузу перегрузки (масса каждого перегрузка указана на нем).
4. Данные измерений и вычислений занести в таблицу.

Таблица

$m$ , кг	$t$ , с	$\langle t \rangle$ , с	$\varepsilon$ , с <sup>-2</sup>	$M_z$ , Н·м

5. Построить график зависимости  $\varepsilon(M_z)$ .

6. Определить по графику (см. рис.2):

а) момент инерции крестовины  $J = \frac{\Delta M}{\Delta \varepsilon} = \dots\dots\dots \text{кг} \cdot \text{м}^2$ ;

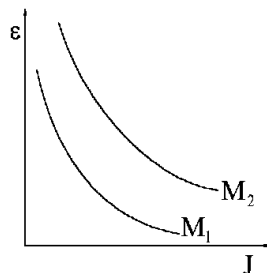
б) момент силы трения  $M_{тр} = \dots\dots\dots \text{Н} \cdot \text{м}$ ,  
модуль которого равен отрезку  $ОД$ .

### Содержание отчета

Заполненная таблица, график зависимости  $\varepsilon(M_z)$ , значения момента инерции крестовины и момента силы трения.

### Контрольные вопросы

1. Описать маятник Обербека.
2. Записать законы и уравнения движения для груза и маятника Обербека.
3. Как практически на маятнике Обербека можно изменить момент инерции и момент сил? От чего зависит время движения груза?
4. Дать определение угловому ускорению и моменту сил. Как определить модуль и направление углового ускорения, момента силы, вращающего маятник?



5. На рисунке представлены два графика зависимости углового ускорения от момента инерции при постоянных моментах  $M$  внешних сил. Какой из этих моментов больше?

### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. СПб.: Лань, 2008. 352 с. гл.III, §29, гл.V, § 38, 39.



## Лабораторная работа № 7

### Определение моментов инерции методом колебаний

**Цель работы:** экспериментально определить момент инерции однородного стержня относительно двух параллельных осей, результат сопоставить с теоремой Штейнера.

#### Теоретические сведения

В данной работе методом колебаний определяем моменты инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс,  $J_c$ , и относительно параллельной ей оси, проходящей через конец стержня,  $J_A$ . Для определения момента инерции  $J_c$  наблюдаем малые колебания стержня на бифилярном подвесе (рис.1,2). Для определения момента инерции стержня  $J_A$  наблюдаем малые колебания, подвесив его за конец (рис.3).

За счет трения в точках подвеса энергия колебаний стержня уменьшается. Однако если ограничиться наблюдением нескольких колебаний (в пределах 10-20 колебаний), то работа сил трения будет невелика. Ее можно не учитывать и при малых углах отклонения ( $6-8^\circ$ ) колебания считать гармоническими:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (1)$$

где  $\varphi_0$  – угловая амплитуда;  $T$  – период колебаний. Так как работой сил трения пренебрегаем, то полная механическая энергия стержня остается неизменной. При прохождении положения равновесия стержень обладает только кинетической энергией:  $K = \frac{1}{2} J \omega^2$ , где  $\omega$  – максимальная угловая скорость.

При отклонении стержня от положения равновесия на максимальный угол его полная механическая энергия (потенциальная)  $U = mgh$ , где  $h$  – максимальная высота поднятия центра масс стержня.

Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = mgh \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) позволяют найти момент инерции  $J$ , если измерен на опыте период колебаний  $T$ .

#### 1. Определение $J_c$ – момента инерции стержня относительно оси симметрии.

Стержень на бифилярном подвесе совершает крутильные колебания (см. рис.1). Определяем его максимальную угловую скорость  $\omega$ , проинтегрировав (1) по времени:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \quad (3)$$

Максимальная высота подъема центра масс стержня определяется углом  $\psi_0$  (см.рис.2):

$$h = b(1 - \cos \psi_0) = 2b \sin^2 \frac{\psi_0}{2} \approx 2b \left(\frac{\psi_0}{2}\right)^2,$$

где  $b$  – длина нити подвеса;  $\psi_0$  – максимальный угол отклонения нити, однозначно связанный с максимальным углом отклонения стержня от положения равновесия  $\varphi_0$ . При малых значениях  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  конец стержня проходит путь  $AA_1$ , который приближенно можно считать равным длине дуги  $AA_1$ :

$$AA_1 \approx \frac{l}{2} \varphi_0 \approx b \psi_0, \quad \psi_0 = \frac{l}{2b} \varphi_0.$$

Теперь выразим  $h$  через угол  $\varphi_0$ :

$$h = 2b \left( \frac{\Psi_o}{2} \right)^2 = 2b \cdot \frac{1}{4} \left( \frac{l}{2b} \varphi_o \right)^2 = \frac{l^2 \varphi_o^2}{8b} \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем

$$J_c = \frac{mgl^2}{16\pi^2 b} T_c^2 \quad (5)$$

## 2. Определение $J_A$ момента инерции стержня относительно оси, перпендикулярной ему и проходящей через конец.

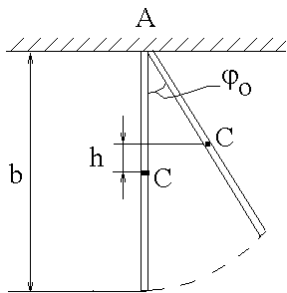


Рис.3

В формулу (2) подставляем соответствующие значения максимальной скорости при прохождении положения равновесия  $\omega$  из (3) и максимальной высоты поднятия центра масс  $h$  (рис.3). Из рис.3 получаем связь между  $h$  и углом  $\varphi_0$ :

$$h = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi_0) = \frac{l}{2} 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{l}{4} \varphi_0^2 \quad (6)$$

Из равенства (20) с учетом (3) и (6) получаем

$$J_A = \frac{mgl}{8\pi^2} T_A^2 \quad (7)$$

Таким образом, измеряя на опыте периоды колебаний стержня  $T_c$  и  $T_A$ , длину нити подвеса, длину стержня, можно вычислить моменты инерции  $J_c$  и  $J_A$  стержня относительно параллельных осей, а результат сопоставить с теоремой Штейнера.

### Момент инерции

Момент инерции является *мерой инертности твердого тела при его вращении*.

Момент инерции твердого тела зависит от распределения масс относительно оси вращения и равен сумме моментов инерции составляющих его материальных точек:

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \quad \text{или} \quad J = \int_m r^2 dm$$

где  $\Delta m_i$  или  $dm$  – масса элементарной точки, а  $r^2$  или  $r_i^2$  – квадрат расстояния от этой точки до оси вращения.

### Теорема Штейнера

Момент инерции тела  $J$  относительно произвольной оси  $O$  равен моменту инерции  $J_c$  этого тела относительно оси, **параллельной данной и проходящей через центр масс  $C$** , сложенному с произведением массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между осями:

$$J = J_c + md^2$$

### Объекты исследования, оборудование

Стержень на бифилярном подвесе, секундомер.

### Рабочее задание

Определить момент инерции однородного стержня относительно двух параллельных осей, результат сопоставить с теоремой Штейнера.

### Порядок выполнения работы

1. Подвесить стержень на нитях строго горизонтально, расположив его между направляющими.
2. Взяться за правую направляющую, подвести к стержню и повернуть его на угол  $4^\circ$ . Затем резко развернуть направляющую планку от стержня, предоставив ему возможность совершать крутильные колебания относительно оси  $CC'$  (см.рис.1).

3. Измерить секундомером время  $t_c$  полных  $n_1$  колебаний ( $n_1 = 10$ , отсчет времени начинать при прохождении маятником любого крайнего положения). Рассчитать период колебаний  $T_{ci} = \frac{t_{ci}}{n_1}$ .

Опыт повторить 9 раз и определить среднее значение периода  $\langle T_c \rangle$ .

4. Измерить  $l$  – расстояние между точками подвеса стержня А и В;  $b$  – длину нитей подвеса. Масса стержня указана на нем (в граммах).

5. Подвесить стержень за конец А и привести в колебание в вертикальной плоскости. Угол отклонения не должен превышать  $4^\circ$ .

6. Определить время 10 колебаний стержня и вычислить  $T_{Ai}$ . Опыт проделать 9 раз и определить  $\langle T_A \rangle$ .

7. По формулам (5) и (7) вычислить моменты инерции стержня относительно перпендикулярных ему, но параллельных друг другу осей, проходящих через центр масс ( $J_c$ ) и конец стержня ( $J_A$ ), подставляя в них средние значения  $\langle T_c \rangle$  и  $\langle T_A \rangle$ .

8. Случайные отклонения каждого измерения периодов равны соответствен-

но  $\Delta T_{ci} = T_{ci} - \langle T_c \rangle$ ,  $\Delta T_{Ai} = T_{Ai} - \langle T_A \rangle$ , а средние квадратичные отклонения:  $S_c = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_{ci})^2}$ ,

$S_A = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_{Ai})^2}$ . Погрешности результатов измерения периодов  $\Delta T_c = S_c / \sqrt{n}$ ,  $\Delta T_A = S_A / \sqrt{n}$ .

9. Относительные и абсолютные погрешности подсчитать по формулам

$$E_c = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_c}{\langle T_c \rangle}\right)^2}; \quad \Delta J_c = E_c \cdot J_c.$$

$$E_A = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_A}{\langle T_A \rangle}\right)^2}; \quad \Delta J_A = E_A \cdot J_A.$$

10. Вычислить величины  $J_A - J_c$  и  $m \frac{l^2}{4}$ . Сравнить их значения.

11. Данные измерений и вычислений занести в табл. 1-4.

Таблица 1

$n_1$	$t_{ci}, \text{с}$	$T_{ci}, \text{с}$
$\langle T_c \rangle =$		$\Delta T_c =$

Таблица 2

$t_{Ai, \text{с}}$	$T_{Ai, \text{с}}$
.	
.	
.	
$\langle T_A \rangle = \Delta T_A =$	

Таблица 3.

$m, \text{кг}$	$\Delta m, \text{кг}$	$l, \text{м}$	$\Delta l, \text{м}$	$b, \text{м}$	$\Delta b, \text{м}$

Таблица 4.

$J_c, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\Delta J_c, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$J_A, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\Delta J_A, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$J_A - J_c, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$m \frac{l^2}{4}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$

## Содержание отчета

Заполненные таблицы 1-4.

### **Контрольные вопросы**

1. Каков физический смысл момента инерции материальной точки, твердого тела?
2. Как вычислить момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс?
3. Сформулировать теорему Штейнера.
4. получить связь между максимальной угловой скоростью стержня и амплитудой его колебаний.
5. Получить формулу для расчета момента инерции шара, кольца, стержня относительно оси, проходящей через центр масс.

### **Список использованных источников**

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с.- гл.V, §39, 41, гл.VII, §54.

Лабораторная работа № 8  
**Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности**  
**методом катающегося шарика**

**Цель работы:** изучить законы движения катающегося по сферической вогнутой поверхности шарика, рассмотреть условия его гармонических колебаний и определить радиус кривизны поверхности

**Теоретические сведения**

Радиус кривизны  $R$  гладкой сферической поверхности можно определить, измерив период колебания  $T$  шарика, катающегося по этой поверхности.

Если пренебречь потерями энергии, затрачиваемой на преодоление диссипативной силы трения, то для катающегося без проскальзывания шарика должен выполняться закон сохранения механической энергии. Центр масс  $C$  шарика движется поступательно, но, кроме того, шарик вращается относительно оси  $z$ , проходящей через точку  $C$  перпендикулярно плоскости (рис.1). Поэтому полная механическая энергия шарика

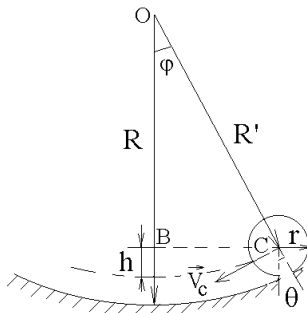


Рис.1

$$E = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + mgh = const \quad (1)$$

Здесь  $m$  – масса шарика;  $J = \frac{2}{5}mr^2$  – его момент инерции относи-

тельно оси  $z$ ;  $r$  – радиус шарика.

Модуль угловой скорости  $\omega$  шарика вокруг оси  $z$  связан с модулем скорости  $V_c$  поступательного движения центра масс соотношением

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_c}{r}. \quad (2)$$

Подставляя (2) и выражение для  $J_c$  в (1), получаем

$$E = \frac{7}{10}mr^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgh = const. \quad (3)$$

Но при качении шарика по сферической поверхности его центр масс отклоняется относительно центра  $O$  поверхности на угол  $\phi$ . Из рис.1 видно, что угол  $\phi$  связан с углом поворота  $\theta$  шарика относительно оси  $z$  соотношением

$$\theta = \frac{R'}{r} \phi \quad (4)$$

где  $R' = R - r$ . Кроме того, из прямоугольного треугольника  $OBC$  следует, что

$$h = R' - R' \cos \phi. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в формулу (3), выражаем полную механическую энергию шарика через угол  $\phi$ :

$$E = \frac{7}{10}m(R')^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + mgR'(1 - \cos \phi) = const. \quad (6)$$

В верхней точке траектории скорость шарика равна нулю и вся механическая энергия шарика переходит в потенциальную. При прохождении шариком положения равновесия ( $h=0$ ) скорость и кинетическая энергия шарика максимальны.

Рассмотрим кинематику движения шарика. Скорость  $\vec{V}_c$  его центра масс  $C$  всегда направлена по касательной к траектории (рис.2). Полное ускорение  $\vec{a}$  центра масс равно сумме тангенциального  $\vec{a}_\tau$  и нормального  $\vec{a}_n$  ускорений. Ускорение  $\vec{a}_\tau$  направлено также по кас-

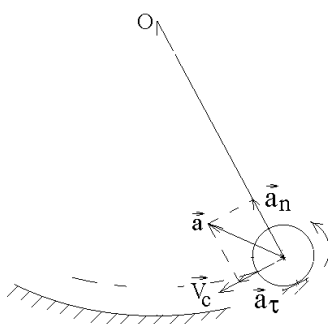


Рис.2

тельной к траектории. Его модуль связан с модулем углового ускорения вращения шарика вокруг оси  $z$  формулой

$$a_\tau = r \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (7)$$

Ускорение  $\vec{a}_n$  направлено к центру кривизны. Его модуль

$$a_n = \frac{V_c^2}{R'}. \quad (8)$$

Эти модули изменяются при колебательных движениях шарика периодически. В верхней точке траектории при наибольшем отклонении шарика от положения равновесия  $V_c$  шарика и  $a_n$  равны нулю, а  $a_\tau$  достигает максимума. При прохождении положения равновесия, наоборот,  $a_\tau = 0$ , а  $V_c$  и  $a_n$  максимальны.

Найдем период колебаний шарика. Для этого необходимо получить динамическое уравнение колебаний (т.е. уравнение динамики для поступательного или вращательного движения колеблющегося шарика). Для любых незатухающих гармонических колебаний это уравнение имеет общий вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (9)$$

**Физическое тело будет совершать гармонические колебания в том случае, если на него действует сила или момент силы, пропорциональные смещению от положения равновесия и стремящиеся вернуть тело в положение равновесия.**

Воспользуемся законом сохранения механической энергии (6). Возьмем производную по времени от обеих частей этого уравнения, сократим полученное выражение на  $mR'(d\varphi/dt)$  и приведем его к виду, аналогичному (9):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{5}{7} \cdot \frac{g}{R'} \sin \varphi = 0. \quad (10)$$

Отсюда видно, что шарик будет совершать гармонические колебания относительно положения равновесия в том случае, когда  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Т.е. условием гармонических колебаний в данной работе будут малые углы отклонения шарика от положения равновесия.

В этом случае угол  $\varphi$  изменяется по гармоническому закону  $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ , где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{5g}{7R'}}. \quad (11)$$

Используя выражения (4), (7) и (8), можно вычислить значения скорости и ускорения шарика в любой момент времени. Чтобы найти зависимость радиуса кривизны  $R$  сферической поверхности от периода  $T$ , которую находим из формулы (11), подставим в нее  $R' = R - r$ :

$$R = \frac{5}{7} g \frac{T^2}{4\pi^2} + r. \quad (12)$$

При вычислении мы не учитывали, что механическая энергия шарика уменьшается за счет работы диссипативной силы трения и потому в действительности колебания шарика будут затухающими. Затуханием колебаний в работе пренебрегаем.

### **Закон сохранения полной механической энергии**

*Полная механическая энергия консервативной системы, находящейся в стационарном потенциальном поле, постоянна:*

$$K + U_{соб} + U_{внеш} = const$$

где  $U_{соб}$  – собственная потенциальная энергия системы – это энергия взаимодействия друг с другом всех частиц системы. Она зависит от взаимного расположения частиц системы;  $U_{внеш}$  – внешняя потенциальная энергия системы – это сумма потенциальных энергий всех ее частиц,

находящихся во внешнем стационарном потенциальном поле;  $K$  – кинетическая энергия системы – это сумма кинетических энергий составляющих ее частиц.

Если работа сил стационарного поля над частицей не зависит от пути, пройденного частицей, а зависит только от начального и конечного положения частицы, то такие силы называются *консервативными*, а поле *потенциальным*.

### Объекты исследования, оборудование

Изогнутый желоб, шарик, секундомер.

### Рабочее задание

Найти радиус кривизны изогнутого желоба.

### Порядок выполнения работы

1. С помощью микрометра 5 раз в разных местах измерить диаметр шарика  $d$  и вычислить радиус  $r = d/2$ .

2. Вывести шарик из положения равновесия так, чтобы угол отклонения  $\varphi$  (см. рис.1) был мал. Определить время  $t$  пяти ( $n=5$ ) полных колебаний шарика. Опыт провести 9 раз. Определить период колебаний  $T_i = t_i / n$ . Занести данные в табл.1.

3. Вычислить средние значения радиуса шарика  $\langle r \rangle$  и периода колебаний  $\langle T_i \rangle$ .

4. Определить случайные отклонения  $\Delta T_i = T_i - \langle T_i \rangle$  каждого измерения периода и среднее

квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_i)^2}$ . Вычислить погрешность  $\Delta T$  результата измерений:

$$\Delta T = S / \sqrt{n}.$$

5. Подставляя  $\langle r \rangle$  и  $\langle T \rangle$  в формулу (12), вычислить радиус кривизны поверхности  $R$ .

6. Найти абсолютную  $\Delta R$  и относительную  $E$  погрешности в определении  $R$  по формулам

$$\Delta R = \frac{2 \langle R \rangle \Delta T}{\langle T \rangle} + \Delta r, \quad E = \frac{\Delta R}{\langle R \rangle}.$$

Данные измерений и вычислений занести в табл. 1-3.

Таблица 1

$d$ , м					$\langle d \rangle$ , м	$\langle r \rangle$ , м

Таблица 2

$t_i$ , с	$n$	$T_i$ , с

Таблица 3

$S$ , с	$\Delta T$ , с	$R$ , м	$\Delta R$ , м	$E$ , %	$\Delta r$ , м

### Содержание отчета

Заполненные таблицы 1-3.

### Контрольные вопросы

1. Из каких составляющих складывается полная энергия шарика?
2. Когда сохраняется полная механическая энергия?
3. Как направлены скорость и ускорение центра масс шарика?
4. Укажите положение шарика, в которых его центр будет иметь:
  - а) максимальное угловое ускорение; б) максимальную линейную скорость;
  - в) тангенциальное ускорение, равное нулю; г) нормальное ускорение, равное нулю;

Объясните ваш выбор.

5. Какой вид имеет динамическое уравнение колебаний шарика?
6. Сформулируйте условия, при которых возникают гармонические колебания.
7. Почему угол отклонения шарика (от положения равновесия) должен быть мал?

**Список использованных источников**

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с.- гл.I, §4, гл.III, §24, гл.V, §41-43, 53.



Лабораторная работа № 9  
**Определение момента инерции тел методом  
крутильных колебаний**

**Цель работы** – изучить метод крутильных колебаний для расчета момента инерции тел разной формы. Сравнить экспериментальные значения моментов инерции этих тел с теоретическими расчетами.

**Теоретические сведения**

При условии малых колебаний, т.е.  $\varphi \leq 1$  рад, колебания диска можно считать гармоническими с периодом  $T$ :

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (1)$$

Пусть диск поднялся на максимальную высоту

$$h = h_1 - h_2.$$

Тогда приращение потенциальной энергии равно:

$$\Delta E_n = mgh$$

При последующем вращении диска потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию вращательного движения

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2},$$

где  $I$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega$  – угловая скорость вращения.

В момент прохождения положения равновесия кинетическая энергия принимает максимальное значение, и, пренебрегая трением, можно записать закон сохранения энергии:

$$mgh = \frac{I\omega_{\max}^2}{2}. \quad (2)$$

Угловую скорость диска можно найти, взяв производную от  $\varphi$  из (1):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

тогда 
$$\omega_{\max} = \frac{2\pi\varphi_0}{T}. \quad (3)$$

Величину  $h$  можно найти, считая, что при повороте диска на малый угол  $\varphi_0$  можно приблизительно считать, что  $h_1 + h_2 \approx 2l$ . Тогда

$$h = h_1 - h_2 = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 + h_2} \approx \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l} = \frac{Rr\varphi_0^2}{2l}, \quad (4)$$

где учтено, что (см. рис.1)

$$h_1^2 = l^2 - (R-r)^2, \quad h_2^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi_0), \quad 1 - \cos \varphi_0 = 2 \sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right),$$
 а также, что вследствие

малости угла  $\varphi_0$ , синус можно заменить значением самого угла в радианах.

В результате подстановки (4) и (3) в (2), получим расчётную формулу для момента инерции маятника массой  $m$ :

$$I = \frac{T^2 mg R r}{4\pi^2 l} \quad (5)$$

По зависимости (5) можно рассчитать момент инерции как нагруженного исследуемой пластиной, так и ненагруженного диска В. Тогда, вследствие аддитивности, момент инерции исследуемого тела (пластины) легко определяется по формуле:

$$I_{\text{эксн}} = \frac{g \cdot R \cdot r}{4\pi^2 l} \left[ (m_1 + m_2) \langle T_2 \rangle^2 - m_1 \langle T_1 \rangle^2 \right] \quad (6)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы ненагруженного диска и исследуемой пластины соответственно, а  $T_1$  и  $T_2$  – период колебаний ненагруженного и нагруженного диска соответственно.

Момент инерции есть мера инертности тела при его вращательном движении. Это значит, что чем больше момент инерции, тем больший момент сил необходимо приложить к телу, чтобы заставить тело вращаться, если оно покоилось, или остановить, если вращалось.

Момент инерции материальной точки:  $I = mR^2$ , где  $m$  – масса точки, а  $R$  – расстояние от нее до оси вращения. Момент инерции – величина аддитивная, т.е. момент инерции системы материальных точек или твердого тела определяется как сумма моментов инерции частей, из которых состоит система или тело, т.е.  $I = \sum m_i R_i^2$  или  $I = \int dI = \int R^2 dm$  (\*)

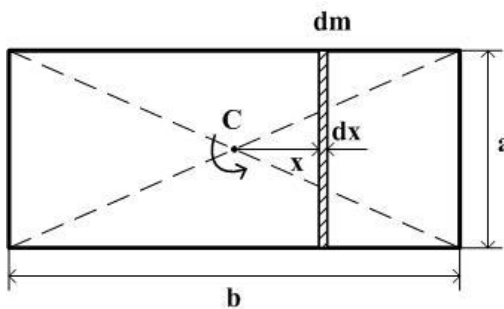
Момент инерции зависит от формы и размеров тела или системы, а также от положения и ориентации в пространстве оси, относительно которой определяется момент инерции.

Например, если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то относительно любой другой оси его можно рассчитать с помощью **теоремы Штейнера**: **момент инерции тела относительно произвольной оси  $O$  равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс  $C$   $I_C$ , и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями ( $OC = d$ )**, т.е.

$$I_O = I_C + m d^2.$$

Моменты инерции тел относительно оси, проходящей через центр масс  $I_C$  можно определить, пользуясь определением (\*) и разбивая тело на элементы

**1. Момент инерции плоской прямоугольной пластины относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно ее плоскости.**



Момент инерции выделенного элемента (в виде стержня массой  $dm$ , длиной  $a$  и толщиной  $dx$  как показано на рисунке) по теореме Штейнера:

$$dI = \frac{1}{12} dm \cdot a^2 + dm \cdot x^2$$

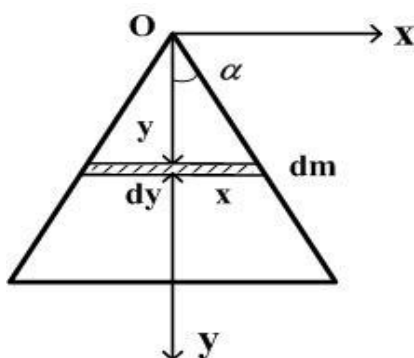
Из геометрических соображений  $dm/m = dx/b$ , откуда  $dm = (m/b) dx$ , тогда

$$dI = \frac{1}{12} \frac{m}{b} a^2 dx + \frac{m}{b} x^2 dx$$

Тогда момент инерции пластины:

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{12} \frac{m}{b} a^2 dx + \int_{-b/2}^{b/2} \frac{m}{b} x^2 dx = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

**2. Момент инерции плоской треугольной пластины относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно ее плоскости.**



Разобьем пластину на тонкие стержни массой  $dm$  длиной  $2x$  и высотой  $dy$ , как показано на рисунке. Так как для стержня длины  $l$  момент инерции относительно перпендикулярной оси, проходящей через центр масс равен  $I_C = \frac{1}{12} ml^2$ , то момент инерции такого стержня относительно оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости чертежа, по теореме Штейнера, равен:

$$dI = \frac{1}{12} dm (2x)^2 + dm \cdot y^2,$$

где массу стержня  $dm$  можно выразить из пропорции

$$\frac{dm}{m} = \frac{dS}{S},$$

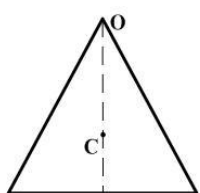
где  $dS = 2xdy$  – площадь стержня, а  $S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  – площадь равностороннего треугольника.

Тогда масса стержня:  $dm = \frac{m}{S}dS = \frac{8mxdy}{a^2\sqrt{3}}$ , а его момент инерции:

$$dI = \frac{8mxdy}{a^2\sqrt{3}} \left( \frac{x^2}{3} + y^2 \right)$$

С учетом того, что для равностороннего треугольника  $x = y \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = y/\sqrt{3}$ , получим:

$$dI = \frac{80}{27} \frac{my^3}{a^2} dy$$



Тогда  $I_0 = \frac{80}{27} \frac{m}{a^2} \int_0^{a\sqrt{3}/2} y^3 dy = \frac{5}{12} ma^2$ . Но по теореме Штейнера  $I_0 = I_C + m \cdot OC^2$ ,

тогда, учитывая, что  $OC = \frac{2}{3}a \frac{\sqrt{3}}{2}$ , получим выражение для  $I_C$ :

$$I_C = I_0 - m \cdot OC^2 = \frac{1}{12} ma^2$$

### Объекты исследования, оборудование

Крутильный маятник на трифилярном подвесе, набор дисков, секундомер.

Описание лабораторной установки

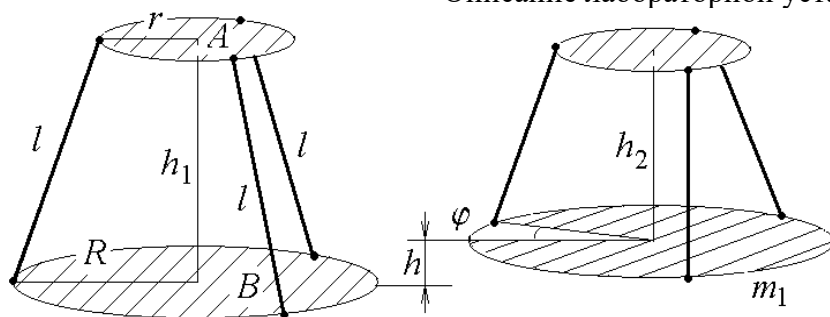


Рис.1. Схема установки

Моменты инерции различных тел могут быть измерены методом крутильных колебаний с помощью так называемого трифилярного подвеса. Трифилярный подвес состоит из диска  $B$  массой  $m_1$  радиуса  $R$ , подвешенного на трёх симметрично расположенных нитях длины  $l$  (см.рис.1). Наверху эти нити симметрично закреплены по краям диска  $A$  меньшего радиуса  $r$ . При повороте верхнего диска  $A$  на небольшой угол  $\varphi$  вокруг вертикальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр, все три нити принимают наклонное положение, центр тяжести системы несколько приподнимается. Нижний диск начинает совершать крутильные колебания.

### Рабочее задание

Измерить момент инерции дисков, сравнить результат с расчетными данными.

### Порядок выполнения работы

1. Измерить линейкой радиусы дисков  $R$  и  $r$ , а также длину нити  $l$ . Занести данные в Таблицу 1.
2. Резко повернуть рукой диск  $A$  до упора и отпустить. При этом нижний диск  $B$  должен совершать крутильные колебания, а верхний диск  $A$  должен остаться в покое из-за трения в оси.

3. С помощью секундомера определить время  $t_1$  полных  $n = 20$  колебаний ненагруженного диска. Опыт повторить три раза. Вычислить среднее значение  $\langle t_1 \rangle$  и среднее значение периода колебаний  $\langle T_1 \rangle = \langle t_1 \rangle / n$ . Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 1.

Таблица 1

$m_1$ , кг	$R$ , м	$r$ , м	$l$ , м	$t_1$ , с	$\langle t_1 \rangle$ , с	$\langle T_1 \rangle$ , с

4. Положить на нижний диск исследуемое тело так, чтобы центры масс тела и диска были на одной оси. Масса  $m_1$  диска  $B$  и масса исследуемого тела  $m_2$  указаны на установке.

5. Определить время  $t_2$  полных  $n = 20$  колебаний нагруженного диска. Опыт повторить три раза. Вычислить среднее значение  $\langle t_2 \rangle$  и среднее значение периода колебаний  $\langle T_2 \rangle = \langle t_2 \rangle / n$ . Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 2.

6. Используя экспериментальные данные, вычислить момент инерции  $I_{\text{эксп}}$  исследуемого тела по формуле

$$I_{\text{эксп}} = \frac{g \cdot R \cdot r}{4 \pi^2 l} \left[ (m_1 + m_2) \langle T_2 \rangle^2 - m_1 \langle T_1 \rangle^2 \right].$$

7. Измерить размеры исследуемого тела и из таблицы 3 для данной формы тела вычислить теоретический момент инерции  $I_{\text{теор}}$  тела относительно той же оси, что и при эксперименте.

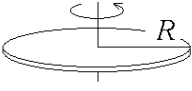
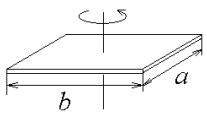
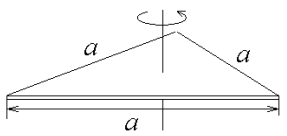
8. Сравнить теоретическое  $I_{\text{теор}}$  и экспериментальное  $I_{\text{эксп}}$  значения момента инерции. Для этого вычислить относительное отклонение  $I_{\text{эксп}}$  от  $I_{\text{теор}}$  по формуле  $E = \frac{\Delta I}{I_{\text{теор}}} \cdot 100\%$

9. С пункта 3 по 8 проделать аналогично измерения и вычисления с другими телами.

Таблица 2

Вид тела и его размеры	$m_2$ , кг	$t_2$ , с	$\langle t_2 \rangle$ , с	$\langle T_2 \rangle$ , с	$I_{\text{эксп}}$ , кг·м <sup>2</sup>	$I_{\text{теор}}$ , кг·м <sup>2</sup>	$I_{\text{эксп}} - I_{\text{теор}}$ , кг·м <sup>2</sup>	$\frac{\Delta I}{I_{\text{теор}}} \cdot 100\%$
Диск $R =$ м								
Прямоугольник $a =$ м $b =$ м								
Треугольник $a =$ м								

Таблица 3. Моменты инерции плоских тел относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно их плоскости.

		
Диск	Прямоугольник	Равностор. треугольник
$I_{\text{диска}} = \frac{1}{2} m R^2$	$I_{\text{пр}} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$	$I_{\text{тр}} = \frac{1}{12} m a^2$

### Содержание отчета

Заполненные таблицы 1 и 2.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается физический смысл момента инерции?
2. От чего зависит момент инерции?
3. Сформулируйте теорему Штейнера.
4. С помощью теоремы Штейнера объясните, относительно какой оси момент инерции тела минимален (максимален)?
5. Получите расчетную формулу для момента инерции плоской прямоугольной пластины относительно оси, проходящей через центр масс, и лежащей в плоскости пластины.
6. Получите расчетную формулу для момента инерции пластины в форме равностороннего треугольника относительно оси, лежащей в плоскости пластины и проходящей через одну из его сторон.
7. Как нужно проводить эксперимент в данной работе, чтобы расчетные формулы, которыми вы пользовались, были справедливы

## Лабораторная работа № 10 Определение коэффициента трения качения

**Цель работы:** определить коэффициент трения качения цилиндра по плоскости для различных пар металлических поверхностей и определить момент инерции сложной системы методом колебаний

### Теоретические сведения

Рассмотрим цилиндр, покоящийся на горизонтальной плоскости (рис.1,а). На него действуют две взаимно уравновешивающие силы: сила тяжести  $\vec{G} = m\vec{g}$ , где  $m$  – масса цилиндра, и нормальная реакция плоскости  $\vec{N}$ . Если цилиндр (колесо) катится по плоскости, то появляется трение качения. Можно выделить следующие причины его возникновения. И цилиндр и плоскость при качении деформируются. При этом происходят потери механической энергии, связанные: а) с работой, затрачиваемой на образование валика  $A$  деформированной плоскости перед катящимся цилиндром (рис.1,б); б) со сжатием плоскости перед катящимся; в) с преодолением мостиков сцепления – тех областей на поверхности соприкосновения цилиндра и плоскости, где из-за неровности поверхностей существуют настолько большие давления, что между молекулами цилиндра и плоскости возникают силы межмолекулярного притяжения и они в этих местах "сцепляются" друг с другом.

Эти три причины приводят к тому, что точка приложения нормальной реакции  $\vec{N}$  смещается на расстояние  $\delta$ , в результате возникает момент силы реакции, направленный по оси вращения, которая проходит перпендикулярно плоскости рисунка 1, и препятствующий качению цилиндра. Модуль этого момента

$$M_k = N\delta \quad (1)$$

Поэтому  $M_k$  называют моментом сопротивления качению, а величину  $\delta$ , численно равную смещению точки приложения реакции плоскости  $\vec{N}$  – коэффициентом трения качения. Коэффициент трения качения измеряется в единицах длины и, как показывает опыт  $\delta \ll R$  ( $R$  – радиус цилиндра).

В работе используются два жестко скрепленных цилиндра  $A$  и  $B$  с несовпадающими параллельными осями. Они могут вращаться на горизонтально расположенных образцах 1 различных металлов (рис.2) вокруг оси цилиндра  $A$  радиусом  $R$ . Стрелка  $D$ , прикрепленная к цилиндру  $A$ , фиксирует на шкале  $H$  линейное смещение колеблющейся системы от положения равновесия.  $III$  – штырьки для удержания образцов.

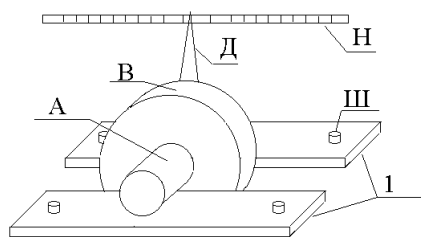


Рис.2

Так как оси цилиндров  $A$  и  $B$  не совпадают, то центр масс системы  $C$  находится на линии  $AB$  на расстоянии  $CA = l$  от оси цилиндра  $A$  (рис.3). Момент силы тяжести  $M_G = mgl \sin \varphi$  стремится

вернуть систему в положение равновесия и при малых углах поворота  $\varphi$  ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ) пропорцио-

нален смещению из положения равновесия  $\varphi$ . Это является условием гармонических колебаний, которые будет совершать система относительно положения равновесия  $\varphi = 0$  (стрелка  $D$  отклоняется то в одну сторону, то в другую сторону от положения  $O$  на шкале  $H$ ).

Из-за действия диссипативных сил трения колебания системы будут затухать. Определим уравнение этих колебаний. Запишем уравнение динамики вращательного движения системы относительно мгновенной оси вращения, проходящей через точку  $S$  касания цилиндра  $A$  с плоскостью перпендикулярно плоскости рисунка 3. Кроме момента силы тяжести действует момент сопротивления качению на цилиндр (1). Величина коэффициента тре-

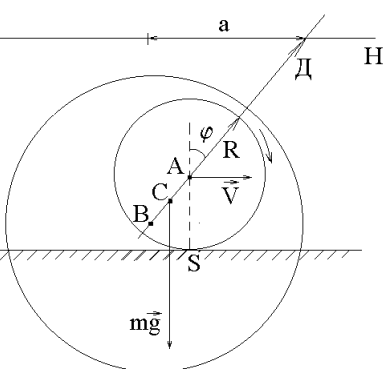


Рис.3

ния качения пропорциональна скорости  $V$  катящегося без проскальзывания цилиндра  $A$ . Если учесть связь линейной и угловой скорости цилиндра:  $V = R(d\varphi/dt)$ , то

$$\delta = kV = kR \frac{d\varphi}{dt}, \quad (2)$$

и из формулы (1)  $M_k = N\delta = G\delta = mgkR \frac{d\varphi}{dt}$ .

Тогда уравнение динамики имеет вид

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi - mgkR \frac{d\varphi}{dt} \quad (3)$$

где  $J$  – момент инерции системы относительно мгновенной оси вращения  $S$ ; знаки в уравнении (3) показывают, что моменты сил препятствуют увеличению угла отклонения  $\varphi$ .

При малых углах  $\varphi$  ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ) это уравнение аналогично динамическому уравнению затухающих колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + \omega_o^2 \varphi = 0, \quad (4)$$

где  $\beta = \frac{mgkR}{2J}, \quad (5)$

$$\omega_o^2 = \frac{mgl}{J}. \quad (6)$$

Поэтому угол отклонения стрелки  $D$  от положения равновесия изменяется по закону

$$\varphi = \varphi_o e^{-\beta t} \cos \omega t, \quad (7)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} - \quad (8)$

частота затухающих колебаний;  $\varphi_o$  – угол отклонения стрелки в начальный момент времени. Колеблющаяся таким образом система является разновидностью физического маятника.

Совершив  $n$  полных колебаний за время  $t = nT$  ( $T$  – период колебаний), стрелка отклонится на угол  $\varphi_n$  ( $\varphi_n < \varphi_o$ ). Так как линейное смещение  $a$  стрелки  $D$  вдоль шкалы  $H$  пропорционально углу поворота стрелки  $\varphi$ , то из (7) следует, что  $\varphi_n / \varphi_o = a_n / a_o = e^{-\beta nT}$  откуда получим  $\beta = \frac{1}{nT} \ln \frac{a_o}{a_n}$ .

Величину  $\theta = \frac{1}{n} \ln \frac{a_o}{a_n} \quad (9)$

называют логарифмическим декрементом затухания,

следовательно  $\beta = \frac{\theta}{T} \quad (10)$

Подставляя выражения (6) и (10) в формулу (8) и учитывая, что  $\omega = 2\pi/T$ , находим формулу для определения момента инерции  $J$  системы относительно мгновенной оси вращения  $S$ :

$$J = \frac{mglT^2}{4\pi^2 + \theta^2} \quad (11)$$

Из формул (5), (10) и (11) определим выражение для  $k$ :

$$k = \frac{2lT\theta}{R(4\pi^2 + \theta^2)} \quad (12)$$

В данной работе можно лишь приближенно оценить коэффициент трения качения. Для этого воспользуемся формулами (2) и (7). Найдем производную  $\frac{d\varphi}{dt}$ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_o (-\beta e^{-\beta t} \cos \omega t - \omega e^{-\beta t} \sin \omega t)$$

Максимальная скорость движения центра цилиндра  $A$  достигается при нулевом угле отклонения  $\varphi$ . Это условие выполняется, когда  $\cos \omega t = 0$  ( $\sin \omega t = 1$ ). Для упрощения вычислений можно положить  $e^{-\beta t} \approx 1$  (амплитуда слабо уменьшается за время первого колебания).

Тогда 
$$\frac{d\varphi}{dt} \approx \varphi_o \omega$$

Таким образом, максимальную скорость качения цилиндра, а также оценку для коэффициента трения качения можно описать следующей формулой

$$\delta = kV = kR \frac{d\varphi}{dt} \approx kR \varphi_o \omega \approx kR \cdot \arcsin \left( \frac{a_o}{|AD| + R} \right) \frac{2\pi}{T} \quad (13)$$

Под цилиндр  $A$  подкладывают плоские пластинки из различного материала, что позволяет определить коэффициенты трения цилиндра для различных пар (цилиндр-пластинка) и сравнить полученные результаты.

### Закон сохранения полной механической энергии.

Полная механическая энергия консервативной системы, находящейся в стационарном потенциальном поле, постоянна. Если работа сил стационарного поля над частицей не зависит от пути, пройденного частицей, а зависит только от начального и конечного положения частицы, то такие силы называются консервативными, а поле потенциальным.

### Закон изменения механической энергии.

Приращение механической энергии частицы равно работе неконсервативных сил.

## Объекты исследования, оборудование

Массивный цилиндр, набор пластинок из различных металлов, секундомер.

### Порядок выполнения работы

1. Поставить колебательную систему на металлические пластинки из одного металла так, чтобы она не касалась стенок прорези, а стрелка показывала нуль.
2. Задать начальное отклонение (амплитуду)  $a_0 = 40$  мм. Определить время  $t$  для  $n$  полных колебаний ( $n=10$ ), амплитуду  $a_n$   $n$ -го колебания и величину периода по формуле  $T=t/n$ . Повторить измерения 5 раз. Начальная амплитуда  $a_0$  должна быть одинаковой. Данные измерения занести в табл.1 и вычислить средние значения  $\langle a_n \rangle$  и  $\langle T \rangle$ .
3. Измерения повторить для пластинок из двух других металлов и данные также занести в табл.1.
4. Подставляя средние значения  $\langle a_n \rangle$  и  $\langle T \rangle$  в формулы (9), (11), (12) и (13), определить логарифмический декремент затухания  $\theta$ , момент инерции  $J$ , коэффициент пропорциональности  $k$  и коэффициент трения качения  $\delta$  для каждой пары металлов (цилиндр-пластинка). Значения  $m$ ,  $l$  и  $R$  даны на установке.
5. Сравнить полученные в трех опытах значения момента инерции  $J$ , вычислить его среднее значение  $\langle J \rangle$ . Все данные занести в табл.2.

Таблица 1

$m = \dots$  кг,  $R = \dots$  м,  $l = \dots$  м,  $|AD| = \dots$  м,  $a_0 = \dots$  м.

Название материала											
1.				2.				3.			
$t$ , с	$n$	$T$ , с	$a_n$ , м	$t$ , с	$n$	$T$ , с	$a_n$ , м	$t$ , с	$n$	$T$ , с	$a_n$ , м
$\langle T \rangle =$		$\langle a_n \rangle =$		$\langle T \rangle =$		$\langle a_n \rangle =$		$\langle T \rangle =$		$\langle a_n \rangle =$	

Таблица 2



1.			2.			3.		
$\theta_1$	J, кг·м <sup>2</sup>	$k_1$ , с	$\theta_2$	J, кг·м <sup>2</sup>	$k_2$ , с	$\theta_3$	J, кг·м <sup>2</sup>	$k_3$ , с
$\delta_1$ , м			$\delta_2$ , м			$\delta_3$ , м		

$$\langle J \rangle = \dots\dots\dots \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

### Содержание отчета

Заполненные таблицы 1 и 2.

### Контрольные вопросы

1. Каков механизм возникновения момента сил трения качения?
2. Каков физический смысл коэффициента трения качения? В чем причина затухания колебаний системы?
3. Чему равен момент сил сопротивления качению, как он направлен?
4. Когда сохраняется и когда изменяется полная механическая энергия системы?
5. Что такое логарифмический декремент затухания?
6. Что такое динамическое уравнение затухающих колебаний?
7. Выведите расчетные формулы для определения момента инерции J (11) и коэффициента K (12).

### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с.- гл.III, §21, 24, гл.VII, §53, 54

## Лабораторная работа №11

### Определение силы трения скольжения

**Цель работы:** экспериментально определить силу трения скольжения, используя законы сохранения импульса и изменения механической энергии.

#### Теоретические сведения

На любое движущееся тело действуют силы трения.

Внешним (сухим) трением называют явление, заключающееся в возникновении касательных сил, препятствующих относительному перемещению тел, в месте контакта этих тел. Если тела неподвижны друг относительно друга, то говорят о трении покоя; при их относительном перемещении говорят о трении скольжения.

Г.Амонтон и Ш.Кулон установили опытным путем закон статического трения: Предельное значение силы статического трения прямо пропорционально значению силы нормального давления тела на опору, т.е.

$$F_{тр}^* = \mu^* N; \quad (1)$$

где  $\mu^*$  – коэффициент статического трения;  $\mu^*$  зависит от материала и состояния поверхности соприкасающихся тел.

Для трения скольжения закон Амонтона-Кулона записывается аналогично (1):

$$F_{тр} = \mu N \quad (2)$$

где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения.

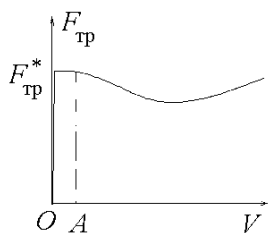


Рис.1

При малых скоростях на малом интервале ОА сила трения приближенно постоянна, затем уменьшается, достигает минимума и начинает возрастать (рис.1). Строгой теории сил трения еще нет, но можно дать следующее объяснение возникновению сил трения.

На поверхностях тела и поверхности имеются отдельные выступы, за которые они цепляются. При зацеплении их существенную роль играют силы молекулярного притяжения. Соприкосновение тел происходит в действительности на отдельных участках. Их общая площадь значительно меньше видимой площади соприкосновения. На этих участках создаются высокие местные давления, которые вызывают деформации поверхностного слоя и взаимное внедрение отдельных микрочастей тел.

При действии сил трения скольжения всегда происходит превращение механической энергии во внутреннюю, в результате тела нагреваются. Силу трения поэтому называют диссипативной. Работа силы трения по любому пути обычно отрицательная ( $A_{тр} < 0$ ).

Для определения силы трения скольжения в данной работе применимы законы сохранения

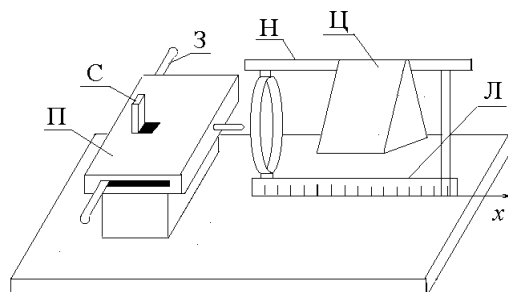


Рис.2

импульса и изменения механической энергии при неупругом соударении пули с цилиндром. При выстреле из пружинного пистолета П пуля попадает в цилиндр Ц, перемещаясь с ним по направляющей Н (рис.2). По шкале линейки Л определяется величина перемещения цилиндра с пулей при действии силы трения скольжения в месте контакта цилиндра с направляющей.

Рассмотрим систему "пуля-цилиндр". В направлении выстрела (ось  $x$ ) сохраняется проекция импульса этой системы, т.е.

$$m_1 V_x = (m_1 + m_2) U_x \quad (3)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы пули и цилиндра соответственно;  $V_x$  и  $U_x$  – проекции скоростей пули до удара и системы после удара пули соответственно.

На систему "пуля-цилиндр" после удара действует сила трения скольжения. Учитывая, что потенциальная энергия этой системы не изменяется, применяем закон изменения механической энергии:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)U^2 = F_{\text{тр}}l, \quad (4)$$

где  $F_{\text{тр}}l$  – абсолютное значение работы силы трения скольжения при перемещении цилиндра с пулей на расстояние  $l$ .

Аналогично имеем для системы "пружина-затвор-пуля":

$$\frac{kx^2}{2} - \frac{(m_1 + m_3)V^2}{2} = F'_{\text{тр}}x, \quad (5)$$

где  $k$  – коэффициент упругости;  $x$  – деформация пружины;  $m_3$  – масса затвора (затвор остается в стволе);  $F'_{\text{тр}}$  – абсолютное значение работы силы трения при перемещении затвора с пулей в стволе на пути  $x$  (ввиду ее малости принимаем равной нулю).

Из (3), (4) и (5) получаем

$$F_{\text{тр}} = \frac{kx^2m_1^2}{2(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)} \cdot \frac{1}{l}. \quad (6)$$

Примечание. Величины  $k$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  указаны на установке; а так как  $m_3 \approx 0$ , то формулу (6) можно упростить

$$F_{\text{тр}} = \frac{kx^2m_1}{2(m_1 + m_2)} \cdot \frac{1}{l} \quad (7)$$

### Закон сохранения полной механической энергии

*Полная механическая энергия консервативной системы, находящейся в стационарном потенциальном поле, постоянна:*

$$K + U_{\text{соб}} + U_{\text{внеш}} = \text{const}$$

где  $U_{\text{соб}}$  – собственная потенциальная энергия системы – это энергия взаимодействия друг с другом всех частиц системы. Она зависит от взаимного расположения частиц системы;  $U_{\text{внеш}}$  – внешняя потенциальная энергия системы – это сумма потенциальных энергий всех ее частиц, находящихся во внешнем стационарном потенциальном поле;  $K$  – кинетическая энергия системы – это сумма кинетических энергий составляющих ее частиц.

Если работа сил стационарного поля над частицей не зависит от пути, пройденного частицей, а зависит только от начального и конечного положения частицы, то такие силы называются *консервативными*, а поле *потенциальным*.

### Закон изменения механической энергии.

*Приращение механической энергии частицы равно работе неконсервативных сил.*

### Закон сохранения импульса

*Замкнутой системой* называется система, на которую не действуют никакие внешние тела (или их взаимодействием можно пренебречь).

*Импульс системы частиц остается постоянным, т.е. не меняется со временем, если система замкнута или сумма всех внешних сил, действующих на частицы этой системы, равна нулю:*

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i(t) = \text{const}$$

У незамкнутой системы может сохраняться **не импульс  $\vec{p}$ , а его проекция  $p_x$**  на направление  $x$ , если результирующая проекций всех внешних сил на это направление равна нулю.

### Закон изменения импульса.

*Производная импульса по времени оказывается равной векторной сумме всех внешних сил (векторная сумма всех внутренних сил равна нулю), действующих на частицы системы*

$$d\vec{p} / dt = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$$

### Объекты исследования, оборудование

Пружинный пистолет, пули, установка с подвижным цилиндром и линейкой для измерения смещения подвижных частей установки.

### Рабочее задание

Получить значения силы трения и коэффициента трения.

### Порядок выполнения работы

1. Отвести затвор 3 пистолета П в крайнее положение (фиксирование его происходит автоматически). Смещение затвора соответствует сжатию  $x$  пружины. Поместить пулю в ствол пружинного пистолета.
2. Переместить цилиндр Ц в сторону ствола пистолета до упора.
3. Нажатием сверху вниз на спуск С произвести выстрел. По шкале линейки Л определить перемещение  $l$  цилиндра с пулей.
4. Опыт повторить 5 раз, найти среднее значение  $\langle l \rangle$ .
5. Вычислить  $\langle F_{\text{тр}} \rangle$ , подставляя  $l = \langle l \rangle$  в (7). Результаты измерений и вычислений записать в табл.1 и 2.

Таблица 1.

$l, \text{ м}$					
----------------	--	--	--	--	--

Таблица 2.

$x, \text{ м}$	$m_1, \text{ кг}$	$m_2, \text{ кг}$	$k, \text{ Н/м}$	$\langle l \rangle, \text{ м}$	$\langle F_{\text{тр}} \rangle, \text{ Н}$

### Содержание отчета

Заполненные таблицы 1 и 2.

### Контрольные вопросы

1. Сформулировать закон Амонтона-Кулона.
2. Сформулировать закон сохранения и изменения импульса.
3. В каких случаях можно применять закон сохранения импульса для незамкнутых систем?
4. Вывести расчетную формулу для определения силы трения скольжения.
5. Сформулировать закон сохранения и изменения механической энергии.
6. Определить путь, проходимый телом до остановки, если заданы начальная скорость  $U_0$  тела после удара и коэффициент трения  $\mu$  тела о поверхность.

### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с.- гл. II, §15, 20-22, 24, 27

# Лабораторная работа № 12

## Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника

**Цель работы:** экспериментально определить ускорение свободного падения с помощью физического маятника.

### Теоретические сведения

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити. Физическим маятником называется любое твердое тело, способное совершать колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ , лежащую выше его центра масс  $C$ .

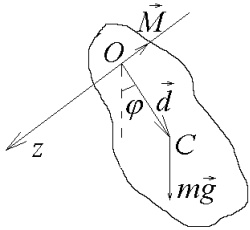


Рис. 1

Отклоним маятник из положения равновесия на некоторый угол  $\varphi$  (рис.1) и отпустим. Возникает вращающий момент силы тяжести  $\vec{M} = [\vec{d}, m\vec{g}]$ , проекция которого на ось  $z$  равна  $M_z = -mgd \sin \varphi$ , где  $m$  – масса тела;  $d$  – расстояние от оси вращения  $z$  до центра масс  $C$ . Знак минус выражает тот факт, что момент  $M_z$  стремится уменьшить угол  $\varphi$ . При малых колебаниях угол  $\varphi$  мал и можно положить  $\sin \varphi \approx \varphi$ , поэтому

$M_z = -mgh \cdot \varphi$ . Применяя уравнение динамики вращательного движения  $M_z = J \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ , получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний физического маятника:  $J \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgd \cdot \varphi$

или  $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{J} \varphi = 0$ . Сравнивая это уравнение с уравнением колебаний материальной точки

$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0$  можно найти собственную частоту колебаний физического маятника  $\omega_o = \sqrt{mgd/J}$

или выразить период

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (1)$$

где  $l = J / md$  – (2)

приведенная длина физического маятника (длина нити математического маятника с таким же периодом, что и у физического).

В данной работе физический маятник представляет собой металлический стержень, в центре которого жестко закреплен массивный груз (рис.2). На верхней половине стержня находится призма, которую можно перемещать и закреплять в выбранном положении. Экспериментально устанавливается зависимость периода колебаний маятника от расстояния между ребром  $A$  призмы и центром масс  $C$ . Вид графика приведен на рис.3.

Для произвольного значения периода  $T_i$  прямая, параллельная оси абсцисс, дает две точки пересечения с кривой: 1 и 2. То есть, располагая ребро призмы в точке 1, находящейся на расстоянии  $d_1$  от  $C$ , а затем в точке 2, находящейся на расстоянии  $d_2$  от  $C$ , получим одинаковые значения периода колебаний маятника:  $T_1 = T_2 = T$ . Тогда на основании (1) и (2) получаем, что приведенная длина  $l_1$  относительно точки 1 равна приведенной длине  $l_2$  маятника относительно точки 2.

Используя выражение (2), имеем

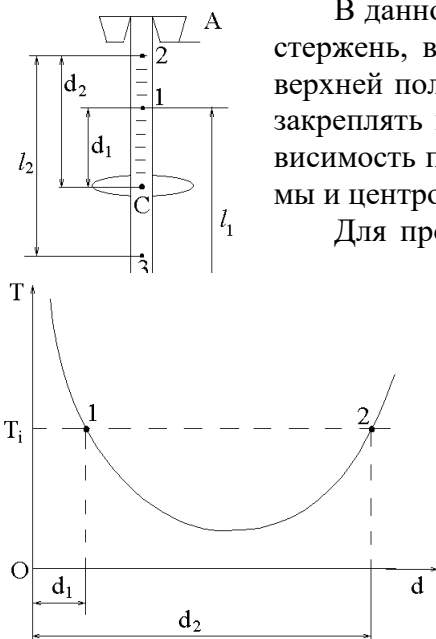


Рис.3

$$l = \frac{J_1}{md_1}, \quad l = \frac{J_2}{md_2}. \quad (3)$$

По теореме Штейнера

$$J_1 = J_C + md_1^2 \quad \text{и} \quad J_2 = J_C + md_2^2 \quad (4)$$

где  $J_C$  – момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс  $C$  и параллельной оси колебаний маятника.

### Теорема Штейнера

Момент инерции тела  $J$  относительно произвольной оси  $A$  равен моменту инерции  $J_C$  этого тела относительно оси, **параллельной данной и проходящей через центр масс  $C$** , сложенному с произведением массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между осями:  $J_2 = J_C + md_2^2$

Подставляя (4) в (3), исключая  $J_C$  и сокращая на  $m$ , получаем

$$l = d_1 + d_2 \quad (5)$$

Таким образом, имея экспериментальную кривую (см.рис.3) для любого значения  $T$  и проведя горизонтальную прямую, по формуле (5) определим  $l$ . Тогда из (1) найдем ускорение свободного

падения 
$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (6)$$

На прямой, соединяющей точку подвеса  $A$  с центром масс  $C$  на расстоянии  $l$  (т.е. на расстоянии, равном приведенной длине физического маятника) от 2, находится точка 3. Эта точка называется центром качания. Если перевернуть маятник и ось колебания будет проходить через точку 3, то период его колебаний не изменится. Точки 2 и 3 называются **сопряженными** (см. рис.2). Также будут сопряженными точки 1 и 4.

### Объекты исследования, оборудование

Опорная призма, стержень, секундомер.

### Рабочее задание

Найти значение ускорения свободного падения.

### Порядок выполнения работы

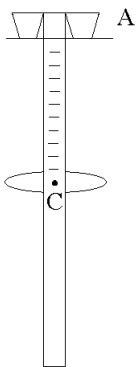


Рис. 4

1. Опорную призму укрепить на конце стержня так, чтобы ее ребро  $A$  было на уровне ближайшей риски стержня, как показано на рис.4.

2. Измерить расстояние  $d$  от ребра призмы до центра масс  $C$  стержня (на верхней половине стержня указаны значения рисок через 10 см от центра  $C$ ).

3. Ребром опорной призмы установить маятник на подставку посередине прорези перпендикулярно ей и отклонить на угол  $4^\circ$  (коснитесь грузом стены).

4. Секундомером измерить время  $t_i$  полных  $n_1 = 10$  колебаний (начинать отсчет времени при прохождении маятником любого крайнего положения). Вычислить период колебаний  $T_i = t_i/n_1$ .

5. Так же определить величину периода, перемещая каждый раз опорную призму на три сантиметра к центру стержня. Получить значения 15 периодов.

6. По полученным данным построить график зависимости периода колебаний  $T$  от расстояния  $d$  (рис. 3).

7. Для произвольного значения периода  $T_i$  провести прямую, параллельную оси абсцисс, которая даст две точки пересечения с кривой:  $d_1$  и  $d_2$ .  $d_1 + d_2 = l$  – приведенная длина маятника при этом периоде колебаний.

8. По формуле (6) определить ускорение свободного падения.

9. Аналогично подсчитать  $g_i$  еще четыре раза, беря другие значения  $T_i$  и определяя соответствующие им  $l$ .

10. Найти среднее значение  $\langle g \rangle$ .

11. Случайные отклонения каждого измерения ускорения свободного падения определить по формуле  $\Delta g_i = g_i - \langle g \rangle$ , а среднее квадратичное отклонение –  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta g_i)^2}$ . Погрешность результата  $\Delta g = S / \sqrt{n}$ .

12. Данные измерений и вычислений занести в табл.1-2.

Таблица 1.

$d, \text{ м}$								
$t, \text{ с}$								
$T, \text{ с}$								

Таблица 2.

$T_i, \text{ с}$	$d_1, \text{ м}$	$d_2, \text{ м}$	$g_i, \text{ м/с}^2$	$(\Delta g_i)^2, \text{ м/с}^2$	$\langle g \rangle$	$S, \text{ м/с}^2$	$\Delta g, \text{ м/с}^2$

### Содержание отчета

Заполненные таблицы 1 и 2. Значение ускорения свободного падения, записанное в виде  $g = (\langle g \rangle \pm \Delta g)$ , м/с<sup>2</sup>.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение математического и физического маятника.
2. Выведите формулу периода колебаний физического маятника.
3. Что такое приведенная длина? Как она связана с моментом инерции физического маятника?
4. Что такое сопряженные точки?
5. Сформулируйте теорему Штейнера.
6. Шар и диск с одинаковыми радиусами и массами совершают колебания относительно горизонтальной оси, проходящей по касательной к поверхности. Равны ли частоты их колебаний?

### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с.- гл.IV, §33, гл.V, §39, гл.VI, §46, гл.VII, §54

## Лабораторная работа № 13 Изучение колебаний пружинного маятника

**Цель работы:** изучить собственные колебания пружинного маятника (незатухающие в воздухе и затухающие в жидкости), определить характеристики затухающих колебаний.

### Теоретические сведения

Гармонические колебания представляют собой периодический процесс, в котором изменение величины происходит по закону косинуса (или синуса). Например, проекция радиуса-вектора  $\vec{r}$  точки, движущейся по окружности, на ось  $x$ , лежащую в плоскости движения точки (рис.2), изменяется со временем по косинусоидальному закону. Если окружность имеет радиус  $A = |\vec{r}|$ , а угловая скорость вращения точки  $\omega$  постоянна, то проекция

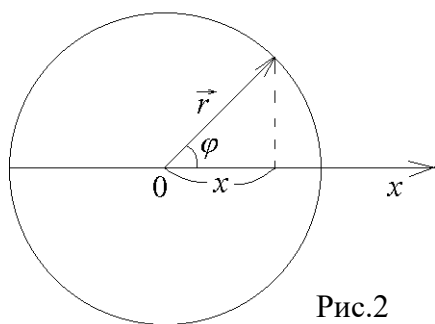


Рис.2

$$x = A \cos \varphi = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Период изменения  $x$ , очевидно, будет равен  $T = 2\pi/\omega$ , где  $T$  – время одного оборота точки, через которое весь процесс в точности повторяется;  $\omega$  – циклическая (круговая) частота;  $\varphi_0$  – начальный угол поворота относительно оси  $x$ . Следовательно,  $\omega$  отличается множителем  $2\pi$  от частоты  $\nu$ :

$$\omega = 2\pi\nu$$

Так как максимальное значение косинуса равно единице, то максимальное значение  $x$  равно  $A$ . Это максимальное значение называется амплитудой колебаний.

Аргумент косинуса  $(\omega t + \varphi_0)$  носит название фазы колебаний, а  $\varphi_0$  – начальной фазы колебаний.

Пусть теперь гармонические колебания вдоль оси  $x$  совершает материальная точка массой  $m$ . Выясним, какая при этих условиях на нее должна действовать сила.

Проекция скорости точки на ось  $x$

$$v_x = dx/dt = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0),$$

проекция ускорения

$$a_x = dv_x/dt = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

По второму закону Ньютона

$$F_x = ma_x = -m\omega^2 x = -kx$$

где  $k$  – постоянный коэффициент.

Таким образом, для того чтобы материальная точка совершала гармонические колебания, действующая на нее сила должна быть пропорциональна  $x$  и направлена в сторону, противоположную смещению  $x$ . Такая сила называется упругой (или в общем случае – квазиупругой).

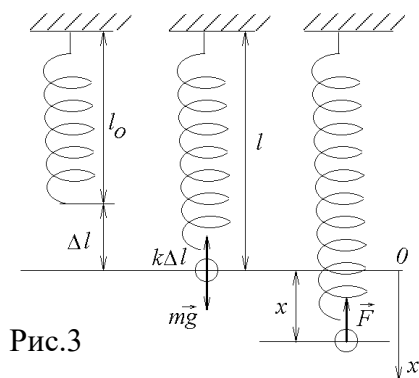


Рис.3

Рассмотрим систему, состоящую из груза массой  $m$ , подвешенного на пружине, массой которой можно пренебречь (рис.3). Пусть  $l_0$  – длина пружины без подвешенного к ней груза, тогда под тяжестью груза пружина растянется на  $\Delta l = l - l_0$ . В положении равновесия модуль силы тяжести  $mg$  равен модулю упругой силы  $k\Delta l$ :  $mg = k\Delta l$ , где  $k$  – коэффициент упругости пружины.

Если вывести груз из положения равновесия 0, то на груз будет действовать дополнительная сила упругости, проекция которой на направленную вниз ось  $x$  будет равна  $F_x = -kx$  (закон Гука). Под действием этой силы груз, после смещения на  $x = A$  и предоставленный самому себе, будет совершать гармонические колебания. Основное уравнение динамики поступательного движения (второй закон Ньютона) для груза принимает вид



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (4)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x = A \cos \omega_0 t \quad (5)$$

Функция (5) - это закон движения груза на пружине, где  $A$  - амплитуда колебания, т.е. наибольшее отклонение груза от положения равновесия. Подставляя решение (5) в (4), получаем

$$-m\omega_0^2 A \cos \omega_0 t = -kA \cos \omega_0 t$$

Отсюда собственная частота системы

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Так как  $T = 2\pi/\omega_0$ , то  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

В рассмотренном примере не учитывалась сила сопротивления, поэтому колебания считались незатухающими.

### Затухающие колебания

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, под действием которых колебания будут затухать. При достаточно малых скоростях движения сила сопротивления  $\vec{F}$  пропорциональна скорости  $\vec{v}$  ( $r$  - коэффициент сопротивления среды):

$$\vec{F} = -r\vec{v}$$

или в проекции на ось  $x$ :

$$F_x = -r dx/dt$$

Знак минус обусловлен тем, что сила  $\vec{F}$  и скорость  $\vec{v}$  имеют противоположное направление.

По второму закону Ньютона найдем уравнение затухающих колебаний:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} \quad (6)$$

Решением уравнения движения (6) является функция (закон движения)

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0) \quad (7)$$

Постоянные  $A_0$  и  $\alpha_0$  могут быть любыми, в зависимости от начальных условий движения. Отметим, что  $A_0$  - это начальная амплитуда;  $\beta$  - коэффициент затухания;  $(\omega t + \alpha_0)$  - фаза колебания, а  $\alpha_0$  - начальная фаза колебания,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , а  $\beta = \frac{r}{2m}$ . Коэффициент  $\beta$  характеризует скорость затухания колебаний, т.е. уменьшение амплитуды за единицу времени.

Если коэффициент затухания системы очень большой, то может выполняться условие  $\beta > \omega_0$ . В этом случае гармонических колебаний не возникнет, а будет наблюдаться аperiодическое движение груза.

На рис.4 представлен график зависимости  $x$  от  $t$  для затухающих колебаний.

Быстроту затухания в зависимости от числа колебаний характеризуют логарифмическим декрементом затухания. Логарифмический декремент затухания  $\theta$  равен натуральному логарифму отношения двух соседних амплитуд одного знака:

$$\theta = \ln \frac{A_0}{A_1}.$$

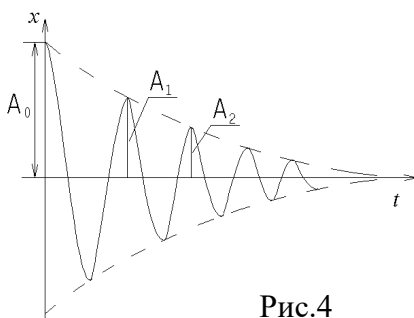


Рис.4

Если известна  $A_0$  - начальная амплитуда и  $A_n$  - амплитуда через

$n$  периодов (или через  $n$  полных колебаний), то логарифмический декремент затухания

$$\theta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n}.$$

Коэффициент затухания  $\beta$  характеризует затухание колебаний за единицу времени, а логарифмический декремент затухания  $\theta$  - затухание колебаний за период, следовательно:  $\theta = \beta T$ .

### Объекты исследования, оборудование

Установка с упругой пружиной, набор грузов, секундомер.

Описание установки

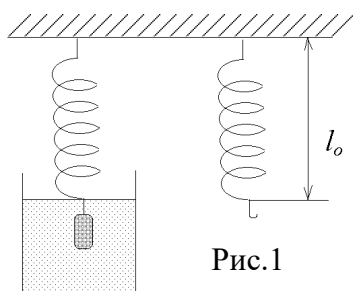


Рис.1

В данной работе маятник представляет собой пружину малой массы с грузом массы  $m$  на ее конце (см.рис.1). Выведенный из положения равновесия и предоставленный самому себе груз маятника будет совершать собственные колебания. Сопротивление воздуха сравнительно невелико и его можно не учитывать. Тогда период колебаний груза определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1)$$

где  $k$  - коэффициент упругости пружины.

Коэффициент упругости пружины  $k$  можно найти статическим методом. Если  $l_0$  - длина пружины в ненагруженном состоянии, а  $l$  - длина пружины с грузом в состоянии равновесия, то в этом случае модуль силы тяжести  $mg$  равен модулю силы упругости  $k(l - l_0)$ ;

$$mg = k(l - l_0), \text{ откуда } k = mg / (l - l_0) \quad (2)$$

Коэффициент  $k$  численно равен силе, которую нужно приложить к пружине при упругой деформации, чтобы растянуть (или сжать) пружину на единицу длины.

Из формулы (1) имеем

$$k = 4\pi^2 m / T^2 \quad (3)$$

Выражение (3) позволяет определить значение  $k$  динамическим способом и предоставляет возможность сравнить его со значением, полученным статическим методом по формуле (2).

На пружине, расположенной слева на рис.1, изучаются затухающие колебания груза в жидкости. Опытным путем определяются период колебаний, начальная  $A_0$  и через  $n$  колебаний  $A_n$  амплитуды и подсчитывается логарифмический декремент затухания  $\theta$ , коэффициент затухания  $\beta$  и коэффициент сопротивления  $r$ .

### Рабочее задание

Найти значения логарифмического декремента колебаний, коэффициент затухания и коэффициент сопротивления пружинного маятника.

### Порядок выполнения работы

1. Определить по шкале «естественную» длину  $l_0$  пружины, укрепленной справа на установке.
2. При трех различных грузах в положении равновесия определить длину пружины  $l$ .
3. В каждом опыте вычислить коэффициент упругости пружины в соответствии с формулой (2) и найти его среднее значение  $\langle k \rangle$ . Массы всех грузов указаны на них. Данные занести в табл.1.

Таблица 1.

$l_0$ , м	$m$ , кг	$l$ , м	$k$ , Н/м	$\langle k \rangle$ , Н/м

4. Подвесить груз к этой же пружине и вывести маятник из положения равновесия, сместив вниз на 2-3 мм, и отпустить. Секундомером измерить время  $t$  полных  $n = 10$  колебаний (начинать

отсчет при прохождении грузом верхнего или нижнего положения). Тогда период колебаний  $T/n$ . Опыт повторить 3 раза с этим грузом и найти среднее значение периода  $\bar{T}$ .

5. То же проделать еще с двумя грузами различной массы. Данные занести в табл.2.

$n = \dots$

Таблица 2.

$m$ , кг	$t$ , с	$T$ , с	$\bar{T}$ , с	$\bar{T}^2$ , с <sup>2</sup>	$k$ , Н/м	$\langle k \rangle$ , Н/м

6. Постройте график зависимости  $T^2$  от массы грузов  $m$ . Используя этот график и формулу (3), определить значение коэффициента упругости  $k$ : сравнить его со значением, полученным по формуле (2).

7. Опыт проделать с пружинным маятником, груз которого помещен в сосуд с водой. Вывести груз из положения равновесия, например на  $A_0 = 20$  мм, и, отпустив его, включить одновременно секундомер. Определить время, за которое он совершит  $n_1 = 20$  полных колебаний, а также амплитуду колебаний после  $n_1$  колебаний  $A_n$ . Опыт выполнить 3 раза и найти среднее значение периода  $\bar{T}_1$  и амплитуды  $n_1$ -го колебания  $A_n$ .

Таблица 3.

$m$ , кг	$A_0$ , мм	$A_n$ , мм	$n_1$	$t_1$ , с	$T_1$ , с	$\bar{T}_1$ , с	$\bar{A}_n$ , мм	$\bar{\theta}$	$\beta$ , с <sup>-1</sup>	$r$ , кг/с <sup>2</sup>

8. Вычислить логарифмический декремент затухания  $\theta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_0}{A_n}$ ; коэффициент затухания

$\beta = \frac{\theta}{\bar{T}_1}$  и коэффициент сопротивления  $r = 2m_1\beta$ . Данные измерений и вычислений занести в табл.3.

### Содержание отчета

Заполненные таблицы 1-3.

### Контрольные вопросы

1. Каковы необходимые условия для возбуждения гармонических колебаний в механической системе?
2. Чем определяется период, амплитуда и начальная фаза свободных механических гармонических колебаний?
3. При каком условии колебания данного пружинного маятника не будут возбуждаться, движение его будет апериодическим?
4. Каков физический смысл коэффициента упругости пружины?
5. Каков физический коэффициент затухания, логарифмического декремента затухания? Как они связаны друг с другом?
6. Записать динамические уравнения и законы движения груза на пружине.
7. Получить формулу периода колебаний пружинного маятника.

### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с.- гл.VII, пар.50, 53, 58

Лабораторная работа № 14  
Определение показателя адиабаты методом  
Клемана и Дезорма

**Цель работы:** определить показатель адиабаты и сравнить его величину с теоретическим значением.

**Теоретические сведения**

Среди процессов, происходящих с газами, часто встречается и очень важен *адиабатический процесс, протекающий без передачи тепла*. Чтобы получить его уравнение, воспользуемся первым началом термодинамики. Его формулировка: *теплота, сообщаемая системе (газу), идет на изменение внутренней энергии системы и на совершение системой работы над внешними силами (против действия внешних сил)*

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Для записи передаваемого тепла удобно ввести понятие теплоемкости  $C = \frac{\delta Q}{dT}$  - это величина, равная количеству теплоты, которую надо сообщить системе, чтобы повысить ее температуру на 1 К. Далее этим символом будем обозначать молярную теплоемкость, относящуюся к 1 молю вещества.

Величина теплоемкости зависит от способа, которым системе сообщается тепло. Процессы с постоянной теплоемкостью называются политропическими. Одним из таких процессов является процесс нагревания идеального газа при постоянном объеме (*изохорический процесс*). Молярная теплоемкость такого процесса обозначается  $C_V$ .

Так как работа, совершаемая газом при увеличении его объема на  $dV$  равна  $\delta A = pdV$ , то при изохорическом процессе работа газом не совершается, т.е.  $\delta Q = dU$  и

$$C_V = \left. \frac{\delta Q}{dT} \right|_{V=const} = \frac{dU}{dT}.$$

Отсюда, изменение внутренней энергии одного моля идеального газа будет  $dU = C_V dT$ , а для произвольной массы  $m$  газа  $dU = \frac{m}{\mu} C_V dT$ .

Тогда первое начало термодинамики для идеального газа можно записать в виде:

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C dT = \frac{m}{\mu} C_V dT + pdV. \quad (1)$$

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется *изобарическим*, а молярная теплоемкость для такого процесса обозначается  $C_P$ . Найдем связь между теплоемкостями для упомянутых процессов. Для этого нам понадобится уравнение состояния для одного моля идеального газа

$$RT = pV, \quad (2)$$

где  $R$  - универсальная газовая постоянная. Отсюда, при  $p=const$ , находим, что  $\left. \frac{dV}{dT} \right|_{P=const} = \frac{R}{P}$ , а из уравнения (1) имеем

$$C_P = \frac{C_V dT + pdV}{dT} = C_V + p \left( \frac{dV}{dT} \right) = C_V + R. \quad (3)$$

Эта связь молярных теплоемкостей называется *уравнением Майера*.

Теперь рассмотрим адиабатический процесс, для которого  $\delta Q = 0$ , и первое начало термодинамики (1) для одного моля идеального газа запишется в виде:

$$pdV = -C_V dT. \quad (4)$$

В уравнении состояния (2) для одного моля идеального газа меняются все термодинамические параметры,  $p$ ,  $V$ , и  $T$ . Вычисляя дифференциал, получим  $dT = \frac{pdV + Vdp}{R}$ . Подставляя это выражение в уравнение (4), находим, что  $(C_V + R)pdV = C_PpdV = -C_VVdp$ .

Отношение  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  называется *показателем адиабаты*. В последнем полученном уравнении

разделим переменные и проинтегрируем:  $\gamma \int \frac{dV}{V} = - \int \frac{dp}{p}$ .

Отсюда  $\gamma \ln V = -\ln p + \text{const}$ . Отсюда получаем уравнение адиабатического процесса для идеального газа или *уравнение Пуассона*:  $pV^\gamma = \text{const}$ . (5)

Используя уравнение состояния (2) можно записать уравнение Пуассона через другие термодинамические переменные:  $TV^{\gamma-1} = \text{const}$  или  $T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}$ . (6)

Идеальный газ – это совокупность не взаимодействующих друг с другом на расстоянии молекул. Такие молекулы к тому же не деформируются, т.е. имеют постоянную форму и очень малый размер. Размером одноатомной молекулы вообще пренебрегают, считая ее материальной точкой, способной двигаться в трех независимых направлениях, т.е. имеющей  $i = 3$  степени свободы. Двухатомные и многоатомные молекулы имеют дополнительные вращательные степени свободы, показанные на рис. 1.

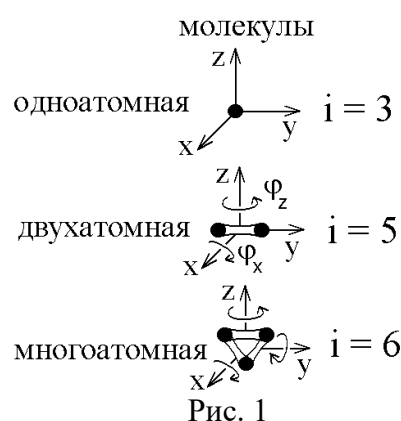


Рис. 1

Внутренняя энергия идеального газа складывается только из кинетической энергии его молекул. Скорости молекул такого газа различны, но подчиняются распределению Максвелла. С его помощью можно вычислить среднюю энергию, приходящуюся на 1 степень свободы молекулы:  $kT/2$ , где  $k = R/N_A$  – постоянная Больцмана,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $N_A$  – число Авогадро. Тогда средняя энергия

одной молекулы с  $i$  степенями свободы равна  $\langle E \rangle = \frac{i}{2}kT$ , а так как 1 моль газа содержит  $N_A$  молекул, то его внутренняя энергия  $U = N_A \langle E \rangle = \frac{i}{2}RT$ .

Сравнивая с термодинамической формулой  $U = C_V T$ , находим, что идеальный газ из молекул с  $i$  степенями свободы имеет молярные теплоемкости  $C_V = \frac{i}{2}R$ ;  $C_P = C_V + R = \frac{i+2}{2}R$ , и показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{i+2}{i}. \quad (7)$$

Для одноатомного газа  $\gamma = 1,667$ , для двухатомного –  $\gamma = 1,40$ , для многоатомного –  $\gamma = 1,333$ .

Воздух является смесью многих газов – двухатомных  $N_2$ ,  $O_2$ , ..., трехатомных –  $CO_2$ ,  $H_2O$  и т.п. Так как доля многоатомных и одноатомных газов в нем мала, то можно ожидать, что величина  $\gamma$  для воздуха будет близка к соответствующему значению для двухатомных газов:  $\gamma \approx 1,4$ .

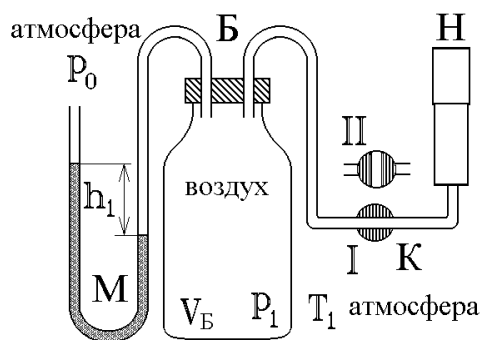


Рис. 2

Для экспериментального определения показателя адиабаты воздуха используется установка, изображенная на рис.2. Она состоит из большого стеклянного баллона Б, соединенного через кран К с насосом Н или атмосферой. Манометр М служит для измерения разностей давлений газа в баллоне и в атмосфере. В условиях эксперимента воздух можно считать идеальным газом.

Повернем кран К в положение I, соединяя баллон с насосом, и начнем накачивать воздух в баллон. Так как этот процесс происходит достаточно медленно, то за счет теплообмена через стеклянные стенки баллона успевает установиться тепловое равновесие. Температура воздуха внутри баллона после накачивания будет равна комнатной температуре  $T_1$ . Но давление внутри возрастет до величины

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1, \quad (8)$$

где  $p_0$  - давление воздуха в окружающей атмосфере, а  $\rho g h_1$  - разность гидростатических давлений жидкости с плотностью  $\rho$  в левой и правой трубках U - образного манометра (рис. 2).

Вытащим теперь трубку крана К, соединяя баллон с атмосферой. Воздух **очень быстро** выходит через отверстие, расширяясь, теплообмен **не успевает произойти** и процесс можно считать адиабатическим. В соответствии с уравнением (3-6) при резком уменьшении давления уменьшится и температура: воздух в баллоне будет охлажден до температуры ниже комнатной!

В момент, когда давление воздуха в сосуде сравнивается с атмосферным ( $p' = p_0$ , выравниваются уровни жидкости в манометре), пробка крана плотно закрывает баллон в положении II (рис. 2). За счет теплообмена через стенки закрытого баллона начинается изохорическое нагревание охлажденного воздуха в нем. При этом давление в баллоне растет и уровни жидкости в манометре постепенно расходятся до тех пор, пока температура внутри баллона не станет равной комнатной:  $T_2 = T_1$ . В этот момент давление воздуха в баллоне установится на величине

$$p_2 = p_0 + \rho g h_2. \quad (9)$$

Процессы, протекающие в системе, изображены на рис. 3. В момент окончания адиабатного расширения в баллоне останется часть воздуха с массой  $m_1$ , занимавшая первоначально объем  $V_1$ , меньший объема баллона  $V_B$ .

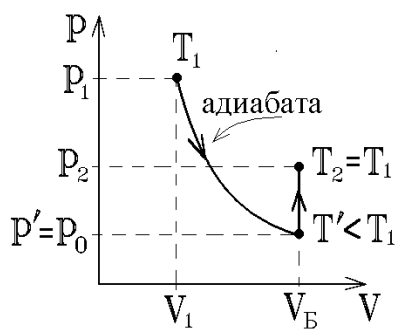


Рис. 3

Запишем для этой части уравнения адиабатического (6) и изохорического процессов:

$$T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T' p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad \text{и}$$

$$\frac{p_0}{T'} = \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_2}{T_1}, \quad \text{а затем устраним неизвестное отношение тем-}$$

ператур:

$$\frac{T'}{T_1} = \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{p_0}{p_2}. \quad (10)$$

Логарифмируя последнее уравнение (10), получим

$$\frac{1-\gamma}{\gamma} \ln \left( \frac{p_1}{p_0} \right) = \ln \left( \frac{p_0}{p_2} \right), \quad \text{откуда} \quad \gamma = \frac{\ln(p_1/p_0)}{\ln(p_1/p_2)}. \quad (11)$$

Подставляем сюда формулы (8) и (9):

$$\gamma = \frac{\ln(p_1/p_0)}{\ln(p_1/p_0) - \ln(p_2/p_0)} = \frac{\ln \left( 1 + \frac{\rho g h_1}{p_0} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{\rho g h_1}{p_0} \right) - \ln \left( 1 + \frac{\rho g h_2}{p_0} \right)}. \quad (12)$$

Но уровни жидкости (воды с плотностью  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ) раздвигаются в манометре М на рис. 2 всего на  $h \approx 10 \div 20 \text{ см}$ , и избыточное давление газа  $\rho g h \approx 10^3 \text{ Па}$  много меньше атмосферного давления  $p_0 \approx 10^5 \text{ Па}$ . Поэтому величина  $x = \frac{\rho g h}{p_0} \approx 10^{-2} \ll 1$ , и в формуле (12) можно разложить все

логарифмы в ряд, оставляя слагаемые только первого порядка малости:

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \approx x$ . Тогда из формулы (12) получаем конечную формулу для вычисления показателя адиабаты:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (13)$$

Такой показатель позволяет описать многие свойства исследуемого газа, но точность его определения в данном эксперименте не слишком высока, и поэтому возникают отклонения от теоретически ожидаемого значения  $\gamma_{\text{экс}} < \gamma_{\text{теор}} \approx 1,4$ . Это связано не только с тем, что свойства реального воздуха немного отличаются от свойств идеального газа и состоит он не только из двухатомных молекул, но, главным образом - с несовершенством используемого оборудования. При установке пробки крана К в положение II (рис.2) остаются крохотные щели, и воздух понемногу продолжает вытекать из баллона при нагревании. Поэтому уровень  $h_2$  оказывается немного меньшим того уровня, который установился бы при идеально закрытом баллоне. Величина  $\gamma$ , измеренная в такой установке, в соответствии с формулой (13) тоже окажется немного меньшей, чем истинная.

### Объекты исследования, оборудование

Стеклянный баллон, кран, насос, манометр.

### Задание на работу

Найти значения показателя адиабаты.

### Порядок выполнения работы

1. Установить пробку крана К так, чтобы баллон Б, который находится под столом, сообщался с насосом Н (в положение I на рис. 2).

2. Осторожно накачать воздух в баллон. Когда разность уровней жидкости в коленях манометра достигнет 10 ÷ 15 см, прекратить накачивание и повернуть пробку крана К в положение II, чтобы сосуд не сообщался с атмосферой. Пробка крана должна плотно прилегать к его стенкам и не давать утечки воздуха. Не забывайте об этом до конца эксперимента.

3. Через некоторое время, когда давление окончательно установится и разность уровней в манометре перестанет уменьшаться, измерить  $h_1$  - разность уровней в левом и правом коленях манометра. Если насос Н протекает, или пробка крана не может быть закрыта очень плотно, то разность уровней  $h_1$  будет постоянно уменьшаться. В этом случае следует подождать, когда  $h_1$  достигнет выбранного значения, и сразу выполнить следующий пункт работы.

4. Вынуть пробку крана, давая воздуху в сосуде расширяться наружу. Разность уровней жидкостей в манометре резко уменьшится двумя, следующими друг за другом скачками. Как только при втором скачке уровни жидкостей станут одинаковыми, ( $h=0$ ) пробку следует **немедленно и плотно** вставить в кран К в положение II, закрывая баллон.

Об этом моменте выравнивания давления внутри и вне баллона можно судить и по прекращению звука издаваемого выходящим воздухом. Перед дальнейшим выполнением работы несколько раз потренируйтесь в выполнении пунктов 1 - 4, чтобы научиться вставлять пробку быстро и в нужный момент.

5. После того, как баллон будет закрыт пробкой, уровни жидкости в манометре снова начнут расходиться. Следует подождать, когда давление окончательно установится и разность уровней в манометре перестанет увеличиваться. Затем записать установившуюся разность уровней  $h_2$  воды в обоих коленях манометра.

6. Опыт повторить не менее  $N = 9$  раз для разных значений начальной величины  $h_1$ , лежащих в пределах 10 ÷ 15 см.

Для каждого опыта вычислить  $\gamma_i$  по формуле (13), а затем определить среднее значение показателя адиабаты  $\langle \gamma \rangle$ . Все измеренные и вычисленные величины заносить в таблицу 1.

Таблица 1

$h_1$ , см				
$h_2$ , см				
$\gamma$				
$\langle \gamma \rangle =$	$\Delta\gamma =$			$\gamma_{теор} =$

7. Определить погрешность полученного значения показателя адиабаты  $\Delta\gamma$ .

8. По формуле (7) вычислить теоретическое значение показателя адиабаты  $\gamma_{теор}$ , считая для воздуха  $i=5$ , и сравнить полученный результат с  $\langle \gamma \rangle$ .

### Содержание отчета

Заполненная таблица 1.

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте I-е начало термодинамики и запишите его для идеального газа.
2. Какой газ можно считать идеальным? От каких термодинамических параметров зависит внутренняя энергия идеального газа и что она описывает?
3. Какие величины входят в уравнение состояния идеального газа? Каков его вид?
4. Дайте определение теплоемкости. Чем она отличается от молярной и от удельной теплоемкостей? Почему для разных процессов величина теплоемкости одной и той же система различна? Какие величины связывает уравнение Майера и как его получить?
5. Какой процесс называется адиабатическим? политропическим? Докажите, что изобарический, изотермический и изохорический процессы являются политропическими. Как на практике осуществить адиабатический процесс с газом?



6. Выведите уравнение Пуассона (3-5) для адиабатического процесса. Получите из него уравнение (3-6) с помощью уравнения состояния. Что такое показатель адиабаты?

7. Какие процессы с воздухом в баллоне Б на рис.3- 2 происходят при выполнении работы: а) при накачивании воздуха? б) при открывании крана К? в) при его последующем закрывании? Почему именно эти процессы?

8. Выведите уравнения (3-11) и (3-13) для определения показателя адиабаты  $\gamma$ . Докажите этот вывод.

#### **Список использованных источников**

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с. гл. XI,   ↓ 94 - 98.

Лабораторная работа № 15  
**Определение коэффициента поверхностного натяжения  
 воды методом отрыва кольца**

**Цель работы:** измерить коэффициент поверхностного натяжения воды при комнатной температуре.

**Теоретические сведения**

Жидкости обладают поверхностным слоем, состоящим из молекул, обладающих большей потенциальной энергией, чем внутренние молекулы. Между молекулами действуют силы притяжения, очень быстро убывающие с расстоянием, поэтому возле каждой молекулы можно очертить сферу молекулярного действия так, что выделенная молекула будет взаимодействовать только с молекулами, оказавшимися внутри этой сферы (рис.4).

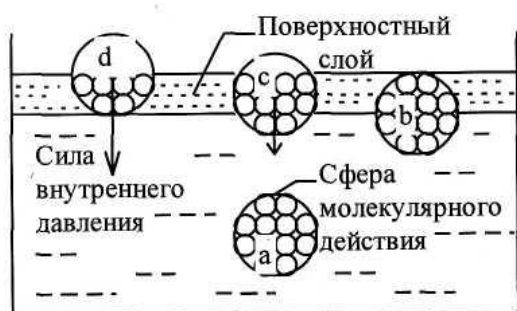


Рис.4

Если молекула находится внутри жидкости, то она взаимодействует с молекулами-соседями, окружающими ее со всех сторон, и результирующая сил притяжения равна нулю (a и b на рис. 4). Наоборот, молекула, находящаяся на поверхности жидкости (d на рис.4), окружена молекулами-соседями лишь наполовину и на нее действует нескомпенсированная сила, направленная перпендикулярно к поверхности внутрь жидкости. Такая же сила, только поменьше, действует и на любую другую молекулу, оказавшуюся внутри слоя толщиной, равной радиусу молекулярного действия (с на рис.4).

Следовательно, поверхностный слой оказывает давление на остальную жидкость (давление называют внутренним) и оно достигает очень больших величин. Это, в свою очередь, означает, что поверхностный слой обладает избыточной (по сравнению с остальной жидкостью) энергией, которую называют поверхностной. Очевидно, что поверхностная энергия пропорциональна числу молекул в поверхностном слое, т.е. площади поверхности жидкости  $S$ :

$$U_{\text{пов}} = \sigma \cdot S \quad (3)$$

**Коэффициент пропорциональности  $\sigma$ , численно равный поверхностной энергии, приходящейся на единицу площади поверхности, называется коэффициентом поверхностного натяжения.**

Известно также, что в состоянии устойчивого равновесия любая система обладает минимальной потенциальной энергией. Поэтому поверхностный слой стремится принять такую форму, при которой его поверхность будет наименьшей (тогда и  $U_{\text{пов}}$  достигает минимума, как это следует из формулы (3). Если же искусственно увеличивать поверхность жидкости, то в поверхностном слое возникают силы, препятствующие этому, – они называются силами поверхностного натяжения

Таким образом, поверхностный слой похож на упругую пленку, как будто бы находящуюся на поверхности жидкости.

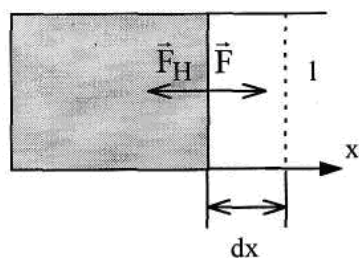


Рис.5

$$F_n = \sigma \cdot l \quad (4)$$

Рассмотрим пример. Пусть жидкая (мыльная) пленка ограничена прямоугольной проволочной рамкой, одна из сторон которой длиной  $l$  может перемещаться вдоль оси  $X$  (рис.5) под действием внешней силы  $\vec{F}$ . Этой силе будет противодействовать сила поверхностного натяжения  $\vec{F}_n$ . В случае квазистатического (медленного) процесса  $F_n = F$ . При перемещении на  $dx$  сила  $F$  совершает работу  $dA = Fdx$ , а потенциальная энергия поверхности увеличивается на  $dU_{\text{пов}} = \sigma \cdot l \cdot dx$ . Так как  $dA = dU_{\text{пов}}$ , то  $F = \sigma \cdot l$  и



Рис.6

Формула (4) позволяет по-другому определить  $\sigma$ , а именно как **силу поверхностного натяжения, приходящуюся на единицу длины контура ограничивающего поверхность**. Из этого же примера видно, что сила поверхностного натяжения направлена по касательной к поверхности и перпендикулярна к линии, ограничивающей поверхность (рис. 6).

#### Объекты исследования, оборудование

Установка состоит из пружины 1, к которой подвешено легкое алюминиевое кольцо 3 с тонкими стенками и чашкой 2 наверху, масштабной линейки 5 и сосуда 4 с дистиллированной водой (рис.1).

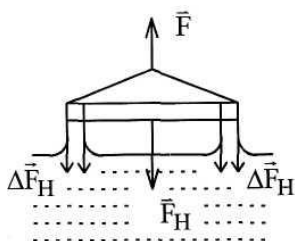


Рис. 2

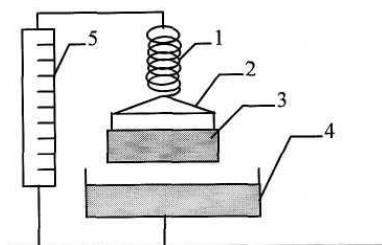


Рис.1

Если сосуд с водой подвести к кольцу до соприкосновения, а затем плавно опускать, то жидкость, сцепившись с кольцом, будет тянуть его за собой, растягивая пружину до тех пор, пока кольцо не оторвется от жидкости. В момент перед самым отрывом наступает равновесие, ко-

гда и кольцо, и жидкая пленка покоятся. В этот момент сила упругости пружины равна силе поверхностного натяжения. Поверхностная пленка будет иметь вид, показанный на рис. 2., где  $\Delta \vec{F}_H$  – сила поверхностного натяжения, действующая на элемент контура. Мо-

$$F_H = \sigma(l_1 + l_2) \quad (1)$$

где  $l_1$  и  $l_2$  – длины двух контуров (окружностей), ограничивающих поверхность жидкости. Так как  $l_1 = \pi D_1$ ,  $l_2 = \pi D_2$ , где  $D_1$  и  $D_2$  – внешний и внутренний диаметры кольца, то из (1) получаем

$$\sigma = \frac{F_H}{\pi(D_1 + D_2)} \quad (2)$$

#### Рабочее задание

Найти силу натяжения и коэффициент натяжения отрыва кольца от поверхности воды.

#### Порядок выполнения работы

1. Штангенциркулем измерить наружный  $D_1$  и внутренний  $D_2$  диаметры кольца в пяти местах. Данные занести в таблицу 1.
2. Подвесить кольцо к пружине.
3. Определить по шкале положение  $n_0$  верхней части чашки 2 над кольцом в ненагруженном состоянии ( $F=0$ ). Смотреть на шкалу нужно так, чтобы передний верх чашки совпал с задним. Об этом не следует забывать до конца эксперимента.
4. Взять одну гирьку (цифры на каждой гирьке указаны в миллиграммах), поместить в центр чашки 2 и определить по шкале положение  $n_1$  ее верхнего края.
5. Увеличивая нагрузку  $F$  (последовательно добавляя по одной гирьке, не забывайте подсчитывать общую сумму нагрузки в миллиграммах), определять по шкале положение  $n$  верхнего края

чашки 2. Данные измерений занести в табл. 2.

6. Снять все гирьки с чашки.

7. Поднимать сосуд 4 с водой до тех пор, пока поверхность воды не коснется нижнего края кольца. Следить за тем, чтобы этот край только смачивался, но не опускался вглубь воды. Затем, медленно и равномерно опуская сосуд, уловить равновесие (система находится в покое) перед отрывом кольца и заметить по шкале положение  $n_n$  верхнего края чашки. Измерения проделать не менее 5 раз и найти среднее арифметическое значение  $\langle n_n \rangle$ . Данные занести в таблицу 1.

8. Осторожно снять кольцо с новку.

9. Построить график градуирующей за начало координат значение  $n_0$ . Вид графика представлен на рис.3.

10. Зная растяжение пружины  $F_n$  в миллиграммах, а затем перевести в Ньютоны.

11. Вычислить в СИ коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma$ .

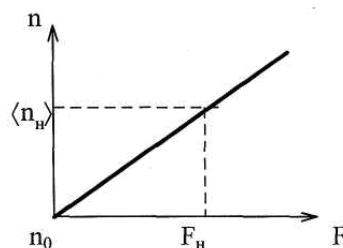


Рис.3

пружины и положить на уста-

ровки пружины  $n(F)$ , приня-

$\langle n_n \rangle$  под действием силы по-

Таблица 1

Номер опыта	$D_1$ , м	$D_2$ , м	$n_n$
..			
Среднее значение			

Таблица 2

$F$					
$n$					
$F_n, H =$	$\sigma, H/m =$				

### Содержание отчета

Заполненные таблицы 1 и 2.

### Контрольные вопросы.

1. Как объяснить стремление жидкости сократить свою свободную поверхность?
2. На что затрачивается работа при увеличении поверхности жидкости?
3. Дать два определения коэффициента поверхностного натяжения. Единицы его измерения.
4. Вывести расчетную формулу коэффициента поверхностного натяжения.
5. Как направлена сила поверхностного натяжения в момент отрыва кольца?
6. Как и от чего зависят силы молекулярного взаимодействия и коэффициент поверхностного натяжения?
7. Можно ли определить коэффициент поверхностного натяжения методом отрыва кольца, если жидкость не смачивает кольцо?

### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с. Пар. 92,93,94.

Лабораторная работа № 16  
**Определение коэффициента вязкости жидкости  
 по методу Стокса**

**Цель работы:** познакомиться с явлением внутреннего трения и определить коэффициент внутреннего трения (динамический коэффициент вязкости) по методу Стокса.

**Теоретические сведения**

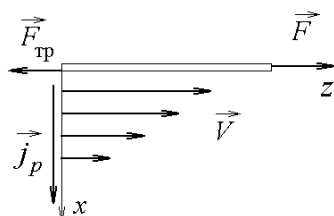


Рис.1

Неоднородное течение жидкости, т.е. такое, при котором скорость течения различна в разных местах, не является равновесным. Поэтому в жидкости будут происходить процессы, стремящиеся выровнять скорость течения. Такие процессы называются вязкостью или внутренним трением. Предположим, что жидкость всюду течет в направлении оси  $z$ , а значение скорости  $v$  меняется только в направлении  $x$ , перпендикулярном течению (рис.1). Тогда в направлении оси  $x$  возникает поток импульса. Импульс, переносимый за 1с через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ , называется плотностью потока импульса и обозначается  $j_p$ .

Из общих соображений следует, что  $j_p$  пропорциональна градиенту скорости течения и направлена против градиента, т.е.

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (1)$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости среды.

Рассмотрим теперь вязкий поток, возникающий в жидкости под действием касательной силы,

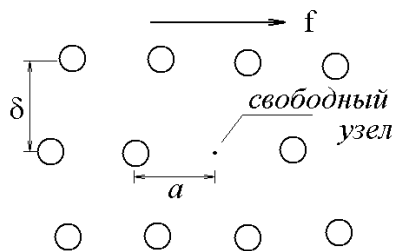


Рис.2

стремящейся сместить один слой молекул относительно другого (рис.2). Пусть  $f$  - сила, действующая на единицу поверхности, а  $\delta$  - расстояние между соседними слоями. Тогда на одну молекулу будет действовать сила, равная  $f/n\delta$ , где  $n$  – концентрация молекул. При перемещении молекулы в активированное состояние (рис.3) сила  $f/n\delta$  совершает работу, равную  $\frac{f}{n\delta} \frac{a}{2}$ , поэтому потенциальный барьер слева от активированного состояния уменьшается на величину этой работы (внешняя сила «помогает» молекуле совершить скачок в прямом направлении), а справа, наоборот, увеличивается (внешняя сила «препятствует» молекуле совершить обратный скачок). Эта ситуация изображена на рис.4, где  $\Delta U = \frac{f}{n\delta} \frac{a}{2}$ .

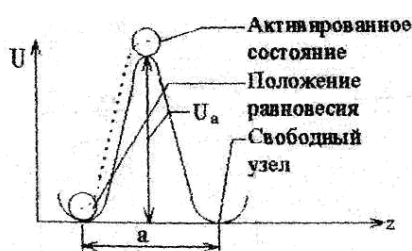


Рис.3

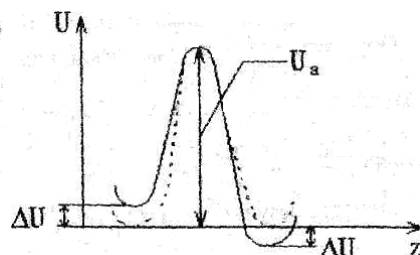


Рис.4.

Поэтому при наличии внешней силы частоты перескоков в свободную ячейку  $\gamma_1$  и обратного перескока  $\gamma_2$  будут неодинаковы, и в результате возникает поток молекул в направлении приложенной силы, скорость которого

$$v = a(\gamma_1 - \gamma_2) = a\gamma_0 \left( e^{\frac{U_a - \Delta U}{kT}} - e^{\frac{U_a + \Delta U}{kT}} \right) = a\gamma_0 e^{\frac{U_a}{kT}} \left( e^{\frac{\Delta U}{kT}} - e^{-\frac{\Delta U}{kT}} \right)$$

В результате переноса импульса (в направлении  $x$ ) в жидкости возникают касательные по от-

ношению к течению силы вязкого трения

$$F_{\text{вяз}} = \eta \left| \frac{dv}{dt} \right| S, \quad (2)$$

где  $S$  – площадь, на которую действует  $F_{\text{вяз}}$ .

Известно, что вязкость газов с ростом температуры растет, тогда как вязкость жидкостей убывает. Это различие обусловлено качественно разным характером теплового движения молекул газа и жидкости.

По своей структуре жидкость ближе к кристаллическим твердым телам, чем к газам. Тепловое движение молекул жидкости сводится к колебаниям около некоторых положений равновесия (узлов), которые в отличие от положений равновесия в кристаллах носят временный характер – через некоторое время (время релаксации) молекула жидкости скачком переходит в новое, свободное положение равновесия. Чтобы совершить этот переход, молекула должна преодолеть потенциальный барьер, высота которого  $U_a$  называется энергией активации (рис.3). Частота таких переходов  $\gamma$  определяется распределением Больцмана:

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\frac{U_a}{kT}} \quad (3)$$

где  $\gamma_0$  – некоторая константа.

Очевидно, что в отсутствие внешних сил частоты переходов в прямом и обратном направлениях будут одинаковыми и никакого результирующего течения не возникает. Так как обычно

$$\frac{\Delta U}{kT} \ll 1 \text{ и } e^{\pm \frac{U_a}{kT}} \approx 1 \pm \frac{\Delta U}{kT}, \text{ то } v = \frac{2a\gamma_0 \Delta U}{kT} e^{-\frac{U_a}{kT}} = \frac{a^2 f \gamma_0}{n \delta kT} e^{-\frac{U_a}{kT}}.$$

С учетом того, что  $f = \frac{F_{\text{вяз}}}{S} = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| \approx \frac{\eta v}{\delta}$ , получаем выражение для коэффициента вязкости в виде

$$\eta = \frac{f \delta}{v} = \left( \frac{\delta}{a} \right)^2 \frac{n k T}{\gamma_0} e^{\frac{U_a}{kT}}.$$

Как показывают расчеты,  $\gamma_0 \approx \frac{kT}{h}$ , где  $h$  – постоянная Планка. Полагая также  $a \approx \delta$ , получим

окончательное выражение для коэффициента вязкости жидкости:

$$\eta = n h e^{\frac{U_a}{kT}} \quad (4)$$

Как следует из формулы (4), вязкость жидкости резко (экспоненциально) убывает с ростом температуры. Кроме того, вязкость сильно зависит от вида жидкости и от ее чистоты.

Действие сил внутреннего трения легко наблюдать при движении тела в жидкости. При малых скоростях и удобообтекаемой форме тела, когда не возникает вихрей, сила сопротивления обусловлена исключительно вязкостью жидкости. Слой жидкости, непосредственно прилегающий к твердому телу, увлекается им полностью. Следующий слой увлекается за телом с меньшей скоростью. Таким образом, между слоями возникают силы сопротивления. Для небыстрого движения шарика в жидкости Стокс вывел путем теоретического рассмотрения формулу расчета силы сопротивления:

$$F = 6\pi\eta r v \quad (5)$$

где  $\eta$  – динамический коэффициент вязкости;  $r$  – радиус шарика;  $v$  – скорость его движения относительно жидкости.

Предоставим маленькому шарiku возможность падать в жидкость под действием силы тяжести. На него будут действовать следующие силы (рис.5): 1. Сила тяжести, направленная по вертикали вниз

$$G = mg = \rho_2 V g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_2 g$$

где  $\rho_2$  – плотность шарика,  $g$  – ускорение свободного падения.

2. Выталкивающая сила  $F_1$ , являющаяся результатом гидростатиче-

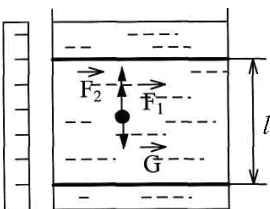


Рис.5

ского давления. Она направлена по вертикали вверх и равна по закону Архимеда силе тяжести жидкости в объеме тела:  $F_1 = (4/3)\pi r^3 \rho_1 g$ , где  $\rho_1$  – плотность жидкости.

3. Сила внутреннего трения  $F_2$ . Она направлена против направления скорости шарика, т.е. вертикально вверх. По формуле Стокса

$$F_2 = 6\pi\eta r v$$

Силы  $G$  и  $F_1$  постоянны, а сила  $F_2$  увеличивается по мере увеличения скорости шарика. При некоторой скорости  $v$  наступает момент, когда сила  $G$ , направленная вниз, будет уравновешена силами  $F_1$  и  $F_2$ , направленными вверх; с этого момента шарик будет двигаться равномерно, в соответствии с первым законом Ньютона. Скорость равномерного падения невелика, если шарик мал, и ее легко измерить. Тогда из условия равновесия сил

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_2 g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g + 6\pi\eta r v$$

можно определить динамический коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{v} \quad (6)$$

### Объекты исследования, оборудование

Колба с жидкостью, металлические шарики, секундомер, линейка.

### Порядок выполнения работы

1. Измерить микрометром диаметр  $d$  шарика в миллиметрах (мм) и определить его радиус в метрах (м).

2. Осторожно отпустить шарик по центру сосуда непосредственно над поверхностью исследуемой жидкости и определить с помощью секундомера время  $t$  прохождения шарика между металлическими кольцевыми метками на сосуде. Верхняя метка должна находиться не менее чем в десяти сантиметрах от поверхности жидкости.

3. Определить по масштабной линейке расстояние  $l$  между метками и вычислить скорость шарика  $v = l/t$  (вычислить в СИ).

4. Опыт повторить еще с четырьмя шариками.

5. Вычислить динамический коэффициент вязкости в СИ по формуле (2) в каждом опыте и найти среднее значение  $\langle \eta \rangle$ .

6. Результаты опытов и расчетов занести в таблицу.

№	$d$ , мм	$r$ , м	$l$ , м	$t$ , с	$v$ , м/с	$\eta$ , Па·с	$\Delta\eta_i$ , Па·с	$(\Delta\eta_i)^2$ , Па <sup>2</sup> ·с <sup>2</sup>
1								
...								
5								

$\langle \eta \rangle = \dots$

Плотность исследуемой жидкости  $\rho_1 = 1,2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;

плотность свинца  $\rho_2 = 11,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

7. Определить случайные отклонения  $\Delta\eta_i = \eta_i - \langle \eta \rangle$  каждого измерения и среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta\eta_i)^2}$ . Вычислить погрешность  $\Delta\eta$  результата измерений:

$$\Delta\eta = S/\sqrt{n}$$

8. Записать результат в виде:  $\eta = (\langle \eta \rangle \pm \Delta\eta)$  Па·с.

### Содержание отчета

Заполненная таблица, значение коэффициента динамической вязкости.

### Контрольные вопросы

1. Написать общее выражение для вязкой силы и проиллюстрировать чертежом.
2. Дать определение динамического коэффициента вязкости. Какова единица его измерения в СИ?
3. Какие силы действуют на шарик, движущийся в глицерине?
4. Почему риска 1 должна находиться несколько ниже поверхности жидкости?
5. Вывести расчетную формулу (6) для определения динамического коэффициента вязкости  $\eta$ .
6. Как вязкость жидкости зависит от температуры?

#### **Список использованных источников**

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с. Пар. 78,79



## Определение длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха

**Цель работы:** ознакомиться с одним из методов определения микропараметров (средней длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха) через макропараметры.

### Теоретические сведения

Средней длиной свободного пробега молекул  $\lambda$  называется среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя последовательными столкновениями с другими молекулами.

Расстояние  $d$ , на которое сближаются при столкновении центры молекул, называется *эффективным диаметром молекулы*. На рис.2 видно, что чем больше начальная кинетическая энергия молекулы (т.е. чем выше температура), тем меньше  $d$ .

Следовательно, эффективный диаметр молекул уменьшается с повышением температуры. Правда, изменение  $d$  с ростом температура незначительно. Величина  $\sigma = \pi d^2$  называется *эффективным сечением молекулы*.

Молекулярно-кинетическая теория газов приводит к выводу. Что длина свободного пробега  $\lambda$  обратно пропорциональна концентрации  $n$  и эффективному поперечному сечению молекулы

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n}. \quad (1)$$

Эта формула имеет очевидный физический смысл: свободный пробег тем меньше, чем гуще расположены молекулы (т.е. чем больше  $n$ ) и чем больше перекрываемая каждой молекулой площадь (т.е. чем больше  $\sigma$ ).

При постоянной температуре плотность молекул  $n$  пропорциональна давлению газа. Следовательно, длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению:

$$\lambda \sim \frac{1}{P}.$$

Из-за уменьшения эффективного диаметра молекул длина свободного пробега при повышении температуры слабо растет.

Измерить  $\lambda$  практически невозможно, но через  $\lambda$  выражаются все коэффициенты переноса, которые сравнительно просто можно измерить на опыте.

Динамическая вязкость газов выражается следующим образом:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \rho \quad (2)$$

где  $\langle v \rangle$  – средняя скорость газовых молекул,  $\rho$  – плотность газа.

Сначала нужно измерить вязкость  $\eta$ , затем по формуле (2) вычислить свободный пробег  $\lambda$  и, наконец, по формуле (1) вычислить  $\sigma$  или  $d$ .

Что касается опыта, то нужно выбрать такое физическое явление, чтобы оно позволяло простым образом измерить вязкость воздуха.

В настоящей работе в качестве такого явления используется вязкое течение воздуха через капилляр.

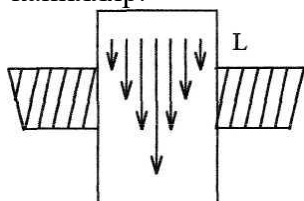


Рис.3

На рис.1 изображена схема установки. Ее основная часть – капилляр  $L$ , показанный на рис.3 в увеличенном масштабе.

Если на концах капилляра создать разность давлений  $\Delta P = P - P_1$ , то в капилляре возникает вязкое течение воздуха, профиль скоростей которого показан на рис.3. За время  $\tau$  через него протекает объем воздуха  $V$ , который можно вычислить по формуле Пуазейля:

$$V = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta P \tau \quad (3)$$

где  $r$  – радиус капилляра,  $l$  – его длина.

Разность давлений на концах капилляра устанавливается благодаря тому, что через кран  $K$  из баллона вытекает вода.

Необходимо, чтобы вода вытекала каплями. Тогда давление воздуха в баллоне  $P_1$  и гидростатическое давление столба жидкости высотой  $h$  уравновесят атмосферное  $P$  давление т.е.

$$P_1 + \rho_{\text{воды}} g h = P,$$

откуда следует

$$\Delta P = P - P_1 = \rho_{\text{воды}} g h$$

Так как  $h$  меняется медленно, причем изменение линейное, то в формулу (3) следует подставлять среднее значение

$$\Delta P = \rho_{\text{воды}} g \langle h \rangle = \rho_{\text{воды}} g \frac{h_1 + h_2}{2} \quad (4)$$

С другой стороны, объем воздуха, прошедшего через капилляр, равен объему вытекающей воды, который легко определяется по формуле

$$V = S(h_1 - h_2).$$

Итак, следует измерить 4 величины:  $V$ ,  $\tau$ ,  $h_1$  и  $h_2$ . Затем найти  $\Delta P$  по формуле (4) и  $\eta$  из формулы (3).

$$\eta = \frac{\pi r^4 \rho_{\text{воды}} g (h_1 + h_2) \tau}{16 l S (h_1 - h_2)} \quad (5)$$

Остается вычислить  $\lambda$ , и  $d$ . Для этого нужно несколько преобразовать исходные формулы (1) и (2).

Учитывая, что  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$  и  $\rho = \frac{\mu P}{RT}$ , из формулы (2) находим

$$\lambda = \frac{3\eta}{P} \sqrt{\frac{\pi RT}{8\mu}} \quad (6)$$

Так как  $n = \frac{P}{kT}$ , то из формулы (1) имеем:

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2\pi P \lambda}}} \quad (7)$$

Во всех формулах  $r$  – радиус капилляра,  $l$  – длина капилляра,  $S$  – площадь сечения сосуда с водой,  $\rho_{\text{воды}} = 1000 \text{ кг/м}^3$  – плотность воды,  $R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$  – универсальная газовая постоянная,  $k = 1,38 \cdot 10^{23} \text{ Дж/К}$  – постоянная Больцмана,  $\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$  – молярная масса воздуха,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения,  $T = (t+273)\text{К}$

### Объекты исследования, оборудование

Сосуд с капилляром и краном, насос, термометр, барометр.

### Рабочее задание

Измерить значения коэффициента вязкости, средней длины свободного пробега и эффективный диаметр молекулы воздуха.

### Порядок выполнения работы

1. Открыть кран  $K$ . Дождавшись, когда вода начнет вытекать каплями, включить секундомер и одновременно заметить уровень воды  $h_1$  в сосуде.
2. Когда уровень воды в сосуде уменьшится приблизительно на 1 см, одновременно закрыть кран и остановить секундомер.
3. Записать время вытекания  $\tau$  и новый уровень  $h_2$  воды.
4. Измерить термометром температуру  $t$  и барометром атмосферное дав-

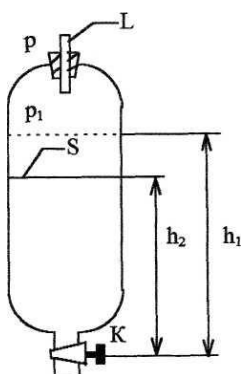


Рис.1

ление Р.

5. Вычислить коэффициент вязкости  $\eta$  по формуле (5).

6. Вычислить среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  по формуле (6).

7. Вычислить эффективный диаметр молекул воздуха  $d$  по формуле (7)

.Данные измерений и вычислений занести в таблицу:

$h_1, \text{м}$	$h_2, \text{м}$	$\tau, \text{с}$	$T, \text{К}$	$P, \text{Па}$	$\eta, \text{кг/м}\cdot\text{с}$	$\lambda, \text{м}$	$d, \text{м}$

### Содержание отчета

Заполненная таблица со значениями коэффициента вязкости, средней длины свободного пробега и эффективный диаметр молекулы воздуха.

### Контрольные вопросы

1. Дать определение средней длины свободного пробега молекул.
2. Как зависит длина свободного пробега от температуры?
3. Как зависит длина свободного пробега при постоянной температуре от давления?
4. Что такое эффективный диаметр молекул?
5. Каким методом определяется средняя длина свободного пробега и эффективный диаметр молекул в данной работе?
6. Какие явления называются явлениями переноса?
7. Что такое вязкость или внутреннее трение?

### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика. Молекулярная физика. - СПб.: Лань, 2008. – 352 с. Пар. 62,78-80.

**Часть 2**  
**Лабораторная работа № 18**  
**Исследование электрического поля проводника с током**

**Цель работы:** изучение свойств электрических полей в проводящей жидкости, получение графического изображения поля с помощью эквипотенциальных поверхностей и силовых линий

**Теоретические сведения**

Если токи стационарные (т.е. не изменяются во времени), то распределение электрических зарядов в проводящей среде тоже не меняется во времени, хотя и происходит движение зарядов. Это обусловлено тем, что в каждой точке проводника на место уходящих зарядов непрерывно поступают новые заряды в таком же количестве. Поэтому в случае постоянного тока движущиеся заряды создают такое же поле, что и неподвижные заряды той же концентрации. Следовательно, электрическое поле проводника с постоянным током будет потенциальным, как и поле неподвижных зарядов (электростатическое).

Силы, действующие на электрический заряд со стороны поля неподвижных зарядов, являются **потенциальными**. Это значит, что работа, совершаемая этими силами над перемещающимся точечным зарядом  $q'$ , не зависит от траектории этого заряда, а зависит лишь от его начального и конечного положений. Поле стационарных зарядов, в котором и действуют такие силы, также называется **потенциальным**. Работа потенциальных сил при перемещении заряда совершается за счет уменьшения потенциальной энергии его взаимодействия с полем, т.е.

$$A_{\text{поля}} = -\Delta U.$$

Каждой точке потенциального поля можно сопоставить специальную скалярную функцию координат  $\varphi(x, y)$ , называемую потенциалом. Потенциал численно равен потенциальной энергии **единичного** пробного заряда  $q'$ , помещенного в данную точку поля, т.е.

$$\varphi(x, y) = \frac{U(x, y)}{q'} \quad (1)$$

где  $q'$  - величина пробного заряда, а  $U(x, y)$  - его потенциальная энергия в точке поля с координатами  $x$  и  $y$ .

Если принять потенциал на бесконечности равным нулю, то физический смысл потенциала можно представить как **работу внешних сил по перемещению единичного пробного заряда из бесконечности в данную точку**. Соответственно разность потенциалов - это работа внешних сил по перемещению единичного пробного заряда из первой точки во вторую.

Потенциал является вспомогательной - энергетической - характеристикой поля, основная же его характеристика - силовая - называется электрическим вектором или напряженностью электрического поля. Электрическим вектором  $\vec{E}$  называется физическая величина, численно равная силе, действующей на единичный пробный заряд, помещенный в данную точку поля, т.е.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}(x, y)}{q'} \quad (2)$$

Так же, как и потенциал, электрический вектор является функцией координат. Между  $\vec{E}$  и  $\varphi$  существует зависимость, вытекающая из определения этих величин:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (3)$$

где  $\text{grad } \varphi$  называется градиентом потенциала. В двухмерном случае в декартовой системе координат

$$\text{grad } \varphi = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (4)$$

$\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$  - единичные орты координатных осей. Таким образом,

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (5)$$

Для наглядного (графического) изображения поля используют эквипотенциальные поверхно-

сти и силовые линии. **Эквипотенциальные поверхности** - поверхности равного потенциала - удовлетворяют условию  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ ; в рассматриваемом случае плоского поля это уже не поверхность, а линии, уравнение которых  $\varphi(x, y) = \text{const}$ .

**Силовые линии** - это геометрические линии, в каждой точке которых вектор  $\vec{E}$  направлен по касательной. Можно показать, что эквипотенциальные поверхности и силовые линии взаимно перпендикулярны, а градиент направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности и равен по модулю  $d\varphi/dn$ , где  $dn$  - расстояние по нормали между двумя эквипотенциальными поверхностями, потенциалы которых отличаются на бесконечно малую величину  $d\varphi$ .

Поэтому 
$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn}\vec{e}_n, \quad (6)$$

где  $\vec{e}_n$  - единичный вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности. Как видно, вектор  $\vec{E}$  направлен в сторону убывания потенциала.

Во всех практических приложениях вместо точной формулы (6) приходится использовать приближенное выражение

$$E \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta n} \quad (7)$$

Силовые линии можно воспроизвести, учитывая, что они в каждой точке пространства должны быть перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

#### Объекты исследования, оборудование

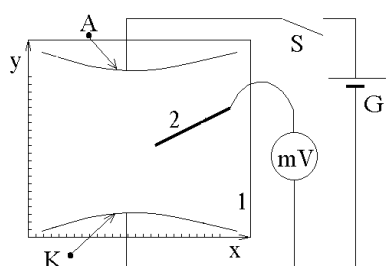


Рис.1

Основной частью лабораторной установки является кювета (прямоугольный сосуд) с слабопроводящей жидкостью и два электрода А и К (рис.1). Разность потенциалов между электродами создается источником постоянного напряжения. К одному из электродов К (катоде) присоединен одной клеммой вольтметр, другая клемма которого соединена с зондом 2. При касании зондом какой-либо точки жидкости вольтметр покажет потенциал этой точки относительно катода (потенциал катода приравнивается нулю). Измеряя потенциалы различных точек поля, имеющих один и тот же потенциал, можно построить систему эквипотенциальных линий, затем изобразить совокупность силовых линий и при необходимости вычислить  $E$  в любой точке поля по формуле (7).

#### Рабочее задание

Кювета, электроды, миллиметровая бумага.

#### Порядок выполнения работы

1. Перерисовать с установки в натуральную величину координатные линейки и электроды.
2. Определить потенциал анода  $\varphi_A$ , и записать его величину.
3. Найти эквипотенциаль со значением  $\varphi_1 = 0,8\varphi_A$ . Для этого следует поместить острие зонда в сосуд с жидкостью над одной из вертикальных линий миллиметровой бумаги, расположенной под прозрачным сосудом и, перемещая его вдоль этой линии, найти координаты точки, в которой потенциал имеет значение  $\varphi_1$ . Отметить эту точку на вашем графике на стр.1. Помещая зонд последовательно над второй, над третьей и т.д. вертикальными линиями миллиметровой бумаги и перемещая зонд вдоль них, найти точки с тем же потенциалом  $\varphi_1$ . Если нужный потенциал отсутствует на вертикальной линии, попробуйте двигаться по горизонтальной линии.
4. Соединив на своем рисунке точки с потенциалом  $\varphi_1$ , вы получите первую из искомых эквипотенциалей.
5. Аналогичные измерения проделать для потенциалов  $\varphi_2 = 0,6\varphi_A$ ,  $\varphi_3 = 0,4\varphi_A$ ,  $\varphi_4 = 0,2\varphi_A$ .
6. Аккуратно, соблюдая взаимную ортогональность, нарисовать на бумаге систему силовых линий, указав стрелками их направление.
7. Вычислить по формуле (7) значения  $E$  во всех точках пересечения какой-либо одной сило-

вой линии с эквипотенциалью (по заданию преподавателя).

8. Получить подпись преподавателя об окончании эксперимента.

### **Содержание отчета**

График с изображением силовых линий и эквипотенциалей.

### **Контрольные вопросы**

1. Какие поля называются потенциальными? Как записать условие потенциального характера поля?

2. Что такое потенциал? Разность потенциалов? Каков физический смысл этих характеристик?

3. Как определяется и какой смысл имеет электрический вектор  $\vec{E}$ ? Как он связан с потенциалом?

4. Что собой представляет градиент потенциала? Чему равен его модуль? Проекция? Как он направлен? Как он направлен?

5. Почему поле постоянного тока является потенциальным?

### **Список использованной литературы**

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – СПб.: Лань, 2008. – 496с.

Лабораторная работа № 19  
**Измерение сопротивлений проводников мостовыми схемами**

**Цель работы:** определение удельного сопротивления с помощью моста Уитсона, определение сопротивления гальванометра с помощью моста Томсона.

**Теоретические сведения**

Ток, текущий по проводнику, удовлетворяет закону Ома:

$$I = U/R \quad (1)$$

где  $U$  – напряжение на проводнике;  $R$  – сопротивление проводника. Опыт показывает, что сопротивление проводника зависит от его формы, размеров и материала, из которого изготовлен проводник. Сопротивление однородного цилиндрического проводника может быть подсчитано по формуле

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2)$$

где  $l$  – длина проводника;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $\rho$  – величина, зависящая от материала проводника, называемая *удельным сопротивлением материала*:

$$\rho = R \frac{S}{l} \quad (3)$$

Отсюда видно, что удельное сопротивление  $\rho$  численно равно сопротивлению проводника, имеющего длину 1 м и площадь поперечного сечения 1 м<sup>2</sup>. В системе СИ единицей удельного сопротивления является 1 Ом·м.

Кроме удельного сопротивления  $\rho$  используют также обратную величину:  $\sigma = 1/\rho$

(4)

называемую удельной проводимостью или удельной электропроводностью.

Если проводник имеет произвольную форму или клеммы, через которые подводят к нему напряжение, расположены в произвольных точках его поверхности, то сопротивление его, определяемое законом Ома (1), сохраняет свой смысл. Однако в этом случае сопротивление нельзя вычислить с помощью формулы (2). Плотность тока

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}} \quad (5)$$

будет различной в разных точках проводника. Поэтому распределение плотности тока в объеме проводника следует определять, используя фундаментальное соотношение

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (6)$$

называемое законом Ома в локальной форме ( $\vec{E}$  – вектор напряженности электрического поля в данной точке проводника).

Физическое содержание понятий удельного сопротивления и удельной электропроводности можно понять, исходя из представлений классической электронной теории. В этой теории предполагают, что свободные электроны в металлах ведут себя подобно идеальному газу. Если в проводнике создать электрическое поле  $\vec{E}$ , то на хаотическое тепловое движение электронов, которому соответствует средняя скорость  $\langle v \rangle$ , наложится упорядоченное движение со средней скоростью  $v_d$  – скоростью дрейфа. При этом

$$j = en v_d \quad (7)$$

где  $n$  – число электронов в единице объема;  $e$  – заряд электрона. Предполагается, что максимальное значение направленной составляющей скорости  $v_{max}$ , которую приобретает электрон между двумя последовательными столкновениями с ионами кристаллической решетки, полностью теряется при столкновении. При этом энергия упорядоченного движения электрона преобразуется во внутреннюю энергию проводника, который нагревается при прохождении по нему электрического тока. Вычисления приводят к следующему выражению для средней скорости  $v_d$  направленного движения электронов

$$v_d = \frac{eE\lambda}{2m \langle v \rangle} \quad (8)$$

где  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега электронов, которую считают по порядку величины равной параметру кристаллической решетки металла;  $m$  – масса электрона.

Подставляя формулу (8) в формулу (7), получаем

$$j = \frac{e^2 n \lambda E}{2m \langle v \rangle} \quad (9)$$

что при сопоставлении с формулой (6) дает для  $\sigma$  выражение

$$\sigma = \frac{e^2 n \lambda}{2m \langle v \rangle} \quad (10)$$

### **Определение сопротивления проводника с помощью моста Уитсона**

Для определения сопротивления проводников существуют различные методы. Одним из них является метод измерения сопротивлений при помощи мостовой схемы. Мостовые схемы представляют собой разветвленные цепи, для расчета которых применяются *правила Кирхгофа*.

Первое правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum I_i = 0 \quad (11)$$

Уравнение (11) можно написать для каждого из  $N$  узлов цепи. Однако независимыми являются только  $N - 1$  уравнение. Направления токов в участках цепи выбираются произвольно, а знаки для определенности считают положительными для токов, подходящих к узлу, и отрицательными для токов, отходящих от узла.

Второе правило гласит, что алгебраическая сумма напряжений в замкнутом контуре равна алгебраической сумме э.д.с., входящих в этот контур:

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon_i \quad (12)$$



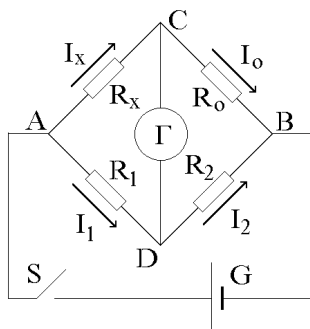


Рис.3

При заданном направлении обхода контуров положительными считаются те токи и э.д.с., направления которых совпадают с направлением обхода.

Среди уравнений (12) независимыми будут только уравнения для тех контуров, которые нельзя получить наложением других контуров друг на друга.

Мостовая схема постоянного тока, часто называемая сокращенно мостом Уитсона, представляет собой замкнутый четырехугольник, составленный из сопротивлений  $R_o$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_x$  (рис.3). В диагональ  $AB$  четырехугольника включается источник постоянного тока с электродвижущей силой  $\varepsilon$ , в диагональ — чувствительный гальванометр  $\Gamma$ .

Эта диагональ схемы и называется мостом в собственном смысле. Весь процесс измерений при помощи этой схемы связан с требованием равенства нулю тока в мосте, отсюда и распространение названия "мост" на всю схему. При произвольном соотношении сопротивлений, составляющих всю мостовую схему, через гальванометр, разумеется, должен идти ток, но (это можно показать простым расчетом) существует одно определенное соотношение между сопротивлениями, составляющими схему, при котором ток, идущий через гальванометр, обращается в нуль, хотя при этом во всех других звеньях схемы ток не равен нулю.

Если ток в гальванометре отсутствует, то применяя к контурам  $ADCA$  и  $CBDC$  второе правило Кирхгофа, получим

$$I_x R_x - I_1 R_1 = 0; \quad I_o R_o - I_2 R_2 = 0 \quad (13)$$

Применяя к узлам  $C$  и  $D$  первое правило Кирхгофа, будем иметь

$$I_o = I_x, \quad I_1 = I_2 \quad (14)$$

Из выражений (13) и (14) получим  $R_x/R_o = R_1/R_2$  или

$$R_x = R_o \frac{R_1}{R_2} \quad (15)$$

#### Определение сопротивления гальванометра с помощью моста Томсона

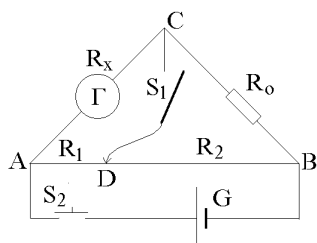


Рис.4

Для измерения сопротивления используется мост постоянного тока с некоторыми изменениями в расположении его отдельных частей. Схема моста Томсона показана на рис.4. Цепь питается от источника постоянного напряжения  $G$ . Величина напряжения регулируется так, чтобы при заданных значениях сопротивлений  $R_o$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  стрелка гальванометра не выходила за пределы шкалы.

Сопротивлением  $R_o$  служит магазин сопротивлений. Сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  служат части реохорда  $AB$  (рис.4). Реохордом называют однородную проволоку, изготовляемую из высокоомного материала.

По проволоке реохорда перемещается подвижный контакт  $D$ , соединенный с гальванометром  $\Gamma$ . Этот контакт делит реохорд на две части:  $AD$  и  $DB$ . Вследствие того, что проволока реохорда однородна и тщательно калибрована, отношение сопротивлений участков цепи  $AD$  и  $DB$  (плеч реохорда) на основании формулы (2) можно заменить отношением соответствующих длин плеч реохорда:

$$R_1/R_2 = l_1/l_2 \quad (16)$$

Если потенциалы точек  $C$  и  $D$  равны ( $\varphi_C = \varphi_D$ ), то ток в диагонали  $CD$  равен нулю, и потому замыкание и размыкание кнопки  $S_1$  не будут вызывать изменений тока в ветвях мостовой схемы, в том числе и в ветви гальванометра  $\Gamma$ . При этом будет выполняться соотношение (15):

$$R_x = R_o \frac{R_1}{R_2} = R_o \frac{l_1}{l_2}$$

Таким образом, мостовая схема может быть использована не только для измерений сопротивлений различных проводников, но и для измерения сопротивления гальванометра. При этом не требуется

включение второго прибора в диагональ схемы для использования схемы в обычном порядке.

### Объекты исследования, оборудование

Общий вид установки представлен на рис.1. К основанию (1) прикреплена колонна (4) с нанесенной метрической шкалой (6). Подвижный кронштейн (5) может передвигаться вдоль колонны. Между верхним и нижним неподвижным кронштейнами натянут резистивный провод (3). Нажатие клавиши *S* прибора (2) вызывает включение напряжения питания, при этом высвечивается индикатор (7). Переключением клавиши *S2* выбирается вид работы установки (мост Томсона или определение удельного сопротивления проводника).

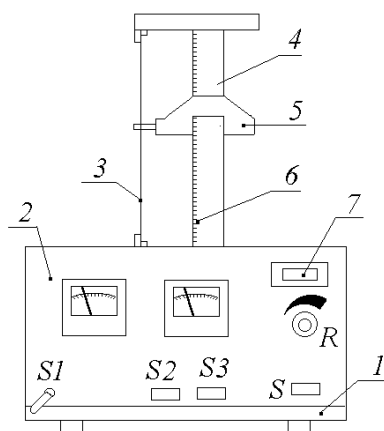


Рис.1. Общий вид установки

Переключение клавиши *S3* позволяет точно ток или напряжение при нижнем положении переключателя *S1* и нажатой клавише *S2*. Клавиша *S3* также служит для переключения резисторов  $R_0$  в мосту Томсона при отжатой клавише *S2*. Ручка резистора  $R$  позволяет регулировать силу тока в схеме.

### Рабочее задание

Определить значение удельного сопротивления резистивного провода и определить сопротивление гальванометра с помощью моста Томсона.

## Порядок выполнения работы

### Определение удельного сопротивления резистивного провода

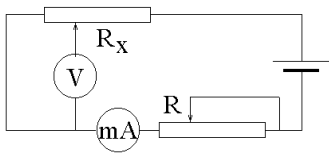


Рис.2

Установите режим работы установки для определения удельного сопротивления проводника. Для этого необходимо произвести следующие операции с переключателями и клавишами:

1. Поставить переключатель *S1* в нижнее положение.
2. Нажать клавишу *S2* (положение *V – mA*).
3. Клавиша *S3* в нажатом положении. При таком положении переключателей и клавиш включена схема, изображенная на рис.2.

реключателей и клавиш включена схема, изображенная на рис.2.

4. Включите вилку провода от установки в розетку напряжением 220 В. Нажмите клавишу *S* (сеть).

5. Передвиньте подвижный кронштейн на колонне на 35 см от основания (необходимо определить положение риски на подвижном кронштейне по шкале на колонне). Регулятором тока *R* установите такое значение тока, чтобы вольтметр показывал приблизительно 2/3 измерительного диапазона.

6. Запишите показания амперметра и вольтметра в табл.1.

7. Удельное сопротивление проводника подсчитать по формуле  $\rho = US / Il$ , где *U* – напряжение на проводнике; *I* – ток в проводнике; *l* – длина проводника; *S* – площадь его поперечного сечения.

8. Значение напряжения и тока измерьте для трех различных длин проводника.

Данные занести в табл.1.

№ п/п	<i>U</i> , В	<i>I</i> , 10 <sup>-3</sup> А	<i>l</i> , м	<i>S</i> , м <sup>2</sup>	$\rho$ , Ом·м	$\langle \rho \rangle$ , Ом·м	$\Delta \rho$ , Ом·м	$\langle \rho \rangle$ , Ом·м	<i>E</i> %

## Определение сопротивления гальванометра с помощью моста Томсона

1. Схема моста Томсона показана на рис.4. Для включения такой схемы необходимо отжать клавишу  $S2$  (положение – мост)
2. Переключатель  $S1$ , разрывающий диагональ моста, поставьте в нижнее положение; отождествите клавишу  $S3$ , при этом подключается в плечо моста резистор  $R_{01}$ .
3. Регулятором  $R$  установите стрелку вольтметра так, чтобы она не зашкаливала.
4. Поставьте переключатель  $S1$  в верхнее положение, при этом показание вольтметра изменится; с помощью подвижного кронштейна добейтесь первоначального показания вольтметра (как и при нижнем положении переключателя  $S1$ ), т.е. уравновесьте мост.
5. Проверьте равновесие моста переводом переключателя  $S1$  в нижнее и вновь в верхнее положение. Стрелка вольтметра при этом не должна изменять своего положения.
6. Запишите значение сопротивления подключенного резистора  $R_{01}$  и длину проводника  $l_1$  от основания до риски на подвижном кронштейне в табл.2.
7. Верните переключатель  $S1$  в нижнее положение, разрывая диагональ моста. Нажмите клавишу  $S3$ , тем самым подключая в плечо моста резистор  $R_{02}$ , Переведите переключатель  $S1$  в верхнее положение, замыкая диагональ моста, Показание вольтметра изменится. Снова уравновесьте мост передвижением подвижного кронштейна. Проверьте равновесие моста переводом переключателя  $S1$  в нижнее и вновь в верхнее положение. Стрелка вольтметра при этом не должна изменять своего положения.
8. Запишите значение сопротивления подключенного резистора  $R_{02}$  и длину проводника  $l_1$  от основания до риски на подвижном кронштейне в табл.2.
9. Повторите пункты 2 – 8 еще при двух различных значениях напряжения, изменяя его регулятором  $R$
10. Сопротивление гальванометра вычислите по формуле  $R_x = R_0 \frac{l_1}{l - l_1}$ , где  $l=51$ , см – длина

всего провода.

Измерения и окончательный результат занесите в табл.2

№ п/п	$R_0$ , Ом	$l_1$ , см	$R_x$ , Ом	$\langle R_x \rangle$ , Ом	$\Delta R_x$ , Ом	$\langle \Delta R_x \rangle$ , Ом	$E$ , %

### Содержание отчета

Результаты измерений и расчетов записать в табл.1 и 2.

### Контрольные вопросы

1. Объяснить механизм электропроводности металлов. Какова природа сопротивления? Что такое удельное сопротивление, от чего оно зависит?
2. Сформулировать правила Кирхгофа. Записать уравнения для определе-мостовой схеме.
3. Вывести условие равновесия мосто-
4. Чем отличаются мостовые схемы случаях применяется та или другая мосто-противлений?
5. Найдите ток, протекающий через со- $\varepsilon_1=10\text{В}$ ,  $\varepsilon_2=5\text{В}$ ,  $R=10\text{Ом}$ , внутренние сопро-Ом.
6. Запишите систему уравнений для токов, ской схеме на рис.6.

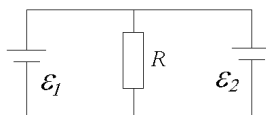


Рис.5

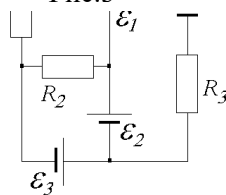


Рис.6

Пояснить, как ими пользо-ния токов в неравновесной вой схемы. Томсона и Уитстона? В каких вая схема для измерения со-противление  $R$  на рис.5. тивления э.д.с. равны  $r = 1$  протекающих в электриче-

### Список использованных источников

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – СПб.:

Лань, 2008. – 496с. с.165-170, 176-180

## Лабораторная работа № 20 Релаксационные колебания

**Цель работы:** исследование характера релаксационных колебаний в схеме с газоразрядной лампой и их применение.

### Теоретические сведения

Для получения длительно существующих электрических (и механических) колебаний большое значение имеют автоколебательные системы. Они характеризуются следующими отличительными свойствами.

1. Автоколебательные системы способны генерировать незатухающие колебания. Эти колебания могут быть гармоническими или более сложной формы, но они могут продолжаться неограниченно долго, до тех пор, пока не выйдут из строя элементы, образующие систему.

2. Автоколебательные системы отличаются от колебательного контура с сопротивлением, равным нулю. Такой контур представляет собой идеальный случай, не достижимый на практике, в то время, как автоколебательные системы являются реальными устройствами, сопротивление которых не равно нулю.

3. В автоколебательных системах незатухающие колебания возникают под влиянием процессов, происходящих внутри системы, и для их поддержания не требуются никаких внешних воздействий.

4. В состав автоколебательных случаев механических колебаний - т.д., в случае электрических - батарея периодически включает-определенную энергию, компенсирует тепло Джоуля-Ленца, что и делает смотрим в качестве примера автоколебательной системы электрическую цепь, содержащую конденсатор и сопротивление (рис.2). Разряд конденсатора через сопротивление представляет собой апериодический процесс. Разряду можно, однако, придать периодический характер, возобновляя заряд конденсатора через равные промежутки времени. Колебания в этом случае являются совокупностью двух апериодических процессов - процесса зарядки конденсатора и процесса его разрядки. Такие колебания называются *релаксационными*.

В нашей установке роль "ключа", обеспечивающего попеременную зарядку и разрядку конденсатора, играет газоразрядный диод НЛ (неоновая лампа). Неоновая лампа включена параллельно конденсатору. Если бы неоновой лампы не было, то напряжение на конденсаторе увеличилось бы с течением времени пропорционально заряду  $q$  и стремилось бы асимптотически к ЭДС источника. Уравнение этой кривой выражается формулой

$$U_C = \varepsilon (1 - e^{-t/RC}) \quad (1)$$

где  $U_C$  - напряжение на конденсаторе,  $\varepsilon$  - ЭДС источника,  $t$  - время,  $R$  - сопротивление цепи,  $C$  - емкость конденсатора.

В том, что это так, можно убедиться, записав закон Ома для участка цепи 1-G-R-2, изображенного на рис.3 (ключ  $S$  замкнули в момент  $t = 0$ );

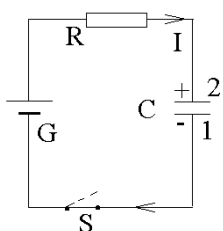


Рис. 3

$$(\varphi_2 - \varphi_1) + IR = \varepsilon \quad (2)$$

Учитывая, что  $I = dq/dt$

и  $(\varphi_2 - \varphi_1) = U_C = q/C$ , перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R} \quad (3)$$

Разделение переменных дает

$$\frac{Rdq}{\varepsilon - q/C} = dt \quad (4)$$

систем входит источник энергии (в сжатая пружина, поднятый груз и рея или иной источник тока). Этот ся самой системой и вводит в нее рующую потери на выделение колебания незатухающими. Рас-

Интегрируя уравнение (4) в пределах от 0 до  $t$ , находим  $RC[\ln(\varepsilon C - q) - \ln(\varepsilon C)] = -t$  откуда

$$q = \varepsilon C(1 - e^{-t/\tau}) \text{ или } U_C = \varepsilon(1 - e^{-t/\tau}) \quad (5)$$

где  $\tau = RC$  - время релаксации.

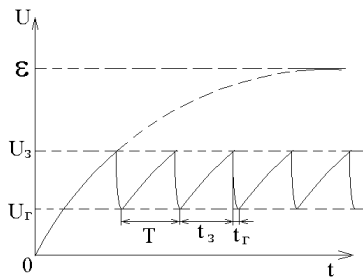


Рис. 4

Начальную часть кривой приближенно можно представить прямой линией:

$$U_C = \varepsilon \frac{t}{\tau}, \quad (6)$$

так как  $e^{-t/\tau} \approx 1 - t/\tau$   
при  $t \ll \tau = RC$ .

При наличии неоновой лампы происходит иное. Основная особенность неоновой лампы состоит в том, что она начинает проводить ток только при определенной разности потенциалов между ее электродами  $U_3$ . Если напряжение на электродах лампы  $U < U_3$ , ток через лампу не идет, так как неон является диэлектриком. В этом случае внутреннее сопротивление лампы бесконечно велико. При разности потенциалов  $U_3$  происходит пробой диэлектрика, и через лампу идет ток - лампа зажигается. Внутреннее сопротивление ее при этом скачком уменьшается до определенной конечной величины.  $U_3$  называется потенциалом зажигания лампы, он зависит от расстояния между электродами, формы электродов, а также от природы и давления наполняющего лампу газа. После зажигания лампа может гореть уже при более низком напряжении, гаснет она при некотором напряжении  $U_g$ , называемом потенциалом гашения.

В результате периодического повторения процессов зажигания и гашения неоновой лампы возникают колебания напряжения  $U_C$ , выражаемые пилообразной кривой (рис.4). По такому же закону изменяется и заряд конденсатора.

Предположим для простоты, что весьма мало по сравнению со временем баний - это есть время, в течение которого значения  $U_g$  до  $U_3$ . Используя формулу выражение

$$T = \frac{U_3 - U_g}{\varepsilon} RC = \frac{U_3 - U_g}{\varepsilon} \tau \quad (7)$$

Вольт-амперная характеристика

показанный на рис.5. При малом напряжении на электродах ток через лампу равен нулю. При зажигании лампы  $U=U_3$  ток скачком достигает величины  $I_3$ . При дальнейшем увеличении напряжения ток в лампе все время возрастает по прямой  $ab$ . Если уменьшить напряжение, то ток уменьшится по прямой  $bc$ , близкой к  $ab$ . Когда напряжение упадет до  $U_g$ , плавное уменьшение тока будет еще продолжаться, и лишь при  $U = U_g$  ток через лампу скачком падает до нуля.

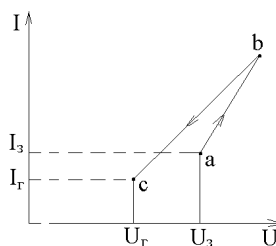


Рис. 5

время разрядки конденсатора его зарядки. Тогда период колебаний напряжения повышается от (6), можно получить для него

### Объекты исследования, оборудование

Электронная схема с неоновой лампой.

### Задание на работу

Построить вольт-амперную характеристику неоновой лампы и определить величину неизвестной емкости.

### Порядок выполнения работы

A. Построение вольт-амперной характеристики неоновой лампы

1. Разберитесь в назначении элементов схемы (рис.1).

2. Регуляторы  $R_1$  и  $R_2$  соевой стрелки, переключатель.

3. Включите установку

4. Медленно увеличивая потенциалом  $R_1$ , заметьте

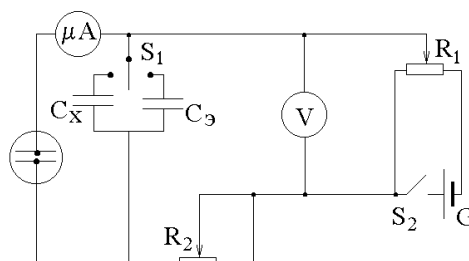


Рис. 1 Схема установки

поверните до упора против часовой стрелки S1 - в нейтральное положение.

в сеть.

увеличивая напряжение с помощью регулятора R1, заметьте момент зажигания лампы

(стрелка микроамперметра резко отклонится от нуля). Вольтметр покажет напряжение зажигания  $U_3$  (кнопку  $S_2$  в процессе измерений держать замкнутой).

5. Продолжая увеличивать напряжение, измеряйте ток, текущий через лампу.

6. После достижения максимально возможного напряжения начните уменьшать его до полного гашения лампы ( $U_\Gamma$ ), записывая значения тока.

7. Данные занесите в таблицу

Таблица 1

При увеличении напряжения		При уменьшении напряжения	
U, В	I, мкА	U, В	I, мкА

8. По данным таблицы постройте график  $I = f(U)$ .

#### Б. Определение величины неизвестной емкости

1. Переключатель  $S_1$  поставьте в положение  $C_3$  (в цепь включается эталонный конденсатор). Ручку  $R_2$  поверните до упора против часовой стрелки.

2. Увеличивая напряжение, добейтесь возникновения колебаний, наблюдаемых по миганию неоновой лампочки, наименьшей частоты. Определите время 10 миганий лампочки. По формуле  $T_3 = t_3/10$  рассчитайте период колебаний.

3. Включите в цепь конденсатор неизвестной емкости и определите период колебаний  $T_x = t_x/10$ . При этом ручки  $R_1$  и  $R_2$  не трогайте!

4. Найдите емкость  $C_x$ , зная из формулы (7), что

$$T_3 = \frac{U_3 - U_\Gamma}{\varepsilon} RC_3, \quad T_x = \frac{U_3 - U_\Gamma}{\varepsilon} RC_x, \quad \text{и следовательно} \quad C_x = C_3 \frac{T_x}{T_3}$$

Таблица 2

$t_3, c$	$t_x, c$	$T_3, c$	$T_x, c$	$C_3, \text{мкФ}$	$C_x, \text{мкФ}$

#### Содержание отчета

Результаты измерений и расчетов записать в табл.1 и 2.

#### Контрольные вопросы

1. Что собой представляют автоколебания? Приведите примеры автоколебательных систем в механике и электричестве.

2. Используя правило Кирхгофа, запишите дифференциальное уравнение зарядки конденсатора и найдите его решение. Какой вид имеет зависимость напряжения на обкладках конденсатора от времени?

3. Пластины заряженного конденсатора замыкают проводником сопротивлением  $R$ . Как быстро конденсатор разрядится на 99%? (решение, аналогичное решению задачи из вопроса №2).

4. Какова роль неоновой лампы в изучаемой схеме?

5. Получите самостоятельно формулу (7).

#### Список использованных источников

Иродов И.Е. Электромагнетизм. – М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2008. – 320с. §5.6 Переходные процессы в цепи с конденсатором (стр.124)



## Лабораторная работа № 21 Термоэлектрические явления

**Цель работы:** ознакомление с термоэлектрическими явлениями, градуировка термопары и определение удельной термоэлектродвижущей силы.

### Теоретические сведения

Металл в целом электронейтрален. Электроны проводимости в металле движутся хаотически с огромной скоростью  $V \sim 10^5$  м/с. Некоторые из них могут случайно выйти наружу из металла. Удаление электрона от наружного слоя положительных ионов решетки приводит к возникновению в том месте, которое покинул электрон, избыточного положительного заряда. Кулоновское взаимодействие с этим зарядом заставляет электрон, скорость которого не очень велика, вернуться обратно.

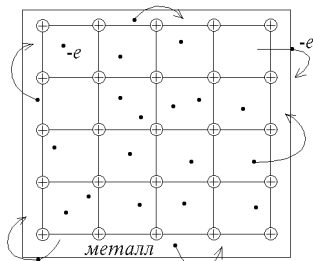


Рис.3

Таким образом, отдельные электроны все время покидают поверхность металла, удаляются от нее на несколько межатомных расстояний и затем поворачивают обратно (см.рис.3). В результате металл оказывается окруженным

Это обла-  
наружным  
ческий слой  
границе разде-

мится вернуть вылетевшие электроны в против сил этого поля при переходе идет на увеличение потенциальной. Поскольку заряд электрона отрицательный, энергия электрона в этой точке следует, что потенциал внутри металла больше, чем потенциал в непосредственной близости к его поверхности в вакууме ( $\varphi_{\text{мет}} > \varphi_{\text{вак}}$ ).

Из квантовой теории известно, что электроны проводимости в металле могут иметь не какие угодно, а только отдельные разные значения энергии, которые заключены в пределах от 0 до максимального значения, совпадающего с энергией Ферми  $E_F$  (или химическим потенциалом металла). Эта величина характеризует те электроны в металле, которые обладают наибольшими скоростями, и которым легче всего вырваться из металла. На рис. 5 энергетические уровни зоны проводимости вписаны в "энергетическую яму", которую называют потенциальной ямой. Для удаления за пределы металла разным электронам нужно сообщить неодинаковую энергию. Наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону для того, чтобы удалить его из металла в вакуум, называется **работой выхода**.

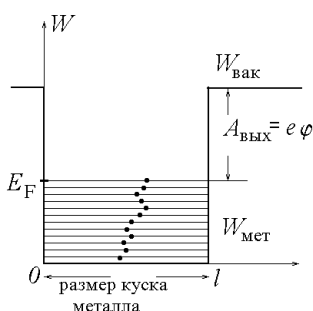


Рис.5

ко образует совместно с слоем ионов двойной электрический слой (см.рис.4). Возникающее на поверхности электрическое поле  $E_{\Gamma}$  стремится вернуть электроны в металл. Работа, совершаемая электроном при переходе из металла в вакуум, энергии электрона  $W = -e\varphi$ . Потенциал точки и потенциал поверхности имеют разные знаки. Отсюда

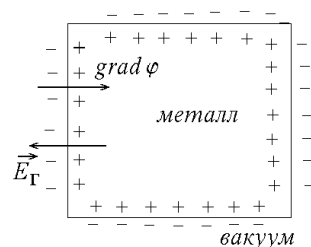


Рис.4

сти в  
решен-  
нуме в  
энергии  
чина  
метал-  
ны в

$$A_{\text{вых}} = W_{\text{вак}} - E_F = e\varphi$$

Величина  $\varphi$  называется потенциалом выхода электрона из металла. Для металла работа выхода равна нескольким эВ и сильно снижается при загрязнении поверхности. Работа выхода электрона из металла немного зависит от температуры. Это вызвано тем, что изменяется с температурой величина энергии Ферми  $E_F$ .

Металлы различаются значением концентрации свободных электронов  $n$ , работой выхода и положением уровня Ферми (см.рис.6). Чем больше концентрация свободных электронов, тем выше расположен уровень Ферми. Если металлы соединить (см.рис.7), то начнется диффузия свободных электронов из металла, в котором их концентрация больше, в металл, где она меньше. При этом переносится заряд, один металл заряжается положительно, другой - отрицательно. Вблизи границы раздела металлов возникает двойной электрический слой и появляется электрическое поле  $\vec{E}_{\text{конт}}$ , которое отталкивает диффундирующие электроны обратно.

Наступает динамическое равновесие: сколько электронов переносится через границу за счет диффузии, столько же возвращается обратно электрическим полем в месте контакта.

В статистической физике доказывается, что условием равновесия между соприкасающимися металлами (а также между полупроводниками или металлом и полупроводником) является равенство энергий Ферми:  $E_{F1} = E_{F2}$  (см. рис. 7; в этом случае уровни Ферми располагаются на одной высоте). При соблюдении такого условия потенциальная энергия  $W_{\text{вак1}}$  электрона в непосредственной близости к поверхности первого металла будет на  $(e\phi_2 - e\phi_1)$  меньше, чем  $W_{\text{вак2}}$  вблизи второго металла. Следовательно, потенциал на поверхности первого металла будет на

$$U_{12} = \frac{e\phi_2 - e\phi_1}{e} = \phi_2 - \phi_1$$

рого.

Величину  $U_{12}$  называют стостью потенциалов.

Как видно из рис. 7, в первом металле меньше, чем во втором, на величину

называют внутренней контактной разностью потенциалов. Контактные разности статическую природу т.е. являются электродвижущими силами, способными

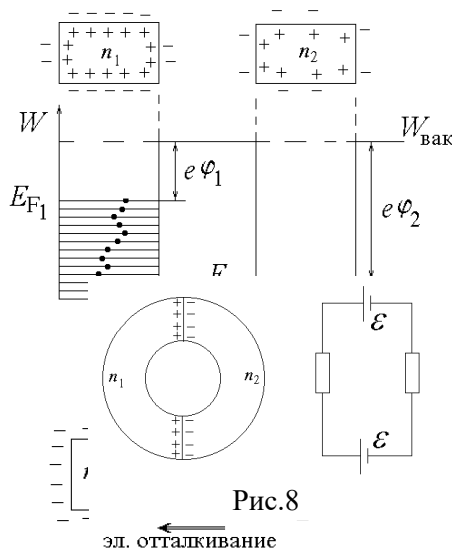


Рис. 8

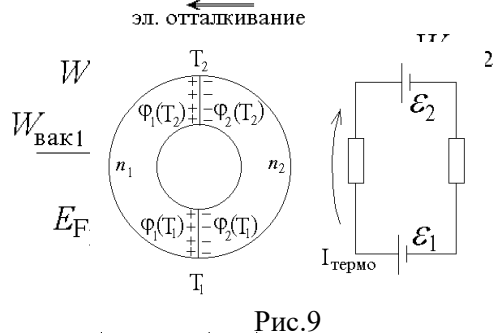


Рис. 7

выше, чем на поверхности вто-

внешней контактной разности

тенциальная энергия электрона в во втором, на  $E_{F1} - E_{F2}$ . Соответственно первого металла выше, чем во втором, на величину

называют внутренней контактной разностью потенциалов имеют неэлектродвижущие (возникает за счет диффузии), жущими силами, способными

### Явление Зеебека

Если спаять в кольцо (рис. 8), то возникающие в разных спаев и компенсируются: ток потечет.

Зеебек обнаружил в однородных металлах, образующую термопару; различных температурах, знака у разности температур с изменением направления тока.

Как отмечалось выше, уровень Ферми зависит от температуры. Поэтому скачок потенциала при переходе из одного металла в другой (внутренняя контактная разность потенциалов) для спаев, находящихся при разных температурах, неодинаков и сумма скачков потенциала для всей цепи отлична от нуля. Одного этого было бы достаточно для возникновения термо ЭДС.

$$\varepsilon_{\text{термо}} = U'_{12}(T_1) + U'_{21}(T_2) = \frac{1}{e} \left\{ [E_{F1}(T_1) - E_{F2}(T_1)] + [E_{F2}(T_2) - E_{F1}(T_2)] \right\} =$$

$$= \frac{1}{e} \left\{ [E_{F2}(T_2) - E_{F2}(T_1)] - [E_{F1}(T_2) - E_{F1}(T_1)] \right\} = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_{12}(T) dT \neq 0$$

Функция  $\alpha_{12}(T)$  называется

ся удельной термоэлектродвижущей силой. Она зависит от природы металлов и очень слабо зависит от температуры, так что при не очень большой разности температур спаев ее можно считать постоянной:

$$\varepsilon_{\text{термо}} = \alpha_{12}(T_2 - T_1)$$

По термопаре, концы которой помещены в области с разной температурой потечет ток.

Если нагрет только один из спаев, то термо ЭДС не зависит от количества соединенных последовательно разнородных металлов! Термо ЭДС создается только двумя металлами, спай которых

проводники из разных металлов контактные разности потенциалов направлены навстречу друг другу по такой замкнутой цепи не

1821 г., что если спаи двух разнородных замкнутую цепь (называемую термопарой), поддерживать при той же температуре спаев не будет течь ток. Изменение температур спаев сопровождается изменением

нагревают.

Чтобы понять вторую причину возникновения термо ЭДС, рассмотрим однородный металлический проводник, вдоль которого имеется градиент температуры. В этом случае концентрация электронов с более высокой энергией у нагретого конца будет больше, чем у холодного; концентрация электронов с более низкой энергией будет, наоборот, у нагретого конца меньше. Вдоль проводника возникнет градиент концентрации электронов с данным значением энергии, что повлечет за собой диффузию более быстрых электронов к холодному концу, а более медленных - к тепловому.

Диффузионный поток быстрых электронов будет больше, чем поток медленных электронов. Поэтому вблизи холодного конца образуется избыток электронов, а вблизи горячего - их недостаток. В результате внутри проводника возникнет электрическое поле, направленное навстречу градиенту температуры. Оно будет уменьшать поток быстрых и увеличивать поток медленных электронов. Когда оба потока выравняются в каждом сечении, наступит равновесное состояние.

Между концами проводника, находящимися при температурах  $T_1$  и  $T_2$ , появится разность потенциалов

$$\Delta\varphi_{\text{диффуз}} = \int_{T_1}^{T_2} \beta dT$$

Величина  $\beta$  невелика - порядка  $10^{-4}$  В/°С. Поэтому обнаружить разность потенциалов  $\Delta\varphi_{\text{диффуз}}$  бывает трудно.

За счет неодинаковости  $\beta$  для металлов 1 и 2 возникнет ЭДС

$$\varepsilon_{\text{диффуз}} = \int_{T_1}^{T_2} \beta_1 dT + \int_{T_2}^{T_1} \beta_2 dT = \int_{T_1}^{T_2} \beta_1 dT - \int_{T_1}^{T_2} \beta_2 dT$$

Таким образом, термо ЭДС складывается из суммы скачков потенциала в контактах (спаях) и суммы изменений потенциала, вызванных диффузией носителя тока.

$$\varepsilon_{\text{термо}} = \varepsilon_{\text{конт}} + \varepsilon_{\text{диффуз}}$$

### Объекты исследования, оборудование

Термопара, термометр, милливольтметр.

#### Задание на работу

Построить график температурной зависимости термоЭДС, рассчитать величину удельной термоЭДС, заполнить таблицу.

#### Порядок выполнения работы

1. Определите по термометру ТЕР на туру  $t_{\text{комн}}$ , одинаковую для спаев а, b и с R.

2. Включите установку в сеть. Через каждые 5°С измеряйте по вольтметру. Нагревание производите до 80°С. Результаты занесите в таблицу.

3. При достижении 80°С выньте измерение термо-э.д.с.  $\varepsilon_T''$  при того спая, фиксируя те же значения нагревания, но в обратном порядке занесите в таблицу и получите значения эксперимента.

4. Для каждой температуры

$$\varepsilon_T = \frac{1}{2}(\varepsilon_T' + \varepsilon_T'')$$

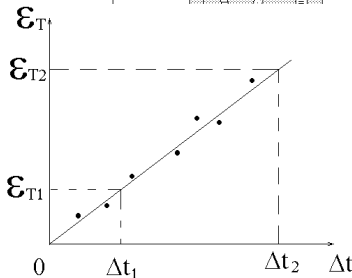
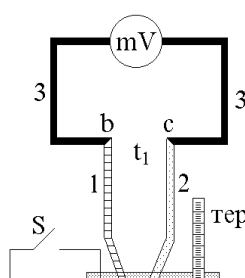


Рис.2 График  $\varepsilon_T(\Delta t)$

установке комнатную температуру при выключенном нагревателе

Нагревая рабочий спай термопары, измерьте величину ЭДС. Результаты измерений занесите в таблицу.

После достижения 80°С выньте установку и продолжите измерение в процессе естественного остывания рабочей температуры, какие были при нагревании. Данные занесите в таблицу.

Вычислите среднее значение

и постройте график зависимости  $\varepsilon_T$  от  $\Delta t = t - t_{\text{комн}}$

5. Вычислите величину удельной термо-э.д.с.  $\alpha$ , используя прямолинейный участок построенного графика так, как это показано на рис.2, по формуле  $\alpha = \frac{\varepsilon_{T_2} - \varepsilon_{T_1}}{\Delta t_2 - \Delta t_1}$ . Участок графика должен содержать несколько экспериментальных точек

t, °C	$\Delta t$ , °C	$\varepsilon_T'$ , мВ	$\varepsilon_T''$ , мВ	$\varepsilon_T$ , мВ

$t_{\text{комн}} = \dots$  °C       $\alpha = \dots$

#### Содержание отчета

График температурной зависимости термоЭДС, значение удельной термоЭДС, заполненная таблица.

### Контрольные вопросы

1. Что представляет собой термопара? Какое явление называется эффектом Зеебека?
2. Каковы источники возникновения термо-э.д.с.?
3. Почему возникает диффузионная составляющая термо-э.д.с.?
4. Почему возникает контактная разность потенциалов? От чего она зависит?
5. Что такое работа выхода электронов из металла? Какова ее физическая природа и порядок величины?
6. Будет ли в замкнутой цепи, собранной из разнородных металлов, возникать электрический ток при однородной температуре? Почему?
7. Что такое удельная термо-э.д.с. и каков ее смысл?
8. Имеется контакт двух металлов 1 и 2 с одинаковой работой выхода, но с разной концентрацией свободных электронов  $n_1 < n_2$ . Какой металл заряжается положительно, какой - отрицательно?
9. Имеется контакт двух металлов 1 и 2 с одинаковой концентрацией, но разной работой выхода  $A_1 > A_2$ . Какой из них заряжается положительно, какой - отрицательно?

### Список использованных источников

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – СПб.: Лань, 2008. – 496с. §76, §77.

## Лабораторная работа № 22

### Определение удельного заряда электрона методом магнетрона

**Цель работы:** ознакомление с одним из методов измерения удельного заряда электрона.

#### Теоретические сведения

**Удельный заряд** - отношение заряда характеристик элементарной частицы. Его движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях, можно управлять этими потоками частиц по величине и направлению. Эти свойства различных электронных и ионных скопов, ускорителей заряженных частиц, электронных и ионных ламп и т.д.).

Движение электронов во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях применяется в тронах (генераторах электромагнитных соковых частот). Магнетрон можно использовать для определения удельного заряда электрона.

Конфигурация полей в магнетроне (рис.2). Электрическая схема установки диода (рис.1). Анодное напряжение  $U_n$  постоянное. Электрическое поле по радиусам анода, а постоянное магнитное поле - параллельно оси анода (рис.2). Таким образом, электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны.

При выключенном магнитном поле электроны, эмитированные катодом, движутся от катода к аноду по радиусам (рис.3,а) под действием ускоряющей силы

$$\vec{F}_e = -e\vec{E},$$

где  $e$  - абсолютная величина заряда электрона;  $\vec{E}$  - напряженность электрического поля в пространстве между анодом и катодом.

В анодной цепи в это время возникает некоторый анодный ток  $I_A$ , величина которого зависит от анодного напряжения  $U_A$  и величины тока накала.

При включении магнитного поля на электроны дополнительно к  $\vec{F}_e$  начинает действовать со стороны магнитного поля сила

$$\vec{F}_m = -e[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Эта сила перпендикулярна скорости электрона  $\vec{v}$  и индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , поэтому она искривляет траекторию каждого электрона, хотя траектория остается в плоскости, перпендикулярной оси диода. При малом магнитном поле траектория электрона искривляется слабо и электрон попадает на анод (рис.3,б). При усилении магнитного поля траектория электрона искривляется сильнее и при некотором значении индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , называемом критическим  $\vec{B}_{кр}$ , траектория электрона касается анода в одной точке (рис.3,с). Это соответствует спаду (сбросу) анодного тока  $I_A$ . Плавное, а не резкое уменьшение анодного тока при дальнейшем увеличении индукции магнитного поля объясняется тем, что электроны, эмитированные катодом, имеют разные скорости, а значит, и по-разному реагируют на одну и ту же величину магнитного поля. При дальнейшем усилении магнитного поля большинство электронов уже не будет касаться анода (рис.3,д). Если бы все электроны имели одинаковые скорости, то сброс анодного тока произошел

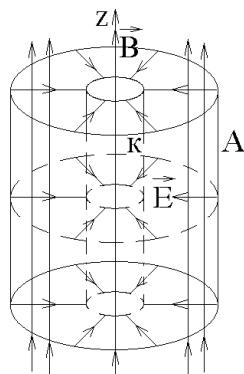


Рис. 2. Конфигурация полей в магнетроне

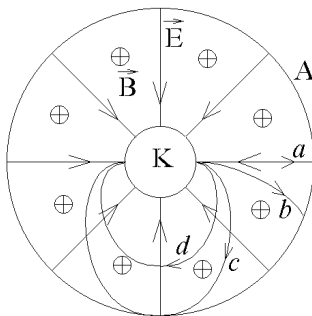


Рис. 3. Траектории электрона при разных токах катушки

к массе - одна из основных характеристик элементарной частицы. Его движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях, можно управлять этими потоками частиц по величине и направлению. Эти свойства различных электронных и ионных скопов, ускорителей заряженных частиц, электронных и ионных ламп и т.д.).

перпендикулярных электрическому и магнитному полям. Магнетрон можно использовать для определения удельного заряда электрона.

такая же, как и в двухэлектродной лампе с анодом и катодом, создающей магнитное поле. Электрическая схема установки диода (рис.1). Анодное напряжение  $U_n$  постоянное. Электрическое поле по радиусам анода, а постоянное магнитное поле - параллельно оси анода (рис.2). Таким образом, электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны.

электроны, эмитированные катодом, движутся от катода к аноду по радиусам (рис.3,а) под действием ускоряющей силы

$$\vec{F}_e = -e\vec{E},$$

где  $e$  - абсолютная величина заряда электрона;  $\vec{E}$  - напряженность электрического поля в пространстве между анодом и катодом.

В анодной цепи в это время возникает некоторый анодный ток  $I_A$ , величина которого зависит от анодного напряжения  $U_A$  и величины тока накала.

При включении магнитного поля на электроны дополнительно к  $\vec{F}_e$  начинает действовать со стороны магнитного поля сила

$$\vec{F}_m = -e[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Эта сила перпендикулярна скорости электрона  $\vec{v}$  и индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , поэтому она искривляет траекторию каждого электрона, хотя траектория остается в плоскости, перпендикулярной оси диода. При малом магнитном поле траектория электрона искривляется слабо и электрон попадает на анод (рис.3,б). При усилении магнитного поля траектория электрона искривляется сильнее и при некотором значении индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , называемом критическим  $\vec{B}_{кр}$ , траектория электрона касается анода в одной точке (рис.3,с). Это соответствует спаду (сбросу) анодного тока  $I_A$ . Плавное, а не резкое уменьшение анодного тока при дальнейшем увеличении индукции магнитного поля объясняется тем, что электроны, эмитированные катодом, имеют разные скорости, а значит, и по-разному реагируют на одну и ту же величину магнитного поля. При дальнейшем усилении магнитного поля большинство электронов уже не будет касаться анода (рис.3,д). Если бы все электроны имели одинаковые скорости, то сброс анодного тока произошел

бы сразу до нуля при достижении критического тока катушки, при этом сбросовая характеристика была бы прямоугольной.

На рис.3 изображены траектории электрона при разной величине индукции магнитного поля  $B$ , Знаками "+" обозначены проекция на плоскость чертежа линий индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , направленных перпендикулярно плоскости за чертеж.

Из закона движения электрона в скрещенных полях получается формула, по которой можно

вычислить удельный заряд электрона:

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_A r_A^2}{B_{кр}^2 (r_A^2 - r_k^2)^2}, \quad (1)$$

где  $U_A$  - анодное напряжение;  $r_A$  - радиус анода;  $r_k$  - радиус катода;

$$B_{кр} = \mu_0 I_{кр} n,$$

(2)

$n$  - число витков на единицу длины катушки, создающей магнитное поле;  $I_{кр}$  - критический ток в катушке.

Уравнение движения электрона в магнетроне имеет вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_л = -e(\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]),$$

где  $\vec{F}_л$  - Лоренцева сила.

Для вывода формулы (1) нием моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (3)$$

и законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - e\varphi = \text{const} \quad (4)$$

В этих уравнениях

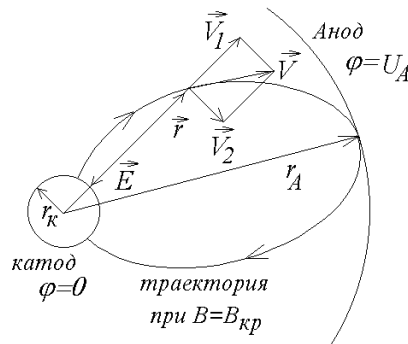


Рис. 4. К выводу формулы (1)

можно воспользоваться уравне-

электрона

$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}]$  - момент импульса

электрона относительно центра катода (рис.4),  $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}_л]$  - момент Лоренцевой силы относительно той же точки,  $\varphi$  - электрический потенциал, а  $(-e\varphi)$  - потенциальная энергия электрона.

Разложим скорость электрона на две взаимно перпендикулярные составляющие  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . То-

гда  $\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{v}_2]$

(так как  $\vec{v}_1 \parallel \vec{r}$  и  $[\vec{r} \times \vec{v}_1] = 0$ ).

Можно также показать, что  $\vec{M} = er v_1 \vec{B}$

Поэтому, проектируя уравнение (3) на ось z, получим

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

или

(5)

$$\frac{d}{dt}(m v_2 r) = e r v_1 B$$

Так как  $v_1 = dr/dt$ , то правая часть уравнения (5) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2} e B \frac{d}{dt}(r^2).$$

Сокращая на  $dt$  и интегрируя полученное равенство от  $r_k$  до  $r$ , получим

$$m v_2 r = \frac{e B}{2} (r^2 - r_k^2) \quad (6)$$

При этом учтено, что электроны вылетают с катода с нулевой скоростью:  $v_1 = v_2 = 0$  при

$$r = r_k.$$

При  $B = B_{кр}$ , как уже говорилось, траектория электрона касается анода, значит,  $v = v_2$  при  $r = r_A$ . Тогда из выражения (6) находим

$$v = \frac{eB_{кр}r_A}{2m} \left( 1 - \frac{r_k^2}{r_A^2} \right) \quad (7)$$

Уравнение (4) в точке  $r = r_A$  принимает вид

$$\frac{mv^2}{2} = eU_A, \quad (8)$$

так как  $\text{const} = 0$  ввиду того, что потенциал катода равен нулю так же, как и скорость частиц вблизи катода.

Исключая  $v$  из соотношений (7) и (8), приходим к формуле (1) для  $e/m$ .

### Объекты исследования, оборудование

Соленоид, реостаты, амперметры, вольтметр.

### Рабочее задание

Построить сбросовые характеристики, рассчитать значение  $e/m$ .

### Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь со схемой на рис.1, а также на панели каждого измерительного прибора.

2. Ручки потенциометров стрелки до упора (т.е. на 0).

3. Включите установку в сеть. Ручкой потенциометра ПА установите анодное напряжение  $U_{A1}$  до конца снятия

4. Снимите так называемую характеристику магнетрона  $I_A = f(I)$ , т.е. зависимость анодного тока  $I_A$  от тока катушки  $I$ . Для этого, удерживая кнопку  $S$  в нажатом состоянии, медленно увеличивайте ток  $I$  в катушке с помощью ручки потенциометра П и заносите в таблицу каждое значение этого тока  $I$  и соответствующее ему значение анодного тока  $I_A$ . Снимите 10 значений тока катушки для анодного напряжения  $U_{A1}$ .

5. Аналогичные сбросовые характеристики снимите для анодных напряжений  $U_{A2}$  и  $U_{A3}$ . Рекомендуемые величины  $U_{A1}$ ,  $U_{A2}$  и  $U_{A3}$  указаны на лабораторных установках. Все результаты измерений занесите в таблицу и получите подпись преподавателя о завершении эксперимента.

6. Приведите установку в исходное состояние и отключите от сети.

7. По табличным данным постройте графики трех сбросовых характеристик на одних координатных осях.

8. На графике каждой характеристики найдите точку сброса анодного тока  $I_A$  и соответствующее ей критическое значение тока в катушке  $I_{кр}$ . Критический ток можно определить как ток катушки, при котором ток анода начинает резко уменьшаться. Вычислите  $B_{кр}$  по формуле (1,а).

9. По формуле (1) вычислите  $e/m$  для каждого из трех опытов и найдите среднее его значение.

10. Полученное среднее значение  $\langle e/m \rangle$  сравните с табличным.

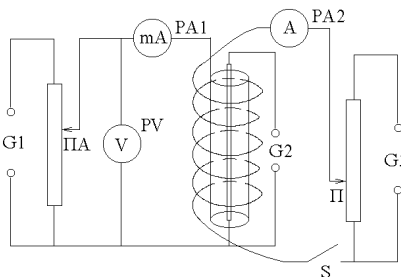


Рис. 1. Схема установки

мой электрической цепи, данной установки. Определите цену деления прибора.

ПА и П поверните против часовой стрелки до упора (т.е. на 0).

Ручкой потенциометра ПА установите анодное напряжение  $U_{A1}$  и поддерживайте его одной характеристикой.

Снимите сбросовую характеристику зависимости величины анодного тока

от тока катушки  $I$ . Для этого, удерживая кнопку  $S$  в нажатом состоянии, медленно увеличивайте ток  $I$  в катушке с помощью ручки потенциометра П и заносите в таблицу каждое значение этого тока  $I$  и соответствующее ему значение анодного тока  $I_A$ . Снимите 10 значений тока катушки для анодного напряжения  $U_{A1}$ .

Аналогичные сбросовые характеристики снимите для анодных напряжений  $U_{A2}$  и  $U_{A3}$ . Рекомендуемые величины  $U_{A1}$ ,  $U_{A2}$  и  $U_{A3}$  указаны на лабораторных установках. Все результаты измерений занесите в таблицу и получите подпись преподавателя о завершении эксперимента.

Приведите установку в исходное состояние и отключите от сети.

По табличным данным постройте графики трех сбросовых характеристик на одних координатных осях.

На графике каждой характеристики найдите точку сброса анодного тока  $I_A$  и соответствующее ей критическое значение тока в катушке  $I_{кр}$ . Критический ток можно определить как ток катушки, при котором ток анода начинает резко уменьшаться. Вычислите  $B_{кр}$  по формуле (1,а).

По формуле (1) вычислите  $e/m$  для каждого из трех опытов и найдите среднее его значение.

Полученное среднее значение  $\langle e/m \rangle$  сравните с табличным.

№ п/п	$U_{A1} = \dots$		$U_{A2} = \dots$		$U_{A3} = \dots$	
	$I, \text{mA}$	$I_A, \text{mA}$	$I, \text{mA}$	$I_A, \text{mA}$	$I, \text{mA}$	$I_A, \text{mA}$
1						
...						
10						



$e/m$ , Кл/кг			
$\langle e/m \rangle = \dots\dots$ (экспериментальное)	Кл/кг	$e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ (табличное)	Кл/кг

### Содержание отчета

Графики вольт-амперных характеристик, таблица.

### Контрольные вопросы

1. Что называется удельным зарядом? Какой метод измерения удельного заряда электрона используется в этой работе?
2. Чему равна и куда направлена сила, с которой электрическое поле действует на заряженную частицу?
3. Чему равна и куда направлена сила, с которой магнитное поле действует на заряженную частицу.
4. Почему полученные сбросовые характеристики не прямоугольные?
5. На основе каких соображений выводится рабочая формула (1)?
6. Может ли электрон в скрещенных однородных полях двигаться прямолинейно и равномерно? Если да, то при каких условиях?

### Список использованных источников

Иродов И.Е. Электромагнетизм. – М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2008. – 320с. §1.1, §6.1.

## Лабораторная работа № 23

### Магнитное поле Земли

**Цель работы:** измерение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли методом тангенс-гальванометра.

#### Теоретические сведения

Магнитное поле Земли в целом подобно полю однородно намагниченного шара (рис.1). Магнитная ось в настоящее время наклонена к географической под углом  $11^\circ$ ; поэтому координаты северного магнитного полюса (в Южном полушарии)  $79^\circ$  ю.ш. и  $69^\circ$  з.д.

Южный магнитный полюс находится в Канаде на расстоянии 1140 км от северного географического в сторону Тихого океана, а северный магнитный - в Антарктиде. Величина магнитного поля у поверхности Земли меняется от 62 до 73 мкТл, а горизонтальной составляющей - от 0 на северном и южном магнитных полюсах до 41 мкТл на экваторе.

В действительности поле Земли имеет намного более сложную конфигурацию, чем изображенная на рис.1. Во-первых, существуют многочисленные магнитные аномалии (например Курская), в районах которых поле достигает значительно больших величин, чем указанные выше (до 200 мкТл). Во-вторых, поле сильно искажено солнечным ветром и явно несимметрично относительно магнитной оси. Кроме того, магнитная ось и магнитные полюса со временем изменяют свое положение, а также существуют вековые вариации величины поля (в настоящее время оно убывает примерно на 1% за десятилетие).

Что касается происхождения геомагнитного поля, то строгой теории пока нет; предполагается, что основным его источником являются электрические токи, циркулирующие в жидком ядре Земли.

Магнетизм - это особая форма взаимодействия электрических токов и магнитов (тел с магнитным моментом) между собой и токов с магнитами. Магнитное взаимодействие пространственно разделенных тел осуществляется *магнитным полем*, которое, как и электрическое поле, представляет собой проявление электро-магнитной формы движения материи. Источник магнитного поля - движущийся электрический заряд, т.е. электрический ток.

Основу теории электромагнетизма образуют уравнения Максвелла, играющие такую же роль, как законы Ньютона в механике. Одно из них записывается так:  $\text{div } \vec{B} = 0$ . Это уравнение означает, что *нет магнитных зарядов, которые создавали бы магнитное поле, как электрические заряды создают электрическое поле*.

Второе уравнение Максвелла выглядит так:  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , где  $\vec{j}$  - плотность тока, порождающего магнитное поле. Это уравнение говорит о вихревой природе магнитного поля (вихрь - то же, что и ротор). Линии  $\vec{B}$  не имеют ни начала, ни конца. Они являются либо замкнутыми линиями, либо уходят на бесконечность. Силовой линией магнитного поля называется линия, касательная к которой в любой ее точке совпадает с направлением магнитного поля  $\vec{B}$ . Если рассыпать магнитные опилки в магнитном поле, то они выстроятся вдоль силовых линий.

Как известно, основной характеристикой всякого магнитного поля является вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ . Это силовая характеристика, т.е. вектор  $\vec{B}$  определяет силу, действующую со стороны магнитного поля на элемент тока  $Id\vec{l}$ .

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что 
$$B = \frac{dF/dl}{I \sin \alpha}, \quad (2)$$

где  $dl$  - длина элемента с током, а  $\alpha$  - угол между  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$ , т.е. модуль вектора  $\vec{B}$  численно равен модулю силы, действующей на единичный элемент тока, расположенный перпендикулярно маг-

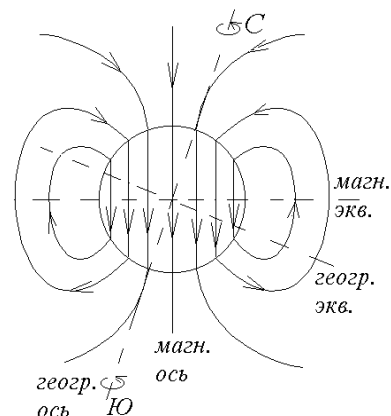


Рис.1

нитным силовым линиям.

Действие же поля на контур с током или постоянный магнит определяется моментом сил

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}, \quad (3)$$

где  $\vec{p}_m$  - магнитный момент контура (или постоянного магнита). Магнитный момент контура с током - это вектор, численно равный  $IS$  ( $S$  - площадь контура) и направленный в сторону положительной нормали  $\vec{n}$ , т.е.  $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ . Магнитный момент постоянного магнита - это векторная сумма магнитных моментов всех его атомов.

Из формулы (3) следует, что свободная магнитная стрелка (маленький постоянный магнит) установится вдоль силовых линий внешнего поля.

### Метод тангенс-гальванометра

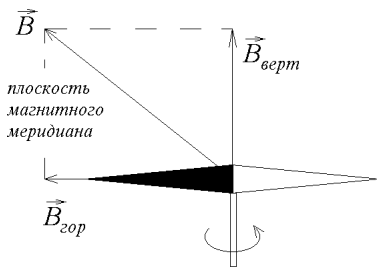


Рис.2

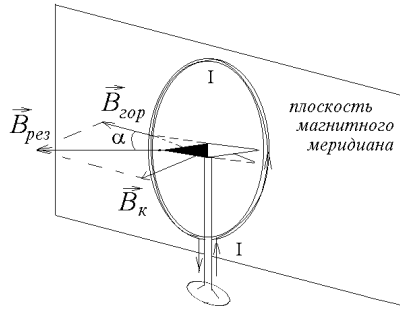


Рис.3

Тангенс-гальванометр представляет собой плоскую катушку радиуса  $R$  с числом витков  $N$ , расположенную в вертикальной плоскости. В центре катушки укреплен обычный компас, стрелка которого может вращаться вокруг вертикальной оси. Поэтому в отсутствие тока в катушке стрелка компаса устанавливается в отличие от свободной стрелки не вдоль магнитных силовых линий геомагнитного поля в плоскости магнитного меридиана, а вдоль горизонтальной составляющей вектора  $B$  (рис.2).

Если совместить плоскость катушки тангенс-гальванометра с плоскостью магнитного меридиана, то стрелка компаса в отсутствие тока будет располагаться вдоль горизонтального диаметра катушки. При включении тока возникает магнитное поле катушки

$$B_k = \mu_0 \frac{IN}{2R}, \quad (4)$$

перпендикулярное плоскости катушки, а значит, и  $\vec{B}_{гор}$ .

Очевидно, что стрелка компаса установится вдоль результирующего поля (рис.3).

Как видно из рис.3 
$$\frac{B_k}{B_{гор}} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (5)$$

где  $\alpha$  - угол отклонения стрелки. Поэтому

$$B_{гор} = \frac{B_k}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\mu_0 IN}{2R \operatorname{tg} \alpha}. \quad (6)$$

### Закон Био-Савара-Лапласа

Индукция магнитного поля  $\vec{B}$ , созданного длинным проводом произвольной конфигурации, по которому течет ток  $I$ , равна векторной сумме индукций магнитных полей  $d\vec{B}$ , созданных каждым элементом длины  $dl$  этого

провода. Закон Био-Савара-Лапласа дает формулу:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3},$$

где  $I d\vec{l}$  - элемент тока,  $\vec{r}$  - радиус-вектор от этого элемента до точки, в которой находится магнитное поле. Как видно из формулы, поле перпендикулярно плоскости, в которой лежат радиус-вектор и элемент тока. Модуль

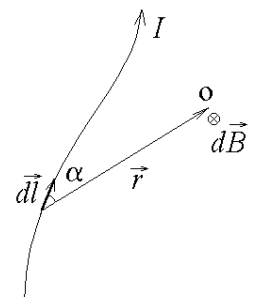


Рис.4

индукции, создаваемой элементом тока, находится по формуле

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2},$$

где  $\alpha$  - угол между радиусом-вектором и элементом тока.

При выводе индукции магнитного поля в центре кругового витка необходимо учесть, что угол  $\alpha = 90^\circ$  (радиус всегда перпендикулярен касательной к окружности), а  $r = R$  (радиус витка). Эти значения будут одинаковы для всех элементов тока витков.

### Объекты исследования, оборудование

Тангенс-гальванометр, компас, источник тока.

### Рабочее задание

Определить среднее значение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли.

### Порядок выполнения работы

1. Не включая источник тока, установите тангенс-гальванометр в плоскости магнитного меридиана. При этом стрелка компаса должна быть направлена по диаметру тангенс-гальванометра. Обратите внимание на то, чтобы северный конец стрелки указывал на нулевое значение компаса.

2. Установите движок потенциометра (или резистора) на минимальный ток через тангенс-гальванометр и затем включите источник тока.

3. Изменяя ток через равные интервалы, зафиксируйте угол отклонения стрелки (рис.3). Необходимо некоторое время, чтобы стрелка компаса успокоилась и перестала колебаться. Запишите величину тока  $I$  и углы отклонения от первоначального положения северного  $\alpha_1$  и южного  $\alpha_2$  полюсов стрелки в таблицу. Получить не менее 5 значений тока (и конечно соответствующие им углы). Внимание: отклонение любого полюса стрелки есть разность начального и конечного показания компаса и не может превысить  $90^\circ$ .

4. Измените направление тока в гальванометре с помощью переключателя на установке. Пропделайте пункт 3, устанавливая такие же значения токов и фиксируя углы отклонения от первоначального положения северного  $\alpha_3$  и южного  $\alpha_4$  полюсов стрелки. *Дублирование измерений делается для того, чтобы исключить систематическую погрешность, связанную с неточной установкой катушки в плоскости магнитного меридиана, а также с определением самой этой плоскости.* Данные занесите в таблицу и получить подпись преподавателя о завершении эксперимента. После этого можно продолжить вычисления.

№ п/п	I, мА	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	$\alpha_3, ^\circ$	$\alpha_4, ^\circ$	$\langle \alpha \rangle, ^\circ$	$\text{tg} \langle \alpha \rangle$	$B_{\text{гор}},$ мкТл	E, относ. погреш- ность	$\Delta B_{\text{гор}},$ мкТл абс. погр.

$N = \dots$  витков;  $\langle B_{\text{гор}} \rangle = \dots$  мкТл;  $(\Delta B_{\text{гор}})_{\text{max}} = \dots$  мкТл

$R = \dots$  м;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;  $B_{\text{гор}} = (\dots \pm \dots)$  мкТл

5. Определить среднее значение угла  $\langle \alpha \rangle$  для каждого значения тока  $I$  по формуле:

$$\langle \alpha \rangle = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) / 4$$

6. По формуле (6) вычислить  $B_{\text{гор}}$  для каждого тока, подставляя вместо  $\alpha$  среднее значение  $\langle \alpha \rangle$ .  $R$  и  $N$  указаны в описании установки.

7. Из всех полученных  $B_{\text{гор}}$  найти среднее значение  $\langle B_{\text{гор}} \rangle$ .

8. По данным опытов определите относительную  $E$  и абсолютную  $\Delta B_{\text{гор}}$  погрешности по формулам

$$E = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{2\Delta \alpha}{\sin 2\alpha}, \quad \Delta B_{\text{гор}} = B_{\text{гор}} \cdot E$$

$\Delta I$ ,  $\Delta R$  и  $\Delta \alpha$  определяются как половина деления прибора, с помощью которого были измерены  $I$ ,  $R$  и  $\alpha$ , причем  $\Delta \alpha$  надо выразить в радианах. Если значение какой-либо величины уже указано в описании установки, например  $R$ , то абсолютная погрешность этой величины определяется как половина единицы последнего разряда. Пример:  $R = 113,15$  м. Единица последнего разряда - это одна сотая.

Таким образом,  $\Delta R = 0,01/2 = 0,005$  м.

9. Найти наибольшее значение абсолютной погрешности. Результат представить в виде

$$B_{\text{гор}} = \left( \left\langle B_{\text{гор}} \pm (\Delta B_{\text{гор}})_{\text{max}} \right\rangle \right) \text{мкТл}$$

Сравнить полученное значение  $B_{\text{гор}}$  с табличным (см. теоретическое описание).

#### **Содержание отчета**

Результаты измерений и расчетов, оформленные в виде таблицы. Значение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли.

#### **Контрольные вопросы**

1. Что такое магнитное поле? Какими свойствами оно обладает? Имеет ли источники, вихри?
2. Дайте определение вектора  $\vec{B}$ . Что такое силовые линии?
3. Как магнитное поле действует на заряд, на провод с током, на виток с током?
4. Сформулируйте закон Био-Савара. Выведите формулу (4), используя этот закон.
5. Покажите картину силовых линий магнитного поля Земли. Покажите как направлен вблизи поверхности Земли в северном полушарии вектор  $\vec{B}$  и найдите его составляющие (горизонтальную и вертикальную).
6. Как меняется  $B_{\text{гор}}$  в зависимости от географической широты?
7. Что известно о природе геомагнитного поля?

#### **Список использованных источников**

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – СПб.: Лань, 2008. – 496с. гл. "Магнитное поле в вакууме".

# Лабораторная работа № 24

## Исследование магнитного поля соленоида

**Цель работы:** экспериментальное определение значений магнитной индукции на оси соленоида и сравнение их с расчетными значениями.

### Теоретические сведения

Наиболее простой вид распределения значений вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  имеется в случае бесконечно длинного соленоида - цилиндрической катушки, по виткам которой протекает электрический ток. Опыт показывает, что чем длиннее соленоид, тем меньше индукция магнитного поля вне его. Для бесконечно длинного соленоида магнитное поле снаружи отсутствует вообще, а внутри его линии вектора  $\vec{B}$  направлены вдоль его оси, причем вектор  $\vec{B}$  составляет с направлением тока в соленоиде правовинтовую систему (рис.1).

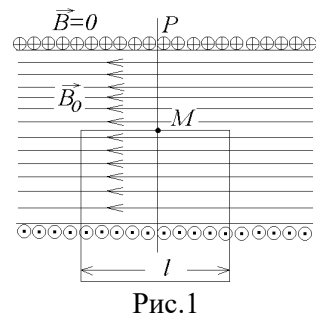


Рис.1

Из теоремы о циркуляции  $\vec{B}$  следует, что внутри бесконечно длинного соленоида

$$B_0 = \mu_0 n I \quad (1)$$

где  $n$  - плотность витков (число витков на единицу длины).

Найдем магнитную индукцию у конца полубесконечного соленоида, для чего представим бесконечный соленоид состоящим из двух идентичных полубесконечных, соединяющихся по плоскости  $P$  (рис.1). В точке  $M$  магнитная индукция  $B$  может быть определена по формуле (1). Если удалить один из полубесконечных соленоидов, то, учитывая, что они вносили одинаковый вклад в магнитную индукцию в точке  $M$ , магнитная индукция у конца полубесконечного соленоида на его оси будет равна половине значения  $B_0$ , определяемого по формуле (1), т.е.

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I \quad (2)$$

Магнитное поле в точках на оси соленоида конечной длины может быть рассчитано с помощью закона Био-Савара.

Представим соленоид как токов (рис.2). Кольцу шириной  $Indx$ , где  $n$  - число витков соленоида, следует из закона Биотока создает в точке  $O$  на оси

$$dB' = \frac{\mu_0 Indx}{4\pi d^2} dl$$

При определении индуктока в точке  $O$  следует учесть, магнитной индукции поля, создано расположенных элементов

этому

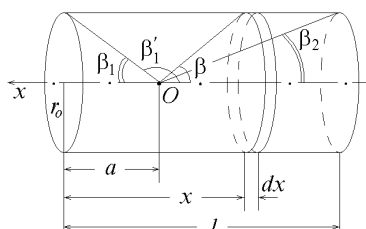


Рис.2

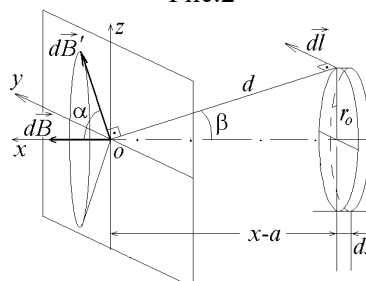


Рис.3

непрерывную систему кольцевых  $dx$  соответствует кольцевой ток соленоида на единицу его длины. Савара, элемент  $dl$  кольцевого соленоида поле с индукцией

ции магнитного поля кольцевого что суммарная компонента магваемого любой парой симметрич-  $d\vec{l}_1$ , направлена вдоль оси  $x$ , по

$$dB = dB_x = \frac{\mu_0 Indx}{4\pi d^2} \cos \alpha \int_0^{2\pi r_0} dl =$$

$$= \frac{\mu_0 Indx}{4\pi d^2} 2\pi r_0 \cos \alpha = \frac{\mu_0 Indx}{2r_0} \frac{r_0^2}{d^2} \sin \beta = \frac{\mu_0 Indx}{2r_0} \sin^3 \beta$$

Так как  $\frac{x-a}{r_0} = \text{ctg } \beta$ , то  $\frac{dx}{r_0} = -\frac{d\beta}{\sin^2 \beta}$ , и магнитная индукция на оси соленоида равна:

$$B = -\frac{\mu_0 I n}{2} \int_{\beta_1'}^{\beta_2} \sin \beta d\beta = \frac{\mu_0 I n}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1')$$

Учитывая, что  $\cos \beta_1' = -\cos \beta_1$  и  $n = N/l$ , где  $N$  - полное число витков соленоида, а  $l$  - его длина, окончательно получим 
$$B = \frac{\mu_0 IN}{2l} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) \quad (3)$$

Косинусы углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  выражаются формулами

$$\cos \beta_1 = \frac{a}{\sqrt{r_0^2 + a^2}}, \quad \cos \beta_2 = \frac{l-a}{\sqrt{r_0^2 + (l-a)^2}} \quad (4)$$

где  $r_0$  - радиус витков соленоида;  $a$  - расстояние от края соленоида до точки, в которой определяется значение магнитной индукции.

Общий вид магнитного поля конечного соленоида изображен на рис.4.

Экспериментальное изучение индукции поля внутри соленоида установки, состоящей из источника магнитное поле которого исследуется катушкой  $L_2$ , которая введена в соленоид вдоль его оси; баллистического выключателя  $S$  и которого можно измерить ток в соленоиде магнитного поля катушку в точке на оси соленоида  $L_1$ . В соленоиде  $L_1$  ток в нем возрастает

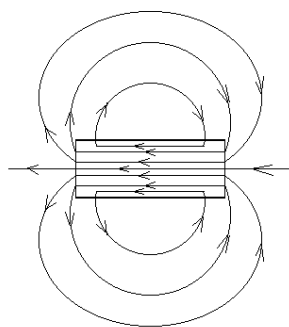


Рис.4

распределения значений магнитной предлагается провести с помощью постоянного тока; соленоида  $L_1$ , малой измерительной катушки  $L_2$  и может перемещаться гальванометра  $P2$ , соединенного с миллиамперметром  $P1$ , с помощью соленоида  $L_1$  (рис.5). При измерении  $L_2$  устанавливают в какой-либо момент замыкания кнопкой  $S$  цепи от 0 до постоянного значения  $I$ .

При этом магнитный поток через витки катушки  $L_2$  изменяется от 0 до  $\Phi = BS_0N_0$ , где  $S_0$  - площадь сечения, а  $N_0$  - число витков катушки  $L_2$ . Изменение магнитного потока приводит к возникновению в катушке  $L_2$  электродвижущей силы индукции по **закону Фарадея**:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

и, как следствие, появлению в  
тока  $i$  (явление электромагнит-  
световой зайчик гальванометра  
нальный количеству электриче-

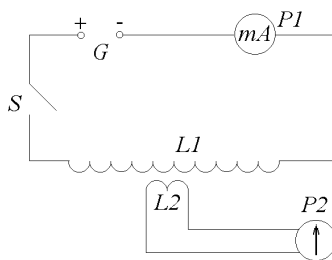


Рис.5

измерительную часть установ-  
ская постоянная гальванометра.

цепи катушки  $L_2$  индукционного  
ной индукции); в результате чего  
смещается на угол  $\alpha$ , пропорцио-  
ства  $q = \int_0^t idt$ , протекшего через  
ки:  $\alpha = \frac{1}{b} \int_0^t idt$ , где  $b$  - баллистиче-

Если полное сопротивление цепи измерительной катушки  $L_2$  равно  $R$ , то  $i = \frac{|\varepsilon_i|}{R}$ , и поэтому

$$\alpha = \frac{1}{bR} \int_0^t |\varepsilon_i| dt = \frac{1}{bR} \int_0^t \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| dt = \frac{1}{bR} \int_0^\Phi d\Phi = \frac{\Phi}{bR} = \frac{BS_0 N_0}{bR}$$

Тогда для магнитной индукции имеем  $B = \frac{bR}{S_0 N_0}$  или

$$B = k\alpha \quad (5)$$

где постоянная  $k = bR/S_0N_0$  принимается за цену деления баллистического гальванометра. По формуле (5) определяются экспериментальные значения магнитной индукции поля на оси соленоида.

### Теорема о циркуляции

Циркуляция вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$  по замкнутому контуру равна алгебраической сумме всех токов, охватываемых контуром, умноженной на  $\mu_0$ .

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

Например, циркуляция  $\vec{B}$  по контуру, охватывающему два равных по силе тока, текущих в противоположных направлениях, равна нулю. Знак тока  $I$  учитывается по общему правилу: если направление обхода контура  $L$  и направление тока связаны правилом правого винта, то знак  $I$  положителен.

При выводе формулы (1) надо учесть, что на двух участках контура (см. рис.1) угол между  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  равен  $90^\circ$  и скалярное произведение  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ , а один участок проходит вне соленоида, где поле  $\vec{B}$  практически равно 0. Полный ток, охватываемый контуром, равен  $\sum_i I_i = N \cdot I = nIl$ , где

$N$  - число витков, приходящихся на длину  $l$ .

### Закон Био-Савара-Лапласа

Индукция магнитного поля  $\vec{B}$ , созданного длинным проводом произвольной конфигурации, по которому течет ток  $I$ , равна векторной сумме индукций магнитных полей  $d\vec{B}$ , созданных каждым элементом длины  $dl$  этого провода. Закон Био-Савара-Лапласа дает формулу:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3},$$

где  $I d\vec{l}$  - элемент тока,  $\vec{r}$  - радиус-вектор от которого находится магнитное поле. Как видно из рисунка, поле перпендикулярно плоскости, в которой лежат радиус-вектор индукции, создаваемой элементом тока, находится по формуле

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2},$$

где  $\alpha$  - угол между радиусом-вектором и элементом тока.

### Объекты исследования, оборудование

Соленоид, гальванометр, миллиамперметр.

### Рабочее задание

Провести измерение распределения значений магнитной индукции в различных точках внутри соленоида.

### Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь с установкой и включите ее в сеть (220 В).
2. Ручкой на установке поместите измерительную катушку L2 у одного из концов соленоида, определив ее положение  $a$  (расстояние от края соленоида до точки, в которой определяется значение магнитной индукции) с помощью указателя на шкале.
3. Нажмите на кнопку  $S$ , измерьте отклонение светового зайчика  $\alpha$  по шкале гальванометра. Не отпуская кнопку, определите силу тока в соленоиде по миллиамперметру.
4. Такие же измерения  $a$  и  $\alpha$  проделайте для других положений катушки L2, перемещая ее каждый раз на 1 см вдоль оси соленоида до упора. Занесите данные в таблицу, после чего получите подпись преподавателя о завершении эксперимента.
5. По формуле (5) найдите экспериментальные значения магнитной индукции, воспользовавшись значением  $k$ , указанным на установке.



6. Для тех же значений  $a$  рассчитайте по формулам (3) и (4) теоретические значения магнитной индукции в соленоиде.

7. Данные вычислений занести в таблицу.

$a$ , м	$\alpha$ , дел	$B_{\text{эксп}}$ , Тл	$\cos\beta_1$	$\cos\beta_2$	$B_{\text{теор}}$ , Тл

$k = \dots\dots$ ;  $I = \dots\dots$

8. Построить графики  $B_{\text{эксп}} = f_1(a)$  и  $B_{\text{теор}} = f_2(a)$  по результатам, полученным из опыта и при теоретическом расчете, на одних координатных осях.

#### Содержание отчета

Результаты измерений и расчетов, представленные в таблице. График распределения экспериментально измеренных и теоретически рассчитанных значений магнитной индукции внутри соленоида.

#### Контрольные вопросы

1. Что такое магнитная индукция?
2. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора магнитной индукции и используйте ее для расчета внутри бесконечно длинного соленоида.
3. Получите формулу для определения магнитной индукции на оси соленоида конечной длины, применяя закон Био-Савара и принцип суперпозиции.
4. В чем состоит явление электромагнитной индукции? Как используется это явление в данной работе?
5. Каким образом можно вдвое увеличить смещение зайчика в используемой установке, не увеличивая силы тока в соленоиде и не меняя параметров измерительной катушки?
6. Чему пропорционален угол отклонения светового зайчика в баллистическом гальванометре. Вывести рабочую формулу для индукции магнитного поля.
7. Используя теорему о циркуляции, найдите зависимость  $B=B(r)$  для тороидальной катушки с числом витков  $N$ .

#### Список использованных источников

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – СПб.: Лань, 2008. – 496с. §42.

Лабораторная работа № 25  
Исследование электрических затухающих колебаний

**Цель работы:** ознакомление с методом получения затухающих электрических колебаний и определение параметров колебательного контура с помощью осциллографа.

**Теоретические сведения**

В идеальном электрическом колебательном контуре, состоящем из емкости и индуктивности, возникают, как правило, гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

В реальном колебательном контуре всегда имеется омическое сопротивление  $R$  (соединительные провода, катушка индуктивности) и поэтому колебания в нем будут затухающими – электрическая энергия контура будет убывать вследствие выделения джоулева тепла и амплитуды колебания заряда  $q$  на обкладках конденсатора, тока  $I$  в цепи, э.д.с. самоиндукции  $\varepsilon_{si}$  и других величин тоже будут уменьшаться с течением времени.

Этот процесс (затухающие колебания) описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0, \quad (2)$$

которое является следствием обобщенного закона Ома.

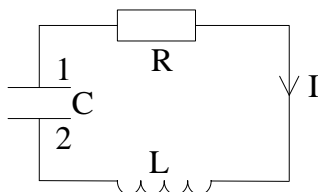


Рис. 5

Действительно, пусть конденсатор в какой-то момент времени разряжается (см. рис. 5), и за время  $dt$  заряд на обкладках уменьшается на величину  $dq = -Idt$ . Тогда для участка цепи 1RL2, согласно закону Ома, имеем

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{si} \quad (3)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – потенциалы на обкладках конденсатора. Учитывая, что в уравнении (3)  $\varphi_1 - \varphi_2 = U_c = q/C$  и  $\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}$ , и заменяя  $I$  на

$-\frac{dq}{dt}$ , получим уравнение (2). Сравнивая его с обобщенной формой затухающих механических колебаний

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4)$$

можем сделать вывод о том, что в электрическом контуре будут происходить затухающие колебания вида

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0) \quad (5)$$

где коэффициент затухания  $\beta = \frac{R}{2L}$ , (6)

а частота затухающих колебаний  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  (7)

Проанализируем формулу (7).

1. Если  $\omega_0 \gg \beta$ , то  $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – в контуре возникают практически незатухающие гармонические колебания, т.е. затуханием можно пренебречь. Период таких колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  будет определяться соотношением

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (8)$$

которое называется формулой Томсона. Условия, соответствующие рассматриваемому случаю

могут наступить, если  $\frac{1}{LC} \ll \frac{R^2}{4L^2}$  или  $R \ll 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ .

2. Если  $\omega_0 > \beta$ , то  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$  – в контуре возникают затухающие колебания с частотой  $\omega$

меньшей, чем частота собственных колебаний контура. В соответствии с формулой (5) для величины заряда на конденсаторе график затухающих электрических колебаний будет иметь вид, представленный на рис.4, т.е. амплитудное значение заряда на конденсаторе будет уменьшаться по экспоненциальному закону. Период таких колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (10)$$

Формулой (10) необходимо пользоваться для определения периода колебаний тогда, когда затуханием пренебречь нельзя.

3. Если же  $\omega_0 \leq \beta$ , то колебания в контуре не возникают. Наименьшее значение омического сопротивления, при котором колебания в контуре не возникают, называется критическим сопротивлением  $R_{кр} = 2\sqrt{L/C}$ .

Для характеристики быстроты уменьшения амплитуды затухающих колебаний вводятся логарифмический декремент затуханий  $\delta$ , равный логарифму отношения амплитуд двух соседних колебаний. В рассматриваемом случае берут значения заряда конденсатора через промежуток времени, равный периоду электрических колебаний:  $\delta_s = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}}$ . Для экспериментального определения  $\delta$  чаще используется равноценное соотношение

$$\delta_s = \frac{1}{m} \ln \frac{q_n}{q_{n+m}} \quad (11)$$

Тогда используют два амплитудных значения заряда конденсатора:  $q_n$  и  $q_{n+m}$  отстоящие друг от друга на  $m$  колебаний, или взятые через отрезок времени в  $m$  раз больший, чем период колебаний.

В качестве амплитудных значений колеблющейся величины для определения логарифмического декремента затухания  $\delta$  в формуле (11) может использоваться не только величина заряда конденсатора  $q$ , но и значения напряжения на конденсаторе или катушке индуктивности или величина тока в цепи электрического колебательного контура.

Величина логарифмического декремента затухания однозначно связана с коэффициентом затухания  $\beta$ :

$$\delta = \beta T \quad (12)$$

В радиотехнике для характеристики свойств контура используется понятие добротности  $Q = 2\pi W / \Delta W$ . По физическому смыслу добротность контура в  $2\pi$  раз больше отношения энергии  $W$ , запасенной в контуре к энергии  $\Delta W$ , теряемой на джоулево тепло в этом же контуре за одно колебание. Как показывают расчеты, величина добротности контура  $Q$  связана со значением его логарифмического декремента затухания  $\delta$  соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\delta} \quad (13)$$

Используя уравнения (13), (10) и (6), можно в общем случае получить выражение для величины добротности:

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1} = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - \frac{1}{4}}. \quad (14)$$

Для качественных контуров с большим значением добротности затуханием в контуре можно пренебречь и воспользоваться формулой (8) для периода, поэтому в соответствующих случаях формула (14) для расчета добротности может быть заменена приближенной формулой

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (15)$$

### Объекты исследования, оборудование

Установка состоит из колебательного контура, в который входят (рис. 1): 1) катушка индуктивности  $L$ ; 2) конденсаторы  $C_1$ ,  $C_2$ ; 3) омические сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$  для изменения добротности контура; 4) осциллограф (ЭО), на выход  $Y$  которого подано напряжение с контура; 5) источник питания  $G$  обеспечивающий подзарядку конденсатора контура.

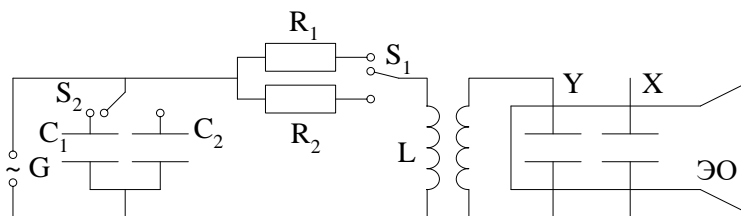


Рис.1

Установка работает следующим образом. К контуру подключаются периодически импульсы питающего напряжения  $U_B$ . В качестве этого напряжения используются импульсы синхронизации осциллографа, которые имеют вид, показанный на рис. 2.

Через равные промежутки времени имеют место импульсы напряжения  $U_B$ , а в остальное время между этими импульсами напряжение равно нулю.

После того, как на конденсатор контура  $C_1$  был послан импульс питающего напряжения  $U_B$  и конденсатор зарядился, в контуре, состоящем из  $C_1$ ,  $L$  и  $R$ , возникают затухающие колебания в течение времени от  $t_1$  до  $t_2$ , когда напряжение от внешнего источника отсутствует. Затем на конденсатор в момент времени  $t$  поступает следующий импульс напряжения  $U_B$ , и вслед за этим в контуре возникают затухающие колебания в течение времени от  $t_2$  до  $t_3$  и т.д.

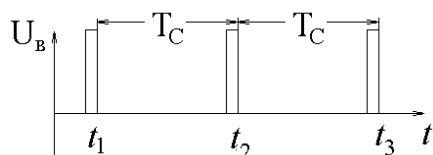


Рис.2

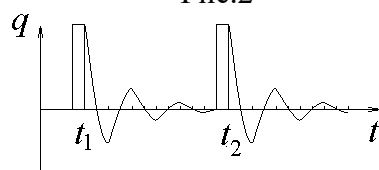


Рис.3

совпадает с периодом подачи экрана осциллографа будем колебаний (рис. 4). На рис. 4  $q_1$ , чения наблюдаемых на экране

В установке предусмотрена характеристик контура таких, как мический декремент  $\delta$ , коэффи-  $Q$  путем изменения емкости и контура.

Таким образом, в контуре периодически повторяются затухающие колебания с периодом  $T_C$ , равным периоду подачи импульсов внешнего напряжения  $U_B$ . Картина этих колебаний во времени будет иметь вид, представленный на рис. 3.

Точно по такому же закону будет изменяться и напряжение на катушке индуктивности  $L$  и сопротивлении  $R$  колебательного контура нашей установки. Это напряжение, подаваемое на вертикальный выход  $Y$  осциллографа (ЭО) (см. рис. 1) позволяет визуально наблюдать картину затухающих электрических колебаний на экране осциллографа.

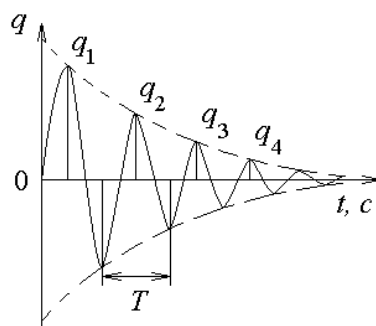


Рис.4

Если период колебаний напряжения развертки осциллографа питающего напряжения  $U_B$ , то на наблюдать картину затухающих  $q_2$ ,  $q_3$  и т.д. – амплитудные значения осциллографа колебаний. возможность изменения характер- период колебаний  $T$ , логариф- цидент затухания  $\beta$  и добротность сопротивления колебательного

### Рабочее задание

Провести измерения параметров колебательного контура в режиме затухающих колебаний.

#### Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с электрической схемой установки.
2. Рассчитать теоретически характеристики колебательного контура для двух случаев:

а)  $C = C_1, R = R_1$ . б)  $C = C_2, R = R_2$ . Для теоретических расчетов использовать выражения

$$\beta_T = \frac{R}{2L}, \quad T_T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \beta_T^2}}, \quad \delta_T = \beta_T T_T, \quad Q_T = \frac{\pi}{\delta_T}.$$

Все использованные и полученные данные занести в таблицу 1:

	$C, \Phi$	$L, \text{Гн}$	$R, \text{Ом}$	$\beta_T, \text{с}^{-1}$	$T_T, \text{с}$	$\delta_T, \text{с}^{-1}$	$Q_T$
а)							
б)							

3. Определить характеристики контура  $\delta_3, T_3, Q_3$  экспериментальным путем с использованием осциллографа. Для этого включить установку в сеть. Добиться изображения затухающих колебаний (рис. 1). По полученной на осциллографе кривой определить период  $T_3$  (необходимо знать цену деления осциллографа по оси X). Записать в табл.2 значения  $q_1, q_2, q_3, q_4$  и определить экспериментальное значение логарифмического декремента затухания по формуле

$$\delta_3 = \frac{1}{n-1} \ln \frac{q_1}{q_n}.$$

Затем, используя средние значения  $\langle \delta_3 \rangle$  для двух случаев контура, определить экспериментальные значения  $\beta$  и  $Q$  по формулам

$$\beta_3 = \frac{\langle \delta_3 \rangle}{T_3} \quad \text{и} \quad Q_3 = \frac{\pi}{\langle \delta_3 \rangle}.$$

При определении логарифмического декремента затухания можно пользоваться десятичными логарифмами, если учесть, что  $\ln x = 2,303 \lg x$ . Полученные результаты занести в таблицу 2:

	$C, \Phi$	$L, \text{Гн}$	$R, \text{Ом}$	$T_3, \text{с}$	$q_1, \text{мм}$	$q_n, \text{дмм}$	$\delta_3$	$\langle \delta_3 \rangle$	$Q_3$
а)						$q_2 =$			
						$q_3 =$			
						$q_4 =$			
б)						$q_2 =$			
						$q_3 =$			
						$q_4 =$			

4. Провести сравнительный анализ характеристик контура, полученных в пунктах 2 и 3. Сделать вывод из проведенного анализа и записать в отчете по лабораторной работе.

#### Содержание отчета

Результаты измерений и расчетов, представленные в таблице.

#### Контрольные вопросы

1. Записать дифференциальное уравнение затухающих электрических колебаний.
2. Записать уравнение заряда на конденсаторе при затухающих колебаниях в контуре.
3. Что такое коэффициент затухания  $\beta$  и как он вычисляется для колебательного контура?
4. Чему равно критическое сопротивление контура? Пояснить его физический смысл.
5. Что такое добротность контура?
6. Что такое логарифмический декремент затухания  $\delta$ ?
7. Получите зависимость между логарифмическим декрементом затухания  $\delta$  и коэффициентом затухания  $\beta$ .

#### Список использованных источников

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – СПб.: Лань, 2008. – 496с. §70
2. Иродов И.Е. Электромагнетизм. – М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2008. – 320с. §11

Лабораторная работа № 26  
**Определение основных характеристик электрического  
колебательного контура методом резонанса**

**Цель работы:** экспериментальное исследование особенностей явления резонанса напряжений, условий его возникновения и определение основных характеристик электрического контура методом резонанса.

**Теоретические сведения**

Если в контур включить внешний источник, ЭДС которого меняется по гармоническому закону  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ , то в контуре установятся вынужденные гармонические колебания с частотой источника  $\omega$ .

Используя правило Кирхгофа для контура (рис.1), запишем:

$$RI + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} + \varepsilon_0 \cos \omega t \quad (1)$$

Подставляя в (1) определение силы тока  $I = \frac{dq}{dt}$ , получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно заряда  $q$  на конденсаторе:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{\varepsilon_0}{L} \cos(\omega t) \quad (2)$$

Введем обозначения:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  и  $\beta = \frac{R}{2L}$  (3)

Решением уравнения (2) будет гармоническая функция с частотой внешнего ЭДС, но с другой фазой  $\varphi$ :

$$q = q_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (4)$$

Для того чтобы найти выражение для силы тока в цепи продифференцируем (4) по времени:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \sin(\omega t - \varphi) = I_0 \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (5)$$

где  $I_0 = q_0 \omega$  – амплитуда тока

Для расчета падения напряжения на катушке индуктивности используют выражение для ЭДС самоиндукции, но с противоположным знаком  $U_L = L di/dt$ . Подставляя сюда выражение (5) получим:

$$U_L = -L q_0 \omega^2 \cos(\omega t - \varphi) = U_{0L} \cos(\omega t - \varphi + \pi), \quad (6)$$

где  $U_{0L} = q_0 L \omega^2$  – амплитудное значение напряжения на катушке индуктивности.

Теперь можно проанализировать фазы колебаний напряжений на элементах контура: на конденсаторе, катушке индуктивности и резисторе.

Напряжение на конденсаторе можно найти из (4):

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega t - \varphi) = U_{0C} \cos(\omega t - \varphi), \quad (7)$$

где  $U_{0C} = q_0/C$  – амплитуда напряжения на конденсаторе. Из (7) и (6) видно, что напряжения на конденсаторе и на катушке индуктивности колеблются в противофазе.

Напряжение на резисторе находим из закона Ома и (5):

$$U_R = IR = q_0 \omega R \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = U_{0R} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (8)$$

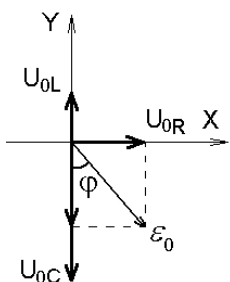


Рис. 2. Фазовая диаграмма напряжений

где  $U_{0R} = q_0 \omega_b R$  – амплитуда напряжения на резисторе. Из (8) и (7) видно, что напряжение на резисторе опережает по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  напряжение на конденсаторе.

Так как элементы контура соединены последовательно (см. рис.2), то напряжение на клеммах источника есть сумма напряжений на конденсаторе, катушке и резисторе. Но складывать такие напряжения надо с учетом фаз, то есть использовать фазовую диаграмму. Из рис. 2 видно, что

$$\varepsilon_0 = \sqrt{(U_{0C} - U_{0L})^2 + U_{0R}^2} \quad (9)$$

Подставив в (9) выражения для амплитуд напряжений из (6), (7) и (8), учтя (3), получим выражение – **амплитудно-частотную характеристику для заряда**

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(1/C - L\omega^2)^2 + \omega^2 R^2}} \quad \text{или} \quad q_0 = \frac{\varepsilon_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (10)$$

Запаздывание колебаний заряда по фазе от колебаний внешней ЭДС находим как угол в треугольнике из рис.2:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{0R}}{U_{0C} - U_{0L}} = \frac{\omega R}{1/C - L\omega^2} = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (11)$$

Если (9) разделить на амплитуду тока  $I_0$  из (5), то можно найти **полное сопротивление цепи или импеданс**:

$$Z = \frac{\varepsilon_0}{I_0} = \sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2} = \sqrt{(1/\omega C - L\omega)^2 + R^2} \quad (12)$$

где  $X_L = U_{0L}/I_0 = L\omega$  – реактивное индуктивное сопротивление;

$X_C = U_{0C}/I_0 = 1/\omega C$  – реактивное емкостное сопротивление;

$R = U_{0R}/I_0$  – активное сопротивление резистора.

Выражение  $X = X_C - X_L$  называют **полным реактивным сопротивлением** цепи.

Из (12) можно найти выражение, называемое **амплитудно-частотной характеристикой для тока**:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(1/\omega C - L\omega)^2 + R^2}}. \quad (13)$$

Анализируя амплитудно-частотные характеристики (10) и (13) для заряда и тока, можно найти **резонансные частоты**, при которых амплитуды  $q_0$  и  $I_0$  достигают максимума (см. рис.3):

$$\omega_{\text{рез}q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad \text{и} \quad \omega_{\text{рез}I} = \omega_0 \quad (14)$$

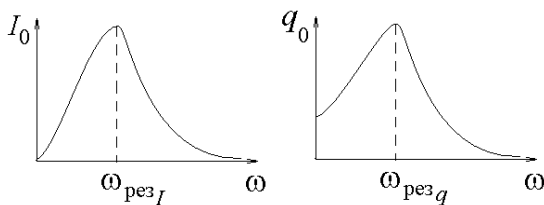


Рис.3

Из (14) видно, что резонансная частота для заряда на конденсаторе меньше, чем для тока. Но если **затухание слабое**, т.е.  $\beta \ll \omega_0$ , то эти частоты можно считать равными  $\omega_{\text{рез}q} \approx \omega_{\text{рез}I} = \omega_0$ .

В случае резонанса значение  $\varphi$  из (8) становится равным

$$\varphi = \arctg\left(\frac{2\beta\omega_{\text{рез}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{рез}}^2}\right) = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Введем понятие добротности, которая показывает, во сколько раз амплитуда напряжения на конденсаторе при резонансе больше амплитуды внешней Э.Д.С.

$$Q = \frac{U_{0C}(\omega_{\text{рез}})}{\varepsilon_0} = \frac{q_{0C}(\omega_{\text{рез}q})}{C\varepsilon_0} \quad (15)$$

Подставляя  $\omega_{рез q}$  из (14) в (10), получим

$$q_0(\omega_{рез q}) = \frac{\varepsilon_0}{2L\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{\varepsilon_0}{2\beta L\omega_0} = \frac{\varepsilon_0}{R} \sqrt{LC}. \quad (16)$$

Подставляя в (16) выражение (15), получим добротность

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (17)$$

Чем больше значение добротности, тем больше резонансное значение напряжения на конденсаторе. Это может вызвать пробой конденсатора. Но можно показать, что увеличение добротности приводит к тому, что резонансная кривая (рис.3) становится уже и у контура повышается *селективность*, то есть контур приемника способен усиливать при резонансе только очень узкий по частоте спектр внешних сигналов (радиостанций), а сигналы с частотами, отличающимися от резонансной даже немного не усиливаются, а наоборот, ослабляются.

### Объекты исследования, оборудование

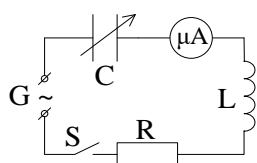


Рис. 1

Лабораторная установка (рис.1) представляет собой последовательно соединенные источник переменного напряжения G, конденсатор переменной емкости C и катушки индуктивности L с активным сопротивлением R. Кроме того, в схеме имеется микроамперметр для измерения силы тока в электрическом колебательном контуре.

### Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться со схемой установки.
2. Снять резонансную кривую, т.е. изменяя значения емкости конденсатора C, измерять показания микроамперметра и данные занести в таблицу 1.
3. По данным таблицы 1 построить резонансную кривую  $I_0 = f(C)$ .

Таблица 1.

Деления на конденсаторе										
C, мкФ										
$I_0$ , мкА										

4. Определить по резонансной кривой значение емкости  $C_{рез}$ , соответствующее максимальному значению тока  $I_0$ .
5. Определить индуктивность контура L по формуле (3). Резонансная частота  $\omega_{рез}$  совпадает с частотой Э.Д.С. источника G. Значение  $\omega_{рез}$  указано на установке.
6. Рассчитать добротность контура Q по формуле (17). Сопротивление R указано на установке.
7. Заполнить таблицу 2.

Таблица 2

$C_{рез}$ , мкФ	$\omega_{рез}$ , с <sup>-1</sup>	L, Гн	R, Ом	Q

### Содержание отчета

Результаты измерений и расчетов, оформленные в виде таблиц 1 и 2, График резонансной зависимости контура.

### Контрольные вопросы

1. Нарисовать принципиальную электрическую схему для наблюдения резонанса тока.
2. Записать дифференциальное уравнение вынужденных электрических колебаний.
3. Какое явление называется резонансом?
4. Найти резонансную частоту для колебаний заряда на конденсаторе.
5. Найти резонансную частоту для колебаний силы тока в контуре.
6. Найти резонансную частоту для колебаний напряжения на катушке индуктивности.



7. Резонанс какой величины наблюдается в схеме на рис.1?
8. Как изменится кривая на рис.2 при увеличении активного сопротивления в контуре?
9. Почему в радиоприемниках необходимо использовать приемный контур с большой добротностью?

#### **Список использованных источников**

Иродов И.Е. Электромагнетизм. – М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2008. – 320с.

## Определение ширины запрещенной зоны полупроводника и температурного коэффициента сопротивления металла

**Цель работы:** исследование зависимости сопротивления полупроводника и металла от температуры, определение ширины запрещенной зоны полупроводника и температурного коэффициента сопротивления металла.

### Теоретические сведения

Полупроводниками называются вещества, проводимость которых в  $10^6$  раз хуже, чем у металлов, и растет с ростом температуры (а у металлов, как известно, падает). К чистым полупроводникам с собственной проводимостью относятся элементы четвертой группы периодической системы, а именно: германий, кремний и серое олово. Их свойства определяет зонная структура и заполнение электронами уровней энергии. Как и у непроводников, зона проводимости полупроводников пуста при  $T=0$  К. Но если у непроводников ширина запрещенной зоны, отделяющей зону проводимости от валентной зоны, *очень велика*, то у полупроводников она *мала* и составляет  $\Delta E_z \sim 0,1 \dots 1$  эВ. На рис.1 показана зонная структура не-



Рис.1. Зонные энергетические диаграммы: а) - непроводника; б) - полупроводника

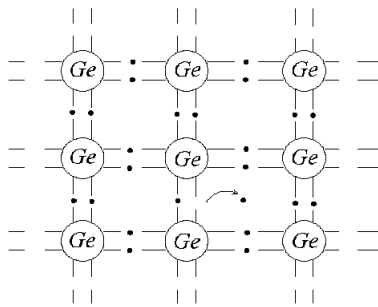


Рис.2. Межатомные связи: кристаллическая решетка чистого полупроводника

проводника (алмаза) и полупроводника (германия).

Как известно, энергия теплового возбуждения  $E = kT$  слишком мала, чтобы электроны могли преодолеть запрещенную зону, и зона проводимости остается пустой (рис.1,а). В полупроводниках, однако, эта энергия *сравнима* с шириной запрещенной зоны  $\Delta E_z$  и часть электронов с верхних уровней валентной зоны, как показано на рис.1,б, переходит при тепловом возбуждении в зону проводимости. Эта зонная структура соответствует кристаллической решетке полупроводника, изображенной на рис.2,а. Межатомные связи, обозначенные пунктиром, образуются при перекрывании электронных оболочек атомов **Ge**. Электроны валентной зоны принадлежат электронным оболочкам. При тепловом возбуждении, как показано на рис.2,а, один из электронов может приобре-

сти энергию связи  $\Delta E_z$ , преодолеть кулоновское притяжение со стороны ядра и стать свободным, т.е. перейти в зону проводимости. В результате концентрация электронов в зоне проводимости достигает значений  $n_e \sim 10^{15} \dots 10^{16} \text{ м}^{-3}$  (при нормальной температуре) и *увеличивается* с ростом  $T$ . Это значение ничтожно по сравнению с концентрацией электронов проводимости в металлах ( $n \sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$ ) и этим объясняется плохая электропроводность полупроводников

Если бы валентная зона была полностью заполнена электронами, то они не участвовали бы в проводимости. Но на месте ушедших из валентной зоны (вырванных из валентной связи) электронов вблизи верха валентной зоны остаются незаполненные энергетические уровни. Другие электроны из валентной зоны могут переходить под действием внешнего поля на эти уровни и создавать ток. Таким образом, можно подумать, что в заполненной электронами валентной зоне перемещается незанятое пустое место. Тогда говорят, что перемещается "дырка". Дырки - это квазичастицы, находящиеся на месте вакантных валентных связей или незаполненных уровней в валентной зоне и обладающие положительной эффективной массой  $m_p > 0$  и положительным зарядом  $q_p = +e$ . Переходы электронов на вакантные уровни, т.е. *электрический ток* создаваемый всеми электронами из валентной зоны, эквивалентен току квазичастиц - дырок.

Число электронов в зоне проводимости собственного полупроводника равно числу дырок в валентной зоне, т.е.  $n_p = n_e$ . Так как электронный и дырочный газы в полупроводнике невырожден-

ные, то, например, для электронов распределение по энергиям можно записать в виде  $dn_e(E)A\sqrt{E}f(E)dE$ , где  $f(E)$  – функция распределения *Ферми-Дирака*, показывающая вероятность заполнения электроном энергетического уровня с энергией  $E$ .

$$f(E, T) = \frac{1}{\exp((E - E_F)/kT) + 1}$$

где  $E_F$  – энергия Ферми (электрон может иметь такую энергию с вероятностью 50%);  $T$  – абсолютная температура;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж·К<sup>-1</sup> – постоянная Больцмана.

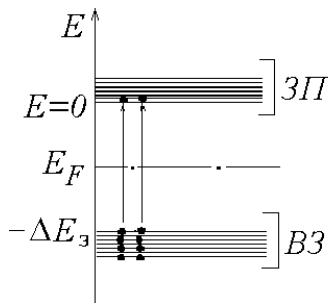


Рис.3. Уровень Ферми для чистого полупроводника

В области больших энергий (т.е. при  $E - E_F \gg kT$ ) единицей в знаменателе можно пренебречь. Тогда функция Ферми-Дирака принимает вид:  $f(E, T) = \exp(-\frac{E - E_f}{kT})$

а распределение по энергиям можно записать в виде  $dn_e(E)A\sqrt{E} \exp(-\frac{E - E_F}{kT})dE$ , где за нулевой уровень энергии принято дно зоны проводимости (рис.3). Аналогично запишется распределение дырок в валентной зоне. Вычисляя  $n_e$

$$n_e = \int_{E=0}^{E=\infty} dn_e = \text{const} \cdot \exp(\frac{E_F}{kT}) \quad (1)$$

и  $n_p$  и приравнявая их, находим

$$E_F = -\Delta E_3 / 2 \quad (2)$$

Следовательно, уровень Ферми в чистых полупроводниках лежит посередине запрещенной зоны. Т.о. из формул (1) и (2) вытекает, что  $n_e = n_p \sim \exp(-\frac{\Delta E_3}{2kT})$ . Так как проводимость чистого полупроводника (собственная проводимость) состоит из сумм проводимостей электронов и дырок, а каждая из них пропорциональна  $n_e$ , то получим  $\sigma = \sigma_o \exp(-\frac{\Delta E_3}{2kT})$ . Значит, собственная проводимость полупроводника экспоненциально растет с ростом температуры. Так как  $\sigma$  связана с удельным сопротивлением  $\rho$  соотношением  $\sigma = 1/\rho$ , то для сопротивления собственного полупроводника имеем

$$R = R_o \exp(\frac{\Delta E_3}{2kT}) \quad (3)$$

Прологарифмировав выражение (3), получим

$$\ln R - \ln R_o = \Delta E_3 / 2kT \quad \text{или} \quad \ln R_o = \frac{\Delta E_3}{2k} \cdot \frac{1}{T} + \text{const.}$$

Если построить график зависимости  $\ln R = f(1/T)$ , то получим прямую линию. По тангенсу угла наклона этой прямой можно определить ширину запрещенной зоны собственного полупроводника:

$$\Delta E_3 = 2k \frac{\Delta(\ln R)}{\Delta(1/T)} \quad (4)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж·К<sup>-1</sup> – постоянная Больцмана.

В металлах электроны проводимости образуют вырожденный электронный газ. Концентрация таких электронов *слабо зависит от температуры*. Однако их подвижность  $b$  пропорциональна длине свободного пробега  $\lambda$  электрона в металле:  $b \sim \lambda$ . Длина свободного пробега, в свою очередь, зависит от частоты столкновений электрона с атомами решетки. Каждый атом решетки при нагревании совершает *беспорядочные колебания* с амплитудой  $a$  относительно положения равновесия. Диск с площадью  $S \sim \pi a^2$  можно принять за сечение рассеяния колеблющегося атома. Электрон, проходя через проводник и попадая в один из таких дисков, будет испытывать рассеяние.

Поэтому длина свободного пробега обратно пропорциональна сечению рассеяния:  $\lambda \sim 1/S \sim 1/a^2$ . Но квадрат амплитуды колебания  $a^2$  пропорционален энергии  $E$  колеблющегося атома, а в твердом теле средняя энергия атомов, совершающих тепловое колебание, пропорциональна температуре  $T$ . Поэтому в металле  $b \sim \lambda \sim 1/a^2 \sim 1/E \sim 1/T$ , а удельная электропроводность металла  $\sigma = neb = \text{const}/T$ , где  $n$  - концентрация электронов;  $e$  - заряд электрона. Следовательно, зависимость сопротивления металла от температуры определяется приближенным соотношением  $R = R_0(1 + \alpha t)$ , где  $t$  - температура, измеренная по шкале Цельсия;  $\alpha$  - характерная для данного металла константа, которая называется температурным коэффициентом сопротивления;  $R_0$  - сопротивление при  $t = 0^\circ\text{C}$ . График зависимости  $R = f(t)$  является прямой линией.

Построив этот график и определив значение  $R_0$ , можно определить температурный коэффициент сопротивления по формуле:

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R_0 \Delta t} \quad (5)$$

Этот коэффициент равен относительному изменению сопротивления металла при увеличении его температуры на  $1^\circ\text{C}$ .

### Объекты исследования, оборудование

Мост постоянного тока, полупроводник, источник тока, термометр, вольтметр.

### Рабочее задание

Исследовать температурные зависимости сопротивления полупроводника и металла, определить ширину запрещенной зоны полупроводника и значение температурного коэффициента сопротивления металла.

### Порядок выполнения работы

1. Разобраться в назначении элементов схемы.
2. Ознакомиться с инструкцией по работе с мостом постоянного тока.
3. Подключить полупроводник к мосту постоянного тока, поставив ключ  $S$  в положение 1. Измерить сопротивление полупроводника  $R_n$  при комнатной температуре.
4. Подключить металл к мосту постоянного тока, поставив ключ  $S$  в положение 2. Измерить сопротивление металла  $R_m$  при комнатной температуре.
5. Записать в табл.1 начальные температуру и сопротивление  $R_n$  и  $R_m$ .
6. Включить установку в сеть. Тумблером включить нагреватель. Когда температура повысится на  $5^\circ\text{C}$ , измерить сопротивление металла  $R_m$ . Занести значения температуры и сопротивления в табл.1. Подключить полупроводник к мосту. Когда температура еще повысится на  $5^\circ\text{C}$ , измерить сопротивление полупроводника и занести в табл.1 значение его сопротивления и соответствующую температуру. Снова подключить металл к мосту и измерить сопротивление металла, когда температура повысится еще на  $5^\circ\text{C}$ , и т.д. до  $100^\circ\text{C}$ .
7. После окончания измерений выключить установку.
8. Построить графики зависимости сопротивления полупроводника и металла от температуры. Пользуясь формулой (5) и построенным графиком  $R_m = f(t)$ , определить значение сопротивления металла  $R_0$  при  $t = 0^\circ\text{C}$  и температурный коэффициент сопротивления металла  $\alpha$ .
9. Заполнить табл.2. Построить график зависимости  $\lg R_n = f(1/T)$ . Если учесть, что  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} / (1,6 \cdot 10^{-19}) \text{ эВ} \cdot \text{K}^{-1}$ , и что  $\ln R = 2,3 \lg R$ , то формула (4) принимает вид

$$\Delta E_3 = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \Delta(\lg R_n) / \Delta(1/T) \text{ эВ}.$$

Пользуясь этой формулой и построенным графиком, определить ширину запрещенной зоны  $\Delta E_3$ .

Таблица 1

Полупроводник		Металл	
$t, ^\circ\text{C}$	$R_n, \text{ Ом}$	$t, ^\circ\text{C}$	$R_m, \text{ Ом}$

Таблица 2

T, K	1/T, K <sup>-1</sup>	lgR <sub>n</sub>

### Содержание отчета

Заполненная таблица, график температурной зависимости сопротивления, значение ширины запрещенной зоны.

### Контрольные вопросы

1. Описать структуру энергетических зон полупроводника.
2. Что называется уровнем Ферми и энергией Ферми?
3. Чем определяется электронная и дырочная проводимость полупроводника?
4. Объяснить механизм зависимости сопротивления полупроводника от температуры.
5. Объяснить механизм зависимости сопротивления металла от температуры

### Список использованных источников

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц. – СПб.: Лань, 2008. – 320с.

Лабораторная работа № 28  
**Исследование явления гистерезиса  
с помощью осциллографа**

**Цель работы:** получить петлю гистерезиса для ферромагнетика и определить его параметры.

**Теоретические сведения**

При определенных условиях в кристаллах могут возникать так называемые *обменные силы*, которые заставляют магнитные моменты атомов устанавливаться параллельно друг другу. В результате возникают области (размером 1-10 мкм) *спонтанного, т. е. самопроизвольного* намагничивания. Эти области называются *доменами*. В пределах каждого домена ферромагнетик намагничен до насыщения и имеет определенный магнитный момент. Направления этих моментов для разных доменов различны, поэтому при отсутствии внешнего поля суммарный момент образца равен нулю и образец в целом представляется макроскопически ненамагниченным.

Если поместить ферромагнетик во внешнее магнитное поле, то домены начинают ориентироваться по полю, так как наименьшую энергию имеет домен с магнитным моментом, направленным по внешнему полю. Действительно, энергия домена  $U \sim (\vec{p}_m \cdot \vec{H}_{внеш})$  минимальна, когда векторы  $\vec{p}_m$  и  $H_{внеш}$  параллельны, где  $\vec{p}_m$  – вектор магнитного момента.

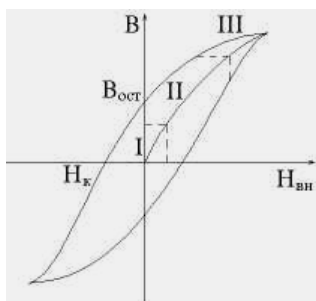


Рис.3. Магнитный гистерезис

При этом ферромагнетик намагничивается и создает магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . Зависимость  $B$  от напряженности внешнего магнитного поля  $H_{внеш}$  не будет линейной (рис.3).

С ростом внешнего поля в области I границы доменов начинают смещаться. Ориентированные по полю домены растут за счет уменьшения доменов, ориентированных против внешнего поля. Но при выключении внешнего поля границы доменов опять возвращаются в исходное положение. В области II границы доменов продолжают смещаться, но теперь смещение становится необратимым. Если убрать внешнее поле, то домены останутся частично ориентированными. Объясняется это наличием дефектов (центров перемагничивания) в ферромагнетиках. Дефектами могут быть, например, нарушения структуры кристаллической решетки: незаполненные атомами узлы (вакансии), обрывающиеся атомные слои (дислокации) (рис.4) и т.п.

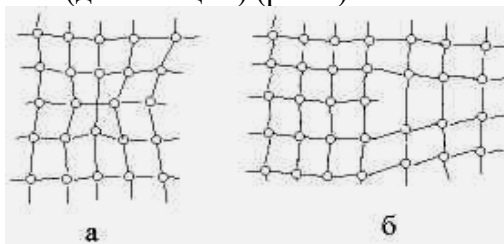


Рис.4. Дефекты кристаллической решетки: а) вакансии; б) дислокации

Вокруг дефектов образуются устойчивые вторичные домены кинжаловидной формы, обладающие минимальной энергией (рис.5). Для переориентирования намагниченности в таких доменах приходится затрачивать намного больше энергии, чем для обычных доменов. Вторичные кинжаловидные домены препятствуют смещению доменных границ при перемагничивании. Напряженность  $H$  внешнего магнитного поля (обратного по направлению), которое надо приложить, чтобы разрушить вторичные домены и вернуть ферромагнетик в исходное ненамагниченное состояние, называется *коэрцитивной силой*  $H_k$ .

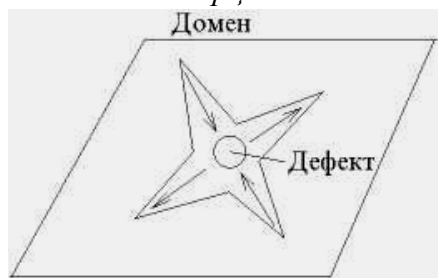


Рис.5. Домен с дефектом кристаллической решетки

В области III внешнее магнитное поле настолько большое, что энергетически невыгодные домены начинают переориентироваться, т.е. их магнитные моменты поворачиваются вдоль внешнего поля. Если теперь внешнее поле убрать, то ферромагнетик полностью не размагнитится и сохранится остаточная индукция  $B_{ост}$  (за счет оставшихся ориентированных доменов).

Это явление называется гистерезисом, а кривая на рис.3 – петлей гистерезиса.

### Объекты исследования, оборудование

Описание установки и осциллографического метода измерения петли гистерезиса.

Петлю гистерезиса можно наблюдать на экране осциллографа. Принципиальная схема установки для наблюдения петли гистерезиса показана на рис.1. Исследуемым образцом является ферромагнитный сердечник тороида. Тороид имеет две обмотки – намагничивающую и измерительную. Первичная обмотка тороида через потенциометр  $R$  и резистор  $R_1$  питается переменным током. Напряжение  $U_1$ , снимаемое с резистора  $R_1$ , подается на горизонтально отклоняющие пластины осциллографа. Ток, протекающий по первичной обмотке тороида, создает магнитное поле напряженностью

$$H = I_1 \frac{N_1}{\pi D_{cp}}, \quad (1)$$

где  $I_1$  – сила тока в первичной обмотке;  $N_1$  – число витков первичной обмотки;  $\pi D_{cp}$  – длина средней линии тороида.

Напряжение на резисторе  $R_1$  по закону Ома  $U_x = I_1 R_1$  и, следовательно, пропорционально напряженности магнитного поля в тороиде:

$$U_x = H \frac{\pi D_{cp} R_1}{N_1}. \quad (2)$$

Во вторичной (измерительной) обмотке возникает ЭДС индукции  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ , где  $\Phi$  – поток вектора магнитной индукции через поверхность, охватываемую всеми витками вторичной обмотки. Если  $S$  – площадь, охватываемая одним витком, а  $N_2$  – число витков измерительной обмотки, то  $\Phi = BS N_2$  и  $\varepsilon_i = -N_2 S \frac{dB}{dt}$ .

Пренебрегая самоиндукцией вторичной обмотки, закон Ома для вторичной цепи можно записать в виде

$$\varepsilon_i = I_2 R_2 + U_C + I_2 R_{N_2},$$

где  $I_2$  – сила тока во вторичной цепи;  $U_C$  – напряжение на обкладках конденсатора  $C$ ;  $R_{N_2}$  – сопротивление измерительной обмотки.

Параметры установки подобраны таким образом, чтобы  $I_2 R_2 \gg U_C$  и  $R_{N_2} \ll R$ . Тогда можно при-

ближенно считать, что  $\varepsilon_i \approx I_2 R_2$ , откуда 
$$I_2 = -\frac{N_2 S}{R_2} \cdot \frac{dB}{dt}$$

Напряжение на обкладках конденсатора, очевидно,

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{\int I_2 dt}{C} = -\frac{N_2 S}{R_2 C} \int \frac{dB}{dt} dt = -\frac{N_2 S}{R_2 C} \int dB = -\frac{N_2 S B}{R_2 C} \quad (3)$$

Напряжение, снимаемое с конденсатора, подается на вертикальные пластины осциллографа. Поэтому  $U_y = U_C$ , т.е.  $U_y$  прямо пропорционально индукции магнитного поля образца  $B$ .

Итак, на горизонтально отклоняющие пластины подается напряжение, пропорциональное  $H$ , а на вертикально отклоняющие – напряжение, пропорциональное  $B$ . Поэтому за один период синусоидального изменения тока след электронного луча на экране опишет полную петлю гистерезиса, а за каждый последующий период в точности повторит ее, в результате чего на экране будет видна неподвижная петля гистерезиса.

Для определения  $H$  и  $B$  используются формулы (2) и (3):

$$H = \frac{U_x N_1}{\pi D_{cp} R_1} \quad \text{и} \quad B = \frac{U_y R_2 C}{N_2 S}$$

Так как отношения  $\frac{N_1}{\pi D_{cp} R_1}$  и  $\frac{R_2 C}{N_2 S}$  постоянны, то  $H$  пропорционально напряжению  $U_x$ , подаваемому на вход  $x$  осциллографа, а  $B$  пропорционально напряжению  $U_y$ , подаваемому на вход  $y$  осциллографа.

Следовательно, для определения  $H$  и  $B$  нужно знать чувствительности входов осциллографа  $k_x$  и  $k_y$ , которые численно равны напряжениям, вызывающим отклонение светового пятна на единицу длины.

Если на входы осциллографа  $x$  и  $y$  поочередно подать переменные напряжения  $U_x$  и  $U_y$ , на экране будут наблюдаться светящиеся линии. Длины горизонтальной  $l_x$  и вертикальной  $l_y$  линий пропорциональны удвоенной амплитуде переменного напряжения.

Чувствительности входов определяются соотношениями

$$k_x = \frac{2\sqrt{2}\Delta U_x}{\Delta l_x} \quad \text{и} \quad k_y = \frac{2\sqrt{2}\Delta U_y}{\Delta l_y} \quad (4)$$

где  $\sqrt{2}U_x$  и  $\sqrt{2}U_y$  – амплитудные значения напряжений переменного тока;  $l_x$  и  $l_y$  – размеры линий;  $U_x$  и  $U_y$  – эффективные значения калибровочных переменных напряжений, подаваемых на входы  $x$  и  $y$  осциллографа.

### Рабочее задание

Получить петлю гистерезиса для ферромагнетика и определить его параметры.

### Порядок выполнения работы

#### Получение на экране осциллографа петли гистерезиса

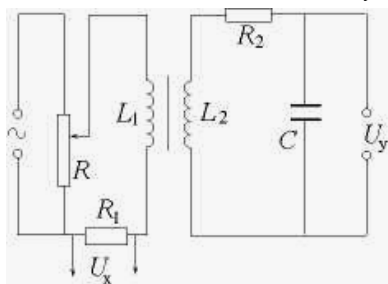


Рис.1. Схема установки

1. Включите установку в сеть с напряжением "220 В". Поставьте тумблер  $S$ , расположенный на панели, в положение "Выкл.". Регулируя ручками "Яркость", "Фокус", "Смещение  $x$ " и "Смещение  $y$ ", добейтесь изображения точки в центре экрана осциллографа.

2. Поставьте ручку  $S_1$  переключателя на панели в положение "Петля", тумблер  $S$  – в положение "Вкл." При этом подключается к источнику питания схема, показанная на рис.1.

3. Изменяя напряжение ручкой  $R$ , получите на экране осциллографа изображение петли гистерезиса размером в 2/3 экрана.

4. Скопируйте с экрана осциллографа петлю гистерезиса на миллиметровую бумагу.

5. Определите площадь петли гистерезиса  $S''$  как сумму клеток единичной площади и координаты  $n_x$  и  $n_y$  точек, в которых петля пересекает координатные оси  $x$  и  $y$ .

После получения петли гистерезиса на экране осциллографа ручки "Усиление  $x$ " и "Усиление  $y$ " при дальнейшем выполнении работы *должны остаться в неизменном положении*.

#### Калибровка осциллографа

6. Ручку  $R$  на панели поверните. Переключатель  $S_1$  поставьте в положение питания подключается схема,

7. Изменяя напряжение ручкой на вольтметре, снимите зависимость длины горизонтальной линии на экране осциллографа от  $l_x = f(U_x)$ .

8. Поставьте переключатель  $S_1$

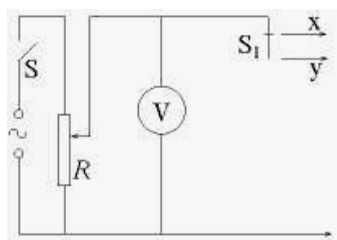


Рис.2. Схема калибровки

в крайнее левое положение. Положение  $x$ , при этом к источнику показанная на рис.2.

$R$  от 0 до максимального значения длины горизонтальной напряжения, подаваемого на  $x$ ,

на панели в положение  $y$ . Сни-



мите зависимость длины вертикальной линии на экране осциллографа от напряжения  $U_y$ ,  $l_y = f(U_y)$ . Результаты измерений запишите в табл.1.

Таблица 1

$U_x, B$	$l_x, м$	$U_y, B$	$l_y, м$		
				$S' =$	$N_1 =$
				$R_2 =$	$R_1 =$
				$C =$	$D_{cp} =$
				$N_2 =$	$v =$

9. Постройте графики зависимостей  $l_x = f(U_x)$  и  $l_y = f(U_y)$ .

10. Из графиков найдите чувствительности входов осциллографа  $k_x$  и  $k_y$  по формулам (4). Цена деления вольтметра при подключении напряжений  $U_x$  и  $U_y$  указана на панели.

Определение остаточной индукции, ферромагнитного сердечника по формуле  $B_{ост} = k_y \frac{R_2 C}{N_2 S'} n_y$ , где  $n_y$  – координата точки, в которой петля гистерезиса пересекает ось  $y$ ;  $S'$  – площадь тороида, охватываемая одним витком.

12. Определите коэрцитивную силу ферромагнитного сердечника по формуле  $H_k = k_x \frac{N_1}{R_1 \pi D_{cp}} n_x$ , где  $n_x$  – координата точки, в которой петля гистерезиса пересекает ось  $x$ .

13. Определите энергию перемагничивания, приходящуюся на единицу объема ферромагнетика за один цикл перемагничивания. Она пропорциональна площади петли гистерезиса:  $\omega = B_1 H_1 S''$ , где  $B_1$  и  $H_1$  – значения индукции и напряженности при  $n_x$  и  $n_y$ , равных 1;  $S''$  – площадь петли гистерезиса, т.е.  $\omega = k_x k_y \frac{R_2 C N_1 S''}{R_1 N_2 S' \pi D_{cp}}$ .

14. Определите потери энергии на перемагничивание за одну секунду по формуле  $\frac{d\omega}{dt} = \omega v$ , где  $v = 50$  Гц – частота переменного тока, подаваемого на намагничивающую обмотку.

15. Полученные результаты занести в табл.2.

Таблица 2

$n_x,$ $м$	$n_y,$ $м$	$S'',$ $м^2$	$k_x,$ $В/м$	$k_y,$ $В/м$	$B_{ост},$ $Тл$	$H_k,$ $А/м$	$\omega,$ $\frac{Дж}{м^3}$	$\frac{d\omega}{dt},$ $\frac{Дж}{м^3 с}$

### Содержание отчета

Результаты экспериментальных измерений и теоретических расчетов в табл. 1 и 2.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается явление магнитного гистерезиса?
2. Каков механизм намагничивания ферромагнетиков?
3. Каков механизм гистерезиса?
4. Каким процессам в ферромагнетике соответствуют участки I, II, III на рис.3
5. Что такое коэрцитивная сила и остаточная намагниченность?
6. Почему напряжения подаваемые на входы  $x$  и  $y$  осциллографа, пропорциональны  $H$  и  $B$ ?

### Список использованных источников

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – СПб.: Лань, 2008. – 496с.с.176-180, 197-198

## Лабораторная работа № 29 Определение точки Кюри

**Цель работы:** Определить точку Кюри ферромагнетика

### Теоретические сведения

Ферромагнетики – это вещества с очень большой магнитной проницаемостью  $\mu$ , величина которой зависит от внешнего магнитного поля. К ферромагнетикам относятся некоторые элементы группы железа (Fe, Co, Ni), ряд редкоземельных элементов (Gd, Dy, Er), элементы и многочисленные сплавы.

Особенности магнитных свойств этих веществ могут быть объяснены квантовомеханическими свойствами кристаллической решетки. Намагничивание объясняется наличием (или возникновением) в процессе намагничивания у атомов магнитных моментов.

Магнитные моменты отдельных атомов складываются из орбитальных и спиновых магнитных моментов электронов и из магнитных моментов частиц, составляющих атомное ядро (нуклонов):

$$\vec{p}_{\text{маг}} = \sum \vec{p}_{m(\text{эл})} + \sum \vec{p}_{ms(\text{эл})} \sum \vec{p}_{m(\text{яд})}.$$

В квантовой механике доказано, что величина магнитного момента частицы по порядку величины

$$p_m = \frac{e\hbar}{m}, \text{ где } e - \text{заряд частицы; } \hbar - \text{постоянная Планка } (\hbar = h/2\pi); m - \text{масса частицы.}$$

Поскольку нуклоны имеют массу приблизительно в 2000 раз большую, чем электроны, их магнитные моменты существенно меньше электронных и ими можно пренебречь. Орбитальные магнитные моменты электронов в многоэлектронных атомах в среднем оказываются направленными в разные стороны и компенсируют друг друга.

В магнитные моменты атомов ферромагнетика основной вклад дают спиновые магнитные моменты электронов:

$$\vec{p}_{m(\text{ат})} = \sum \vec{p}_{ms}, \quad p_{ms} = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)},$$

где  $\mu_B = e\hbar/2m_e$  - магнетон Бора (квант магнитного момента). Электроны имеют противоположные (попарно) направления спина, а потому и противоположные направления спиновых магнитных моментов. По этим причинам вещества, в атомах которых подболобки заполнены полностью, не проявляют ферромагнитных свойств (He, Be, Ar и т.п.).

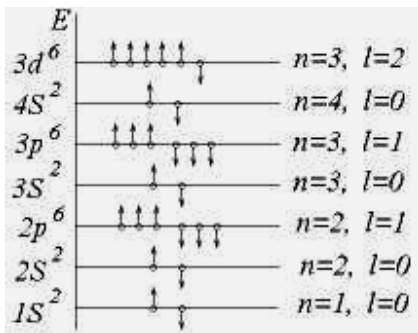


Рис.2. Заполнение электронами подболобок в атоме железа.

Однако у некоторых атомов с незаполненными электронными подболобками (например, у Fe) может появиться значительный спиновый момент. На рис.2 показано заполнение электронами подболобок атомов железа (26 электронов). На каждой подболобке может находиться  $2(2l+1)$  электронов ( $l$  – орбитальное квантовое число).

Стрелками показаны направления их спинов. Подболобка 4s имеет меньшую энергию электронов, чем подболобка 3d и заполняется вначале. В незаполненной подболобке 3d энергетические уровни сначала заполняются электронами с одной и той же ориентацией спина. Когда все возможные состояния с этой ориентацией будут заполнены, заполняются состояния с

другой ориентацией. Поэтому у атомов железа образуется большой нескомпенсированный суммарный спиновый магнитный момент электронов 3d-подболобки:

$$p_{mz(\text{ат})} = 5p_{msz(\text{эл})} - p_{msz(\text{эл})} = 4p_{msz(\text{эл})} = 4\mu_B.$$

Аналогичная картина и у других веществ, обладающих ферромагнитными свойствами.

Опыты Эйнштейна и де Гааза, Иоффе и Капицы и др. позволили экспериментально измерить гиромагнитное отношение (отношение магнитного момента к механическому) намагниченных ферромагнетиков, которое оказалось равным спиновому гиромагнитному отношению для электрона. Ферромагнетизм таким образом имеет спиновую природу.

При сближении атомов на расстояния порядка постоянной кристаллической решетки между

ними возникает специфическое обменное взаимодействие, которое имеет квантовую природу и связано с перекрытием электронных облаков атомов. В ферромагнетиках энергетически более выгодна параллельная ориентация спина электронов.

Однако не все вещества с недостроенными оболочками, атомы которых обладают значительным спиновым магнитным моментом, являются ферромагнетиками. Иногда энергетически выгодной оказывается антипараллельная ориентация спинов и магнитных моментов соседних атомов. Такие вещества называются антиферромагнетиками (рис.3). Каждая стрелка показывает направление магнитного момента атома.

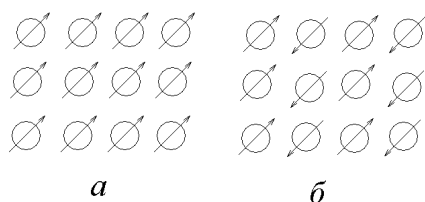


Рис.3. Атомные слои кристаллической решетки: *a* – ферромагнетика *б* - антиферромагнетика

В антиферромагнетике спиновые магнитные моменты электронов соседних атомных слоев направлены в разные стороны и компенсируют друг друга. Поэтому антиферромагнетики не обладают заметными магнитными свойствами. Но в некоторых антиферромагнетиках, у которых кристаллическая решетка состоит из неоднородных атомов, имеется нескомпенсированный антиферромагнетизм (ферримагнетизм).

При этом магнитные моменты различных атомов не одинаковы и будучи антипараллельными создают отличный от нуля суммарный магнитный момент. Такие вещества называются ферритами, в отличие от ферромагнетиков могут быть неэлектропроводны, что важно для широкого использования их в технике (рис.4).

Если бы все атомные магнитные моменты в ферромагнитном кристалле были ориентированы параллельно, то они создали бы огромное магнитное поле. Это поле не только не только бы занимало объем кристалла, но и выходило бы за его пределы.

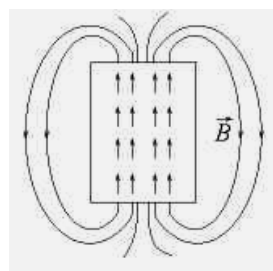


Рис.5. Энергетически невыгодное направление магнитных моментов атомов в кристалле

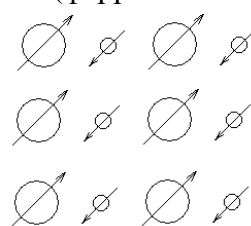


Рис.4. Атомный слой кристаллической решетки феррита

Энергия магнитного поля за пределами кристалла 
$$W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

достигла бы больших значений. Такое состояние энергетически не выгодно (рис.5). Поэтому в объеме ферромагнетика образуются спонтанно-намагниченные области – домены, каждый из которых обладает определенным магнитным моментом.

### Доменная структура ферромагнетиков

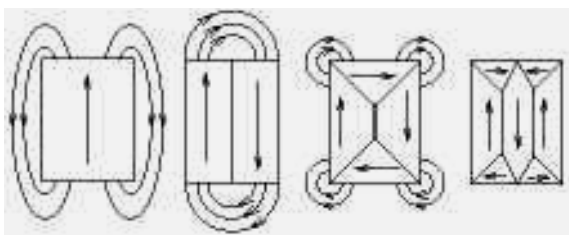


Рис.6. Последовательность образования доменной структуры в кристалле

В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты различных доменов ориентированы хаотично, так что магнитное поле вне ферромагнетика равно нулю (энергетически выгодное состояние). На рис.6 показано, как исчезает внешнее поле при последовательном делении кристалла на домены. Размер доменов порядка  $10^{-6} \div 10^{-5}$  м, в каждом содержится примерно  $10^{10}$  атомов. Поэтому каждый домен создает магнитное поле порядка 1 Тл.

При повышении температуры ферромагнетика увеличивается энергия теплового движения его молекул, равная по порядку величины  $kT$  ( $k$  - постоянная Больцмана), и при некотором значении температуры  $T_k$  эта энергия становится равной энергии обменного взаимодействия. При этом домены разрушаются (магнитные моменты всех атомов в домене разориентируются) и ферромагнетик превращается в парамагнетик. Температура, при которой исчезают ферромагнитные свойства магнетика, называют температурой (точкой) Кюри.

**Объекты исследования, оборудование**

### Описание установки

Метод определения точки Кюри основан на измерении электродвижущей силы индукции в катушке, которая охватывает исследуемый образец, находящийся в переменном магнитном поле постоянной амплитуды.

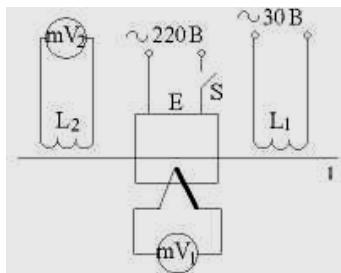


Рис.1. Схема установки

Измерения производятся на установке, схема которой показана на рис.1. В безындукционный нагреватель Е помещен ферромагнитный сердечник (1). На выступающие из нагревателя концы образца надеты две катушки: L<sub>1</sub> и L<sub>2</sub>. При протекании по катушке L<sub>1</sub> переменного тока в катушке L<sub>2</sub> возникает ЭДС индукции, измеряемая милливольтметром mV<sub>2</sub>. ЭДС, возникающая в термопаре при нагре-

вании, измеряется милливольтметром mV<sub>1</sub>.

Рабочий конец термопары вместе с образцом помещен в нагреватель. ЭДС индукции, возникающая в катушке L<sub>2</sub>, согласно закону Фарадея

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1).$$

Так как  $\Phi \sim B$ , а  $B$  формально можно представить в виде  $B = \mu_0 \mu H$ , то  $\varepsilon_i \sim \mu$ .

Поскольку в точке Кюри  $\mu$  изменяется от  $\mu_{\text{ферро}} \gg 1$  до, постольку на кривой зависимости  $\varepsilon_i(T)$  должен наблюдаться резкий спад при  $T = T_k$ .

### Рабочее задание

Определить точку Кюри ферромагнетика

### Порядок выполнения работы

1. Перед началом работы поставьте тумблер S в положение "Выкл."
2. Включите установку в сеть с напряжением "220 В".
3. Запишите показания приборов в таблицу.
4. Включите нагреватель тумблером S. Снимите зависимость ЭДС индукции по милливольтметру mV<sub>2</sub> от температуры через каждое деление милливольтметра mV<sub>1</sub>, показывающего значения термо ЭДС. Данные внесите в таблицу. Измерения проводите до тех пор, пока показания милливольтметра mV<sub>2</sub> не упадут на 70% – 90%.

$\varepsilon_1$ , мВ							
$t$ , °C							
$\varepsilon_{\text{нагр}}$ , мВ							
$\varepsilon_{\text{охл}}$ , мВ							

5. Выключите нагреватель тумблером S и запишите показания приборов mV<sub>1</sub> и mV<sub>2</sub> при охлаждении образца в таблицу.

6. Используя таблицу зависимости термо ЭДС от температуры, найдите и запишите значения температуры, соответствующие каждому значению термо ЭДС. Таблица приведена на установке.

7. Постройте графики зависимости ЭДС индукции от температуры при нагревании и охлаждении образца (на одном рисунке).

8. По графикам определите точку Кюри в каждом из двух случаев и найдите ее среднее значение.

### Содержание отчета

Экспериментальные данные, занесенные в таблицу, графики зависимости ЭДС индукции от температуры при нагревании и охлаждении образца, среднее значение температуры Кюри.

### Контрольные вопросы

- 1.Объяснить спиновую природу ферромагнетизма.
- 2.Объяснить доменную структуру ферромагнетизма.
- 3.Почему значение магнитной проницаемости ферромагнетиков велико?

4. Почему при определенной температуре ферромагнетики изменяют свои магнитные свойства?
5. Что такое точка Кюри?
6. Почему ЭДС индукции в катушке L2 резко уменьшается при достижении температуры Кюри?
7. Начертите и объясните схему установки.
8. Почему ферромагнитный образец, нагретый выше точки Кюри, при охлаждении восстанавливает магнитные свойства?

#### **Список использованных источников**

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – СПб.: Лань, 2008. – 496с. с.165-170, 176-180

Лабораторная работа № 30  
Исследование электрических характеристик  
полупроводника с помощью эффекта Холла

**Цель работы:** Определение значений константы Холла, концентрации носителей заряда и подвижности носителей заряда.

**Теоретические сведения**

Явление возникновения в образце с текущим по нему током поперечного электрического поля при помещении образца в магнитное поле называется эффектом Холла.

Рассмотрим механизм возникновения поперечного электрического поля в однородном полупроводнике  $p$ -типа, имеющем форму прямоугольной пластинки (рис.2). Под действием стороннего электрического поля с вектором напряженности  $\vec{E}$  по пластинке протекает электрический ток плотностью  $\vec{j}$ , которую можно определить из закона Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = en\vec{v}_d \quad (1)$$

где  $\sigma$  – удельная проводимость,  $n$  – концентрация носителей заряда,  $\vec{v}_d$  – их дрейфовая скорость,  $e$  – заряд электрона (дырки). В полупроводнике  $n$ -типа основными носителями заряда являются положительные дырки и потому направление дрейфовой скорости совпадает с направлением тока (рис.2). В полупроводнике  $p$ -типа основными носителями заряда являются отрицательные электроны и их дрейфовая скорость будет направлена противоположно направлению тока.

В однородном полупроводнике эквипотенциальные поверхности расположены перпендикулярно вектору плотности тока  $\vec{j}$  и поперечная разность потенциалов между точками 3 и 4 должна отсутствовать.

Совсем иная картина получится, если пластинку с током поместить в слабое магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости пластинки. В этом случае на заряд, движущийся с дрейфовой скоростью  $\vec{v}_d$ , будет действовать сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = e[\vec{v}_d \times \vec{B}]. \quad (2)$$

Под действием этой силы основные носители заряда будут отклоняться к одной из поперечных граней пластинки и на этой грани появится заряд, совпадающий по знаку с зарядом этих носителей. На противоположной грани вследствие этого возникнет недостаток основных носителей и заряд противоположного знака (рис.2).

Заметим, что в полупроводнике  $n$ -типа заряд основных носителей, электронов, отрицателен, но их дрейфовая скорость  $\vec{v}_d$  направлена противоположно вектору  $\vec{j}$ . Поэтому сила Лоренца будет отклонять электроны в ту же сторону, что и на рис.2, но знак зарядов на поперечных гранях пластинки будет обратным.

В результате такого разделения зарядов появится электрическое поле  $\vec{E}_H$ , называемое полем Холла. Направление поля  $\vec{E}_H$  зависит от знака носителей заряда и от направления вектора  $\vec{B}$ . Поле Холла действует на электрические заряды с силой

$$\vec{F}_\varphi = e\vec{E}, \quad (3)$$

направленной противоположно силе Лоренца. Наступит момент, когда  $\vec{F}_\varphi = -\vec{F}_L$ , т.е.

$$eE_H = ev_d B \quad (4)$$

Так как  $E_H = U_H/d$ , где  $U_H$  – поперечная холловская разность потенциалов,  $d$  – расстояние между гранями 3 и 4, то

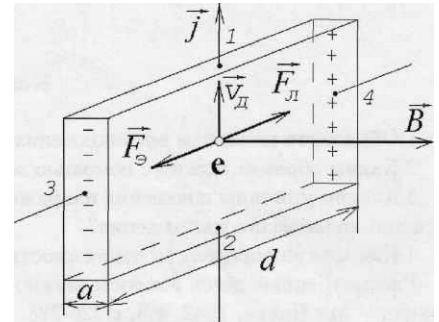


Рис.2 Схема, поясняющая механизм эффекта Холла в полупроводнике  $p$ -типа

$$U_H = v_d B d \quad (5)$$

Учитывая, что сечение образца  $S = ad$ , и используя выражение (1), находим силу тока  $I$  в образце:

$$I = jS = ev_d n a d. \quad (6)$$

Выражая из уравнения (6) скорость дрейфа  $v_d$  и подставляя в (5), получим

$$U_H = \frac{1}{en} \cdot \frac{IB}{a} \quad (7)$$

Величина  $1/(en)$  обозначается  $R_H$  и называется константой Холла. Тогда соотношение (7) запишется следующим образом

$$U_H = R_H \frac{IB}{a} \quad (8)$$

Выражение  $R_H = 1/(en)$  получено при упрощающем предположении, что скорость дрейфа носителей заряда одинакова. Более точный расчет с учетом распределения носителей заряда по скоростям показывает, что в нашем случае

$$R_H = \frac{3\pi}{8en} \quad (9)$$

Таким образом, зная  $R_H$ , можно определить знак носителей заряда и их концентрацию.

Если известна удельная проводимость  $\sigma$ , то, определив опытным путем  $R_H$ , можно рассчитать подвижность носителей заряда  $b$ .

Известно, что  $\sigma = enb$ , но из уравнения (9) следует, что  $en = \frac{3\pi}{8R_H}$ , тогда

$$b = \frac{8R_H\sigma}{3\pi} \quad (10)$$

## Объекты исследования, оборудование

### Описание установки

Установка для измерения эффекта Холла состоит из трех узлов: а) электромагнита с держателем образца; б) пульта управления; в) потенциометра ПП-63.

Электрическая схема установки представлена на рис.1. Она состоит из 2-х цепей: цепи образца и цепи электромагнита. Обе цепи тумблером  $S$  подключаются к своим источникам постоянного тока, расположенным внутри пульта управления. Цепи содержат миллиамперметры ( $mA$ ) для измерения токов и регуляторы тока  $R_1$  и  $R_2$

Переключатель тока  $S_1$  служит для измерения направления тока через электромагнит.

Электромагнит перед размещением образца проградуирован для определенного межполюсного зазора, поэтому **категорически запрещается крутить винты крепления полюсных наконечников электромагнита.**

Напряжение на потенциальных контактах образца измеряется с помощью потенциометра ПП-63.

Нужно учесть, что потенциальные контакты 3 и 4 практически нельзя разместить на одной эквипотенциальной поверхности. Поэтому даже без магнитного поля на потенциальных контактах будет напряжение  $U_{ac}$  – напряжение асимметрии, которое обусловлено несимметричным расположением потенциальных контактов, неоднородностью образца и т.д. Чтобы избавиться от напряжения асимметрии поступают так. Проводят измерение поперечной разности потенциалов при различных направлениях магнитного поля. Тогда при одном направлении магнитного поля  $U_1 = U_H + U_{ac}$ , а при другом  $U_2 = -U_H + U_{ac}$ ,

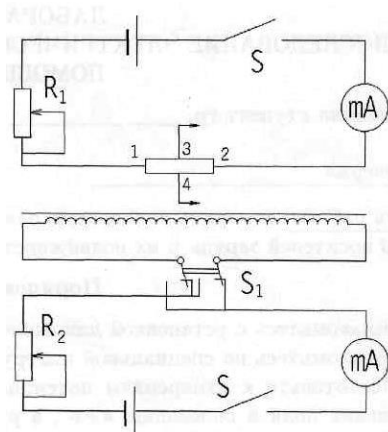


Рис.1 Схема установки

так как с изменением направления магнитного поля напряжение Холла ( $U_H$ ) меняет знак, а напряжение асимметрии ( $U_{ac}$ ) остается неизменным. Тогда  $U_H = \frac{U_1 - U_2}{2}$ .

### Рабочее задание

Провести измерение значений константы Холла, концентрации носителей заряда и подвижности носителей заряда.

### Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь с установкой для исследования полупроводника.
2. Ознакомьтесь по специальной инструкции с порядком работы на потенциометре ПП-63.
3. Подготовьте к измерениям потенциометр ПП-63, поставьте на пульте управления тумблер направления поля в положение «+», а ручки «Ток образца» и «Ток электромагнита» в крайнее положение против часовой стрелки.
4. Вставьте шнур питания пульта управления в розетку «220 В» и тумблером «Сеть» включите источник питания. При этом на пульте должна загореться сигнальная лампа.
5. Ручкой «Ток образца» настройте ток 20 мА, а ручкой «Ток электромагнита» – 50 мА.
6. Измерьте с помощью потенциометра напряжение, возникающее на потенциальных контактах образца ( $U_1$ ). Это напряжение является алгебраической суммой напряжения Холла ( $U_H$ ) и напряжения асимметрии ( $U_{ac}$ ). Запишите  $U_1$  в таблицу с тем знаком, какой указывает переключатель полярности потенциометра ПП-63!
7. Измените направление магнитного поля в зазоре электромагнита, поставив тумблер  $S_1$  в положение «-». Измерьте с помощью потенциометра ПП-63 напряжение, возникающее на потенциальных контактах ( $U_2$ ). Запишите значения  $U_2$  в таблицу с тем знаком, какой указывает переключатель полярности потенциометра.
8. Аналогичные измерения сделайте при токах электромагнита 100, 150, 200 и 250 мА. Следите за постоянством тока  $I_{обр}$ .
9. Вычислите по формуле  $U_H = \frac{U_1 - U_2}{2}$  напряжение Холла для всех значений тока магнита. По градуировочному графику, прилагаемому к электромагниту, найдите значение магнитной индукции в зазоре электромагнита для этих же значений тока. Значения  $U_H$  и  $B$  занесите в таблицу. На миллиметровой бумаге постройте график зависимости  $U_H = f(B)$ .
10. Вычислите по формуле  $R_H = \frac{U_H a}{I_{обр} B}$  константу Холла для различных значений  $B$  и найдите ее среднее значение. (Размеры образца указаны на градуировочном графике).
11. Используя выражение  $\langle R_H \rangle = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1}{en}$ , вычислите среднее значение концентрации носителей заряда  $n = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1}{e \langle R_H \rangle}$ , где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.
12. По формуле  $b = \frac{8 \langle R_H \rangle \sigma}{3\pi}$  вычислите подвижность носителей заряда (значение удельной электропроводности  $\sigma$  указано на градуировочном графике).



$I_{\text{маг}},$ А	$B,$ Тл	$U_1,$ В	$U_2,$ В	$U_H,$ В	$R_H,$ м <sup>3</sup> /Кл	$\langle R_H \rangle,$ м <sup>3</sup> /Кл	$n,$ м <sup>-3</sup>	$b,$ м <sup>2</sup> /(В·с)

### Содержание отчета

Данные, представленные в таблице, средние значения константы Холла, концентрации носителей заряда и подвижности носителей заряда.

### Контрольные вопросы

1. Объясните механизм возникновения напряжения Холла.
2. Каким образом можно с помощью эффекта Холла определить знак носителей заряда?
3. Каковы причины появления напряжения асимметрии? Как исключить это напряжение при определении холловского напряжения?
4. Как можно определить подвижность носителей заряда?

### Литература

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц.– СПб.: Лань, 2008. – 320с. с.226-228.