

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева
Кафедра систем автоматического управления

Утверждено на заседании кафедры
«Системы автоматического управления»
«13» января 2021 г., протокол № 8

Заведующий кафедрой

 О.В.Горячев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)**

«Интеллектуальные системы управления»

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы специалитета**

**по специальности
24.05.06 Системы управления летательными аппаратами**

**со специализацией
Системы управления беспилотными летательными аппаратами**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 240506-01-21

Тула 2021 год

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Разработчик(и) методических указаний

Горячев О.В., зав. кафедрой САУ, д.т.н, проф.
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭКСПЕРТНОЙ СИСТЕМЫ НАСТРОЙКИ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ.⁴

1.1. Основные замечания

ПИД-регуляторы широко распространены в управлении автоматизированными приводами, используемыми в технологических процессах, что обусловлено их простой реализацией и достаточно высокой эффективностью. Однако, как правило, вследствие изменения параметров объекта управления (ОУ) в процессе эксплуатации, ПИД-регуляторы требуют периодического обслуживания и подстройки.

Одним из возможных путей решения данной проблемы является разработка экспертной системы, которая осуществляет активную диагностику привода, т.е. определяет возможные отклонения в выполнении требований ТЗ на основе анализа изменений параметров выходных координат и компенсирует обнаруженные отклонения, с помощью коррекции параметров регулятора, основанной на теоретических, эмпирических знаниях и опыте подстройки коэффициентов (рис. 1.1).

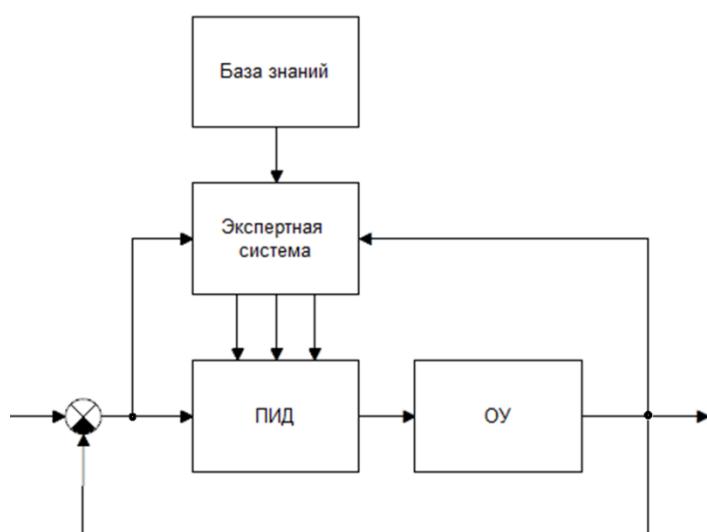


Рис. 1.1. Структурная схема ЭСП постоянного тока с экспертной системой настройки ПИД-регулятора.

1.2. ПИД-регулятор

В практике проектирования следящих приводов мехатронных систем наиболее часто используется пропорционально-интегро-дифференциальный (ПИД) закон управления, описываемый формулой

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int e(t) dt$$

или в операторной форме

$$u(p) = K_p e(p) + K_d p e(p) + K_i \frac{1}{p} e(p)$$

где K_p, K_d, K_i – параметры ПИД -регулятора (закона управления) (рис.1.2).

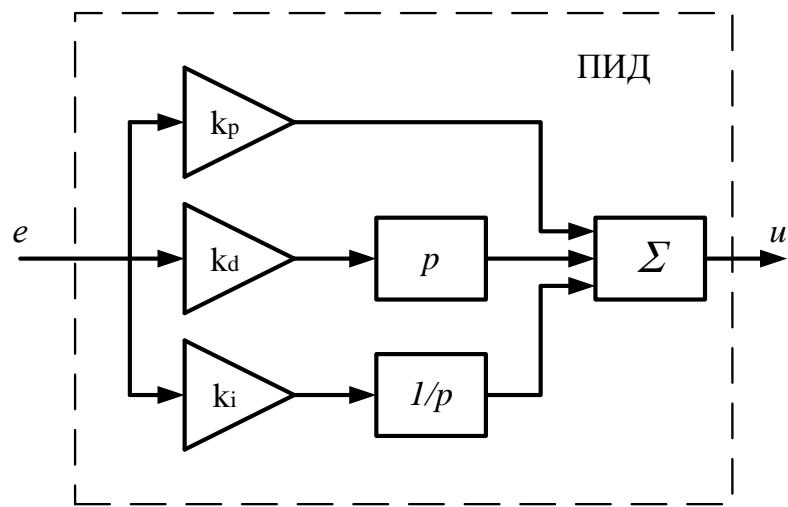


Рис. 1.2. Структура ПИД-регулятора

Параметры ПИД-регулятора оказывают различное влияние на переходный процесс системы. В табл. 1.1 представлено влияние увеличения коэффициентов ПИД регулятора на характеристики управляемого процесса.

Таблица 1.1

Коэффициент	Время нарастания	Установившаяся ошибка	Перерегулирование
По пропорциональной составляющей	уменьшает	уменьшает	увеличивает
По дифференциальной составляющей	не влияет	не влияет	уменьшает
По интегральной составляющей	скорее увеличивает	устраняет	увеличивает

Таким образом, на основе анализа таблицы 1 можно сделать следующие выводы:

- пропорциональная составляющая отвечает за быстродействие системы (время нарастания), а также за величину установившейся ошибки⁴;
- дифференциальная составляющая позволяет увеличить демпфирование системы, т. е. подавить нежелательные колебания и уменьшить перерегулирование;
- интегральная составляющая позволяет уменьшить до нуля установившуюся ошибку в системе.

В общем случае ПИД-регуляторы можно отнести к категории экспертных регуляторов, поскольку они могут настраиваться путем непосредственных экспериментов с объектом в соответствии с известными методиками (Зиглера-Николса, Коэна-Куна и др.).

1.3. Определение параметров ПИД-регулятора

Существует множество методов настройки ПИД-регулятора. Одним из них является метод Коэна-Куна.

<http://pages.mtu.edu/~tbco/cm416/cctune.html/>

Метод Коэна-Куна (Cohen-Coon Tuning Method) позволяет определить параметры П, ПИ и ПИД регуляторов по одной кривой отклика, то есть по переходному процессу нескорректированного объекта ОУ при воздействии ступенчатого сигнала.

Достоинство этого метода заключается в том, что ОУ запускается один раз и на основе полученной характеристики по известным формулам рассчитываются параметры КУ, при этом передаточная функция ОУ может оставаться неизвестной.

Недостатком является то, что нескорректированный ОУ должен быть устойчивым. В случае если объект неустойчив, необходима дополнительная коррекция другими методами. Также метод не учитывает требования ТЗ.

Для расчета коэффициентов ПИД-регулятора по методу Коэна-Куна необходимо на замкнутую систему без регулятора и при наличии возмущений подать ступенчатое воздействие с некоторым запаздыванием,

при котором переходные процессы, вызванные возмущением, успеют прийти к устойчивому состоянию.

На рис. 1.3 представлены процессы на входе и выходе системы.⁴

На вход системы в момент времени t_0 подается ступенчатое воздействие амплитудой – А.

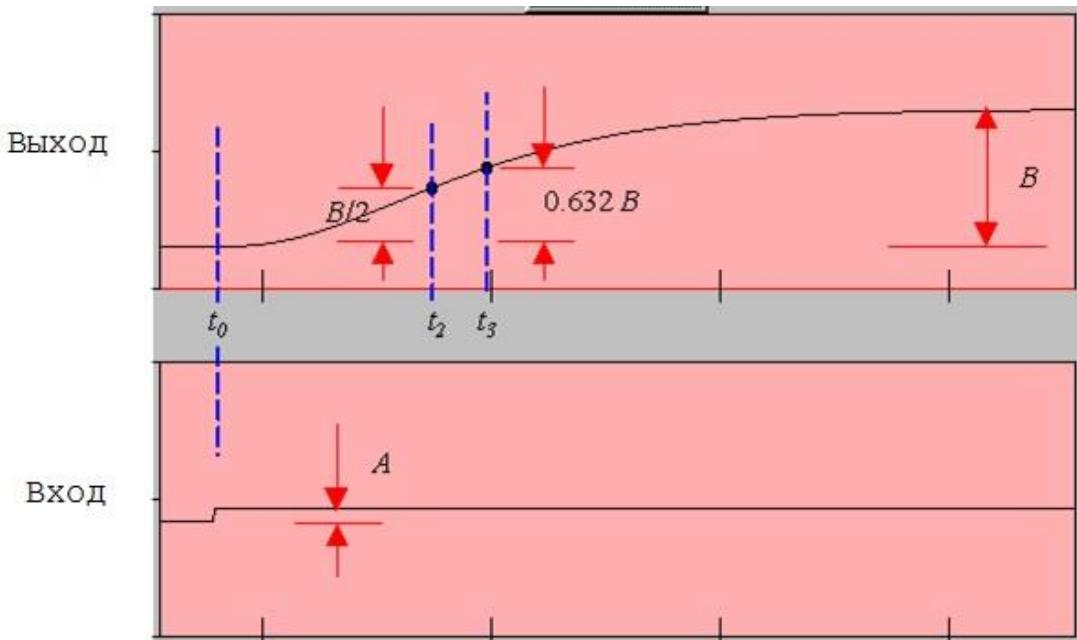


Рис. 1.3. Процессы на входе и выходе системы

По полученной кривой отклика необходимо снять следующие параметры:

B – разница между установившимся значением выходной величины и значением в момент времени t_0 ;

t_2 – время, при котором выходная величина достигает половины B ;

t_3 – время, при котором выходная величина достигает 63.2% B .

Далее по следующим зависимостям рассчитываются дополнительные параметры процесса:

$$t_1 = \frac{t_2 - \ln 2 \cdot t_3}{1 - \ln 2},$$

$$\tau = t_3 - t_1;$$

$$\tau_{DEL} = t_1 - t_0;$$

$$K = \frac{B}{A};$$

$$r = \frac{\tau_{DEL}}{\tau}.$$

По полученным значениям рассчитываются коэффициенты 4 корректирующего устройства (КУ) из табл. 1.2.

Таблица 1.2

	K_p	$T_i = 1/K_i$	$T_d = K_d$
П	$\frac{1}{K \cdot r} \left(1 + \frac{r}{3}\right)$	-	-
ПИ	$\frac{1}{K \cdot r} \left(0.9 + \frac{r}{12}\right)$	$\tau_{DEL} \frac{30 + 3r}{9 + 20r}$	-
ПИД	$\frac{1}{K \cdot r} \left(\frac{4}{3} + \frac{r}{4}\right)$	$\tau_{DEL} \frac{32 + 6r}{13 + 8r}$	$\tau_{DEL} \frac{4}{11 + 2r}$

Рассчитанные значения параметров ПИД - регулятора по приведенным зависимостям обеспечивают удовлетворительные переходные процессы. Однако, если в соответствии с ТЗ требуется обеспечить более высокие характеристики, то необходимо выполнить процедуру коррекции или дополнительной настройки (подстройки) параметров регулятора.

1.4. Алгоритм подстройки параметров ПИД-регулятора

Для создания экспертной системы по настройке параметров ПИД-регулятора возьмем за основу эвристический метод настройки, как правило реализуемый на практике квалифицированным сотрудником, который заключается в поочередной установке параметров регулятора.

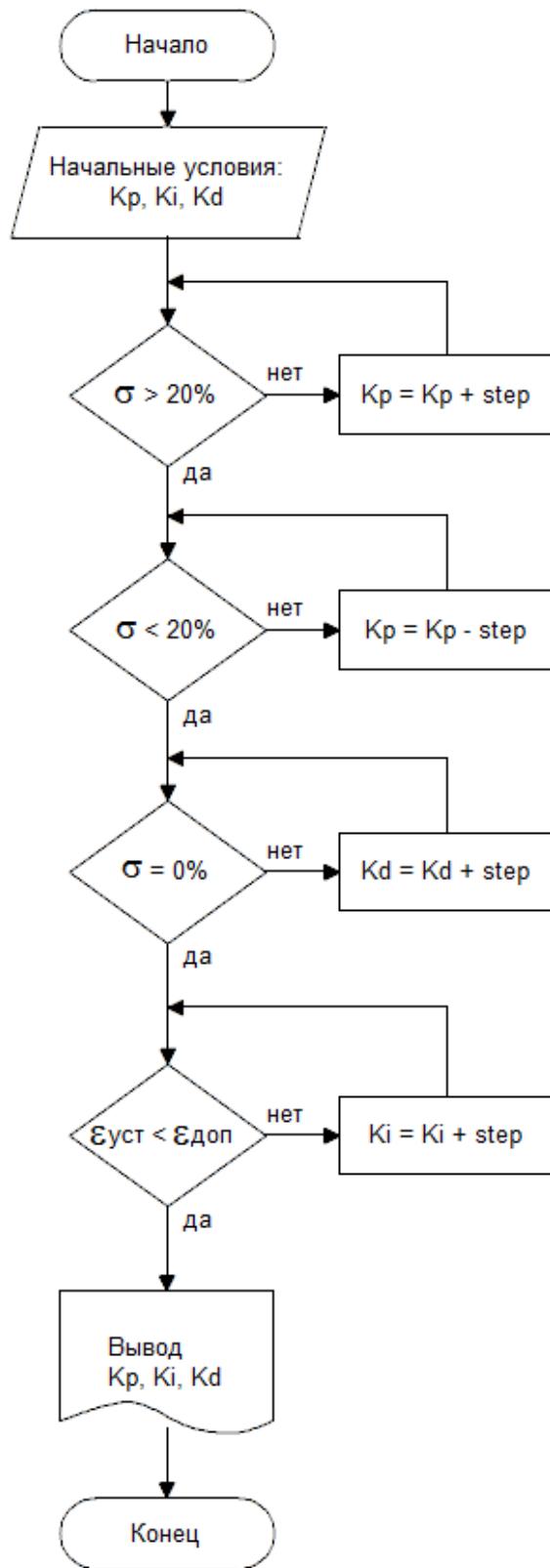
Настройка проводится на основе анализа реакции системы на единичный ступенчатый сигнал при наличии возмущений, действующих на ОУ.

На первом этапе изменяют пропорциональную составляющую ПИД-регулятора так, чтобы кривая переходного процесса на выходе системы состояла из 2-3 колебаний. На практике это соответствует ⁴перерегулированию $\sigma = 20..30\%$.

На втором этапе переходный процесс демпфируют увеличением дифференциальной составляющей регулятора до тех пор, пока перерегулирование $\sigma \approx 0\%$, при этом следует учитывать время регулирования системы.

На третьем этапе увеличивают интегральную составляющую регулятора с целью обеспечить выполнение требований ТЗ по точности.

Алгоритм данного метода представлен на рис.1.4.



4

Рис. 1.4. Алгоритм эвристической подстройки ПИД-регулятора

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗНАНИЙ ЛОГИЧЕСКИМИ ФОРМУЛАМИ. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Математической основой представления знаний в системах ИИ является математическая логика (формальные логические модели) с аппаратом логических исчислений (высказываний, предикатов) и методами поиска логического вывода, которые позволяют интерпретировать знания и умения человека в виде программы для компьютера.

Модели знаний данного вида описывают способ достижения цели через удовлетворение некоторого множества условий, записываемых в виде логических формул. Признаком удовлетворения этих условий является истинность рассматриваемой логической формулы.

Логическое высказывание – предложение в котором что-либо утверждается и которому можно приписать признак истинности или ложности (*TRUE* или *FALSE*). *Истинность, как правило, кодируется 1, а ложность - значением 0.* Например, высказывания "В году 12 месяцев" или "Замкнутая система всегда устойчива" являются высказываниями, причем первое истинно, а второе - ложно.

Логические высказывания, как правило, обозначаются большими латинскими буквами А, В, С, ...

Учитывая, что высказывания являются логическими константами, принимающими значения 1 или 0, на их основе с помощью логических операций можно строить достаточно новые более сложные логические выражения или высказывания.

Например, "число пи больше 3" и "число пи меньше 4".

Логика предикатов первого порядка является развитием классической логики (логики Аристотеля). Предикат представляет собой логическую конструкцию, состоящую из предикатного символа и одного или нескольких термов. Непосредственным аналогом предиката в программировании

являются логическая (булева) функция, где "имя функции" – предикатный символ, а ее аргументы – термы.

Например, в предикате (логической функции) "простое_число (X)": "просто_число" - имя функции (предикатный символ), а "X" – терм (аргумент функции). При одних значения X (например, 13,17) это выражение истинно, при других (10 или 18) – ложно. Это был пример одноместной логической функции : F(X)/

Аналогичным образом можно определить логическую функцию двух и более переменных (X,Y,...), которая при одних сочетаниях переменных будет истинна, а при других – ложна. Такую функцию называют n-местным предикатом. Множество всех сочетаний переменных, при которых предикат принимает значение "истина", называется множеством истинности предиката.

Пример двухместного предиката Столица(X,Y), где X – государство, а Y – город.

При подстановке в n-местный предикат конкретного значения он становится (n-1)-местным, например, Столица(X, Париж). При заполнении всех n-мест конкретными значениями, предикат становится – высказыванием, которое является истинным или ложным.

Например, Столица(Япония, Париж) – "ложь"

Столица (Франция, Париж) – "истина".

Предикат первого порядка получил свое название в связи с тем, что он не делится на подформулы, являющиеся другим предикатом. Номер (порядок) означает, что в качестве термов нельзя использовать другие предикаты. В тоже время предикаты можно объединять в более сложные высказывания за счет логических операций (связок).

Логические предикаты представляют собой функции от логических переменных, которые принимают значения в некоторой предметной области. Отличие предиката от функции заключается в том, что предикат всегда возвращает результат только логического типа.

Преобразование и доказательство истинности или ложности высказываний или предикатов реализуется специальными методами, называемыми исчислениями высказываний или исчислениями предикатов, соответственно.

4

В исчислении предикатов используется синтаксис, включающий в себя основные логические операции: "И" (обозначается \wedge) и "ИЛИ" (обозначается \vee), объединяющие отдельные (атомарные) высказывания, и отрицания "НЕ" (обозначается знаком \neg или $\bar{ }^{\text{—}}$). Связка \wedge называется "конъюнкцией", а \wedge - "дизъюнкцией"). Набор базовых логических операций дополнен операциями "сложение по модулю 2" ("исключающее ИЛИ") , "операция следования" – "импликация" и "операция эквивалентности – равнозначности".

Перечень базовых логических операций над двумя аргументами представлен в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$C=A \rightarrow B$	$C=A \leftrightarrow B$
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1

Логическая эквивалентность или равнозначность – это логическое выражение, которое является истинным тогда, когда оба простых логических высказывания имеют одинаковую истинность. Двуместная логическая операция эквивалентности обозначается символом \leftrightarrow или \equiv .

На основании приведенной таблицы истинности более сложные логические операции, такие как, "исключающее ИЛИ" ("сложение по модулю 2"), импликация и эквивалентность могут быть представлены комбинацией более простых (базовых) операций:

$$C = A \oplus B = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B});$$

$$C = A \rightarrow B = \bar{A} \vee B;$$

$$C = A \leftrightarrow B = (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (A \wedge B).$$

4

Синтаксис предикатов включает в себя также символы кванторов переменной:

- \exists -квантор существования;

- \forall - квантор всеобщности.

Доказательство истинности логических высказываний осуществляется на основе основных законов и аксиом булевой алгебры (таблица 2.2), которые имеют такой же вид, что и законы математической теории множеств. Законы и аксиомы булевой алгебры позволяют преобразовывать и вычислять значения логических формул.

2.2. Исчисление высказываний

В логике ставится задача вывода новых истинных предложений из набора существующих истинных предложений - гипотез.

Под исчислением (или дедуктивной системой) высказываний понимается система, в которой существует некоторое число исходных объектов (аксиом) и правила вывода новых объектов из исходных. Базовыми правилами вывода в исчислении высказываний являются: правила прямого и обратного вывода.

Таблица 2.2.

Название	Логическая формула
Коммутативный закон	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$
Ассоциативный закон	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
Дистрибутивный закон	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Закон де Моргана	$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
Закон исключенного третьего	$A \vee \overline{A} = 1$
Закон противоречия	$A \wedge \overline{A} = 0$
Закон двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$
Закон поглощения	$A \wedge (A \vee B) = A$ $A \vee (A \wedge B) = A$

2.3. Правило резолюций

В исчислении высказываний для доказательства истинности утверждений широко используется правило резолюций, которое требует представления логической формулы (предиката) в конъюнктивной нормальной форме.

1. Конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

Формула приводится к виду конъюнкции дизъюнктов:

$$D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge \dots \wedge D_n,$$

где каждый дизъюнкт D_i является дизъюнкцией атомарных высказываний:

$$P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee \dots \vee P_k.$$

Таким образом, истинность всей формулы (высказывания) означает обязательную истинность каждого дизъюнкта в отдельности.

2. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ).

Формула приводится к виду дизъюнкции конъюнктов:

$$C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee \dots \vee C_n,$$

где каждый конъюнкт C_i является конъюнкцией атомарных высказываний:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_k.$$

Формула (высказывание) оказывается истинной при истинности хотя бы одного конъюнкта C_i из заданного списка.

При использовании правила резолюции, решаемая⁴ задача представляется в виде совокупности утверждений (аксиом, логических формул), при этом истинность или ложность предложенного следствия - гипотезы:

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow G$$

доказывается в результате выполнения упрощения исходной логической формулы методом резолюций и последующего поиска противоречий.

И так, предположим, что требуется доказать истинность некоторой гипотезы G , которая является логическим следствием множества логических высказываний (допущений). То есть сама теорема может быть сформулирована следующим образом:

"если F_1, F_2, \dots, F_k истинны, то истинна и G "

или в символьной записи:

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow G.$$

На практике для доказательства истинности какого либо логического высказывания удобно использовать доказательство от противного, т.е. доказывать невыполнимость - ложность (истинность невыполнимости) данного утверждения. Другими словами процедура доказательства правилом резолюций на самом деле является процедурой опровержения, т.е. вместо доказательства истинности исходной формулы (теоремы) доказывается что её отрицание противоречиво – ложно.

Покажем эквивалентность этой процедуры.

Исходная формула является формулой импликации:

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow G.$$

Выполним преобразования:

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow G = \overline{(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \dots \wedge F_n)} \vee G.$$

$$\overline{(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \dots \wedge F_n)} \vee G = \overline{(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \dots \wedge F_n)} \vee \overline{\overline{G}}.$$

$$\overline{(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \dots \wedge F_n) \vee \bar{G}} = \overline{(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \dots \wedge F_n) \wedge \bar{G}}.$$

Таким образом, для доказательства исходной логической формулы

$$(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \dots \wedge F_n) \rightarrow G$$

4

необходимо доказать ложность следующего логического выражения:

$$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \dots \wedge F_n \wedge \bar{G}.$$

В соответствии с определением КНФ, ложность данного выражения будет иметь место при ложности хотя бы одного (любого) дизъюнкта.

Решение задачи на основе правила резолюций предполагает, прежде всего, упрощение исходной логической формулы методом резолюций.

Метод резолюций позволяет выводить новый дизъюнкт из двух исходных, упрощая тем самым заданную логическую формулу (гипотезу). Новый дизъюнкт называется резольвентой.

Предположим, что D_1 и D_2 – два предложения в логической формуле, допустим при этом, что данные предложения могут быть представлены в виде следующих логических конструкций:

$$D_1 = P \vee D'_1, \quad \text{и} \quad D_2 = \bar{P} \vee D'_2,$$

где P – некоторая логическая переменная (может принимать значения "истина" или "ложь"), D'_1 и D'_2 - любые логические предложения, в том числе и пустые, или состоящие из одного символа.

Тогда правило вывода резолюций можно записать в следующем виде:

$$D_1 \wedge D_2 = (P \vee D'_1) \wedge (\bar{P} \vee D'_2) = D'_1 \vee D'_2 \quad \text{или} \quad \frac{D_1 \wedge D_2}{D'_1 \vee D'_2}.$$

Предложения D_1 и D_2 называют резольвируемыми (или родительскими), предложение $D'_1 \vee D'_2$ - резольвентой, а логические формулы P и \bar{P} контрапарными литералами.

Таким образом, при упрощении логической формулы методом резолюции берутся два выражения и вырабатывается новое выражение,

содержащее все литералы двух первоначальных выражений, за исключением двух взаимно обратных литералов.

Основная формула метода резолюций выглядит следующим образом:

4

$$(X \vee A) \wedge (Y \vee \bar{A}) = X \vee Y.$$

Метод резолюций широко используется для доказательства логических формул. В частности, с помощью метода резолюций достаточно легко можно доказать цепное правило импликации формул в КНФ:

$$(X \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow Y) = (\bar{X} \vee A) \wedge (\bar{A} \vee Y) = (\bar{X} \vee Y) = (X \rightarrow Y).$$

Правило сокращения посылки также можно считать аналогом правила резолюции для случая ложного X :

$$(A \vee 0) \wedge (\bar{A} \vee B) = (0 \vee B) = B.$$

И так, рассмотрев сущность метода резолюций, вернемся к исходной логической формуле, истинность (или ложность) которой требуется доказать:

$$R: (F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \dots \wedge F_n) \rightarrow G.$$

Правило резолюций применяется следующим образом:

1. Сначала из исходной формулы составляется логическое выражение:

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_k \wedge \bar{G}.$$

2. Затем каждое из предложений преобразованной логической формулы приводится к КНФ (если в исходном варианте оно не соответствует КНФ).

3. В полученных формулах определяются резольвируемые предложения, содержащие контрапарные литералы. Указанные предложения заменяются одним - резольвентой, содержащей дизъюнкцию.

4. В преобразованном логическом выражении определяются пустые дизъюнкты. Если такие найдены, то это свидетельствует о ложности анализируемой преобразованной формулы. Следовательно, исходная теорема будет истинна.

Рассмотрим пример использования правила резолюции для доказательства истинности или ложности логических формул.

4

Пример 1:

$$(X_1 \wedge X_2) \wedge (X_1 \rightarrow X_3) = X_3.$$

Сначала составляем множество:

$$(X_1 \wedge X_2) \wedge (X_1 \rightarrow X_3) \wedge \bar{X}_3.$$

Затем приводим все формулы к КНФ:

$$(X_1 \wedge X_2) \wedge (\bar{X}_1 \vee X_3) \wedge \bar{X}_3.$$

$$X_1 \wedge X_2 \wedge (\bar{X}_1 \vee X_3) \wedge \bar{X}_3.$$

Применяем к первому и третьему дизъюнктам правило резолюций:

$$(X_1 \vee \emptyset) \wedge X_2 \wedge (\bar{X}_1 \vee X_3) \wedge \bar{X}_3.$$

$$X_2 \wedge (\emptyset \vee X_3) \wedge \bar{X}_3.$$

Снова применяем правило резолюции ко второму и третьему дизъюнктам, получаем: $X_2 \wedge (\emptyset \vee \emptyset).$

Таким образом, пустой дизъюнкт выведен, следовательно, выражение с отрицанием высказывания опровергнуто и, соответственно, само высказывание доказано.

Пример №2.

Пусть необходимо доказать истинность приведенной логической формулы:

$$((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S)) = (R \vee S).$$

Применим доказательство от противного.

$$((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S)) \wedge \overline{(R \vee S)}.$$

4

Шаги доказательства:

- 1) Все посылки приводятся к стандартным дизъюнктам (заменяем значок следования). При этом мы получаем три дизъюнкта:

$$(P \vee Q)$$

$$(\bar{P} \vee R)$$

$$(\bar{Q} \vee S)$$

- 2) Записывается в нормальной форме (КНФ) отрицание заключения:

$$\overline{(R \vee S)} = \bar{R} \wedge \bar{S},$$

что дает дополнительно два дизъюнкта:

$$\bar{R}$$

$$\bar{S}$$

- 3) Далее рассматриваются конъюнкции пяти полученных дизъюнктов:

$$\bar{R} \wedge (R \vee \bar{P}) \wedge (P \vee Q) \wedge \bar{S} \wedge (\bar{Q} \vee S).$$

Первые два дизъюнкта дают \bar{P} , что в сочетании с третьим дизъюнктом дает Q . Четвертый и пятый дизъюнкты дают \bar{Q} . Таким образом, в результате несложных преобразований, получили:

$$Q \wedge \bar{Q} = FALSE.$$

Таким образом, получен ложный дизъюнкт, следовательно, исходная формула является верной.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

4

3.1. Основные положения теории множеств

В основе нечеткой логики лежит теория нечетких множеств. Сам термин "нечеткое множество" (fuzzy set) был впервые введен в 1964г. Лотфи Заде (Lotfi Zadeh).

Классическую теорию множеств можно рассматривать как предельный случай теории нечетких множеств. Поэтому вначале напомним основные постулаты теории множеств.

Определение. Множество – фундаментальное понятие, представляющее собой некоторый набор (конечный или бесконечный) элементов, обладающих некоторым свойством.

Например, множество элементов A, состоящее из элементов x некоторого базового множества X:

$$A = \{(x, \text{свойство}) \mid x \in X\}, . \quad (3.1)$$

Свойство, определяющее принадлежность, можно характеризовать некоторым показателем, называемым функцией принадлежности (membership function) - $\mu_A(x)$.

Показатель принадлежности для классических множеств может принимать только два значения: 0 и 1, отражающими смысл – “не принадлежит” и “принадлежит”.

Примером четкого множества является множество «высокий человек», определенное на числовой оси – рост человека – x (рис.3.1).



Рис.3.1.

Безусловно субъективно, но тем не менее, к множеству "высоких людей" формально можно отнести всех людей, рост которых превышает 1,8м. Если обозначить через переменную x "рост человека", а функцию $\mu_A(x)$ задать следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 1,8, \\ 0, & \text{если } x < 1,8. \end{cases} \quad (3.2)$$

то множество "высоких людей" А может быть задано с помощью выражения

$$A = \{(x, \mu_A(x)=1) \mid x \in X\}, \quad (3.3)$$

где X - множество всех возможных значений x . Другими словами, множество А образуют такие "объекты" ("элементы"), для которых указанная выше функция $\mu_A(x)$ принимает значение 1 (см. верхнюю ветвь графика, выделенного сплошной линией, на рис.3.1.). Напротив, те значения $x \in X$, для которых $\mu_A(x)=0$, не принадлежат множеству А.

3.2. Основные операции над множествами

1. Объединение (или сумма) множеств X и Y – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X и Y :

$$X \cup Y \text{ (или } X + Y) = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Например:

$$X = \{9, 8, 1, 4, 3\}, Y = \{1, 3, 6, 11\}, \quad X \cup Y = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11\}.$$

2. Пересечение (или произведение) множеств X и Y – это множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству X , так и множеству Y :

$$X \cap Y \text{ (или } X \cdot Y) = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

Например:

$$X = \{9, 8, 1, 4, 3\}, Y = \{1, 3, 6, 11\}, \quad X \cap Y = \{1, 3\}.$$

3. Разность множеств. Эта операция определяется только для двух множеств. Разностью множеств X и Y – это множество, состоящее

из элементов, которые принадлежат множеству X и не принадлежат Y:

$$X - Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\}.$$

$$X = \{9, 8, 1, 4, 3\}, Y = \{1, 3, 6, 11\}, \quad X - Y = \{4, 8, 9\}.$$

4. Дополнение. Множество \bar{X} , определяемое из соотношения
 $\bar{X} = U - X$,

называют дополнением множества X (до универсального множества U).

Например:

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$X = \{9, 8, 1, 4, 3\}, \quad \bar{X} = \{0, 2, 5, 6, 7\}.$$

Очевидно, выполняются следующие свойства:

$$\bar{U} = \emptyset, \quad \bar{\emptyset} = U,$$

Где \emptyset – пустое множество.

Для рассмотренных выше операций имеют место тождества, приведенные в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Основные законы теории множеств

№ пп	Закон	Формула
1	коммутативный	$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A$
2	ассоциативный	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3	дистрибутивный	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4	идемпотентный	$A \cup A = A; \quad A \cap A = A$
5	двойного отрицания	$\bar{\bar{X}} = X$
6	де Моргана	$\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y}; \quad \overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$
7	противоречия	$X \cup \emptyset = X; \quad X \cap \emptyset = \emptyset; \quad X \cap \bar{X} = \emptyset$
8	исключенного третьего	$X \cup U = U; \quad X \cap U = X; \quad X \cup \bar{X} = U$

Пример 3.1.

Рассмотрим доказательство закона де Моргана:

$$\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y};$$

$$x \in \overline{X \cup Y} \Rightarrow x \notin (X \cup Y) \Rightarrow x \notin X \text{ и } x \notin Y \Rightarrow x \in \bar{X} \cap \bar{Y};$$

$$y \in \bar{X} \cap \bar{Y} \Rightarrow y \in \bar{X} \text{ и } y \in \bar{Y} \Rightarrow y \notin X \text{ и } y \notin Y \Rightarrow y \in \overline{X \cup Y}.$$

Аналогично можно доказать тождество

$$\overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y},$$

а также и другие законы (задание для практического выполнения).

5. Декартовым (прямым) произведением множеств X и Y называют множество, состоящее из всех тех и только тех упорядоченных пар (кортежей), первая компонента которых принадлежит множеству X , а вторая – множеству Y . Таким образом, элементами декартова произведения являются двухэлементные кортежи вида (x,y) . Формально это записывается так:

$$X \times Y = \{(x, y) / x \in X, y \in Y\}.$$

Операция прямого произведения справедлива и для большего числа множеств, например, для трех множеств:

$$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) / x \in X, y \in Y, z \in Z\}.$$

Графическая иллюстрация прямого произведения двух множеств X и Y приведена на рис.3.2.

Пример 3.2.

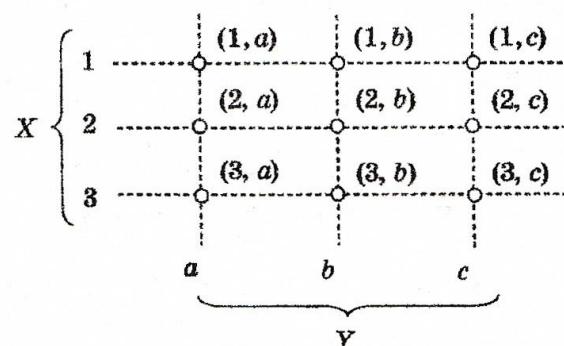


Рис.3.2.Графическая иллюстрация декартова произведения двух множеств X, Y .

6. **Отношением** между n множествами X_1, X_2, \dots, X_n называется подмножество прямого произведения $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, для которого выполняется некоторое заданное свойство. Частным примером отношения является функция.

Аналитически отношение двух множеств можно представить следующим образом:

$$R \subset X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y, y = f(x)\},$$

Заметим, что отношение является множеством, поэтому его можно задать путем указания функции принадлежности $\mu_R(x, y)$ каждого кортежа декартова произведения к этому отношению:

$$R = \{\mu_R(x, y) / (x, y) | x \in X, y \in Y\}.$$

Пример 3.3.

отношения для дискретной области определения:

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{2, 3, 8\},$$

$$R_{X=Y} = \{0/(1,2); 0/(1,3); 0/(1,8); 1/(2,2); 0/(2,3); 0/(2,8); \dots; 0/(4,8)\}.$$

Пример 3.4.

отношения для непрерывной области определения:

$$x, y \in R; \quad c = const;$$

$$R = \begin{cases} 1, & \text{если } x^2 + y^2 \leq c^2; \\ 0; & \text{иначе} \end{cases}$$

Как видно мы получили описание круга радиусом C , с центром в начале координат.

Отношения играют важную роль при описании знаний.

Пример 3.5.

Например, пусть имеется множество стран и множество городов:

$$X = \{Англия, Россия, Франция\},$$

$$Y = \{Лондон, Тула, Москва, Орел, Париж, Лион\}.$$

С помощью указания принадлежности (значение в кружочке на рис.3.3) можно описать на $X \times Y$ отношение «Столица государства».

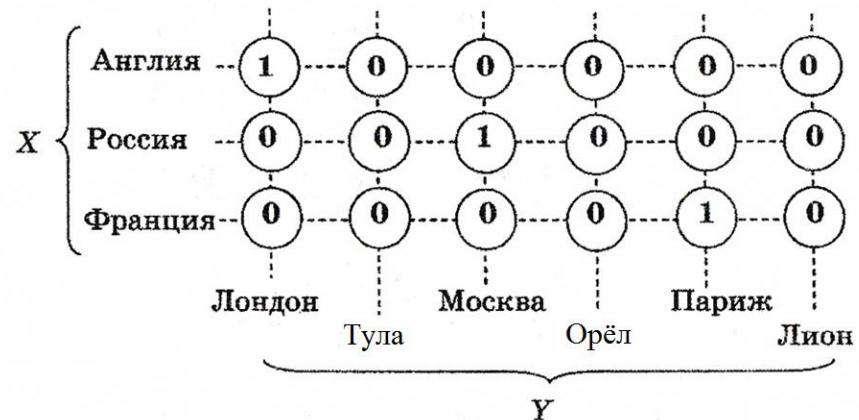


Рис.3.3.

Пусть X - множество, - его подмножества:

$$A_i \in X, \quad i \in [1, n].$$

Подмножества A_i образуют **разбиение множества** X , если выполняются два условия:

$$1) A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

$$2) \bigcup_{i=1}^n A_i = X.$$

Пример 3.6.

Например,

$$X = \{a, d, v, 2, 5, f\}, A_1 = \{2, f\}, \quad A_2 = \{d, v, 5\}, A_3 = \{a\}.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

4. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА

4

4.1. Определение нечеткого множества

Очевидно, что двузначная логика (типа "да" - "нет"), определяемая функцией принадлежности $\mu_A(x)$: $X \rightarrow \{0, 1\}$, не учитывает возможного разброса мнений различных людей относительно границ исследуемого множества А, влияния чисто биологических факторов, национальных особенностей и т. д. Поэтому более естественным является задание функции принадлежности в виде некоторой непрерывной зависимости (пунктирная кривая на рис.4.1), определяющей плавный переход из одного крайнего состояния («0») в другое («1») (т.е. от полной непринадлежности элементов рассматриваемому множеству до полной принадлежности ему).

Таким образом, функция принадлежности в данном случае принимает непрерывные значения и ставит в соответствие каждому элементу $x \in X$ число $\mu_A(x)$ из интервала $[0;1]$, описывающее степень принадлежности элемента x множеству А.

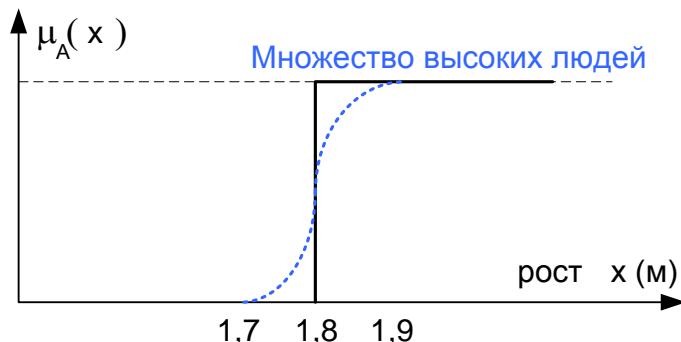


Рис.4.1. Графическое представление множества "высоких людей"

Заданное таким образом множество пар

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \quad (4.1)$$

называется нечетким (или размытым) множеством. Функция принадлежности $\mu_A(x)$ принимает значения в интервале $[0,1]$. Указанная функция приписывает каждому элементу $x \in X$ степень его принадлежности к нечеткому множеству А, при этом можно выделить три случая:

- 1) $\mu_A(x)=1$ означает полную принадлежность элемента x к нечеткому множеству A , т.е. $x \in A$;
- 2) $\mu_A(x)=0$ означает отсутствие принадлежности элемента x к нечеткому множеству A , т.е. $x \notin A$;
- 3) $0 < \mu_A(x) < 1$ означает частичную принадлежность элемента x к нечеткому множеству A .

При этом множество X – называется **базовым множеством** или **носителем** множества A .

Особенностью нечетких множеств является возможность принадлежности одного и того же элемента одновременно к различным множествам с различными степенями принадлежности.

Рассмотрим некоторые определения из теории нечетких множеств.

Носителем (support) нечеткого множества A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ называется обычное множество вида:

$$\text{supp}(A) = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) > 0\}. \quad (4.2)$$

Если носитель – конечное множество, то такое множество называют локальным, иначе, когда носитель – бесконечное множество, то нечеткое множество – глобальное.

Ядром (core) НМ A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ называется обычное множество вида:

$$\text{core}(A) = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) = 1\}. \quad (4.3)$$

Высота (height) НМ A :

$$hgt(A) = \sup \mu_A(x), x \in X. \quad (4.4)$$

Это понятие поясняет рис.4.2.

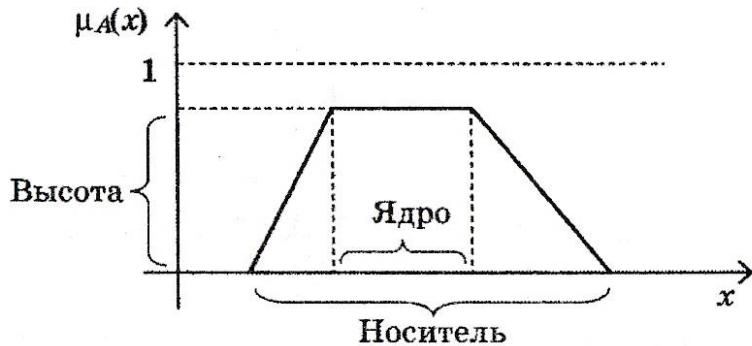


Рис.4.2.

Можно также рассмотреть понятие центра НМ, которым является середина ядра.

Нечеткое множество называется выпуклым, если выполняется условие

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X, x_1 \leq x_2 \leq x_3 \Rightarrow \mu_A(x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_3)). \quad (4.5)$$

На рис.4.3 показан пример выпуклого (A) и невыпуклого множества (B).

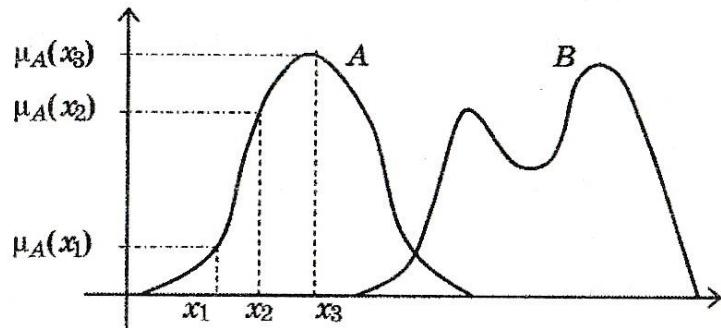


Рис.4.3.

Если $\sup \mu_A(x) = 1$, то такое НМ называется нормальным, в противном случае – субнормальным.

Если функция принадлежности имеет один максимум, то такое НМ называется унимодальным, иначе – мультимодальным.

Как правило, используются нормальные, унимодальные НМ.

Множеством α - уровня (α - срезом) НМ А называется обычное подмножество универсального множества X, определяемое в виде:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, \text{ где } \alpha \leq 1. \quad (4.6)$$

Справедливо свойство (см. рис.4.4):

Если $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то $A_{\alpha_1} \leq A_{\alpha_2}$.

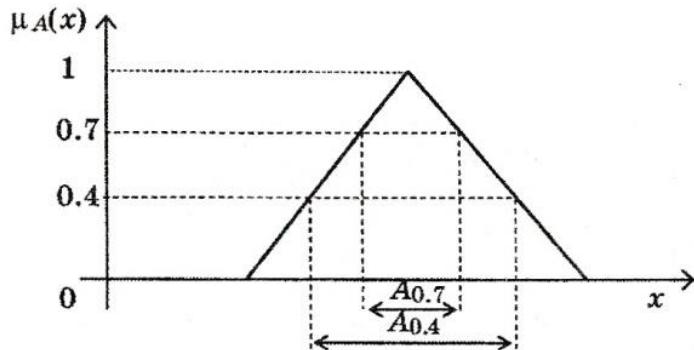


Рис.4.4.

Пример 4.1.

Пример для дискретной области определения:

$$A = 0.2/x_1 + 0.6/x_2 + 1/x_3 + 0.8/x_4;$$

$$A_{0.6} = \{x_2, x_3, x_4\}.$$

Совокупность N – выпуклых нечетких множеств образует **нечеткое разбиение** базового множества U, если выполняется условие (пример показан на рис.4.5.):

$$\sum_{i=1}^N \mu_{A_i}(x) = 1, \quad \forall x \in U. \quad (4.7)$$

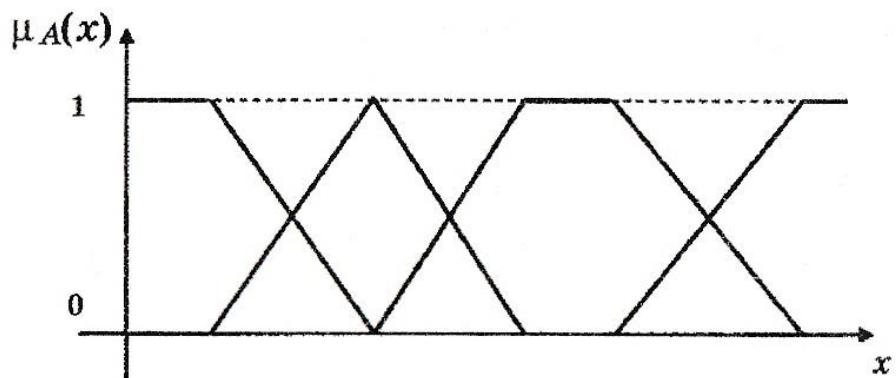


Рис.4.5.

4.2. Способы задания нечетких множеств

Способы задания нечетких множеств различаются

Если нечеткое множество A состоит из конечного числа элементов, то для записи такого дискретного множества используется выражение

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n,$$

$$\text{или } A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i \quad (4.8)$$

где числа $\mu_A(x_i)$ - степени принадлежности элементов x_i множеству A . Заметим, что знак "плюс" в (12.4) обозначает объединение, а не арифметическое суммирование. Обычное (четкое) дискретное множество при такой форме записи можно представить в виде

$$A = 1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n \quad (4.9)$$

$$\text{или } A = \sum_{i=1}^n 1/x_i$$

Возможен и табличный способ задания нечеткого множества A , например таблица 3.1.

Таблица 4.1.

$\mu_A(x_i)$	0,1	0,3	0,5	0,8	1,0
x_i	14	16	18	20	22

обозначает, что носитель A состоит из 5 элементов: $x_1 = 14, x_2 = 16, x_3 = 18, x_4 = 20, x_5 = 22$, степени принадлежности которых множеству A равны соответственно: 0,1; 0,3; 0,5; 0,8 и 1,0.

Если X – это пространство с бесконечным количеством элементов, то нечеткое множество $A \subseteq X$ символически записывается в виде

$$A = \int_x \frac{\mu_A(x)}{x} dx. \quad (4.10)$$

На практике, если нечеткое множество A состоит из бесконечного числа точек, например, представляет собой некоторый интервал (a, b) на числовой

оси x , то функция принадлежности $\mu(x)$ обычно задается графически или в виде аналитической зависимости.

4.2.1. Определение нечеткого числа

Классическая арифметика предоставляет методы выполнения операций сложения, вычитания, умножения, деления над четкими числами, такими как 1,2,3 и т.д. В свою очередь, нечеткая арифметика определяет методы выполнения указанных операций над нечеткими числами, такими, как:

- «примерно 4»,
- «около 5»,
- «приблизительно 10» и т.д.

В общем случае нечеткое число представляет собой одну из разновидностей нечетких множеств.

Нечетким числом называется определенное на вещественной числовой оси НМ, обладающее следующими свойствами:

- выпуклость;
- нормальность;
- ядро НМ состоит из одной точки.

Пример 4.2.

Допустим, что для косвенного измерения скорости вращения вала нагруженного электропривода используется выходное напряжение генератора постоянного тока. Известно значение этого напряжения $x = 5V$. Кроме того, известно, что ошибка такого измерения составляет ± 1 В. Тогда переход от четкого значения $x = 5$ к нечеткому множеству "x равно приблизительно 5" осуществляется следующим образом (рис.4.6). Функция принадлежности $\mu(x)$, приведенная на рис.4.6,в, описывается выражением

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{|x-5|}{3}}, & \text{если } x \leq 4 \text{ или } x \geq 6, \\ 0, & \text{если } x \in [4, 6]. \end{cases}$$

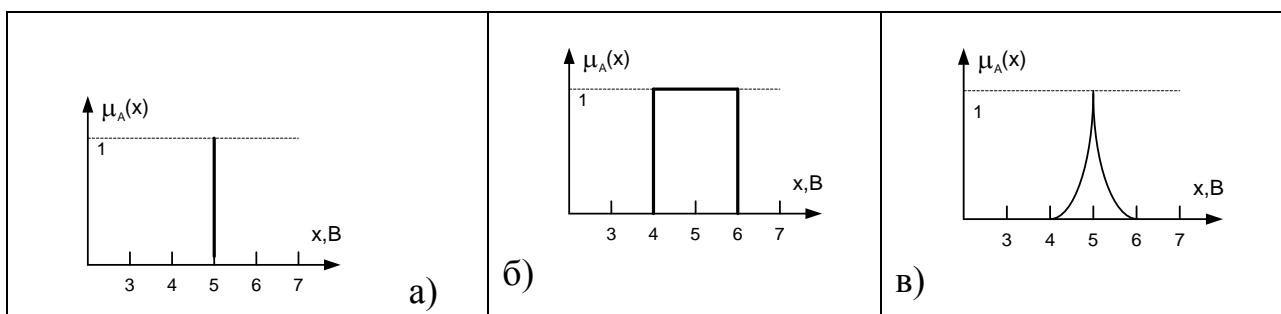


Рис.4.6. Построение функции принадлежности

4.2.2. Способы построения функций принадлежности

4

По определению степень принадлежности $\mu_A(x)$ есть субъективная мера соответствия элемента x понятию, смысл которого формализуется НМ А, поэтому для построения функции принадлежности достаточно мнения одного эксперта.

Однако если есть множество экспертов, успешно действующих в предметной области, в процедуре назначения функций принадлежности можно учесть несколько мнений. Каждый эксперт получает коэффициент $a_i \in [0, 1]$, который отражает уровень его компетентности, так что для группы из m экспертов:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_i a_i, \quad (4.11)$$

где $p_i = 1$, если i -й эксперт отнес x к A , или $p_i = 0$ - в противном случае.

Пример 4.3.

Пусть имеется 6 экспертов одинаково высокой квалификации ($a_i = 1$), имеется множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и необходимо построить нечеткое множество A , формализующее понятие «намного меньше 5».

Результаты опроса экспертов показаны в табл. 4.2.

Таблица 4.2
Расчет значений принадлежности

	x				
	1	2	3	4	5
$\sum_{i=1}^6 p_i a_i$	6	5	1	0	0
$\mu_A(x_i)$	6/6	5/6	1/6	0/6	0/6

4.2.3. Метод попарных сравнений

4

При формировании функции принадлежности для какого либо явления может возникнуть проблема, заключающаяся в том, что данное явление не возможно измерить, т.е. оценить количественно. Однако при этом возможно качественно сопоставить друг относительно друга различные явления или события. В этом случае функция принадлежности может быть построена с помощью так называемого метода попарных сравнений. Еще раз отметим, что метод попарных сравнений выгодно использовать, когда рассматриваются неизмеримые, т.е. качественные понятия.

В этом методе результатом экспертного опроса является матрица:

$$M = [m_{ij}], i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.12)$$

где n - число точек, в которых сравниваются между собой функции принадлежности, i - строка матрицы, а j — столбец матрицы.

Каждый элемент матрицы m_{ij} показывает, во сколько раз $\mu_A(x_j)$ больше $\mu_A(x_i)$. Количество вопросов к эксперту составляет здесь не n^2 , а лишь величину $(n^2 - n)/2$, так как $m_{jj} = m_{ii} = 1$ и $m_{ij} = 1/m_{ji}$. Затем из каждого столбца матрицы получается одно значение по формуле:

$$\mu_A(x_i) = \frac{m_{ij}}{\sum_{i=1, n} m_{ij}}, \quad (4.13)$$

где i - строка матрицы, а j — столбец (он может выбираться достаточно произвольно - это мало влияет на результат).

При сравнении необходимо использовать количественные оценки. Для этого можно, например, оперировать табл.4.3.

Таблица 4.3. Сравнение значений принадлежности

Качественная оценка	Количественная оценка
$\mu_A(x_j)$ равна $\mu_A(x_i)$	1
$\mu_A(x_j)$ немного больше $\mu_A(x_i)$	3
$\mu_A(x_j)$ больше $\mu_A(x_i)$	5
$\mu_A(x_j)$ заметно больше $\mu_A(x_i)$	7
$\mu_A(x_j)$ намного больше $\mu_A(x_i)$	9

Рассмотрим пример иллюстрирующий метод попарных сравнений

4

Пример 4.4.

Пусть задано базовое множество $X = \{40, 55, 70, 100\}$ и необходимо определить на этом множестве НМ «Маленький вес». Пусть в результате опроса экспертов имеется матрица сравнений:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 1/5 & 1 & 4 & 7 \\ 1/7 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/9 & 1/7 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

Например, если зафиксировать первый столбец, то получается:

$$\mu_A(40) = \frac{1}{\sum_{j=1}^4 m_{1j}} = \frac{1}{1.45} = 0.69;$$

$$\mu_A(55) = \frac{0.2}{\sum_{j=1}^4 m_{1j}} = \frac{0.2}{1.45} = 0.14;$$

$$\mu_A(70) = \frac{0.14}{\sum_{j=1}^4 m_{1j}} = \frac{0.14}{1.45} = 0.1;$$

$$\mu_A(100) = \frac{1/9}{\sum_{j=1}^4 m_{1j}} = \frac{1/9}{1.45} = 0.08.$$

Если зафиксировать второй столбец, то

$$\mu_A(40) = 0.81; \mu_A(55) = 0.15; \mu_A(70) = 0.04; \mu_A(100) = 0.02.$$

Таким образом, можно использовать описание

$$A = \frac{0.69}{40} + \frac{0.14}{55} + \frac{0.1}{70} + \frac{0.08}{100}.$$

либо близкое описание

$$A = \frac{0.81}{40} + \frac{0.15}{55} + \frac{0.04}{70} + \frac{0.02}{100}.$$

4.3. Основные типы функций принадлежности

При решении задач проектирования систем с нечеткими регуляторами, для представления функций принадлежности, как правило, используют стандартные формы функций принадлежности. Рассмотрим наиболее часто используемые формы для задания функций принадлежности.

1. Функция принадлежности S-класса (рис.3.6) определяется как

$$s(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2, & \text{если } b \leq x \leq c, \\ 1, & \text{если } x \geq c, \end{cases} \quad (4.14)$$

где $b=(a+c)/2$. Функция принадлежности, относящаяся к этому классу, имеет графическое представление (рис.4.7), напоминающее букву «S», причем ее форма зависит от подбора параметров a, b, c . В точке $x=b=(a+c)/2$ функция принадлежности класса S принимает значение равное 0,5.

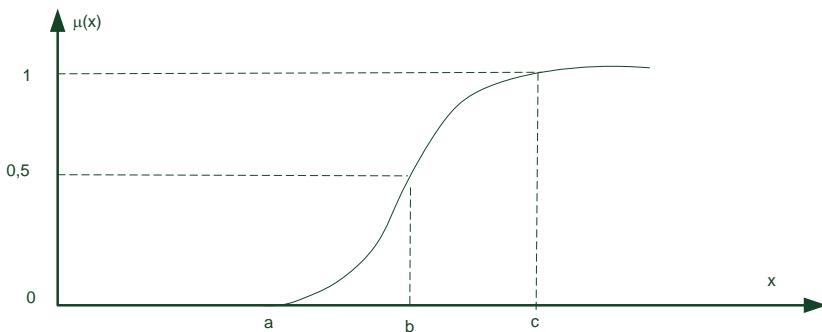


Рис.4.7.

2. Функция принадлежности π -класса (рис.4.8) определяется через функцию класса S, как:

$$\pi(x, b, c) = \begin{cases} s(x, c-b, c-b/2, c) & \text{если } x \leq c, \\ 1 - s(x, c, c+b/2, c+b) & \text{если } x \geq c, \end{cases} \quad (4.15)$$

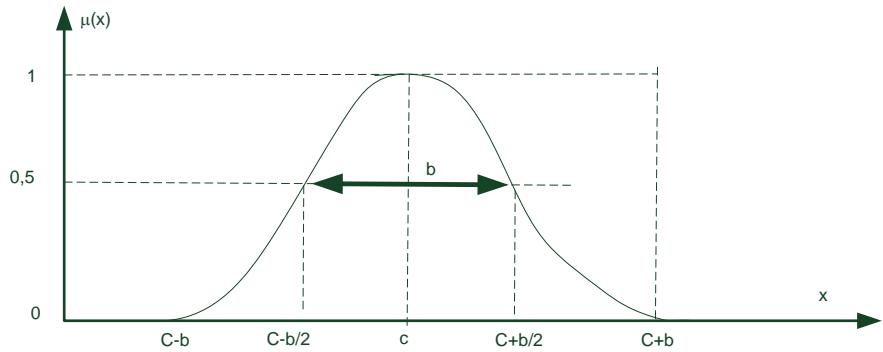


Рис.4.8.

Функция принадлежности класса π принимает нулевые значения для $x \geq c+b$ и $x \leq c-b$. В точках $x=c \pm b/2$ ее значение равно 0,5.

3. Функция принадлежности класса γ

$$\gamma(x; a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{если } x \geq b, \end{cases} \quad (4.16)$$

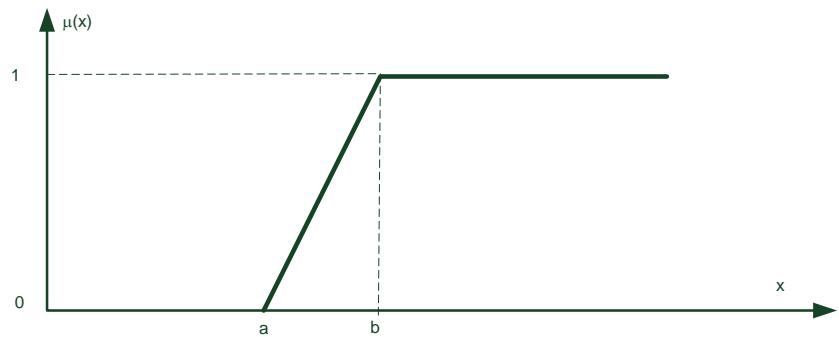


Рис.4.9.

4. Функция принадлежности класса L

$$L(x; a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{b-x}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{если } x \geq b, \end{cases} \quad (4.17)$$

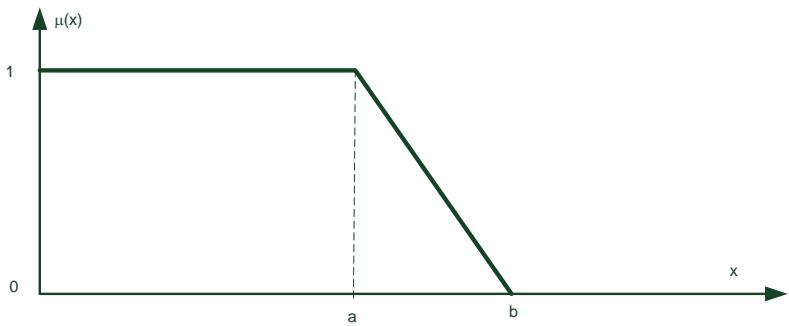


Рис.4.10.

4. Функция принадлежности класса t

$$t(x; a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{если } b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{если } x \geq c, \end{cases} \quad (4.18)$$

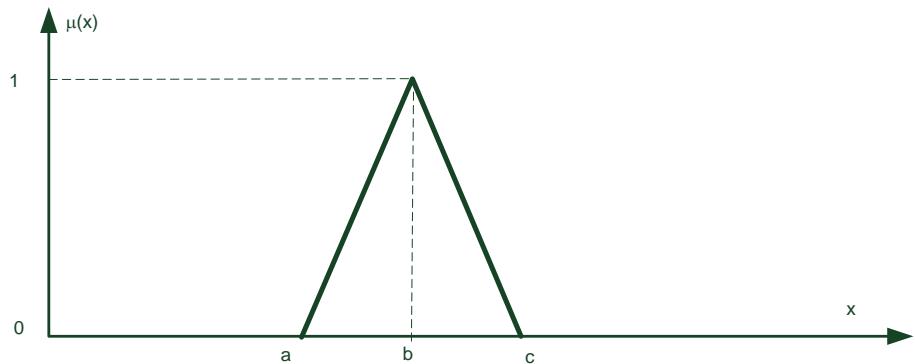


Рис.4.11.

Симметричная гауссова функция

Гауссова функция описывается выражением

$$\mu_A(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right], \quad (4.19)$$

Вид этой функции изображен на рис.4.12.

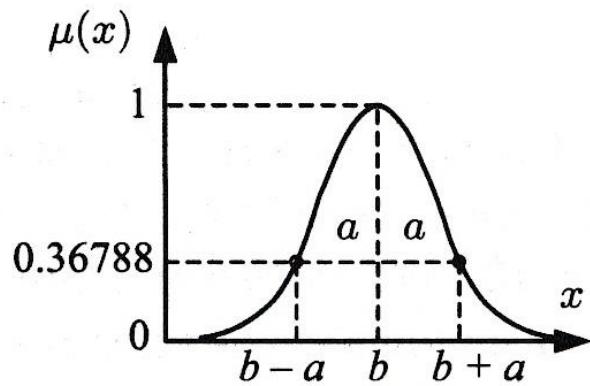


Рис.4.12. Функция принадлежности гауссовского типа.

Вид данной функции, иногда называемой гауссовым колоколом, определяется двумя параметрами – a и b , где b – задает её модальное значение, и a – ширину.

На уровне

$$\mu_A(x) = e^{-1} = 0.36788$$

ширина гауссовой функции равна $2a$. Модальное значение получают экспертным путем, задавая вопрос о наиболее характерном значении x для данного нечеткого множества.

Сигмоидальная функция принадлежности

Будучи симметричными, гауссовые ФП подходят для представления внутренних нечетких множеств. Для представления крайних множеств можно использовать левую и правую сигмоидальные функции (рис.4.13).

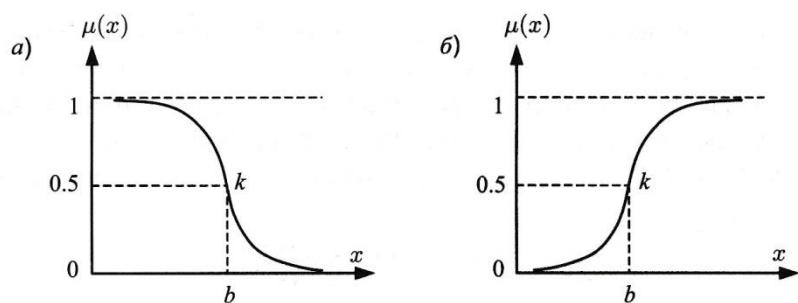


Рис.4.13. Левая и правая сигмоидальные функции.

Правая сигмоидальная функция задается с помощью выражения:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + \exp[-a \cdot (x - b)]}. \quad (4.20)$$

Параметр b задает координату точки k , принадлежащей нечеткому множеству со степенью 0.5, поэтому его значение можно достаточно легко получить от эксперта. Коэффициент a определяет наклон функции в точке перегиба k – с увеличением его значения растет величина наклона. При $a=10$ вид функции близок к ступенчатому (рис.4.14).

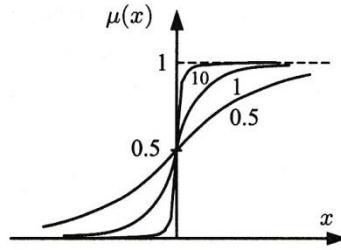


Рис.4.14. Форма сигмоидальной функции при различных значениях коэффициента наклона a .

Левая сигмоидальная функция задается с помощью выражения:

$$\mu_A(x) = 1 - \frac{1}{1 + \exp[-a \cdot (x - b)]} = \frac{\exp[-a \cdot (x - b)]}{1 + \exp[-a \cdot (x - b)]}. \quad (4.21)$$

По аналогии с правой, левая сигмоидальная функция имеет точку перегиба $x = b$, и ее значение в этой точке равно 0.5. Коэффициент наклона a вычисляется по формуле:

$$a = -\left(\frac{\ln(99)}{x_{0.99} - b} \right)$$

Сигмоидальная функция имеет те же достоинства и недостатки, что и гауссова.

4.4. Примеры, иллюстрирующие различные способы построения функций принадлежности

Пример 4.5.

Построить функцию принадлежности нечеткого множества «друзья» можно, задавая вопросы вида:

«Кого из ваших знакомых вы считаете приятелями ($\alpha > 0.5$)?>>

«Кого вы считаете настоящими друзьями ($\alpha = 1$)?>>

«Кого вы не считаете своими друзьями ($\alpha = 0$)?>>

Существуют два способа определения а-срезов (Knappe 1994):

$$\begin{aligned} A^{>\alpha} &= \{x : x \in X, \mu_A(x) > \alpha\}, \\ A^{\geq\alpha} &= \{x : x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

4

При $\alpha = 0$ α -срез совпадает с носителем множества $S(A)$, а при $\alpha = 1$ — с его ядром $C(A)$. По множеству α -срезов нечеткого множества можно с требуемой точностью восстановить его функцию принадлежности. Для дискретного множества число необходимых срезов конечно, для непрерывного — вообще говоря, бесконечно (хотя во многих частных случаях оказывается конечным).

Если на области определения известны элементы отдельных α -срезов нечеткого множества A , то его функцию принадлежности $\mu_A^*(x)$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$\mu_A^*(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \mu_A > \alpha(x)),$$

Либо

$$\mu_A^*(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \mu_A \geq \alpha(x)).$$

Пример 4.6.. Пусть задано нечеткое множество (рис. 4.15)

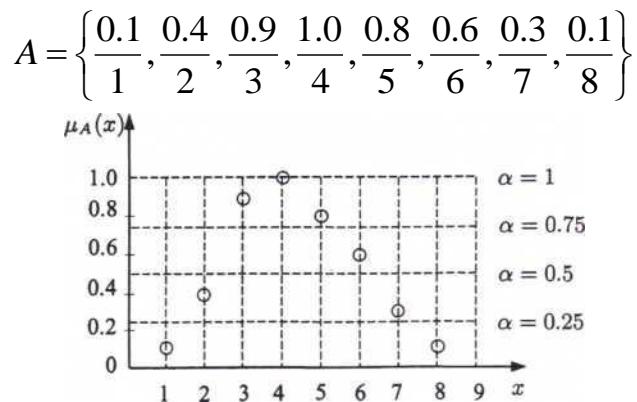


Рис. 4.15. Дискретная функция принадлежности нечеткого множества A .

Степени принадлежности элементов а-срезам могут принимать только значения 0 и 1. Представление множества A через его а-срезы имеет вид:

Если сопоставить исходную функцию принадлежности $\mu_A(x)$ с функцией $\mu_A(x)$ (восстановленной с помощью а-срезов (рис. 4.16), то можно заметить, что результат восстановления не является абсолютно точным.

Повысить точность можно путем увеличения числа а-резов, либо за счет оптимизации их выбора.

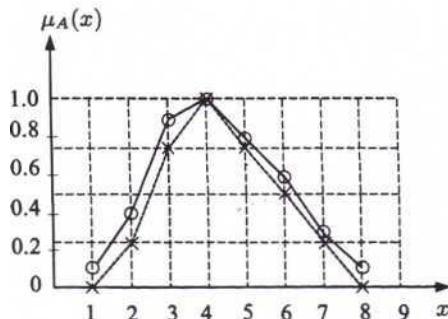


Рис. 4.16.

Исходная функция принадлежности $\mu_A(x)$ (сплошная линия)
и функция $\mu_A^*(x)$, восстановленная с помощью
а-резов (пунктирная линия)

Срезы $A^{\geqslant\alpha}$:

$$\begin{aligned} A^{\geqslant 1} &= \left\{ \frac{1}{4} \right\}, \quad A^{\geqslant 0.75} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right\}, \\ A^{\geqslant 0.5} &= \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \right\}, \quad A^{\geqslant 0.25} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \right\}, \\ A^{\geqslant 0} &= \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_A^*(x) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \left(1 \cdot \left(\frac{1}{4} \right) + 0.75 \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right) + 0.5 \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 0.25 \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8} \right) \right) = \\ &= \left(\frac{0}{1}, \frac{0.25}{2}, \frac{0.75}{3}, \frac{1.0}{4}, \frac{0.75}{5}, \frac{0.5}{6}, \frac{0.25}{7}, \frac{0}{8} \right). \end{aligned}$$

Далее рассмотрим различные виды функций принадлежности, которые можно использовать для математического представления интуитивных функций принадлежности.

Пример 3.4. (на применение гауссовой функции)

В качестве числового значения, в наибольшей степени характеризующего нечеткое множество «средний рост», может быть выбрано $b = 170$ см.

Для того чтобы экспертным путем определить значение параметра a , характеризующего ширину функции, можно воспользоваться понятием критической точки k функции принадлежности, под которой понимается точка со степенью принадлежности, равной 0.5. Любая гауссова функция имеет две таких точки (рис. 4.17).

Если предположить, что соседние функции принадлежности пересекаются примерно на уровне $\mu(x_k) = 0.5$ (что, однако, в нечетких моделях выполняется не всегда), то критическую точку k можно рассматривать как точку, для координаты x которой мы не можем указать, какому из нечетких множеств — левому или правому — она принадлежит в большей степени.

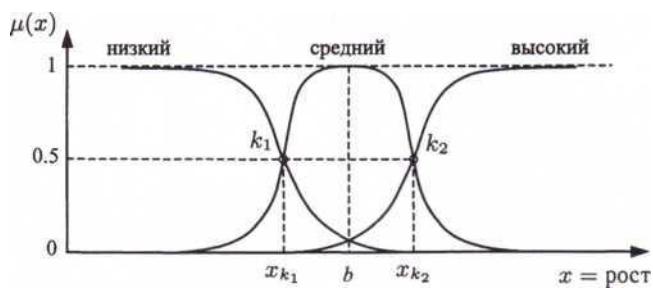


Рис.4.17. Гауссова функция, используемая в качестве функции принадлежности нечеткого множества «средний рост»

Таким образом, если мы не в состоянии решить, к какой группе людей — низкого или среднего роста — следует отнести человека, имеющего рост 165 см, то можно считать, что данное значение принадлежит обоим названным нечетким множествам с одинаковой степенью, равной 0.5, и задает тем самым координату критической точки функции принадлежности: $Xk = 165$ см.

По известному модальному значению гауссовой функции ($b = 170$ см) можно вычислить значение второго параметра a :

$$\begin{aligned}\mu(x_k) &= \exp \left[-\left(\frac{x_k - b}{a} \right)^2 \right] = 0.5, \\ a &= \frac{|x_k - b|}{\sqrt{\ln 2}} \cong 6 \text{ см.}\end{aligned}$$

Понятие критической точки k является особенно полезным при определении параметров функции принадлежности путем экспертного оценивания, так как человеку легче всего указать граничные значения предъ-

явленного показателя и выделить значения, имеющие смысловое различие для заданной области его изменения. При этом эксперт, как правило, не в состоянии задать точные значения степеней принадлежности элементов, не имеющих в заданной области смыслового различия. Поверхность отклика нечеткой модели, использующей гауссову функцию, в общем случае является глобально и локально нелинейной.

Пример 4.7. (на применение сигмоидальной функции принадлежности)

Нечеткое множество «высокий рост» можно задать с помощью сигмоидальной функции, представленной на рис. 4.18.

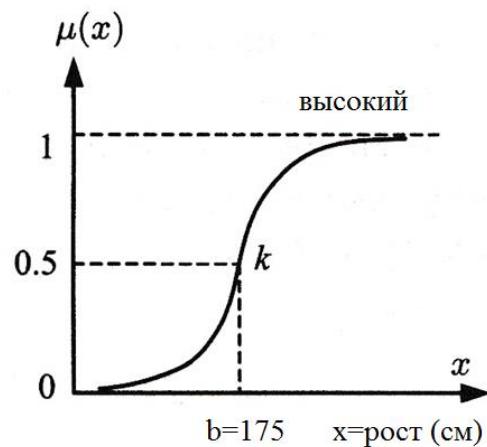


Рис.4.18. Сигмоидальная функция принадлежности нечеткого множества «высокий рост»

Если предположить, что людей, имеющих рост 180 см, можно с полной уверенностью ($\mu=0.99$) отнести к высоким, то коэффициент наклона a вычисляется согласно выражениям:

$$\mu(x_{0.99}) = \frac{1}{1 + \exp[-a \cdot (x_{0.99} - b)]},$$

$$a = \frac{\ln(99)}{x_{0.99} - b} = \frac{\ln(99)}{180 - 175} \cong 0.919.$$

Пример 4.8. Множество A1=«высокий рост»:

$$X = \{170 \text{ см}, 172.5 \text{ см}, 175 \text{ см}, 177.5 \text{ см}, 180 \text{ см}, 190 \text{ см}, 200 \text{ см}\},$$

$$A_1 = \left\{ \frac{0}{170 \text{ см}}, \frac{0.25}{172.5 \text{ см}}, \frac{0.5}{175 \text{ см}}, \frac{0.75}{177.5 \text{ см}}, \frac{1.0}{180 \text{ см}}, \frac{1.0}{190 \text{ см}}, \frac{1.0}{200 \text{ см}} \right\}.$$

Функция принадлежности множества представлена на рис. 4.19. 4

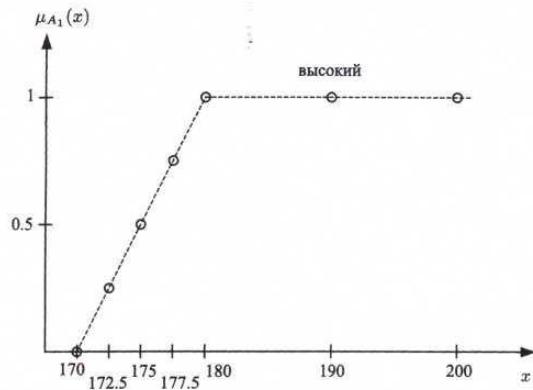


Рис.4.19. Функция принадлежности нечеткого множества типа 1 «высокий рост».

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

5.НЕЧЕТКАЯ АРИФМЕТИКА

5.1. Основные понятия

4

Нечеткие числа могут применяться при моделировании систем, для которых зависимость между входными и выходными сигналами известна и представима в виде традиционной математической модели $y=f(x)$, однако входные сигналы не поддаются точному измерению, а доступны лишь приближенной оценке, например:

x_1 = “примерно 9”,

x_2 = “примерно 10”

$$y = x_1 + x_2.$$

В этом случае значение выхода системы Y может быть получено в форме нечеткого числа (рис.5.1).

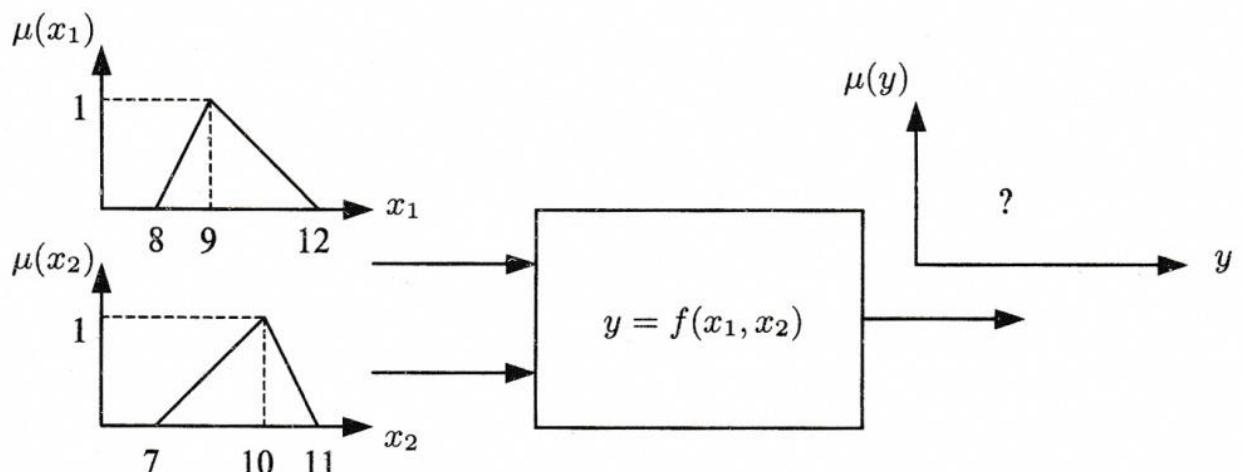


Рис.5.1.

Если модель задана в виде математического выражения, содержащего операции сложения, вычитания, умножения или деления, то должны быть определены методы выполнения этих операций над нечеткими числами. Данные методы играют важную роль, поскольку позволяют вводить в традиционную математическую модель системы нечеткие оценки входных значений, которые человек формулирует на основе своего восприятия или интуиции. Кроме того, на основе таких методов можно создавать гибридные модели, состоящие из четких и нечетких блоков, при этом четкие элементы модели могут использоваться в том числе и для обработки нечеткой информации, выдаваемой соответствующими нечеткими элементами.

5.2. Принцип обобщения

В нечеткой арифметике базовые математические операции с нечеткими числами представляют собой обобщение соответствующих операций над обычными числами. Правила такого обобщения предложены Л.Заде в виде принципа обобщения.

Рассмотрим данный принцип на примере систем типа SISO (системы с одним входом и одним выходом).

Итак пусть имеется обычная система с одним входом и одним выходом, реализующая отображение f множества X входных значений во множество Y выходных значений (рис.5.2.).

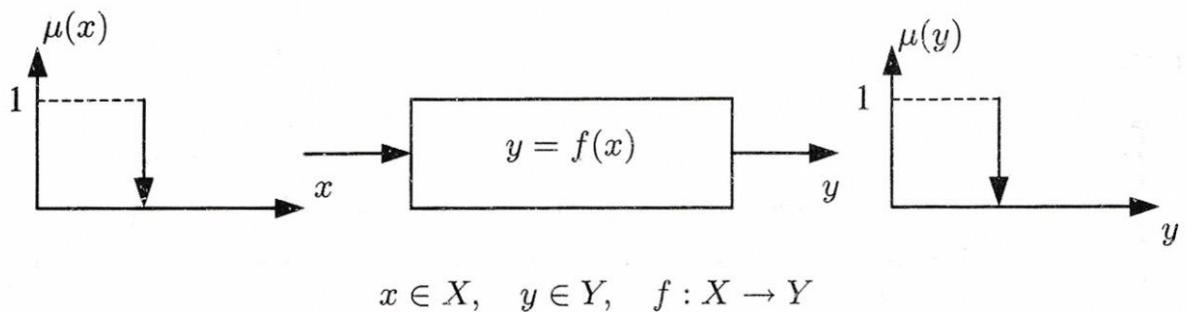


Рис.5.2.

Если A – нечеткое множество, заданное на множестве X , то результатом $f(A)$ его отображения, в соответствии с принципом обобщения, является нечеткое множество $B = f(A)$, определяемое в виде (5.1), где символ \vee означает операцию ИЛИ (объединение нечетких множеств):

$$B(y_0 = f(A)) = \vee \{A(x) / f(x)\} = \{(\mu_B(y)/y) | y = f(x), x \in X\},$$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \vee \mu_A(x), & \text{для всех } x, \text{ для которых } f(x) = y, \\ 0, & \text{во всех других случаях} \end{cases}$$

Или кратко:

$$\mu_B(y) = \mu_{f(A)}(y) = \vee_{y=f(x)} \mu_A(x), \quad x \in X, y \in Y. \quad (5.1)$$

Для многих реальных систем входные и выходные величины (напряжение, токи и т.д.) могут быть выражены с помощью вещественных

чисел, поэтому в дальнейшем изложении мы будем предполагать, что универсальные множества совпадают с множеством вещественных чисел R . Отметим, что в общем случае X и Y могут представлять собой множества произвольных элементов. Таким образом, формула (5.1) может быть представлена в виде:

$$\mu_B(y) = \mu_{f(A)}(y) = \vee_{y=f(x)} \mu_A(x), \quad \forall x, y \in R. \quad (5.2)$$

Особенностью теории нечетких множеств является то, что одна и та же процедура, например, объединение множеств, может быть реализована различными способами (об этом в следующем разделе). Здесь же мы предположим, что операция \vee реализуется оператором MAX, что означает выбор максимального значения функции принадлежности для данного значения аргумента (x).

Пример 5.1. Пусть SISO-система реализует отображение $X \rightarrow Y$, где $y = x^2$. Далее предположим, что входное значение x задано в форме нечеткого числа $A(x) = \langle\text{примерно } 0\rangle$, представленного в табл. 5.1.

Таблица 5.1
Нечеткое число $A(x)$, «примерно 0»

$\mu_A(x)$	0	0.5	1	0.66	0.33	0
x	-2	-1	0	1	2	3

Для данного входного значения определим нечеткое выходное значение $B(y)$, функция принадлежности которого может быть получена по формуле:

$$\mu_B(y) = \text{MAX}_{y=x^2} \mu_A(x), \quad \forall x, y \in R : x \in X, y \in Y. \quad (5.3)$$

Например, значение $y = 1$ соответствует случаю $x = 1$ или $x = -1$. Поэтому формулу для вычисления степени принадлежности $\mu_B(y)$ для $y = 1$ можно представить в виде:

$$\mu_B(y) = \text{MAX}_{y=1}((0.5), (0.66)) = 0.66 \quad (5.3)$$

Нечеткое множество B представлено в табл. 5.2.

Таблица 5.2
Нечеткое число $B(y)$, «примерно 0»

$\mu_B(y)$	1	0.66	0.33	0
y	0	1	4	9

На рис.5.3. представлены нечеткое число на входе системы и результат его преобразования на выходе.

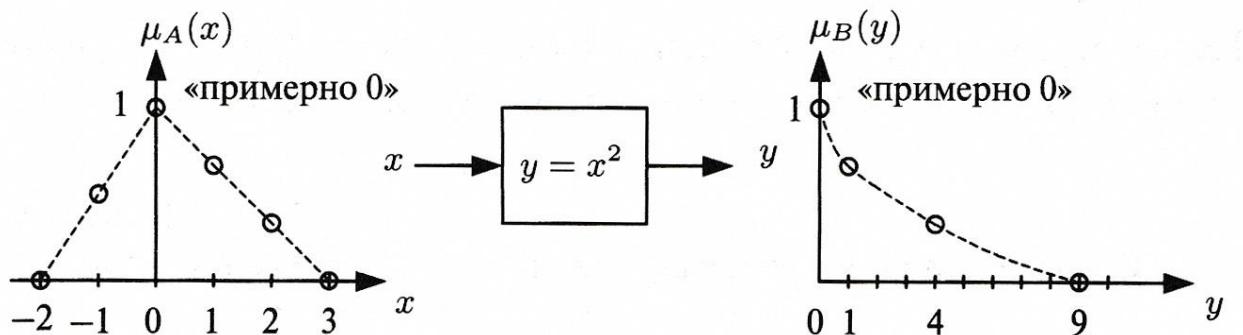


Рис. 5.3. Преобразование обычной SISO-системой входного нечеткого числа в выходное

5.3. Системы типа SISO (один вход – один выход)

Далее мы рассмотрим, как на основе принципа обобщения для функции одной переменной можно определить некоторые операции над нечеткими числами.

- **Противоположное нечеткое число**

Противоположным для нечеткого числа A является нечеткое число $-A$, которое может быть получено на основе принципа обобщения, принимающего в данном случае вид:

$$\mu_{-A}(y) = \vee_{y=-x} \mu_A(x), \quad \forall x, y \in R.$$

Пример 5.2. Найдем противоположное число для $A = \text{«примерно } 2\text{»}$ (табл. 5.3).

Таблица 5.3
Нечеткое число $A = \text{«примерно } 2\text{»}$

$\mu_A(x)$	0	0.5	1	0.5	0
x	1	1.5	2	2.25	2.5

Результаты вычислений представлены в табл. 5.4 .

Таблица 5.4

Противоположное нечеткое число $-A = \text{«примерно -2»}$

$\mu_A(x)$	0	0.5	1	0.5	0
x	-1	-1.5	-2	-2.25	-2.5

Таким образом, можно прийти к выводу, что число A и противоположное ему число $-A$ симметричны относительно оси ординат (рис.5.4.).

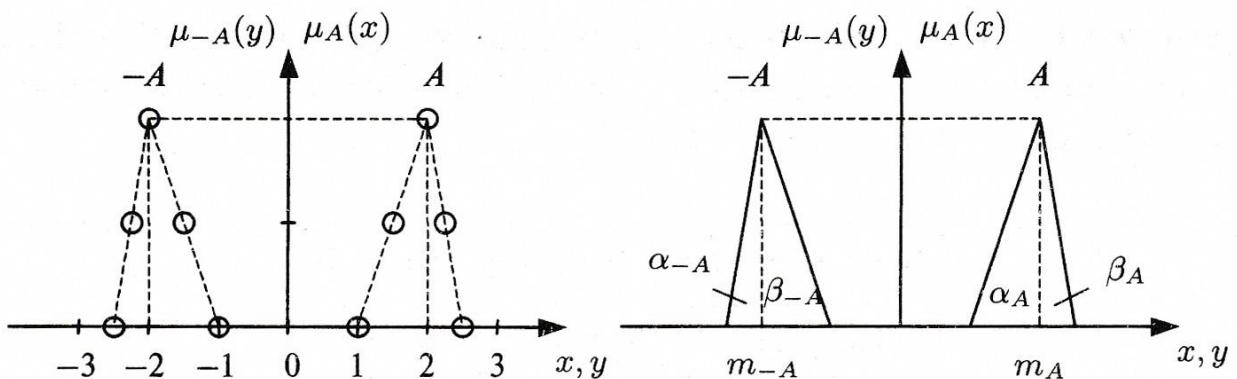


Рис.5.4. Число $A = \text{«примерно 2»}$ и число $B = -A = \text{«примерно -2»}$

• Обратное нечеткое число

Обратное нечеткое число A^{-1} вычисляется на основе принципа обобщения в форме:

$$\mu_{A^{-1}}(y) = \vee_{x \in X} \mu_A(x), \quad \forall x, y \in R, \quad x \in X.$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Пример 5.3. Найдем нечеткое число, являющееся обратным к нечеткому числу $A = \text{«примерно 2»}$, заданному с помощью табл. 5.5. Результаты вычислений представлены в табл. 5.6 и на рис. 5.5.

Таблица 5.5

Нечеткое число $A = \text{«примерно 2»}$

$\mu_A(x)$	0	0.5	1	0.5	0
x	1	1.5	2	2.25	2.5

На рис. 5.5 показаны число A и обратное к нему число A^{-1} .

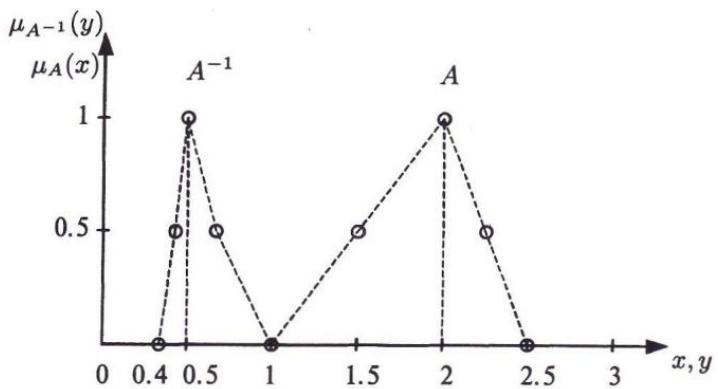


Рис.5.5. Нечеткое число A - «примерно 2» и обратное к нему число A^{-1} , найденное с использованием принципа обобщения

5.4. Система типа MISO

Пусть имеется обычная MISO - система (рис.5.6), реализующая отображение $y = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

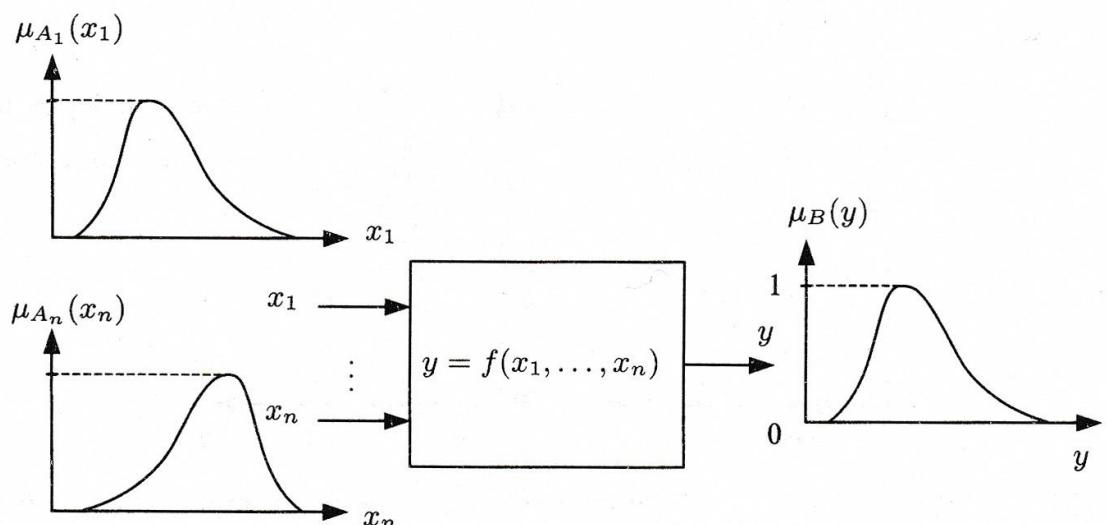


Рис.5.6.

Входной вектор X определен на декартовом произведении областей определения отдельных входных величин $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n$.

Функция f отображает множество элементов области определения вектора входных величин X на область значений выходной величины Y :

$$f: X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n \rightarrow Y.$$

Если $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ - нечеткие множества, заданные на областях определения $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ входных величин, то в соответствии с

принципом обобщения, на выходе системы получим нечеткое множество $B=f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$, являющееся результатом отображения входных нечетких множеств:

$$\mu_B(y) = \bigvee_{y=f(x)} \left(\mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(x_n) \right), \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in R.$$

где

символ \vee - означает объединение множеств (по-прежнему предполагаем, что он реализуется процедурой MAX);

символ \wedge - означает пересечение множеств (например, на основе операции MIN). Данные операции подробно будут разобраны на следующем занятии.

Далее рассмотрим использование принципа обобщения при выполнении основных арифметических операций для случая системы с двумя входами.

5.5. Сложение нечетких чисел.

Сложение двух нечетких чисел представляет собой отображение входного вектора

$$X = [x_1, x_2]^T,$$

определенного на декартовом произведении $R \times R$, в выходное значение y , определенное на множестве R (рис.5.7).

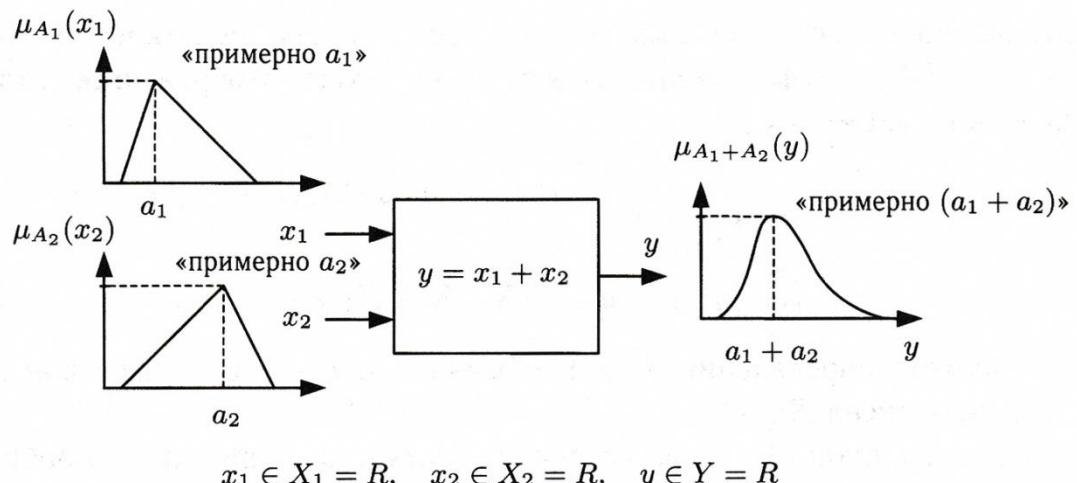


Рис.5.7.

Если $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$ – нечеткие числа, то их сумма также является нечетким числом и задается выражением:

$$(A_1 + A_2)(y) = \bigvee_{y=x_1+x_2} (A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)), \quad \forall x_1, x_2 \in R.$$

Для вычисления суммы нечетких чисел достаточно определить функцию принадлежности

$$\mu_{A_1+A_2}(y) = \bigvee_{y=x_1+x_2} [\mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2)], \quad \forall x_1, x_2 \in R.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 5.4.

Пусть заданы нечеткие числа A_1 = «примерно 5» (табл. 5.6), A_2 = «примерно 7» (табл. 5.7). Найдем нечеткое число $(A_1 + A_2)$.

Таблица 5.6

Нечеткое число A_1 = «примерно 5»

$\mu_{A_1}(x_1)$	0	0.33	0.66	1	0.5	0
x_1	2	3	4	5	6	7

Таблица 5.6

Нечеткое число A_2 = «примерно 7»

$\mu_{A_2}(x_2)$	0	0.5	1	0.66	0.33	0
x_2	5	6	7	8	9	10

Таблица 5.7

Нечеткое число $(A_1 + A_2)$ = «примерно 12»

$\mu_{A_1+A_2}(y)$	0	0	0.33	0.5	0.66	1	0.66	0.5	0.33	0	0
y	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Вычисление суммы нечетких чисел $(A_1 + A_2)$, с использованием принципа обобщения иллюстрируется схемой на рис. 5.8.

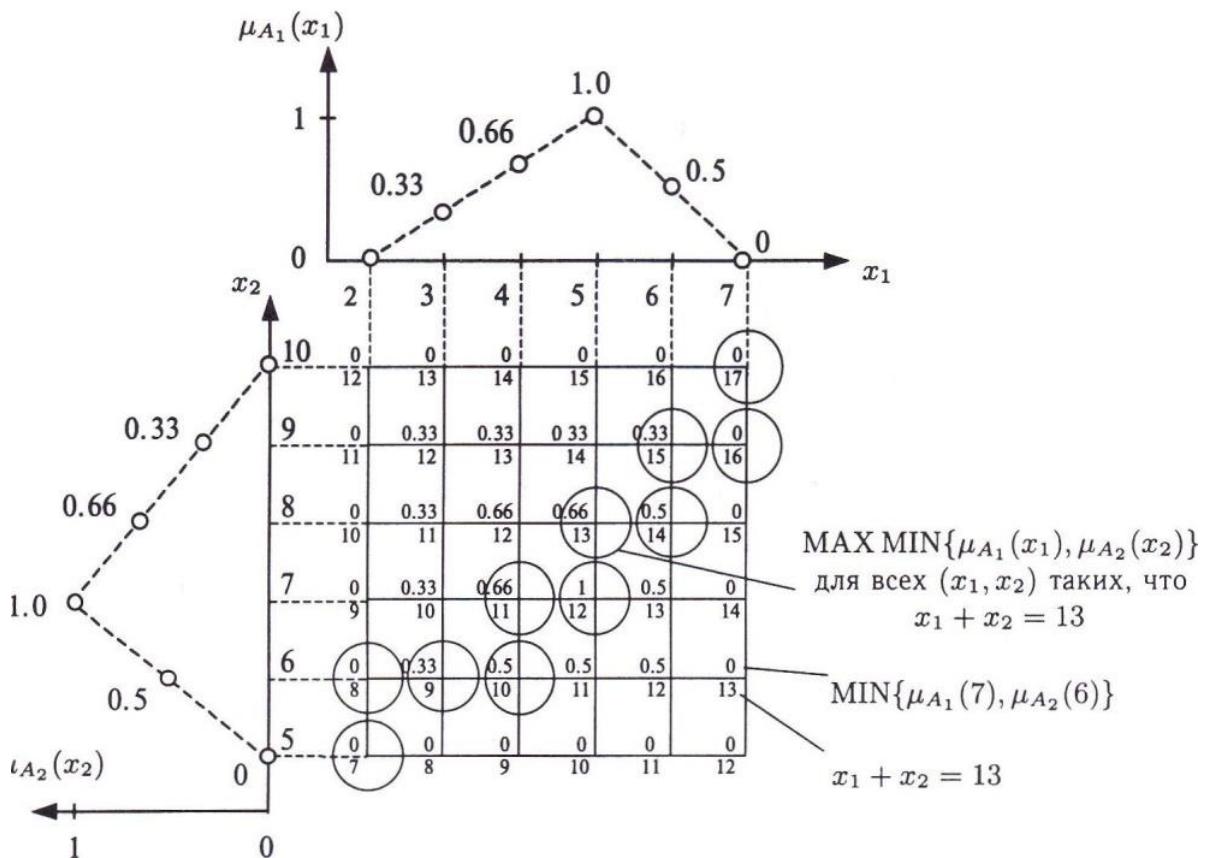


Рис.5.8. Метод определения функции принадлежности нечеткого числа $(A_1 + A_2)$, где $A_1 = \langle\text{примерно } 5\rangle$, $A_2 = \langle\text{примерно } 7\rangle$, и результат $(A_1 + A_2) = \langle\text{примерно } 12\rangle$ получен с использованием операторов MAX (V) и MIN (^)

Полученный результат $(A_1 + A_2) = \langle\text{примерно } 12\rangle$ представлен в табл. 3.9 и на рис. 5.6.

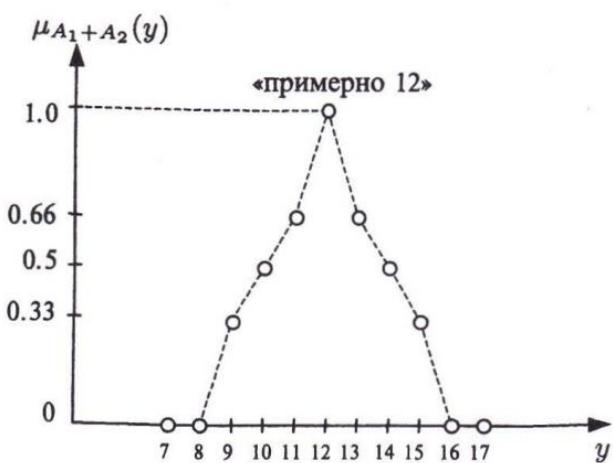


Рис. 5.9. Дискретная функция принадлежности числа «примерно 12»,

являющегося суммой нечетких чисел «примерно 5» + «примерно 7» и полученного с использованием операторов MAX (V) и MIN (^)

5.6. Умножение нечетких чисел

4

Пусть $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$ – нечеткие числа. Их произведение ($A_1 \cdot A_2$) можно найти, используя принцип обобщения в форме:

$$(A_1 \cdot A_2)(y) = \bigvee_{y=x_1 \cdot x_2} (A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)), \quad \forall x_1, x_2, y \in R.$$

Фактически для вычисления суммы нечетких чисел достаточно определить функцию принадлежности

$$\mu_{A_1 \cdot A_2}(y) = \bigvee_{y=x_1 \cdot x_2} [\mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2)], \quad \forall x_1, x_2, y \in R,$$

где

оператор \vee - означает объединение множеств (по-прежнему предполагаем, что он реализуется процедурой MAX);

оператор \wedge - означает пересечение множеств (например, на основе операции PROD). Данные операции подробно будут разобраны на следующем занятии.

Рассмотрим пример.

Пример 5.5.

Пусть заданы нечеткие числа $A_1 = \text{«примерно 5»}$ (табл. 5.8), $A_2 = \text{«примерно 7»}$ (табл. 5.7). Найдем нечеткое число $(A_1 + A_2)$.

Таблица 5.8

Нечеткое число $A_1 = \text{«примерно 5»}$

$\mu_{A_2}(x_2)$	0	0.33	0.66	1	0.5	0
------------------	---	------	------	---	-----	---

x_2	2	3	4	5	6	7
-------	---	---	---	---	---	---

Таблица 5.9

Нечеткое число $A_2 = \text{«примерно } 7\text{»}$

$\mu_{A_2}(x_2)$	0	0.5	1	0.66	0.33	0
x_2	5	6	7	8	9	10

Таблица 5.10

Вычисление произведения нечетких чисел $(A_1 \bullet A_2)$ иллюстрируется схемой на рис. 5.9. При использовании изображенной на нем сетки результатом является нечеткое число $(A_1 \bullet A_2) = \text{«примерно } 35\text{»}$, представленное на рис.5.10.

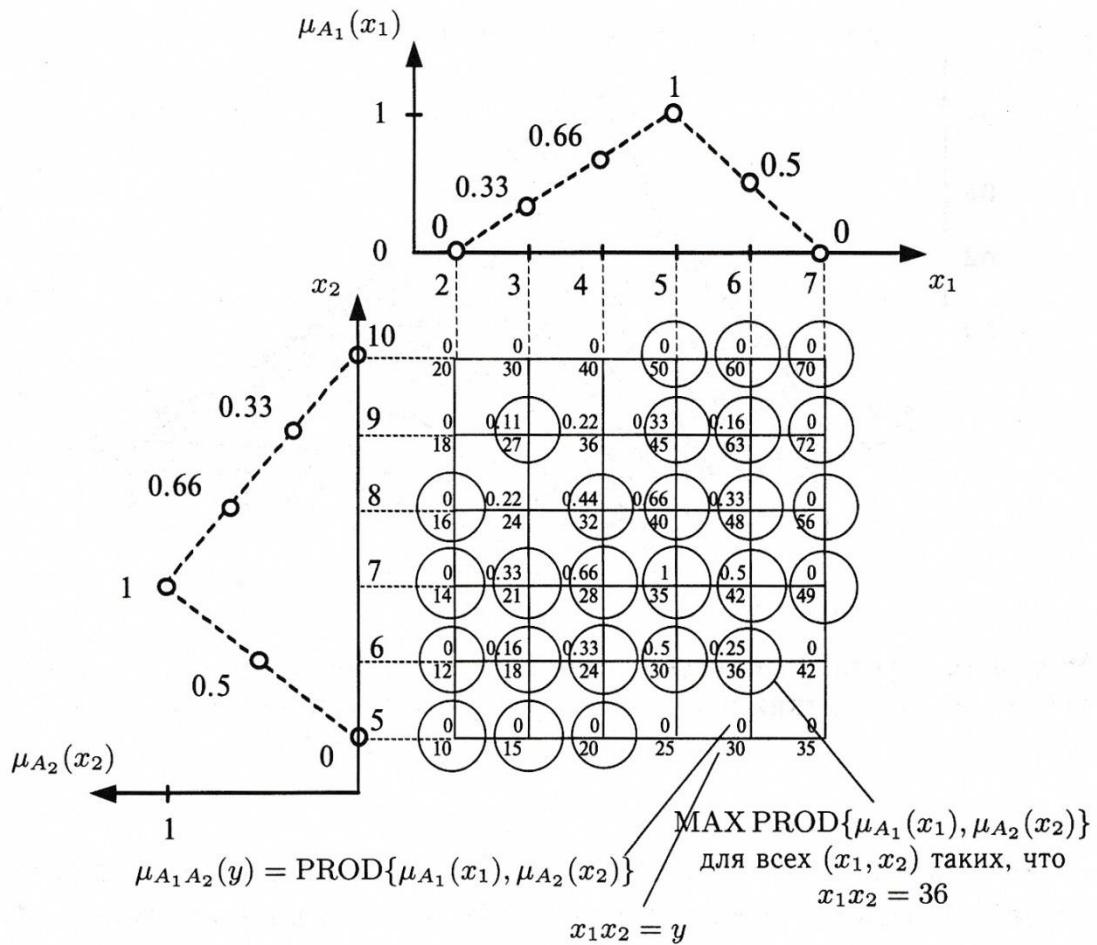


Рис.5.9.

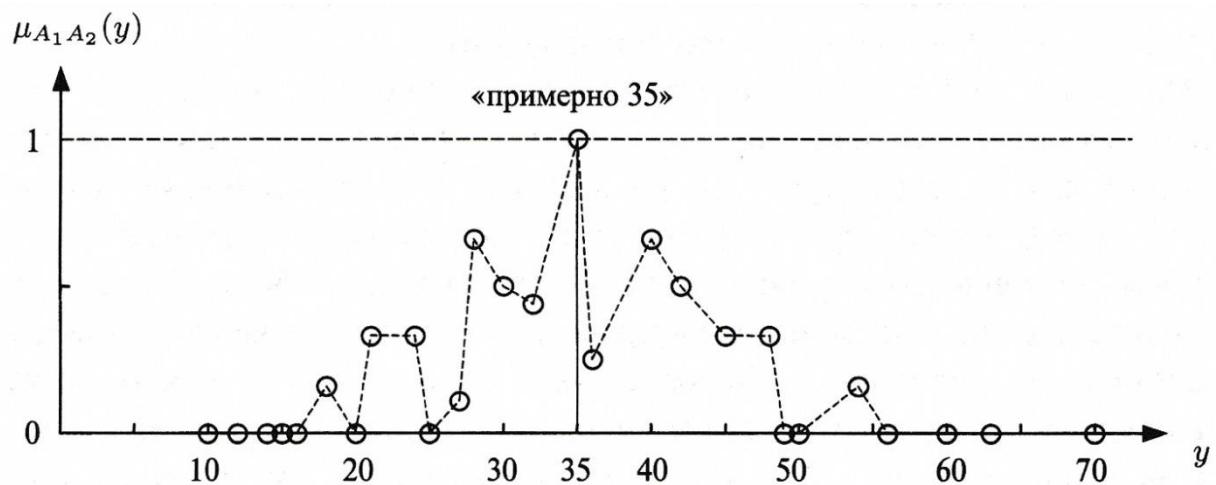


Рис.5.10.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

6. ОПЕРАЦИИ С НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

4

Определение операций, выполняемых с нечеткими множествами, во многом аналогично операциям с обычными (четкими) множествами, однако необходимо отметить, что поскольку нечеткое множество является расширением обычного четкого множества то и набор операций для НМ значительно более широкий и разнообразный.

Рассмотрим основные операции, наиболее часто используемые при проектировании систем управления с нечеткими регуляторами. Пусть A и B – произвольные (конечные или бесконечные) нечеткие множества, заданные на одном и том же универсуме X . Начнем с рассмотрения операций, с которыми уже хорошо знакомы из теории множеств, а именно, пересечение, объединение, дополнение.

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$1) \quad a \wedge b = \min(a, b),$$

$$2) \quad a \vee b = \max(a, b).$$

6.1. Пересечение (конъюнкция)

Пересечением двух нечетких множеств A и $B \subseteq X$ называется нечеткое множество C с функцией принадлежности:

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad (6.1)$$

для каждого $x \in X$.

Графическая интерпретация этой операции представлена на рис. 6.1.

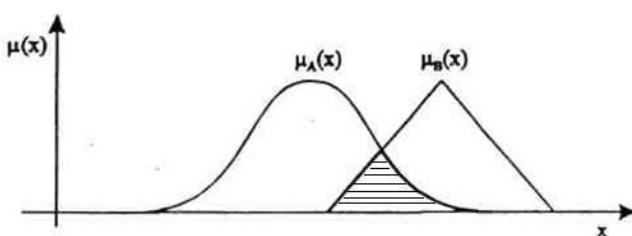


Рис. 6.1. Графическое представление операции пересечения нечетких множеств.

Операция пересечения нечетких множеств по аналогии с обычными множествами обозначаются знаком « \cap ». В этом случае результат операции пересечения двух нечетких множеств записывается в виде $C=A \cap B$.

Как нетрудно заметить, пересечения $A \cap B$ есть наибольшее нечеткое множество C , которое содержится одновременно в нечетких множествах A и B .

Пересечение нечетких множеств A_1, A_2, \dots, A_n определяется функцией принадлежности:

$$\mu_C(x) = \min[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)], \quad (6.2)$$

для каждого $x \in X$.

4

Операцию пересечения нечетких множеств иногда называют **min** (\circ) – **пересечением** или \wedge -пересечением.

Для выпуклых нечетких множеств имеет место следующее свойство:

Если нечеткие множества A и B – выпуклые, то и их пересечение $C = A \cap B$ также является выпуклым нечетким множеством.

6.2. Объединение (дизъюнкция)

Объединением двух нечетких множеств A и B называется некоторое третье множество D , заданное на этом универсуме X , функция принадлежности которого определяется по следующей формуле:

$$\mu_D(x) = \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad (6.3)$$

для каждого $x \in X$.

Графическая интерпретация этой операции представлена на рис. 6.2.

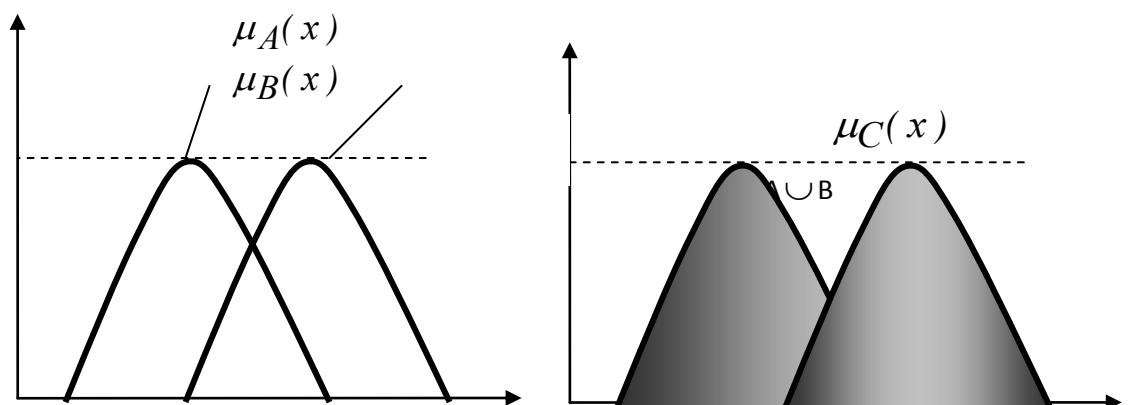


Рис.6.2.

Операция объединения нечетких множеств с обычными множествами обозначается знаком " \cup ", а результат: $D = A \cup B$.

Как нетрудно заметить, объединение $D = A \cup B$ есть наименьшее нечеткое множество D , которое включает оба множества A и B .

Операцию объединения нечетких множеств иногда называют **max** (\circ) – **объединением** или \vee -объединением.

Функции принадлежности объединения некоторых множеств A_1, A_2, \dots, A_n выражаются зависимостью:

$$\mu_D(x) = \max[\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)], \quad (6.4)$$

для каждого $x \in X$.

Рассмотрим примеры операций объединения и пересечения⁴

Допустим заданы два нечетких множества:

А- «небольшое натуральное число»:

$$A = \frac{1.0}{1} + \frac{1.0}{2} + \frac{0.9}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.6}{5} + \frac{0.5}{6} + \frac{0.4}{7} + \frac{0.2}{8} + \frac{0.1}{9}.$$

В- «число приближенное равное 2»:

$$B = \frac{0.6}{1} + \frac{1.0}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.2}{5} + \frac{0}{6} + \frac{0}{7} + \frac{0}{8} + \frac{0}{9}.$$

Тогда нечеткие множества А и В, а также результаты операций объединения и пересечения представлены в таблице:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu_A(A)$	1.0	1.0	0.9	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0.1
$\mu_B(B)$	0.6	1.0	0.6	0.4	0.2	0	0	0	0
$A \cup B$	1.0	1.0	0.9	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0.1
$A \cap B$	0.6	1.0	0.6	0.4	0.2	0	0	0	0

6.3. Дополнение

Дополнение нечеткого множества А обозначается через \bar{A} и определяется как нечеткое множество $\bar{A} = \{x, \mu_{\bar{A}}(x)\}, \forall x \in X$, функции принадлежности которого $\mu_{\bar{A}}(x)$ определяется по следующей формуле:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X. \quad (6.5)$$

Графически данная функция иллюстрируется рис.6.3.

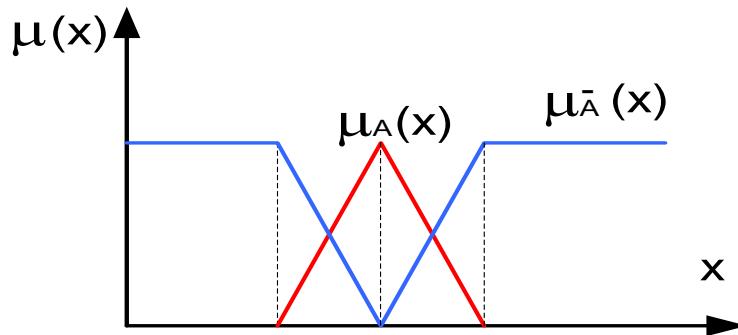


Рис.6.3

Для рассмотренных операций над нечеткими множествами имеют место следующие **фундаментальные свойства**.

Пусть A, B, C – произвольные нечеткие множества, заданные на одном и том же универсуме.

Справедливы следующие утверждения:

-**коммутативность** операций объединения и пересечения нечетких множеств:

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A \quad (6.6)$$

-**ассоциативность** операции объединения и пересечения нечетких множеств:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (6.7)$$

-**дистрибутивность** операций $\cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$ относительно друг друга

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (6.8)$$

-**идемпотентность** операций $\cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A \quad (6.9)$$

-**поглощение** одного из нечетких множеств при операции объединения и пересечения нечетких множеств:

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A \quad (6.10)$$

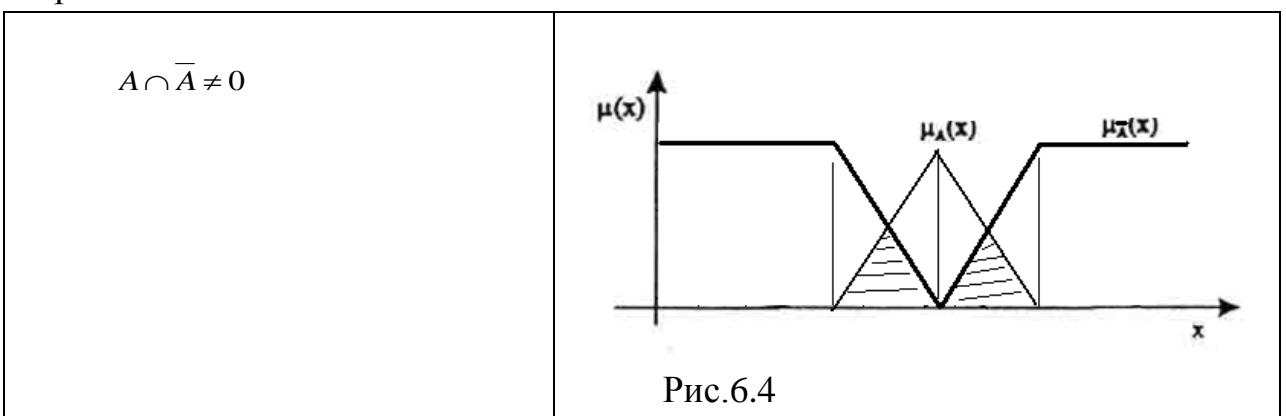
-**инволюция**

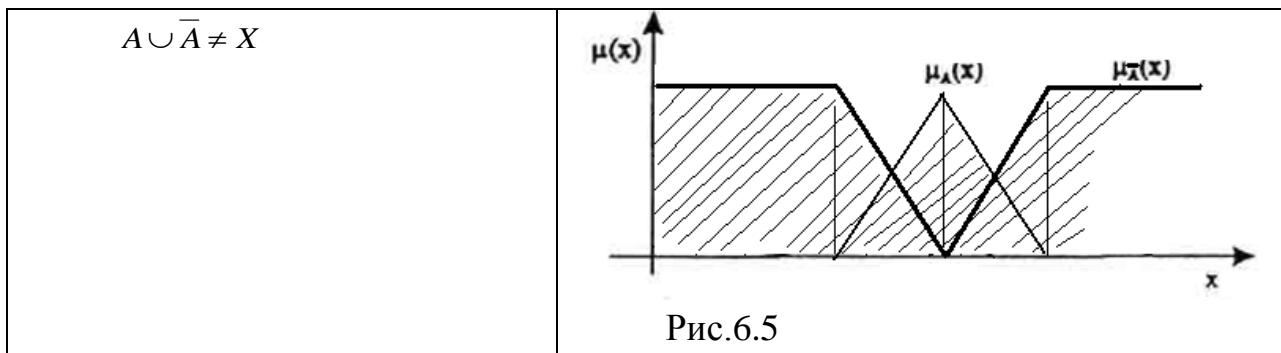
$$\overline{\overline{A}} = A \quad (6.11)$$

- **законы Моргана**

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (6.12)$$

Особенность рассматриваемых операций над четкими множествами состоит в том, что для них не выполняется закон исключенного третьего и закон тождества. А именно в общем случае оказываются справедливыми неравенства:





6.4. Нечеткие операторы. Альтернативные операции пересечения и объединения нечетких множеств

Операции **$\min(\circ)$** – **пересечения** и **$\max(\circ)$** – **объединения** являются единственными для определения пересечения и объединения нечетких множеств.

Введенные в рассмотрение теоретико-множественные операции не исчерпывают все возможные способы их задания, которые потенциально можно предложить в контексте общей теории нечетких множеств. При этом целесообразность применения альтернативных операций может быть обусловлена специфическими особенностями конкретных практических задач и стремлением повысить адекватность интерпретации используемых нечетких моделей на основе учета нюансов решаемой задачи.

Обобщением нечетких операций пересечения и объединения являются нечеткие операторы:

- *треугольная норма* (Т-норма);
 - *треугольная конорма* (S-конорма).

Нечеткие операторы T и S обозначают функции со специальными свойствами. Подробно эти свойства будут рассмотрены ниже. Здесь же отметим два общих важных свойства: T -норма и S -конорма это функции двух действительных переменных x и y , определенных на интервалах $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq y \leq 1$. Значения функций $T(x,y)$ и $S(x,y)$ также находятся в интервале от 0 до 1.

6.4.1. Треугольная норма (Т-норма)

Произвольная действительная функция от двух переменных

$$T:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \quad (6.13)$$

называется треугольной нормой, если она удовлетворяет следующим свойствам, называемым аксиомами треугольной нормы:

1. функция T является монотонной относительно обоих аргументов

$$T(a,c) \leq T(b,d), \quad \text{если } a \leq b, c \leq d$$

2. функция Т удовлетворяет условию коммутативности

$$T(x,y) = T(y,x)$$

4

3. функция Т удовлетворяет граничным условиям

$$T(x,0) = 0, \quad T(x,1) = x$$

4. функция Т удовлетворяет условию связности (ассоциативность)

$$T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c)).$$

6.4.2. Треугольная конорма (S -конорма)

Произвольная действительная функция от 2-х переменных

$$S:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \tag{6.14}$$

называется треугольной **S -конорма**, если она удовлетворяет следующим свойствам:

1. функция S является монотонной относительно обоих аргументов

$$S(a,c) \leq S(b,d), \quad \text{если } a \leq b, c \leq d$$

2. функция S удовлетворяет условию коммутативности

$$S(x,y) = S(y,x)$$

3. функция S удовлетворяет граничным условиям

$$S(x,0) = x, \quad S(x,1) = 1$$

4. функция Т удовлетворяет условию связности (ассоциативность)

$$S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c))$$

В таблице 6.1.а и 6.1.б __ показаны наиболее часто встречающиеся частные случаи Т- и S- норм.

Т-норма

№	T(a,b)	наименование
1	$\min(x, y)$	пересечение (мин-пересечение)
2	$x \cdot y$	алгебраическое произведение
3	$\begin{cases} 0, & \text{если } \max(x, y) < 1 \\ \min(x, y), & \text{если } \max(x, y) = 1 \end{cases}$	ограниченное произведение
4	$\max(0, x + y - 1)$	усиленная сумма

S-конорма

№	$S(a,b)$	наименование
1	$\max(x, y)$	объединение (макс-объединение)
2	$1 - (1 - x) \cdot (1 - y)$	алгебраическая сумма
3	$\begin{cases} 1, & \text{если } \min(x, y) > 0 \\ \max(x, y), & \text{если } \min(x, y) = 0 \end{cases}$	ограниченная сумма
4	$\min(1, x+y)$	усиленная разность

Рассмотренные функции Т- и S- норм называются триангулярными.
Названы они так потому, что они определяются только в треугольнике:

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

6.4.3. Алгебраическое произведение

В литературе помимо определения понятия «пересечения» (intersection) нечетких множеств также встречается определение понятия «алгебраическое произведение» (algebraic product) этих множеств.

Алгебраическим пересечением (или **алгебраическим произведением**) двух нечетких множеств А и В называется некоторое третье нечеткое множество $C = A \cdot B$, заданное на этом же универсуме X, функция принадлежности которого определяется по формуле:

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in X. \quad (6.15)$$

т.е. как результат обычного алгебраического произведения соответствующих значений функций принадлежности обозначается:

$$C = A \cdot B \quad (6.16)$$

Таким образом, алгебраическое произведение нечетких множеств А и В – это нечеткое множество $C = A \cdot B$, определенное как:

$$C = \left\{ \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \mid x \in X \right\}, \quad \forall x \in X, \quad (6.17)$$

Графическая интерпретация этой операции представлена на рис. 6.6.

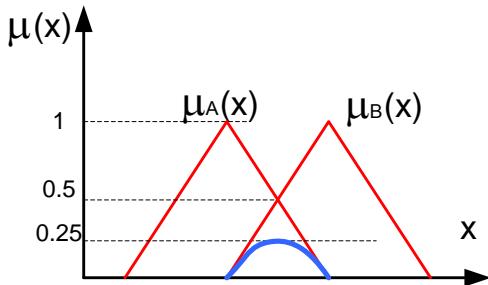


Рис. 6.6. Графическое представление операции алгебраического произведения.

6.4.4. Алгебраическое объединение (алгебраическая сумма)

Алгебраическим объединением (или алгебраической суммой) двух нечетких множеств A и B называется нечеткое множество $D = A \oplus B$, заданное на этом же универсуме X , функция принадлежности которого определяется по следующей формуле:

$$\mu_D(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) + \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in X \quad (6.18)$$

где справа от знака равенства использованы обычные арифметические операции (рис.16.7).

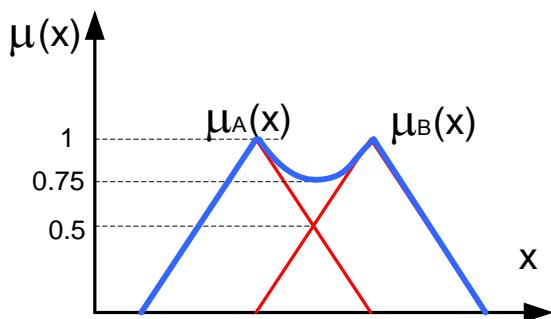
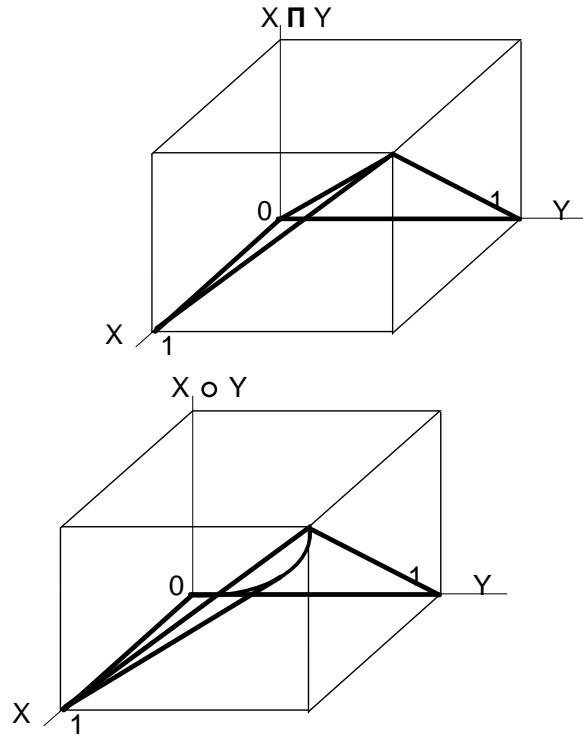


Рис.6.7.

Поскольку областью определения и областью значений треугольных норм и конорм является интервал $[0,1]$, все операции с нечеткими множествами могут быть рассмотрены графически с применением трехмерного куба.

Графическое представление \cap - пересечения и алгебраического произведения в трехмерном пространстве приведено на рис.6.8.



4

Рис.6.8.

Графическое представление операций \vee -объединения и алгебраического объединения (рис.6.9).

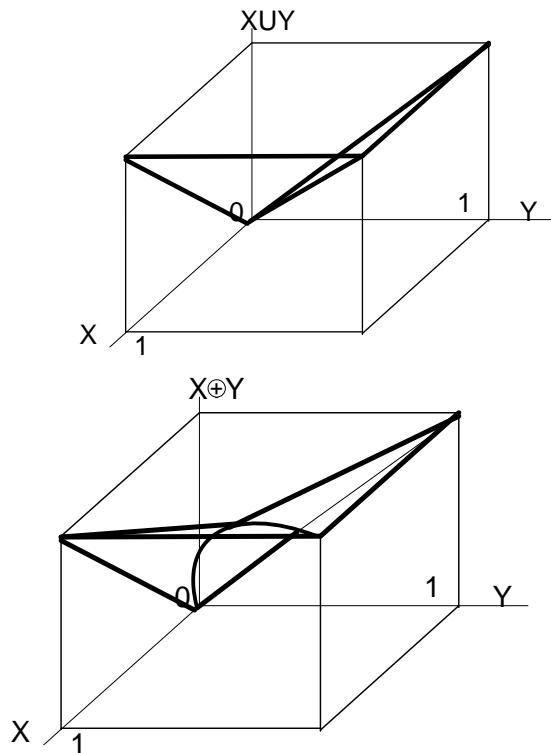


Рис.6.9.

6.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Среди дополнительных операций, которые находят применение при построении нечетких моделей сложных систем, следует отметить операции умножения нечеткого множества на число и возведение нечеткого множества в степень.

6.5.1. Разность нечетких множеств

Разностью двух нечетких множеств A и B называется некоторое третье нечеткое множество E , заданное на том же универсуме X , функция принадлежности которого определяется по формуле:

$$\mu_E(x) = \max(\mu_A(x) - \mu_B(x), 0), \quad \forall x \in X. \quad (6.19)$$

Где под знаком максимума используется обычная операция арифметической разности двух чисел. Операция разности двух чисел нечетких множеств по аналогии с обычными множествами обозначается знаком «\», т.е. :

$$E = A \setminus B.$$

Графически данную операцию иллюстрирует рис.6.10.

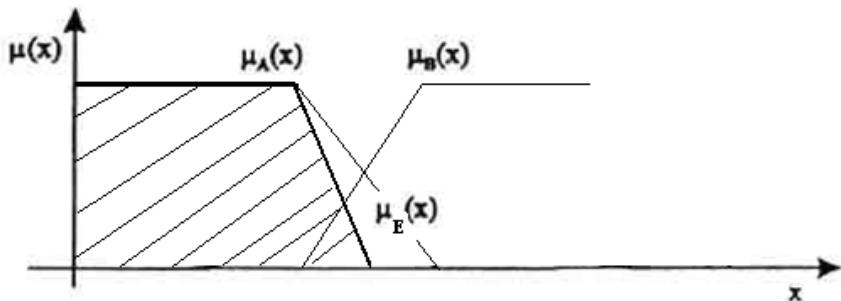


Рис.6.10

Как видно из формулы 3.19, функция принадлежности является неотрицательной (если разность функций принадлежности меньше нуля, то она обнуляется).

6.5.2. Симметричная разность нечетких множеств

Следует заметить, что операции разности двух нечетких множеств в отличии от операций \wedge и \vee не является коммутативной, т.е. в общем случае

$$A \setminus B \neq B \setminus A \quad (6.20)$$

Симметрическая разность двух нечетких множеств A и B (обозначается $A \ominus B$):

$$\mu_{A \ominus B}(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)| \quad \forall x \in X, \quad (6.21)$$

где в правой части выражения применяется операция модуля (абсолютного значения) числа.

Графически данную операцию иллюстрирует рис.6.11.

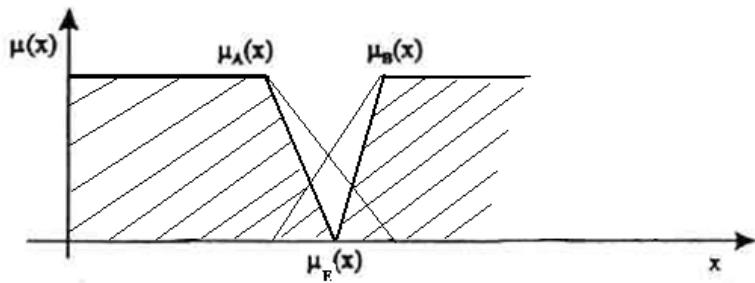


Рис.6.11.

При этом оказываются справедливым следующее утверждение:

$$A \ominus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \quad (6.22)$$

Т.е. симметрическая разность двух нечетких множеств представляет собой объединение двух разностей нечетких множеств A и B.

6.5.3. Умножение нечеткого множества на число

Пусть $A = \{x, \mu_A(x)\}$ – произвольное нечеткое множество, заданное на универсуме x ; a - положительное действительное число, такое, что:

$$a \cdot h_A \leq 1. \quad (6.23)$$

Результат операции умножения A на a определяется как нечеткое множество $B = \{x, \mu_B(x)\}$ заданное на том же универсуме x , функция принадлежности которого определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \mu_B(x) &= a \cdot \mu_A(x) \\ \mu_B(x) &= \mu_A^k(x) \end{aligned} \quad (6.24)$$

k - положительное действительное число.

Кроме перечисленных, имеются и другие операции, которые оказываются полезными при работе с лингвистическими переменными.

6.5.4. Операция концентрации

Операция **концентрации** (concentration) $CON(A)$ определяется как алгебраическое произведение нечеткого множества A на самого себя: $CON(A) = A^2$ т.е.

$$\mu_{CON(A)}(x) = \mu_A^2(x), \quad \forall x \in X \quad (6.25)$$

В результате применения этой операции к множеству A уменьшаются степени принадлежности элементов x этому множеству, причем если $\mu_A(x) \approx 1$, то это уменьшение относительно мало, а для элементов с малой степенью принадлежности - относительно велико. В естественном языке применение этой операции к тому или иному значению лингвистической переменной A соответствует использованию усиливающего терма "очень" (например, "очень высокий", "очень старый" и т.д.).

6.5.5. Операция растяжения

Операция **растяжения** (dilation) $DIL(A)$ определяется как $DIL(A)=A^{0,5}$, где

$$\mu_{DIL(A)}(x)=\sqrt{\mu_A(x)}, \quad \forall x \in X \quad 4 \quad (6.26)$$

Действие этой операции противоположно действию операции концентрации и соответствует неопределенному терму "довольно", выполняющему функцию ослабления следующего за ним (основного) терма A: "довольно высокий", "довольно старый" и т.п. (рис.6.12).

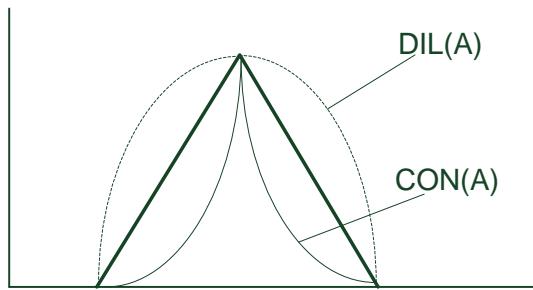


Рис.6.13.

Можно ввести и другие аналогичные по смыслу операции, позволяющие модифицировать значения лингвистической переменной, увеличивая таким образом их количество. Так, терм "более чем" можно определить следующим образом:

$$\text{"более чем"} = \{x, \mu_A(x)^{1,25} \mid x \in X\}, \quad (6.27)$$

составной терм "очень-очень":

$$\text{"очень - очень A"} = CON(CON(A)) = \{x, \mu_A^4(x) \mid x \in X\} \quad (6.28)$$

и т.д.

Рассмотрим применение указанных операций на следующем наглядном примере [10]. Пусть переменная x характеризует "рост человека", X - интервал $[0,200]$ (см). Тогда нечеткие подмножества, описываемые термами "высокий" и "низкий", можно представить с помощью функции принадлежности класса S (рис. 6.13):

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1-2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{если } x \geq c, \end{cases} \quad (6.29)$$

где $b=(a+c)/2$. В точке $x=b=(a+c)/2$ функция принадлежности класса S принимает значение равное 0,5.

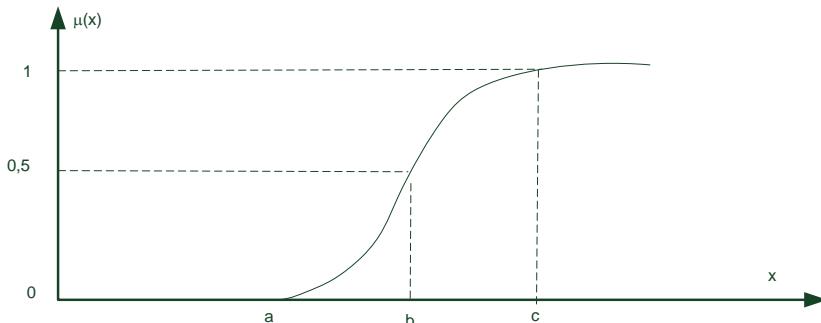


Рис.6.13.

Различают функции S – класса – левые и правые.

Правая функция S – класса обозначается как S_R и определяется зависимостью $S_R := S$.

Левая функция S – класса обозначается как S_L и определяется зависимостью:

$$S_L = 1 - S.$$

Нечеткие множества, описываемые термами «низкий» и «высокий» можно представить с помощью S -функций на интервале от 160 до 180 см.

$$S(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq 160 \\ 2\left(\frac{x-160}{170}\right)^2, & 160 \leq x \leq 170 \\ 1 - 2\left(\frac{x-160}{170}\right)^2, & 170 \leq x \leq 180 \\ 0, & x > 180 \end{cases}$$

1. Терм «низкий»

$$S_L = 1 - S(x, a, b, c)$$

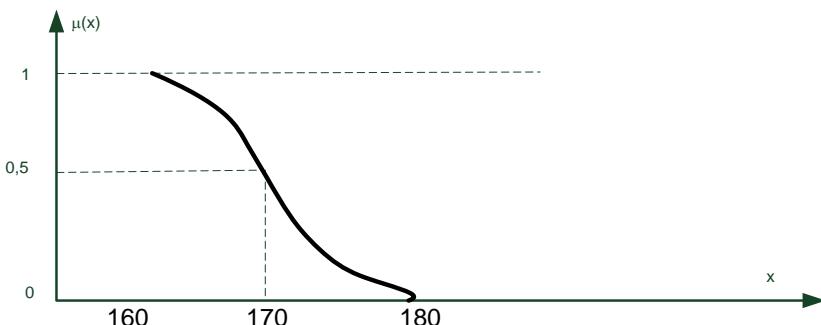


Рис.6.13.

2. Терм «высокий»

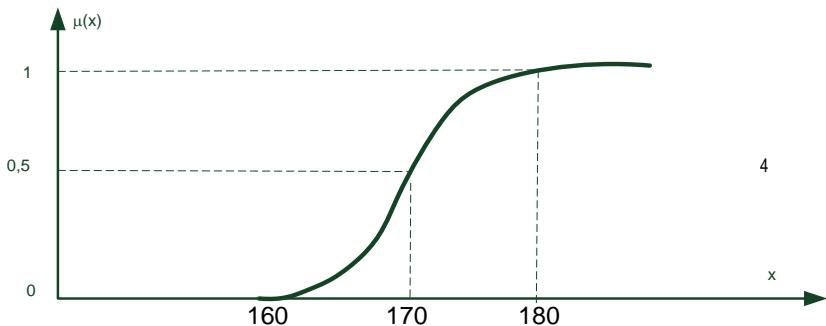


Рис.6.13.

$$S_R = S(x, a, b, c)$$

Концентрация:

$$\mu_{\text{очень низкий}} = S_L^2(x)$$

$$\mu_{\text{довольно низкий}} = \sqrt{S_L(x)}$$

$$\mu_{\text{очень высокий}} = S_R^2(x)$$

$$\mu_{\text{довольно высокий}} = \sqrt{S_R(x)}$$

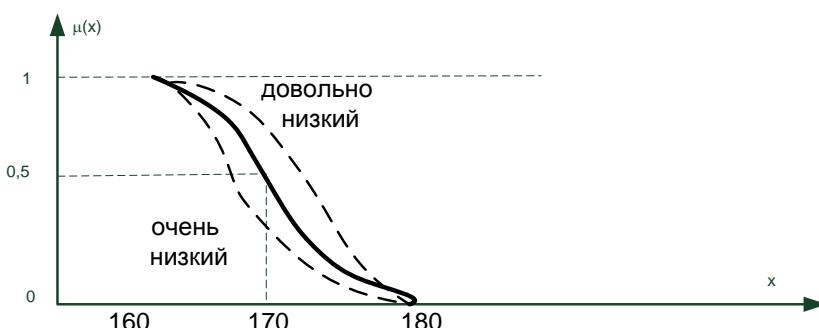


Рис.6.15.

Например, если конкретный человек имеет рост 175 см, т.е. $x=175$, то в соответствии с данными функциями принадлежности. Имеем:

$\mu_{\text{очень низкий}}$	$\mu_{\text{низкий}}$	$\mu_{\text{довольно низкий}}$	$\mu_{\text{довольно высокий}}$	$\mu_{\text{высокий}}$	$\mu_{\text{очень высокий}}$
0,08	0,09	0,3	0,82	0,91	0,83

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

7. РАБОТА С НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ: ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ ФОРМИРОВАНИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ В СРЕДЕ MATLAB

7.1. Функции принадлежности.

Инструментарий нечеткой логики в составе пакета Matlab содержит 11 встроенных типов функций принадлежности (ФП), формируемых на основе кусочно-линейных функций, распределения Гаусса, сигмоидной кривой, квадратических и кубических полиномиальных кривых. К наиболее простым ФП можно отнести треугольную и трапециевидную.

В среде *MatLab* реализовать команды для описания функций принадлежности (ФП) (см. табл. 7.1).

Таблица 7.1

Команда	Реализуемая функция
dsigmf	ФП в виде разности между двумя сигмоидами
evalmf	Вычисление значений производной ФП
evalmmf	Расчет степеней принадлежностей для нескольких ФП
gauss2mf	Двухсторонняя гауссовская ФП
gaussmf	Гауссовская ФП
gbellmf	Обобщенная колокообразная ФП
pimf	Π-подобная ФП
psigmf	Произведение двух сигмоидных ФП
sigmf	Сигмоидная ФП
smf	s- подобная ФП
trapmf	Трапециевидная ФП
trimf	Треугольная ФП
zmf	z-подобная ФП
fuzarith	Калькулятор для выполнения арифметических операций сложения, вычитания, умножения, и деления над нечеткими числами

Наименование треугольной ФП — trimf (triangle membership function). В параметрическом виде она представляет собой не что иное, как набор трех точек, образующих треугольник.

Описание функции:

$y = \text{trimf}(x, [a \ b \ c]),$

где вектор x — базовое множество, на котором определяется ФП.

Величины a и c задают основание треугольника, b — его вершину.

В аналитическом виде треугольная ФП может быть задана следующим образом:

$$f(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & x > c. \end{cases}$$

4

Общий вид треугольной и трапециевидной ФП представлены на рис.7.1.

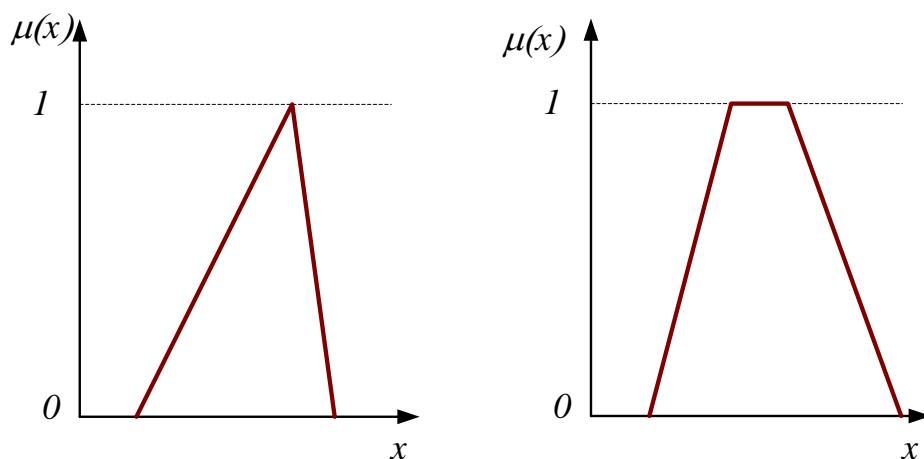


Рис. 7.1. Треугольная (а) и трапециевидная (б) функции принадлежности

Далее рассмотрим примеры использования различных ФП в системе.

Примеры представляют собой фрагменты программ и комментариев на языке пакета Matlab.

Пример П7.1. Программа использования ФП trimf.

$x=0:0.1:10;$ $y = trimf(x, [3 6 8]);$ $plot(x, y);$ $xlabel('trimf(x, P), P = [3 6 8]');$ <i>абсцисс</i>	<i>Задается базовое множество</i> <i>Определяется треугольная ФП</i> <i>Выводится график функции</i> <i>Подписывается график под осью</i>
---	--

Результат работы программы П7.1 представлен на рис.7.2.

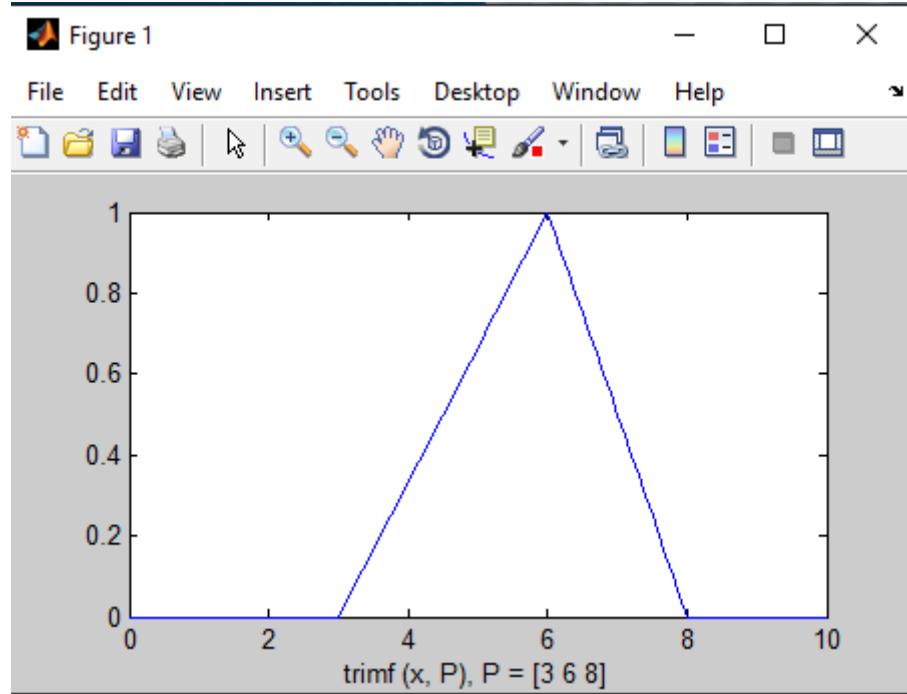


Рис.7.2. График треугольной ФП

Трапециевидная ФП — `trapmf` (trapezoid membership function) — отличается от предыдущей функции лишь тем, что имеет верхнее основание.

Описание функции:

$$y = \text{trapmf}(x, [a \ b \ c \ d]),$$

где параметры a и d — нижнее основание трапеции; b и c — верхнее основание трапеции (рис. П1, б).

Аналитическая запись трапециевидной функции имеет вид:

$$f(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & b < x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c < x \leq d, \\ 0, & x > d. \end{cases}$$

Одно из основных достоинств треугольных и трапециевидных ФП — их простота. На основе функции распределения Гаусса можно построить ФП двух видов: простую функцию принадлежности Гаусса и двухстороннюю,

образованную с помощью различных функций распределения Гаусса. Первая из них обозначается `gaussmf` а вторая — `gauss2mf`

4

Описание функции:

$$y = \text{gaussmf}(x, [\sigma, c]).$$

Симметричная функция Гаусса зависит от двух параметров σ и c (рис. П.2, а):

$$f(x, \sigma, c) = e^{\frac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}}.$$

Пример П7.2. Программа использования ФП gaussmf.

$X = 0 : 0,1 : 10;$

$Y = \text{gaussmf}(x, [2 5]);$

$\text{plot}(x, y)$

Результат работы программы П7.2 представлен на рис.7.3.

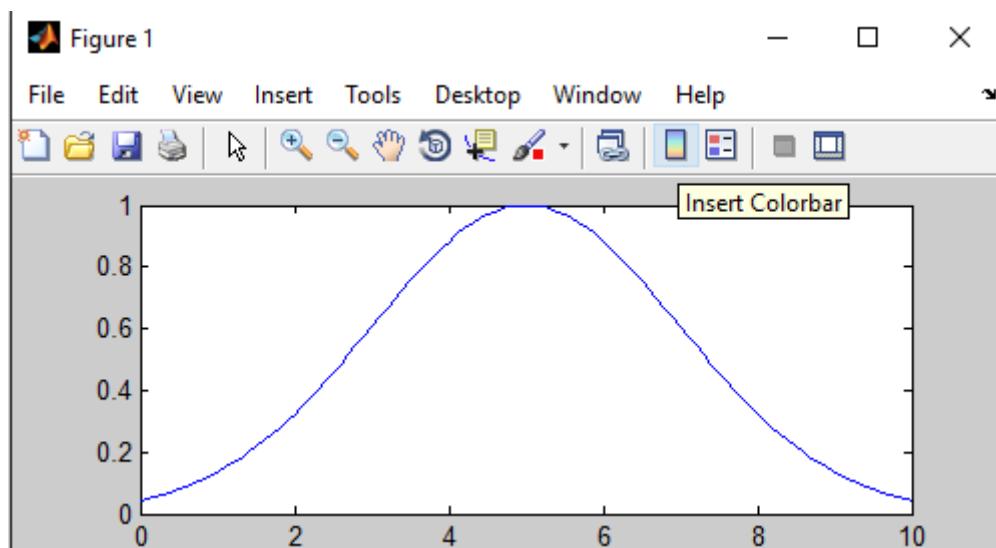


Рис.7.3. График гауссовой ФП

Пример П7.3. Программа использования ФП gauss2mf.

$x = (0 : 0,1 : 10)';$

$y1 = \text{gauss2mf}(x, [2 4 18]);$

$y2 = \text{gauss2mf}(x, [2517]);$

$y3 = \text{gauss2mf}(x, [2 6 1 6]);$

```

y4      =      gauss2mf(x, [2 7 1 5]);
y5      =      gauss2mf(x, [2 8 14]);
plot (x, [y1 y2 y3 y4 y5]);

```

Символ «'» в строке определения базового множества x показывает транспонированность базового множества.

Результат работы программы П7.3 представлен на рис.7.4.

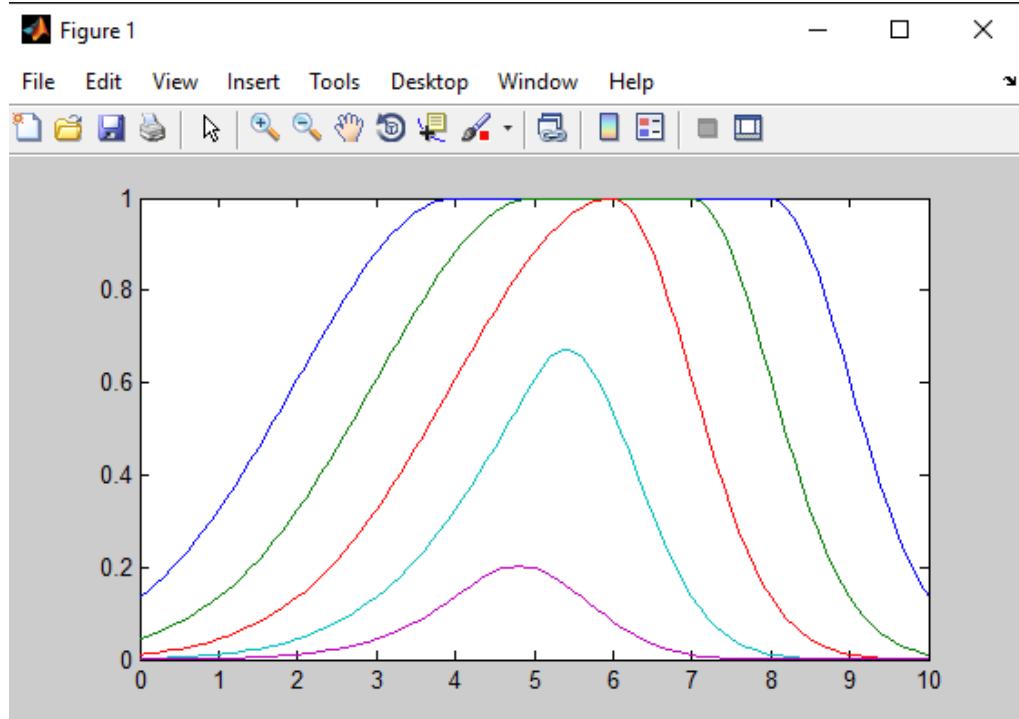


Рис.7.4. График гауссовой ФП

Следующей функцией, которая позволяет представлять нечеткие субъективные предпочтения, является ФП «обобщенный колокол» и обозначается $gbellmf$ (generalized bell shape membership function). Ее отличие от рассмотренных ранее ФП заключается в добавлении третьего параметра, что позволяет осуществлять плавный переход между нечеткими множествами.

Описание функции:

$$y = gbellmf(x, [a b c]).$$

Функция «обобщенный колокол» зависит от трех параметров и имеет следующую аналитическую запись:

$$f(x, a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}} ,$$

где с определяет расположение центра ФП; а и б оказывают влияние на форму кривой.

Пример П7.4. Программа использования gbellmf-функция принадлежности «обобщенный колокол

```
x=0:0.1:10;
y = gbellmf(x, [2 4 6]);
plot (x, y);
xlabel ('gbellmf(x, P), P = [2 4 6]');
```

Результат работы программы П7.4 представлен на рис.7.5.

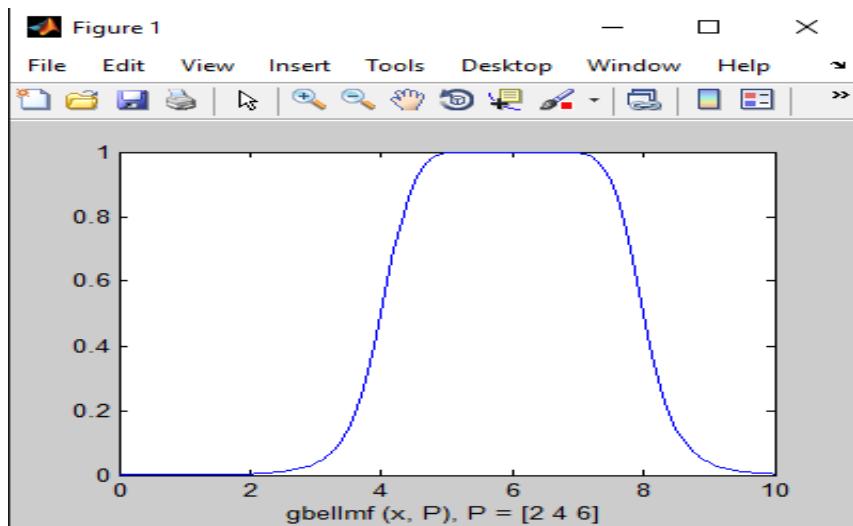


Рис.7.5.

Пример П5. Программа использования сигмоидных функций.

```
x = 0 : 0,1 : 10; — определяется базовое множество
subplot (1,3,1); — формируется матрица графиков (3x1)
— первый элемент — текущий
y=sigmf(x,[2 4]);
plot (x, y); — выводится график в первый элемент матрицы
xlabel('sigmf, P = [2 4]')
subplot (1,3,2); — выбирается второй текущий элемент
y = dsigmf (x, [5 2 5 7]);
```

```

plot (x, y) ; — выводится график во второй элемент
матрицы
xlabel ('dsigmf, P = [5 2 5 7]')
subplot (1,3,3); — выбирается третий текущий элемент
y = psigmf (x, [2 3 -5 8]);
plot (x, y) ; — выводится график в третий элемент матрицы
xlabel ('psigmf, P = [2 3 -5 8]');

```

Результат работы программы П7.5 представлен на рис.7.6.

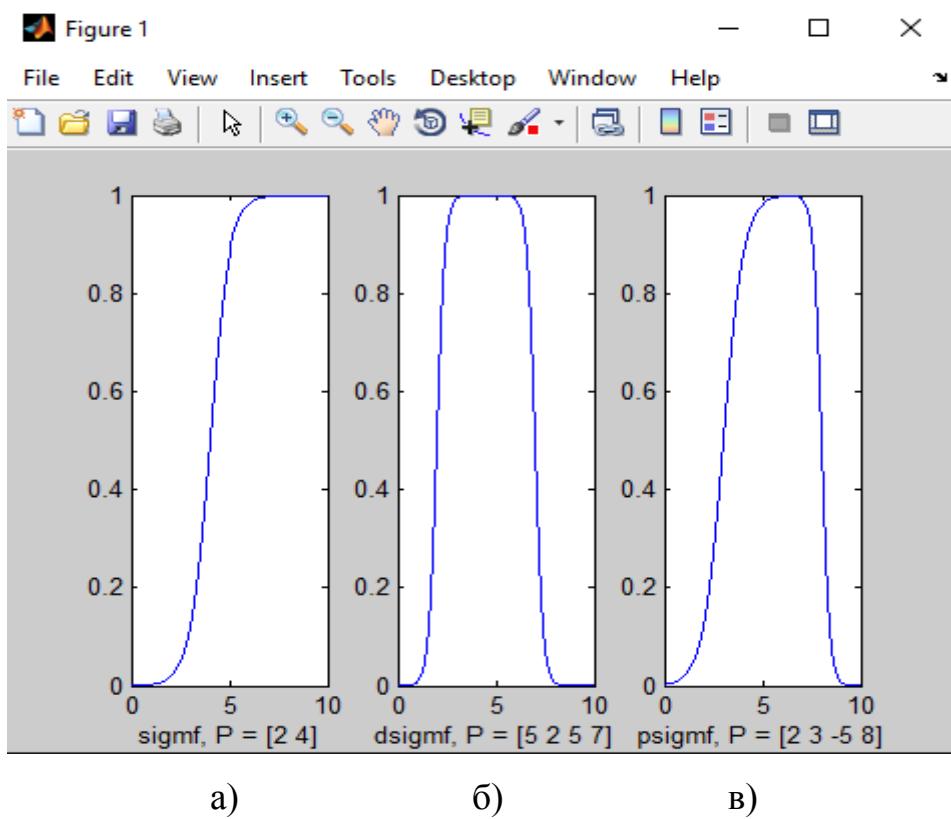


Рис.7.6.

Инструментарий нечеткой логики (fuzzy logic toolbox) в составе *Matlab* предоставляет возможность формирования ФП на основе полиномиальных кривых. Соответствующие функции называются Z-функции (*zmf*), PI-функции (*pimf*) и S-функции (*smf*). Функция *zmf* представляет собой асимметричную полиномиальную кривую, открытую слева" (рис.7.6, *a*), функция *smf* — зеркальное отображение функции *zmf*(рис. 7.6, *б*). Соответственно функция *pimf* равна нулю в правом и левом пределах и

принимает значение, равное единице, в середине некоторого отрезка (рис. 7.6, ε).

Описание функции:

$$y = zmf(x, [a \ b]) .$$

4

Параметры a и b определяют экстремальные значения кривой (рис. 7.6, а).

Описание функции:

$$y = pimf(x, [a \ b \ c \ d]) .$$

Параметры a и d задают переход функции в нулевое значение, а параметры b и c — в единичное (рис. 7.6, б).

Описание функции:

$$y = smf(x, [a \ b]) .$$

Параметры a и b определяют экстремальные значения кривой (рис. 7.6, в).

Пример П7.6. Программа использования полиномиальных кривых.

```
x = 0 :0,1: 10;
subplot(1,3,1);
y = zmf(x, [3 7]);
plot (x, y) ;
xlabel('zmf, P=[3 7]');
subplot(1, 3, 2) ;
y = pimf(x, [1 4 5 10]);
plot (x, y);
xlabel ('pimf, P = [1 4 5 10]');
subplot(1, 3, 3) ;
y = smf(x, [1 8]);
plot (x, y);
xlabel('smf, P=[1 8]').
```

Результат работы программы П7.6 представлен на рис.7.7.

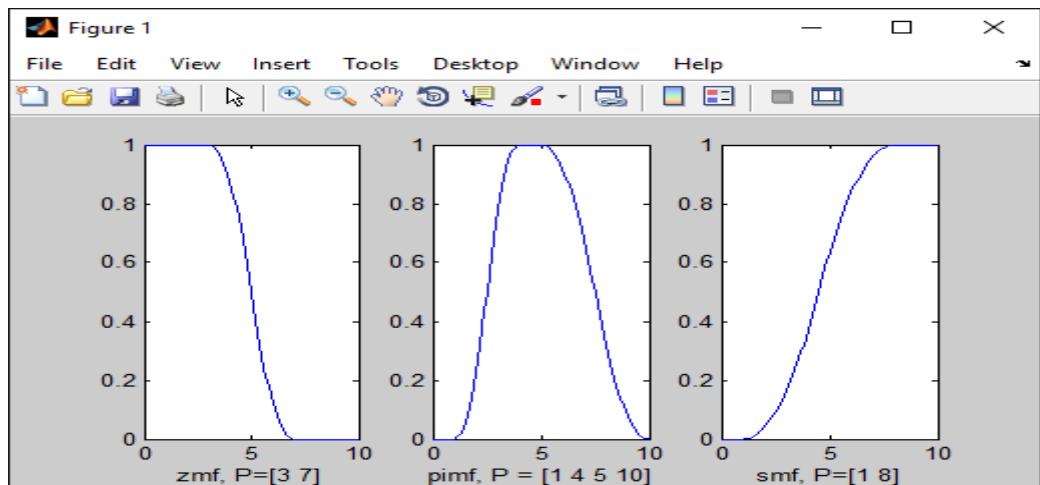


Рис.7.7.

Помимо рассмотренных выше функций, позволяющих представлять нечеткие множества, в Matlab имеется возможность формировать собственные ФП или модифицировать встроенные.

4.2. Операции с нечеткими множествами

Выделяют три основные логические операции с нечеткими множествами: конъюнкцию, дизъюнкцию и логическое отрицание. В среде MatLab существует возможность определять конъюнктивные и дизъюнктивные операторы с точки зрения минимаксной и вероятностной интерпретаций.

Рассмотрим минимаксную интерпретацию логических операторов, в которой конъюнктивный оператор представляет нахождение минимума — \min (рис. 1.8, а), а дизъюнктивный — максимума — \max (рис. 7.8, б).

Описание конъюнктивной функции:

$$y = \min ([y_1 ; y_2]) .$$

Описание дизъюнктивной функции:

$$y = \max ([y_1; y_2]) .$$

Параметры y_1 и y_2 представляют собой исходные ФП. Функция \min работает со списком ФП. В MatLab список оформляется квадратными скобками, а элементы списка разделяются точкой с запятой.

4

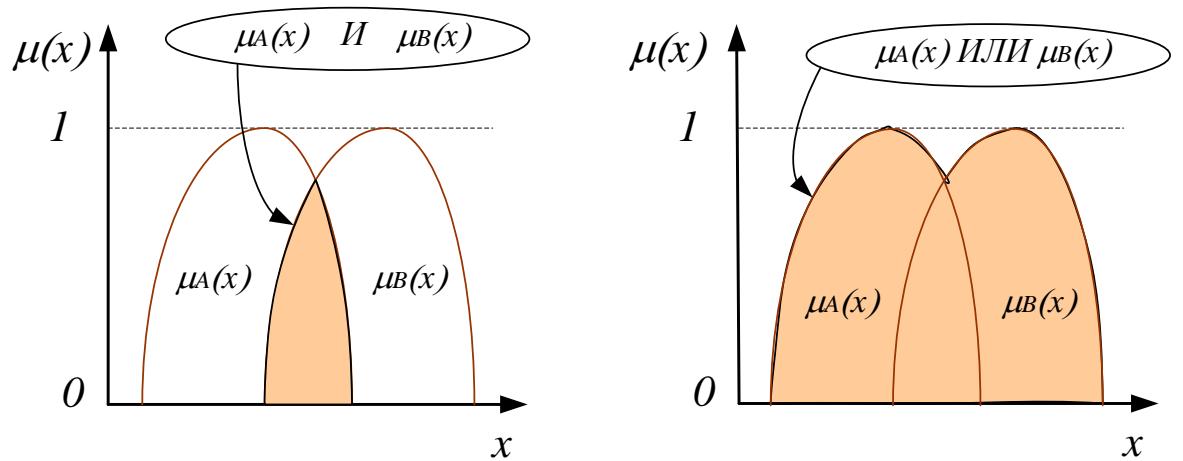


Рис. 7.8. Пересечение (а) и объединение (б) нечетких множеств
(минимаксная интерпретация)

Пример П7.7. Программа использования операций \min и \max .

```

 $x = 0 : 0,1 : 10;$ 
 $subplot(1, 2, 1);$ 
 $y1 = gaussmf(x, [3 5]);$ 
 $y2 = gaussmf(x, [3,7]);$ 
 $y3 = \min([y1; y2]);$ 
 $plot(x, [y1; y2])$  — построение исходных ФП пунктирной линией
 $hold on;$  — включение механизма добавления кривой в текущий
график
 $plot(x, y3);$ 
 $hold off;$  — выключение механизма добавления кривой в
текущий график;
 $subplot(1, 2, 2);$ 
 $y4 = \max([y1; y2]);$ 
 $plot(x, [y1; y2], ':');$ 
 $hold on;$ 
 $plot(x, y4);$ 
 $hold off.$ 

```

Результат работы программы П7.7 представлен на рис.7.9.

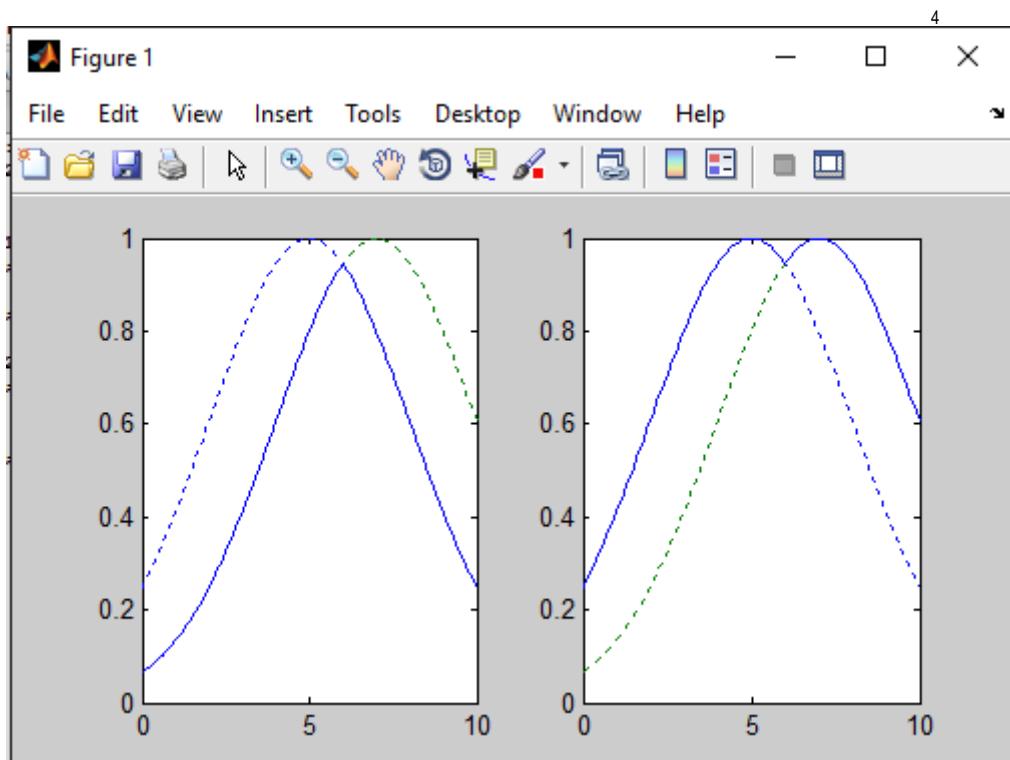


Рис.7.9.

Пунктирной линией на графиках изображены исходные ФП, а сплошной линией — результат действия логических операторов.

Минимаксная интерпретация является наиболее распространенной при построении нечетких систем. Тем не менее на практике довольно часто используется альтернативная вероятностная интерпретация конъюнктивных и дизъюнктивных операторов. *Matlab* содержит соответствующие функции.

В рамках данной интерпретации конъюнктивный оператор представляет собой оператор вычисления алгебраического произведения — *prod*. (рис.7.10, *a*), а дизъюнктивный оператор — оператор вычисления алгебраической суммы — *probior* (рис.7.10, *б*).

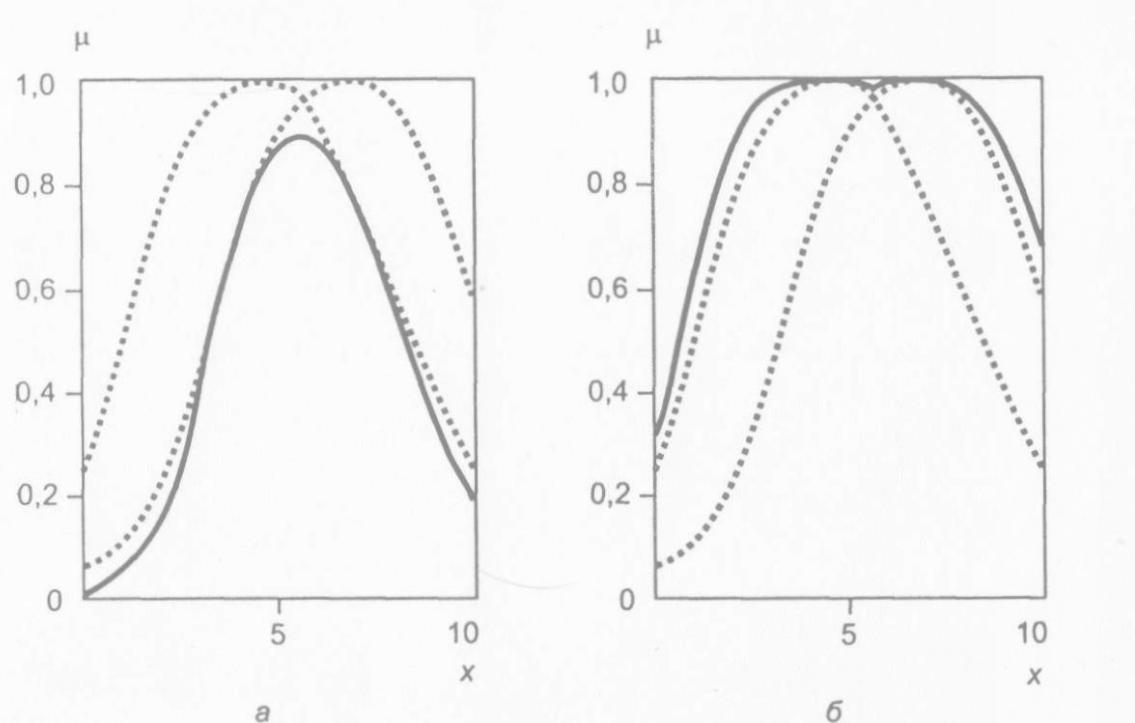


Рис. 7.10. Пересечение (а) и объединение (б) нечетких множеств
(вероятностная интерпретация)

Описание функции:

$y = prod ([y_1 ; y_2]).$

Описание функции:

$y = probor ([y_1; y_2]).$

Параметры y_1 и y_2 представляют собой исходные ФП.

Пример П7.8. Программа использования вероятностных операторов конъюнкции и дизъюнкции.

```

x = 0 : 0.1 : 10;
subplot(1, 2, 1);
y1 = gaussmf(x, [3 5]);
y2 = gaussmf(x, [3,7]);
y3 = prod ([y1; y2]);
plot(x, [y1; y2],':');
hold on;
plot(x, y3);
hold off;
subplot(1, 2, 2);

```

```

y4 = probor ([y1; y2]);
plot (x, [y1; y2], ':');
hold on;
plot(x, y4);
hold off.

```

4

Результат работы программы П7.8 представлен на рис.7.11.

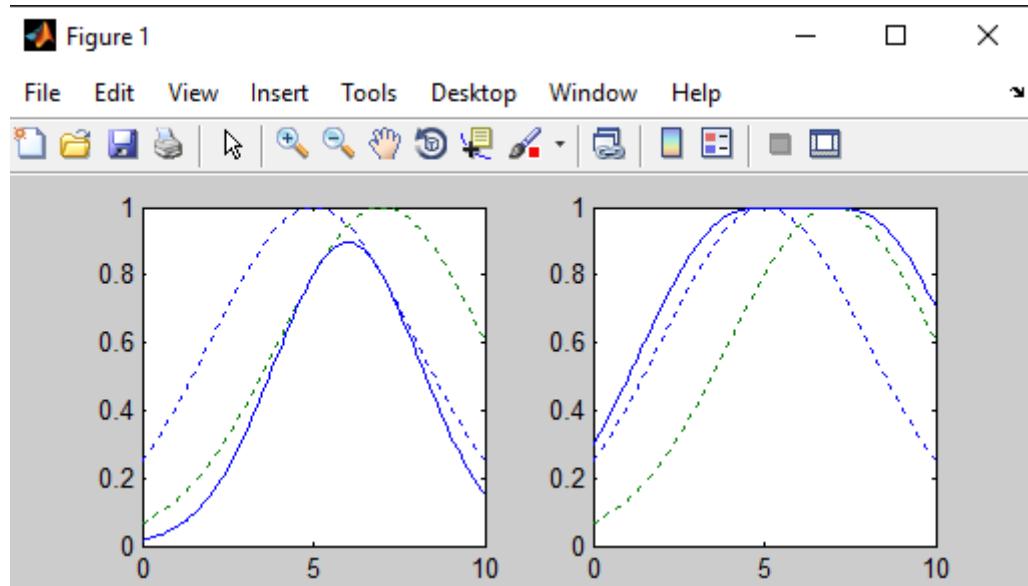


Рис.7.11.

Дополнение нечеткого множества есть не что иное, как математическое представление вербального выражения «НЕ A », где A — нечеткое множество, описывающее некоторое размытое суждение.

Описание функции дополнения:

$$y = 1 - y^*,$$

где y^* — исходная ФП.

Пример П7.9. Программа использования операции дополнения.

```

x = 0 : 0,1 : 10;
y1 = gaussmf(x, [3 5]);
y = 1 - y1;
plot (x, y1, ': ');
hold on;
plot(x, y);

```

hold off;

Результат работы программы П7.9 представлен на рис.7.12.

4

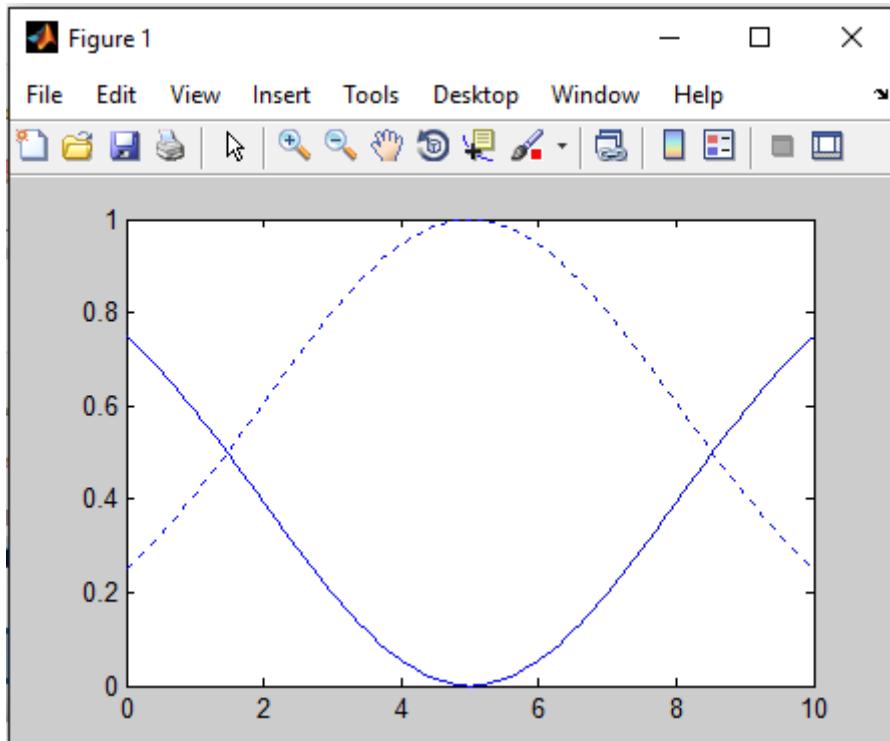


Рис.7.12.

С помощью функции *evalmf* можно оценить степень принадлежности элементов заданного входного вектора к нечеткому множеству. Функция имеет формат:

$$y = evalmf(x, \text{params}, \text{type})$$

где *x* - вектор, для координат которого необходимо рассчитать степени принадлежности; *params* - вектор параметров функции принадлежности, порядок задания которых определяется ее типом; *type* - тип функции принадлежности, который может быть задан именем функции или ее кодом:

1 - ‘*trimf*'; 2 - ‘*trapmf*'; 3 - ‘*gaussmf*'; 4 - ‘*gauss2mf*'; 5 - ‘*sigmf*'; 6 - ‘*dsigmf*';

7 - ‘*psigmf*'; 8 - ‘*gbellmf*'; 9 - ‘*smf*'; 10 - ‘*zmf*'; 11 - ‘*pimf*'.

При задании другого типа функции принадлежности предполагается, что она определена пользователем и задана соответствующим m-файлом.

4

Рассмотрим пример

Пример П7.10.

$x = [3 \ 4 \ 5];$

$y = evalmf(x, [2 \ 5 \ 8 \ 9], 'pimf')$

$y = 0.2222 \ 0.7778 \ 1.0000$

Вычислить значения нескольких функции принадлежности НМ, заданных на одном и том же универсальном множестве, можно с помощью функции:

$y = evalmf(x, params, type)$

где x - вектор, для координат которого необходимо рассчитать степени принадлежности; $params$ - матрица параметров функции принадлежности.

Первая строка матрицы определяет параметры первой функции принадлежности, вторая строка - параметры второй функции принадлежности и т. д.; $types$ - матрица типов функции принадлежности (см. описание команды *evalmf*).

Рассмотрим примеры выполнения операций над НМ, представленными на рис.7.13 в *MatLab*.

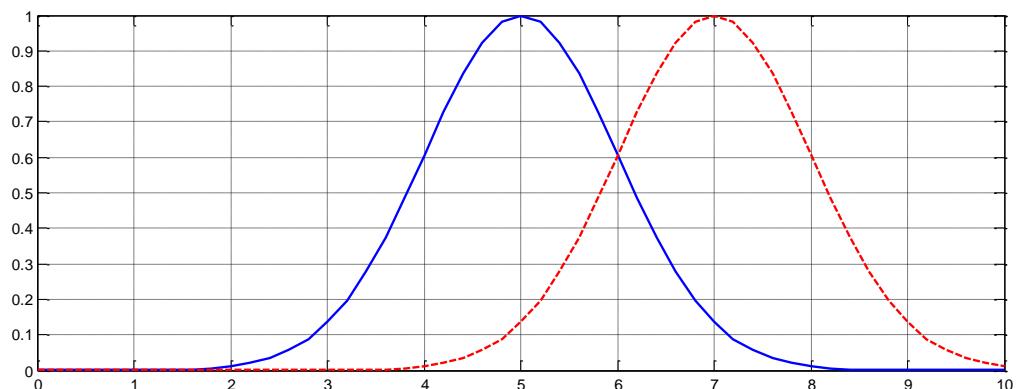


Рис. 7.13 Исходные нечеткие множества

Пусть дано базовое множество $X = [0,10]$:

$$x = (0:0.2:10);$$

и заданы два НМ с помощью функций принадлежности (рис. 7.14):⁴

Пример П7.11.

$$A = \text{gaussmf}(x, [1\ 5]);$$

$$B = \text{gaussmf}(x, [1\ 7]);$$

$$C = \max([A,B])$$

plot(x,C), grid on

На рис. 7.14 и 7.15 показано выполнение операций объединения и пересечения при использовании соответственно операторов *max* и *min*.

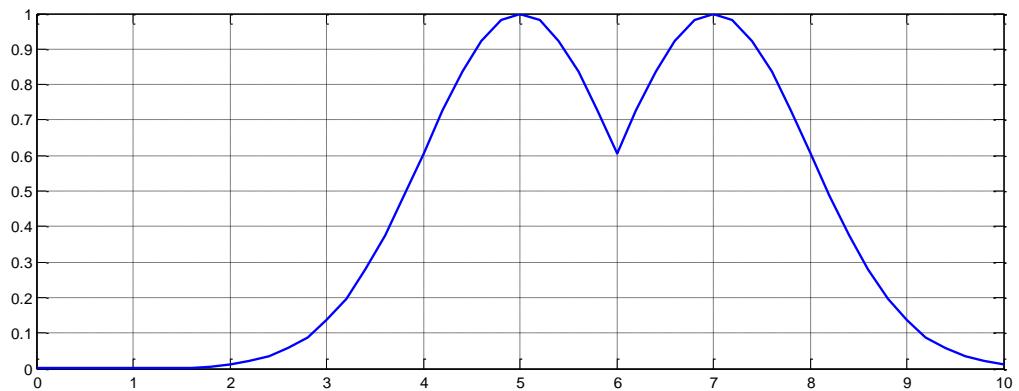


Рис. 7.14. Объединение нечетких множеств (операция *max*)

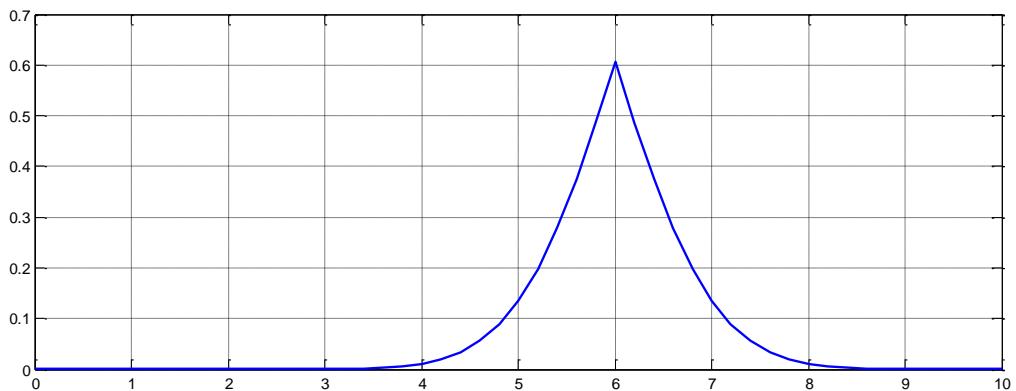


Рис. 7.15. Пересечение нечетких множеств (операция *min*)

Для выполнения арифметических операций сложения, вычитания, умножения и деления над нечеткими числами НМ в составе *MatLab* имеется калькулятор *fuzarith*. Для его использования необходимо задать строку вида:
4

$c = fuzarith(x,a,b,operator),$

где x - универсальное множество, на котором заданы нечеткие числа; a - вектор степеней принадлежности элементов универсального множества первому НМ; b - вектор степеней принадлежности элементов универсального множества второму НМ; $operator$ - одна из допустимых арифметических операций: ‘sum.’ - сложение; ‘sab’ - вычитание; ‘prod’ - умножение; ‘div’ - деление.

Выходной переменной функции *fuzarith* является вектор степеней принадлежности элементов универсального множества x результату выполнения нечеткой арифметической операции. Размерности векторов x , a , b и c должны быть одинаковыми.

Нечеткие арифметические операции выполняются по следующему алгоритму:

- преобразование нечетких чисел-операндов в α -уровневые нечеткие множества;
- выполнения арифметической операции для каждого α -уровня в соответствии с принципом расширения;
- преобразование результирующего нечеткого числа из α -уровня представления к традиционному виду.

Количество α -уровней может выбираться пользователем.

Рассмотрим пример использования калькулятор *fuzarith*.

Пример П7.12.

```
x = (-20:1:20) %область определения  
A = trapmf(x,[-10 -2 1 8]);%описание первого слагаемого  
B = gaussmf(x,[2 5]); %описание второго слагаемого  
C = fuzarith(x,A,B, 'sum');%нечеткая сумма  
plot(x,A,x,B,x,C)
```

На рисунке 1.16 показан результат арифметического сложения НМ.

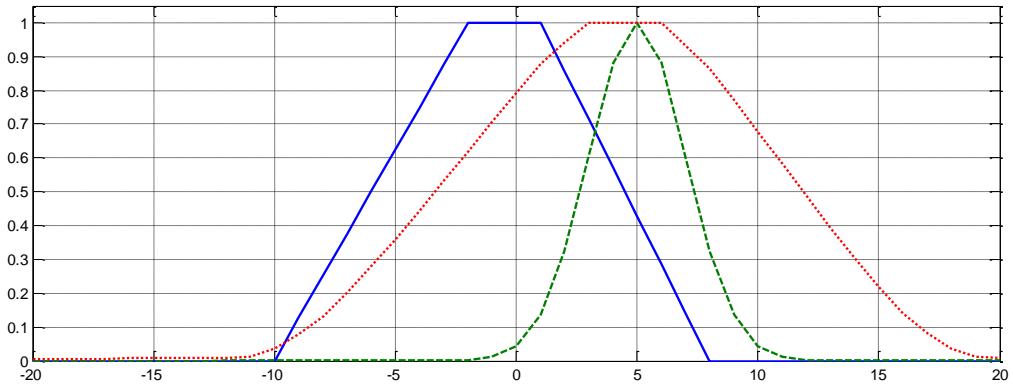


Рис. 7.16 Результат арифметического сложения НМ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

В среде MatLab выполнить формирование и построение графиков всех рассмотренных выше функций принадлежностей, а также моделирование выполнения основных операций над нечеткими множествами.

Контрольные вопросы

1. Что такое нечеткое множество и каково его основное отличие от обычного (четкого) множества?
2. Что такое функция принадлежности?
3. Какие конъюнктивные и дизъюнктивные операторы вы знаете?
4. Что такое ядро нечеткого множества?
5. Что такое альфа-срез?
6. Запишите функцию принадлежности операции пересечение?
7. Запишите функцию принадлежности операции объединение?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

8. НЕЧЕТКИЕ ОТНОШЕНИЯ И НЕЧЕТКАЯ КОМПОЗИЦИЯ

Ранее были рассмотрены основные операции над одномерными НМ. Могут быть также использованы многомерные НМ. Они получаются при рассмотрении нечетких отношений.

Нечеткое отношение R двух четких множеств X и Y представляет собой нечеткое подмножество декартова произведения X и Y .

$$R = \{\mu_R(x, y) / (x, y); x \in X, y \in Y\}.$$

Для n множеств нечеткое отношение описывается формулой:

$$R = \{\mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n) / (x_1, x_2, \dots, x_n); x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}.$$

Для непрерывных областей определения часто используется запись:

$$R = \int_{X \times Y} \mu_R(x, y) / (x, y).$$

Функция принадлежности здесь представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве. Если в нечетком отношении участвуют более двух множеств, то функция принадлежности превращается в гиперповерхность.

Пример 8.1.

Рассмотрим пример:

$$x, y \in R^1; c = \text{const}; \\ R(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq c^2; \\ \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{0.5}\right), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Это отношение описывает «нечеткий круг» с размытыми границами.

Для дискретных областей определения:

$$R = \sum_X \sum_Y \mu_R(x, y) / (x, y).$$

Рассмотрим пример. Пусть имеется два множества: X - «Автомобили», Y - «Цена (у.е.)».

$$X = \{\text{Мерседес, Лада, Бентли}\},$$

$$Y = \{6000, 10000, 30000, 100000, 500000, 2000000\}.$$

С помощью указания степени принадлежности (значение в кружке на рис.8.1) можно описать на $X \times Y$ отношение R - «Приемлемая стоимость».

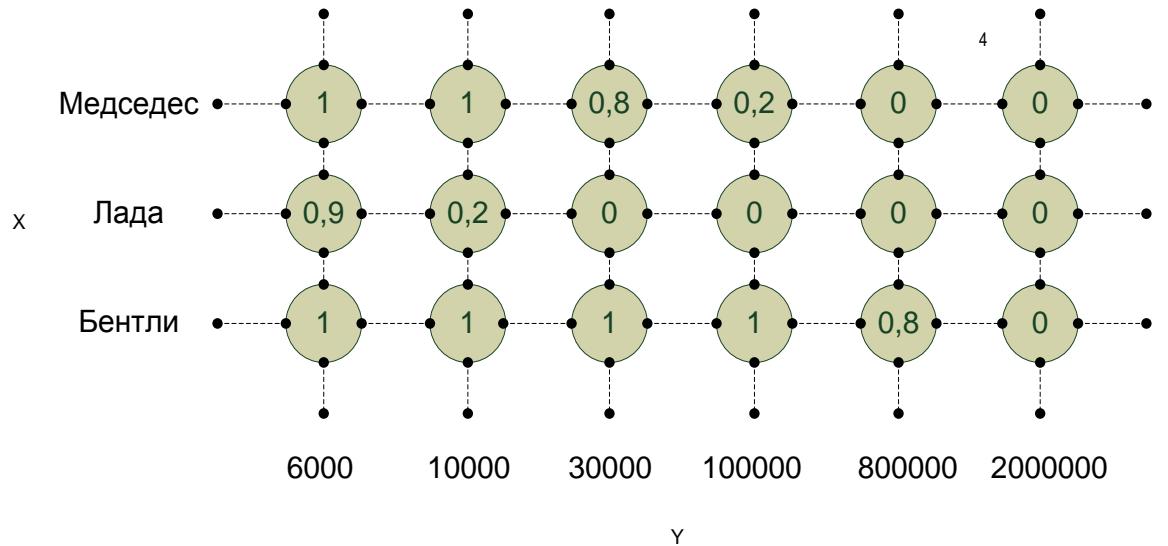


Рис. 8.1. Пример описания нечеткого отношения «Приемлемая цена»

Как показывает рис. 8.1, нечеткое отношение удобно описывать матрицей:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Трехмерное нечеткое отношение можно получить, например, если рассматривать три нечеткие множества: : X - «Автомобили», Y - «Цена (у.е.)», Z - «Год выпуска». Соответственно можно более точно построить нечеткое отношение R - «Приемлемая цена»:

$$R = 1/(Лада, 3000, 2005) + 0.7/(Бентли, 400000, 1999) + \dots$$

Нечеткое отношение является НМ, поэтому для него справедливы все понятия и операции, описанные для обычных НМ.

Однако есть и специфические операции, вводимые только для нечетких отношений. К ним относятся **операции проекции, цилиндрического расширения, а также операция композиции**.

Если задано бинарное нечеткое отношение

$$R: (x, y) \rightarrow [0,1],$$

то операция проекции может быть записана в виде

$$B = \text{proj}(R; Y) = \int_Y \sup_y \mu_R(x, y) / y .$$

Пример для непрерывной области определения показан на рис. 8.2.
Очевидно, бинарное нечеткое отношение может иметь две проекции.

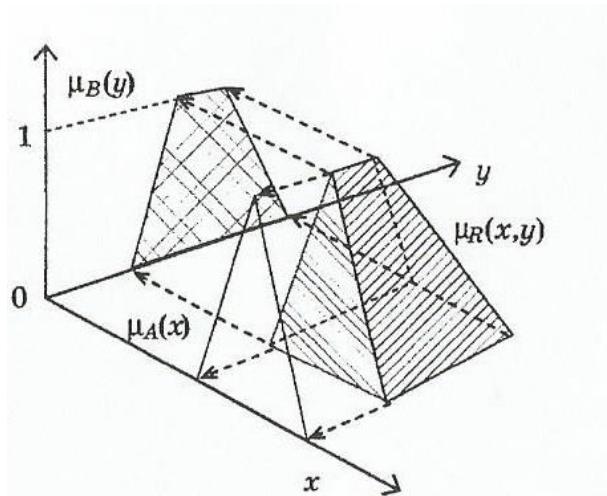


Рис. 8.2. Проекция бинарного нечеткого отношения

Первой проекцией бинарного нечеткого отношения (проекцией на X) называется НМ, заданное на X с функцией принадлежности:

$$\mu_{R1}(x) = \bigcup_y \mu_R(x, y).$$

Аналогично, второй проекцией (проекцией на Y) называется НМ, заданное на Y с функцией принадлежности:

$$\mu_{R2}(y) = \bigcup_x \mu_R(x, y).$$

Глобальной проекцией бинарного нечеткого отношения R называется величина:

$$h(R) = \bigcup_x \mu_{R1}(x) = \bigcup_y \mu_{R2}(y) .$$

Если $h(R)=1$, то отношение является нормальным.

Пример для дискретных множеств X и Y показан на рис. 8.3.

	Y1	Y2	Y3	Y4	
X1	0.2	0.4	0	0.9	
X2	0.6	0.3	1	0.1	
X3	0.2	0.8	0.7	0	
					4
					=R1

R2=	0.6	0.8	1	0.9			=h(R)
-----	-----	-----	---	-----	--	--	-------

Рис. 8.3. Проекции бинарного нечеткого отношения

Цилиндрическое расширение нечеткого отношения R является обратной операцией по отношению к проекции, и описывается формулой

$$R = cext(A; X \times Y) = \int_{X \times Y} \mu_A(x)/(x, y).$$

Выполнение цилиндрической проекции иллюстрирует рис. 8.4.

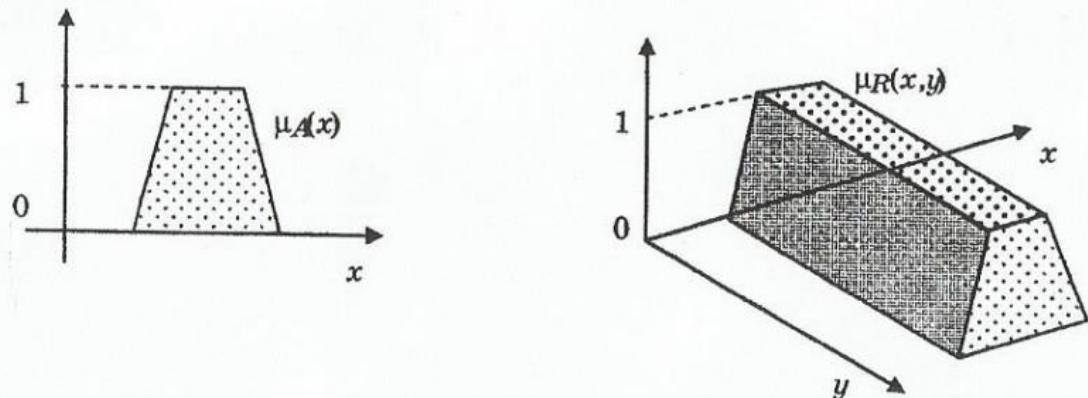


Рис.8.4. Цилиндрическое расширение нечеткого множества

Рассмотрим пример для дискретной области определения.

Пусть даны два базовые множества:

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

И дано НМ А на X

$$A = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.2}{x_3},$$

Рис. 8.5. иллюстрирует операцию цилиндрического расширения.

A=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>X1</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>X2</td><td>0.6</td></tr> <tr><td>X3</td><td>0.2</td></tr> </table>	X1	0.2	X2	0.6	X3	0.2	cext(A,X*Y)=	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>Y1</th><th>Y2</th><th>Y3</th><th>Y4</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>X1</td><td>0.2</td><td>0.2</td><td>0.2</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>X2</td><td>0.6</td><td>0.6</td><td>0.6</td><td>0.6</td></tr> <tr><td>X3</td><td>0.2</td><td>0.2</td><td>0.2</td><td>0.2</td></tr> </tbody> </table>		Y1	Y2	Y3	Y4	X1	0.2	0.2	0.2	0.2	X2	0.6	0.6	0.6	0.6	X3	0.2	0.2	0.2	0.2
X1	0.2																												
X2	0.6																												
X3	0.2																												
	Y1	Y2	Y3	Y4																									
X1	0.2	0.2	0.2	0.2																									
X2	0.6	0.6	0.6	0.6																									
X3	0.2	0.2	0.2	0.2																									

Рис. 8.5. Цилиндрическое расширение при дискретной области определения

На основании операций проекции и цилиндрического расширения вводится **операция нечеткой композиции**.

Пусть имеется нечеткое отношение R на $X \times Y$ и нечеткое множество A на X . Под композицией нечеткого множества A и отношения R понимается нечеткое множество B на Y , которое получается в соответствии с выражением:

$$B = \text{proj}(R \cap \text{cext}(A; X \times Y); Y).$$

Операция \cap трактуется обычно как *min* (Т-норма) и для непрерывных, и для дискретных множеств. Операция *proj* для непрерывных множеств трактуется как *sup*, а для дискретных - как *max*.

Таким образом, для непрерывной области определения композиция описывается формулой

$$\mu_B(y) = \sup_y(\min(\mu_A(x), \mu_R(x, y))),$$

А для дискретных областей определения формулой

$$\mu_B(y) = \max_x(\min(\mu_A(x), \mu_R(x, y))).$$

Сокращенно операция композиции записывается в виде:

$$B = A \circ R.$$

Нечеткие отношения, выполняемые последовательно, допускают композицию.

Пример 8.2 (композиция отношений)

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Пример 8.3. (композиция отношений)

4

Рассмотрим в общем виде задачу о подборе персонала (типовую консалтинговую задачу).

Допустим, имеется список претендентов на те, или иные профессии.

В качестве исходных данных определены список профессий и личностные требования к служащим, которые необходимо иметь при приеме на ту или иную профессию (требования к памяти, скорости реакции, усидчивость, выносливость, выдержка, определенная подготовка по той или иной специальности, степень освоения базовых дисциплин и т.д.).

Соответствие совокупности требований профессий к личностным качествам можно оформить в виде нечеткого отношения S , определенного на декартовом произведении (x,y) , где x – перечень профессий, а y – наименования личностных качеств. Предположим, что размерность указанного нечеткого отношения равна n^*r .

Далее на основе опроса претендентов (в результате беседы с представителями кадровой службы) формируется нечеткое отношение R в виде таблицы (y,z) , где y – личностное качество, а z – ФИО претендента, таким образом, отношение R определяет степень соответствия личностных качеств претенденту. Допустим, данное нечеткое отношение имеет размерность, например, r^*m .

Таким образом, для определения композиции, должны быть определены нечеткое отношение S , размерности n^*r , – устанавливающее силу связи между профессиями и профессиональными требованиями, нечеткое отношение R , размерности r^*m , – устанавливающая наличие того или иного личностного качества у конкретного претендента.

Степень соответствия претендентов той или иной профессии может быть установлена в результате max-min-композиции сформированных нечетких отношений или максминной сверткой нечетких отношений:

$$Q = S \circ R.$$

В результате выполнения композиции, получим новое нечеткое отношение, определяющее степень соответствия претендентов той или иной профессии, оформленное матрицей на декартовом произведении (x, z) , размерности n^*m (таблица 8.8).

Таблица 8.8

	z_1 Иванов	z_2 Петров	z_3 Сидоров	z_4 Васильева	Z_5 Григорьева
x_1 конструктор	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}	q_{15}
x_2 электроник	q_{21}	q_{22}	q_{23}	q_{24}	q_{25}
x_3 социолог	q_{31}	q_{32}	q_{33}	q_{34}	q_{35}

Рассмотрим пример:

Для конкретного варианта, пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$.

Элементы универсумов имеют следующий содержательный смысл (таблицы 8.9):

Таблицы 8.9

	Специальности
x_1	Конструктор
x_2	Электроник
x_3	Социолог

	Личностные качества
y_1	Аналитический ум
y_2	Умение быстро принимать решения
y_3	Коммуникабельность
y_4	Пространственное мышление
y_5	Зрительная память

	Претенденты
z_1	Иванов
z_2	Петров
z_3	Сидоров
z_4	Васильева
z_5	Григорьева

Конкретные значения функций принадлежности $\mu_S(x, y)$ и $\mu_R(y, z)$ представлены таблично (таблицы 8.10, 8.11):

Таблицы 8.10

Требования профессия	Аналитический ум	Умение быстро принимать решения	Коммуникабельность	Пространственное мышление	Зрительная память
Конструктор	0,8	0,5	0,3	1,0	0,9
Электроник	0,9	0,5	0,3	0,5	1,0
Социолог	0,7	1,0	1,0	0,2	0,8

4

Таблицы 8.11

	Иванов	Петров	Сидоров	Васильева	Григорьева
Аналити- ческий ум	0,9	0,6	0,5	0,8	1,0
Умение быстро принимать решения	0,8	0,4	0,2	0,7	0,6
Комму- никабель- ность	0,7	0,8	0,3	0,9	0,5
Простран- ственное мышление	0,9	0,9	0,8	0,8	0,7
Зрительная память	1,0	0,6	0,7	0,4	1,0

Матрицы этих нечетких отношений имеют вид (таблицы 8.12):
Таблицы 8.12

s	0,8	0,5	0,3	1,0	0,9
	0,9	0,5	0,3	0,5	1,0
	0,7	1,0	1,0	0,2	0,8

4

R	0,9	0,6	0,5	0,8	1,0
	0,8	0,4	0,2	0,7	0,6
	0,7	0,8	0,3	0,9	0,5
	0,9	0,9	0,8	0,8	0,7
	1,0	0,6	0,7	0,4	1,0

В результате выполнения операции нечеткой композиции получено бинарное нечеткое отношение, которое в матричной форме имеет вид:

Таблицы 8.13

S ^o R	0,9	0,9	0,8	0,8	0,9
	1,0	0,6	0,7	0,8	1,0
	0,8	0,8	0,7	0,9	0,8

Для наглядности преобразуем эту матрицу к табличной форме (таблица 8.11):

Таблица 8.14

	z_1 Иванов	z_2 Петров	z_3 Сидоров	z_4 Васильева	z_5 Григорьева
x_1 конструктор	0,9	0,9	0,8	0,8	0,9
x_2 электроник	1,0	0,6	0,7	0,8	1,0
x_3 социолог	0,8	0,8	0,7	0,9	0,8

Анализ полученной таблицы позволяет сделать вывод о наиболее предпочтительном выборе специальности.

Таблица 8.15

	z_1 Иванов	z_2 Петров	z_3 Сидоров	z_4 Васильева	z_5 Григорьева
x_1 конструктор	0,9	0,9	0,8	0,8	0,9

x_2 электроник	1,0	0,6	0,7	0,8	1,0
x_3 социолог	0,8	0,8	0,7	0,9	0,8

4

Анализ полученной таблицы позволяет сделать вывод о наиболее предпочтительном выборе специальности для того или иного претендента.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9

9. НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА И НЕЧЕТКИЙ ВЫВОД

4

9.1. Определение нечеткой логики и лингвистическая переменная

Логика исследует методы рассуждений, применяемые для убедительного обоснования утверждения (истинности или ложности).

Классическая (булевая) логика предполагает только два возможных значения логического высказывания - «истина» или «ложь».

Логические высказывания получаются с помощью основных логических связок И, ИЛИ а также отрицания НЕ.

Основные логические законы булевой логики имеют тот же вид, что и законы математической теории множеств (см. занятие 1).

Особое место в логике занимает логический вывод, который реализует утверждение типа:

Если А, то В,

Т.е. если А истинно, то В тоже истинно. Если А ложно, то значение В произвольно. Если же В ложно, а А истинно, то ложным оказывается утверждение «Если А, то В». Это совпадает с логической формулой:

$$\overline{A} \vee B.$$

Ввиду важности формулы «Если А, то В» для нее введено специальное обозначение → (импликация) и запись $A \rightarrow B$ читается «А влечет В». Стрелка показывает направление рассуждений – из А в В, но не наоборот. Таким образом:

$$A \rightarrow B = \overline{A} \vee B.$$

Классическое правило логического вывода называется правилом сокращения посылки (modus ponens):

$$A \wedge (A \rightarrow B) = B$$

Основным недостатком классической формы вывода является возможность ее применения только при полностью определенной информации (А – истинно или ложно).

В отличие от классической (булевой) логики, где полная истинность логического высказывания кодируется числом 1, полная ложность – числом 0, в нечеткой логике допускается существование бесконечного множества градаций истинности в диапазоне от 1 до 0. **Это позволяет выполнять логический вывод на знаниях, при котором достоверность заключения меняется в зависимости от достоверности посылок и используемых правил.**

В нечетком правиле вывода «Если А, то В» и посылка и заключение являются нечеткими логическими переменными. Обозначим простейшее нечеткое правило R следующим образом:

$$R=I(A,B),$$

где I – нечеткая импликация.

Нечеткую импликацию можно реализовать с помощью нечеткого отношения, которое позволяет описать требуемое отображение из А в В.

В связи с тем, что для нечеткой логики применяют различные модификации операций пересечения, объединения и т.д., существует большое количество вариантов реализации нечеткой импликации. Некоторые варианты показаны в таблице 9.1.

Таблица 9.1

№ п/п	Название варианта реализации импликации	Формула
1	Mamdani	$I(A,B)=\min(A,B)$
2	Larsen	$I(A,B)=A \cdot B$

Правило логического вывода используется для представления знаний. Человеку удобнее формулировать, а также воспринимать знания, используя не количественные, а качественные характеристики предметной области. Качественная характеристика выражается словесной формой. В связи с этим в нечеткой логике вводят в рассмотрение так называемые лингвистические переменные. Особенностью лингвистической переменной в отличие от обычной переменной является то, что она принимает значения выражющиеся словами естественного языка. Каждое такое значение (слово) называется термом.

Таким образом, ЛП задается множеством слов, определяющих качество предметной области, и называемых термами. При этом каждый терм определяется некоторым нечетким множеством со своей функцией принадлежности.

Так, переменная "Рост (высота) человека" может характеризоваться одним из следующих значений - **термов** (terms), т.е. сжатых словесных описаний: "маленький", "невысокий", "среднего роста", "высокий".

Другая переменная "Скорость движения автомобиля" может быть "малой", "средней", "большой" и т.д.

Задать нечеткое подмножество A_i , соответствующее определенному (i-му) терму (значению) лингвистической переменной, - это значит задать область определения числовой переменной x и функцию принадлежности элемента x подмножеству A_i .

Рассмотрим в качестве примера [17] лингвистическую переменную "Скорость автомобиля". Будем полагать, что различные значения физической переменной x (скорости, в км/ч) могут быть охарактеризованы набором из 5 нечетких подмножеств (значений лингвистической переменной): {"Очень низкая", "Малая", "Средняя", "Большая", "Очень большая"}.

Конечно, вид функции принадлежности для каждого терма во многом зависит от выбранного транспортного средства (автомобиль грузовой, легковой, спортивный; времени суток; типа дорожного покрытия и т.д.). На рис.6.1 в качестве примера приведены функции принадлежности для каждого из указанных выше значений лингвистической переменной «Скорость автомобиля».

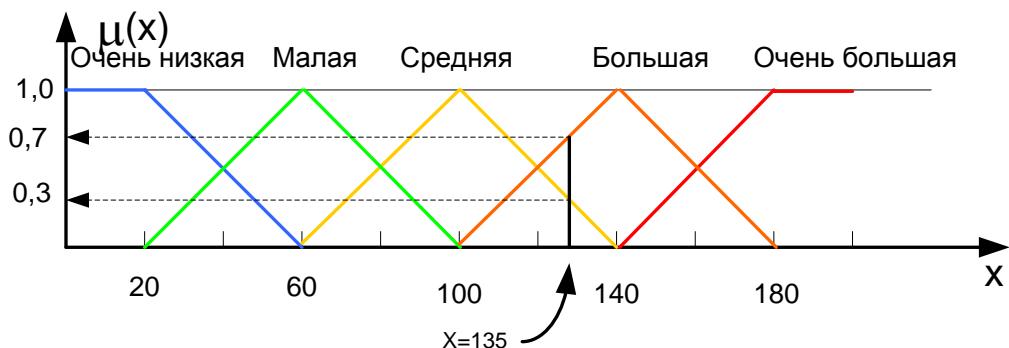


Рис.9.1. Лингвистическая переменная "Скорость автомобиля"

Допустим, что фактическое значение скорости равно 135 км/ч. Тогда, в соответствии с рис.9.1, это значение относится одновременно к двум термам (подмножествам) - "Средняя" и "Большая" - со степенями принадлежности $\mu_{СРЕДНЯ}(135)=0,7$ и $\mu_{БОЛЬША}(135)=0,3$ соответственно.

Совокупность N нечетких множеств образует нечеткое разбиение базового множества, если выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^N \mu_{A_i}(x) = 1; \quad \forall x \in U$$

.

В нечеткой логике обобщением правила вывода modus ponens является композиционное правило вывода:

$$B' = A' \circ (A \rightarrow B),$$

где A' - нечеткая посылка; B' - нечеткое заключение.

На смысловом уровне правило композиции означает, что **близкие посылки вызывают близкие следствия**.

Пример для дискретной области определения.

Пусть дано базовое множество

$$X = \{1, 2, 3, 4\},$$

на котором определены два НМ:

$$A = 1/1 + 0.8/2 + 0.3/3 + 0.1/4,$$

$$B = 0/1 + 0.1/2 + 0.6/3 + 1/4,$$

Рассмотрим нечеткое отношение

$$R = A \rightarrow B.$$

При использовании варианта реализации импликации типа Mamdani, получаем:

$$R = 0/(1,1) + 0.1/(1,2) + 0.6/(1,3) + 1/(1,4) + 0/(2,1) + 0.1/(2,2) + \\ + 0.6/(2,3) + 0.8/(2,4) + 0/(3,1) + 0.1/(3,2) + 0.3/(3,3) + 0.3/(3,4) + \\ + 0/(4,1) + 0.1/(4,2) + 0.1/(4,3) + 0.1/(4,4).$$

Или в матричной форме записи:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.6 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Допустим теперь, что имеется посылка (нечеткое множество) вида:

$$A' = 0/1 + 0.5/2 + 1/3 + 0.3/4,$$

тогда нечеткое заключение получается в виде:

$$B' = A' \circ R = [0 \ 0.5 \ 1 \ 0.3] \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.6 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^T$$

$$B' = [0 \ 0.1 \ 0.5 \ 0.5]$$

Рассмотрим пример нечеткого вывода для непрерывной области определения. Пусть даны два базовых множества X и Y, на которых заданы НМ с помощью треугольных функций принадлежности (рис.9.2).

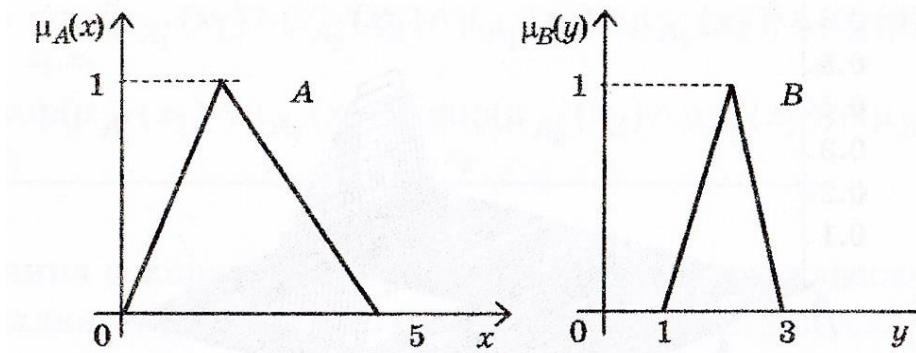


Рис.9.2.

```

>>x2=(0:0.1:6);
>>x1=(0:0.1:6);
>>[X,Y]=meshgrid(x1,x2);
>>Z=min(trimf(X,[0 2.5 5]),trimf(Y,[1 2 3]));
>>plot3(X,Y,Z)

```

Нечеткое отношение $R:A \rightarrow B$ иллюстрирует рис.9.3.

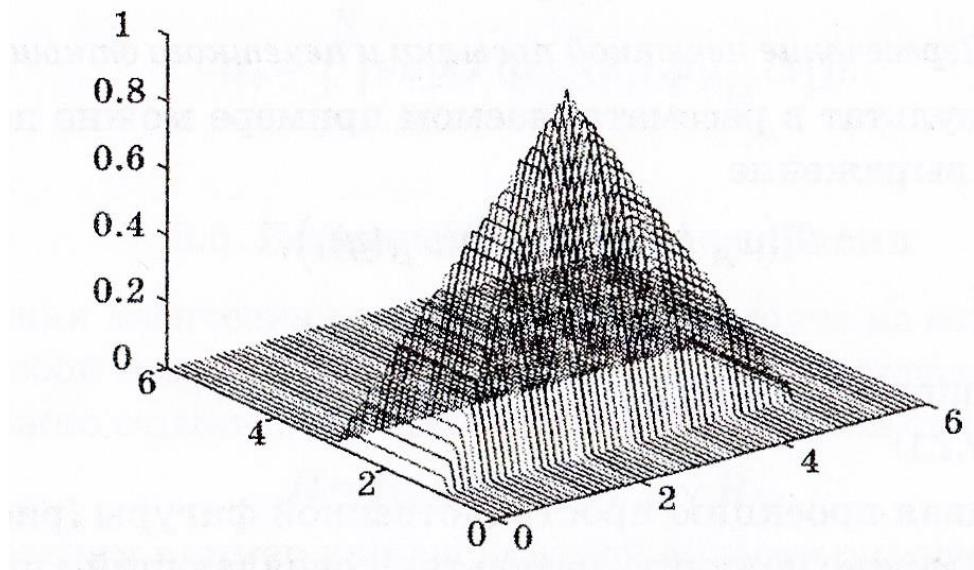


Рис.9.3.

Пусть имеется нечеткая посылка A' . Вариант графической интерпретации нечеткого вывода (при использовании операции \min) показан на рис.9.4.

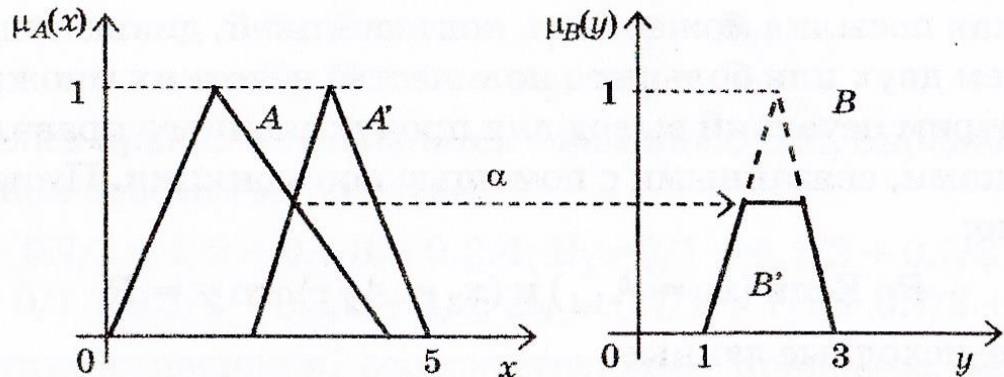


Рис.9.4.

Нечеткое заключение описывается формулой:

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \sup_x T(\mu_{A'}(x), I(\mu_A(x), \mu_B(y))) = \\ &= \sup_x (\mu_{A'}(x) \wedge (\mu_A(x) \vee \mu_B(y))). \end{aligned}$$

Рассматривая проекцию пространственной фигуры (рис.9.5) на плоскость YZ можно получить результат, совпадающий с правой частью рис.9.4.

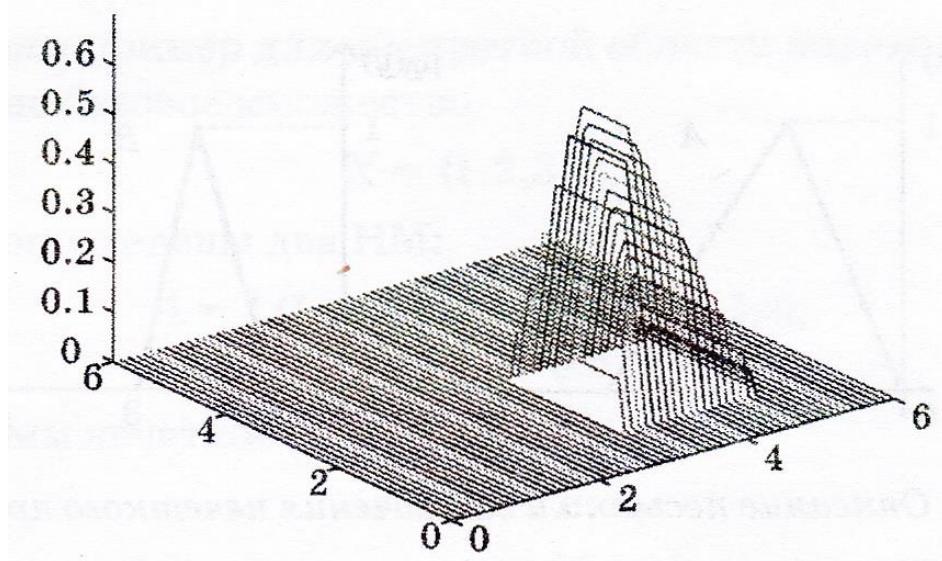


Рис.9.5

9.2. Нечеткий вывод в базе правил

Нечеткая логическая система может состоять из множества правил. В любой момент возможно срабатывание любого из правил, поэтому можно считать, что они связаны логической связью ИЛИ:

$$R = R_1 \downarrow R_2 \downarrow R_3 \dots \downarrow R_N.$$

Рассмотрим пример для дискретной области определения. Пусть нечеткая система состоит из всего двух правил:

$$R_1: \text{Если } x = A_1, \text{ то } y = B_1;$$

$$R_2: \text{Если } x = A_2, \text{ то } y = B_2.$$

Посылки правил описываются с помощью НМ, определенных на дискретном базовом множестве:

$$A_1 = \frac{0.7}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.2}{4}; \quad B_1 = \frac{0}{1} + \frac{0.1}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{1}{4};$$

$$A_2 = \frac{0}{1} + \frac{0.1}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{1}{4}; \quad B_2 = \frac{0.7}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{0.2}{4}.$$

Нечеткие отношения, соответствующие правилам, можно описать с помощью матриц

$$R_1 = A_1 \rightarrow B_1 = \begin{matrix} 0 & 0.1 & 0.7 & 0.7 \\ 0 & 0.1 & 0.7 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.7 & 0.7 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{matrix}$$

$$R_2 = A_2 \rightarrow B_2 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.2 \\ 0.7 & 1 & 0.7 & 0.2 \end{matrix},$$

и система нечетких правил описывается матрицей

$$R = R_1 \downarrow R_2 = \begin{matrix} 0 & 0.1 & 0.7 & 0.7 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 & 1 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 1 & 0.7 & 0.2 \end{matrix},$$

Если базовые множества непрерывные, то каждому нечеткому отношению соответствует некоторая поверхность, а система правил так же является поверхностью, так что каждая ее точка – верхняя граница всех соответствующих точек отдельных поверхностей.

При двух и более посылках правила матричное представление становится затруднительным.

Рассмотрим пример для непрерывной области определения. Пусть имеется система из двух правил, каждое из которых имеет две посылки:

R_1 : Если ($x = A_1$) и ($y = B_1$), то ($z = C_1$);

R_2 : Если ($x = A_2$) и ($y = B_2$), то ($z = C_2$).

Здесь A_i, B_i и C_i – нечеткие множества, входящие в i -е правило.

Пусть A' и B' – нечеткие посылки, тогда уровень запуска a_i каждого правила можно описать выражением

$$a_i = hgt(A' \cap A_i) \uparrow hgt(B' \cap B_i),$$

и выходной сигнал системы правил получается по формуле:

$$R(A', B') = R_1 \downarrow R_2 = (a_1 \uparrow C_1) \downarrow (a_2 \uparrow C_2).$$

Во многих случаях выходные переменные нечеткой системы представляют собой числа (т.е. четкие значения). Для выполнения нечетких операций нужно выполнить их преобразование в нечеткую форму (фазификацию). Проще всего рассматривать входную переменную x_0 , как одноточечное нечеткое множество (синглетон):

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0; \\ 0, & x \neq x_0. \end{cases}$$

При двух посылках хиу каждое правило можно описать следующим образом:

$$R_i(x, y, z) = [A_i(x) \uparrow B_i(y)] \rightarrow C_i(z).$$

При входных данных $x = x_0$ и $y = y_0$ выход i -го правила получается по формуле

$$C'_i = \underbrace{[A_i(x_0) \uparrow B_i(y_0)]}_{a_i} \rightarrow C_i(z),$$

где величина a_i определяет силу запуска правила.

Выходной сигнал системы нечетких правил описывается формулой

$$C = \bigcup_{i=1}^N C'_i.$$

Известно несколько классических схем нечеткого вывода – варианты Mamdani, Larsen, Tsukamotoи Sugeno.⁴

Рассмотрим вариант Mamdani. Нечеткая импликация здесь моделируется с помощью оператора \min .

Положим для простоты изложения, что база правил содержит всего два правила R_1 и R_2 . Сила запуска каждого из них:

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1(x_0) \uparrow B_1(y_0); \\ a_2 &= A_2(x_0) \uparrow B_2(y_0). \end{aligned}$$

Индивидуальный выход каждого правила получается по формулам

$$\begin{aligned} C'_1(z) &= a_1 \uparrow C_1(z); \\ C'_2(z) &= a_2 \uparrow C_2(z). \end{aligned}$$

Графической иллюстрацией схемы Mamdani служит рис. 9.6.

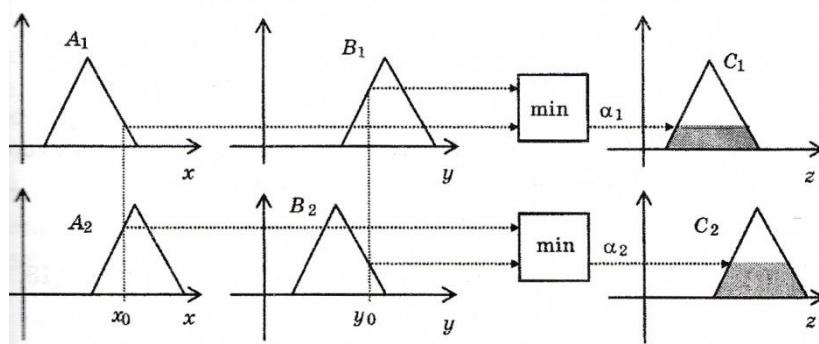


Рис.9.6.

Вариант Larsen отличается от варианта Mamdani только тем, что оператор импликации здесь описывается с помощью алгебраического умножения.

$$\begin{aligned} a_i &= A_i(x_0)B_i(y_0); \\ C'_i(z) &= a_i C_i(z). \end{aligned}$$

Схему Larsen для двух правил иллюстрирует рис.9.7.

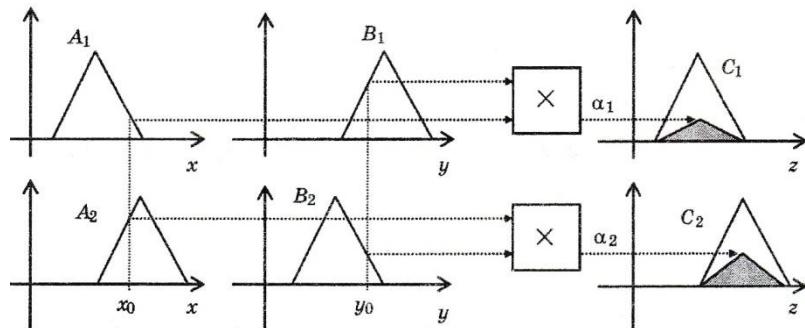
И в схеме Mamdani, и в схеме Larsen связка иначе описывается с помощью оператора \max :

$$C(z) = C'_1(z) \downarrow C'_2(z).$$

Нечеткий вывод, рассмотренный Tsukamoto, отличается тем, что все термы ЛП здесь имеют монотонные функции принадлежности. Если

некоторое правило имеет уровень запуска a_i , то его выходной сигнал может быть рассчитан по формуле:

$$a_i = C_i(z), \quad \text{т. е. } z_i = C^{-1}(a).$$



4

Рис.9.7.

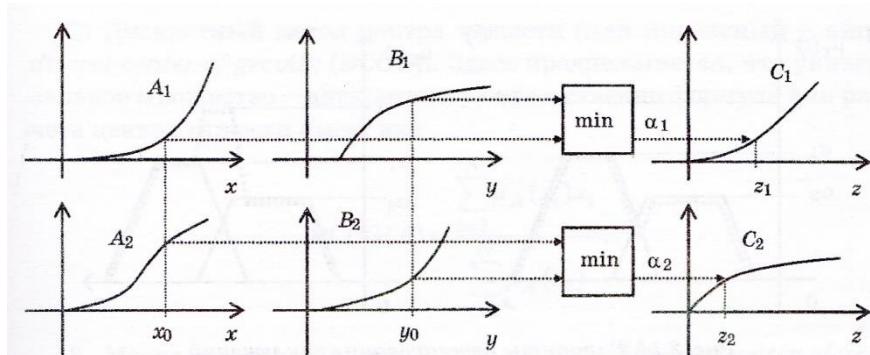


Рис. 9.8 иллюстрирует схему Tsukamoto для двух правил.

Схема нечеткого вывода, предложенная Sugeno, отличается от схемы Tsukamoto только тем, что здесь выходные значения каждого правила являются функциями входных значений:

$$z_i = a_i x_0 + b_i y_0.$$

Работу схемы Sugeno для двух правил иллюстрирует рис. 9.9.

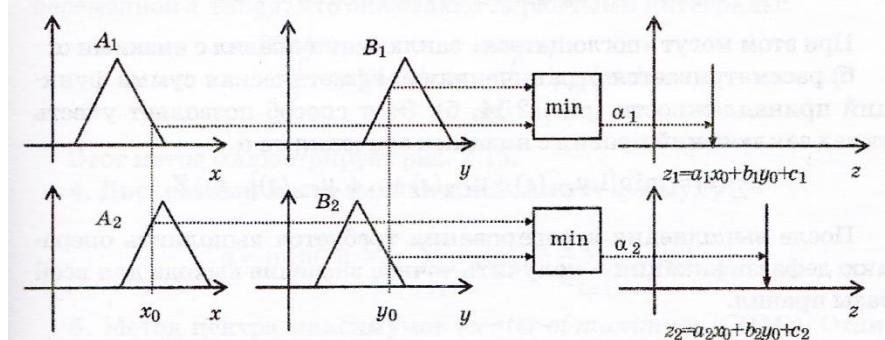


Рис.9.9.

В схемах Sugeno и Tsukamoto для каждого правила получается четкое выходное значение, поэтому для получения результирующего сигнала базы

правил здесь используется формула (дискретный вариант метода центра тяжести):

$$u = \frac{\sum_{i=1}^N a_i z_i}{\sum_{i=1}^N a_i}.$$

4

В вариантах Mamdani и Larsen выходом каждого правила является НМ, поэтому здесь требуется выполнить операцию агрегирования – объединения множества модифицированных заключений правил в одно НМ.

Здесь возможны два варианта:

а) рассматривается логическая сумма функций принадлежности заключений отдельных правил, которой соответствует оператор \max . Это наиболее часто используемый вариант (рис. 9.10, а).

$$\mu_{\Sigma}(z) = \max[\mu_{C1}(z), \mu_{C2}(z), \dots, \mu_{Cn}(z)], z \in Z.$$

При этом могут «поглощаться» заключения правил с низким a ;

б) рассматривается ограниченная арифметическая сумма функций принадлежности (рис. 9.10, б). Этот способ позволяет учесть вклад заключений правил с низкими значениями a .

$$\mu_{\Sigma}(z) = \min[1, \mu_{C1}(z) + \mu_{C2}(z) + \dots + \mu_{Cn}(z)], z \in Z.$$

После выполнения агрегирования требуется выполнить операцию дефазификации – получить точное значение выхода для всей базы правил.

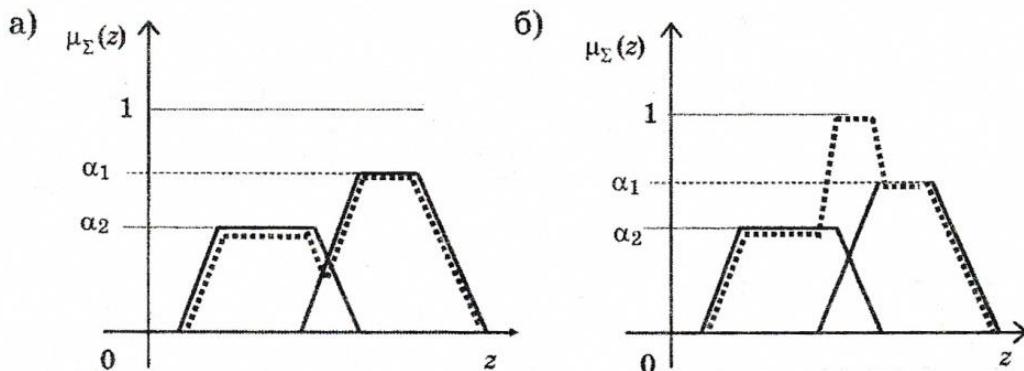


Рис.9.10.

9.3. Методы дефазификации.

Дефазификацией (англ. defuzzification) называется процедура преобразования НМ в четкое число.

Существует большое количество методов дефазификации [__], но на практике чаще всего применяется несколько методов, описанных ниже.

Пусть имеется нечеткое множество А, определенное на базовой шкале X, с функцией принадлежности $\mu_A(x)$. Тогда для преобразования его в число можно использовать следующие методы.

1. Метод центра тяжести (англ. Centroid или center-of-gravity (COG)). Этот метод, как следует из его названия, заключается в вычислении центра тяжести плоской фигуры, ограниченной функцией принадлежности нечеткого множества и осью координат:

$$COG(A) = \frac{\int_X (\mu_A(x)x)dx}{\int_X \mu_A(x)dx}$$

2. Дискретный метод центра тяжести (или индексный – англ. discretecenter-of-gravity (DCOG)). Здесь предполагается, что универсальное множество – дискретное. Соответственно формула для расчета центра тяжести имеет вид

$$DCOG(A) = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_A(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^N \mu_A(x_i)}.$$

3. Метод медианы (bisector) или центра области (center-of-area (COA)). Здесь выбирается точка в области определения выходной переменной x такая, что оказываются равными интегралы:

$$\int_{\inf x}^{COA(A)} \mu_A(x) dx = \int_{COA(A)}^{\sup x} \mu_A(x) dx.$$

Этот метод иллюстрирует рис. 9.11.

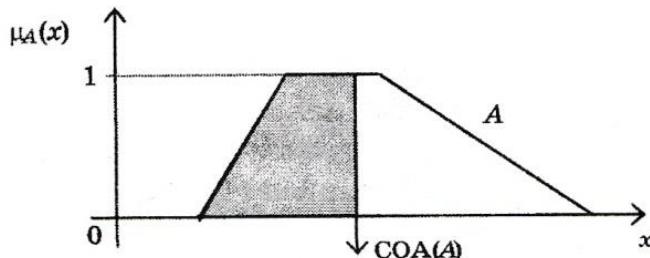


Рис.9.11.

4. Дискретный метод медианы использует формулу

$$a = \min(j); \forall j: \sum_{i=1}^j \mu_A(x_i) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_A(x_i).$$

5. Метод центра максимумов (center-of-maximum (COM)). Отличие от метода центра тяжести состоит в том, что рассматривается только та часть области определения НМ, для которой значение принадлежности максимально

$$COM(A) = \frac{\int_M (\mu_A(x)x)dx}{\int_M \mu_A(x)dx};$$

$$M \in X, x \in M \rightarrow \mu_A(x) = \max(\mu_A(x)); \forall x \in X.$$

4

6. Дискретный метод центра максимумов (DCOM) находит среднее арифметическое элементов универсального множества, имеющих максимальные степени принадлежности:

$$DCOM(A) = \frac{\sum_{x_i \in M} x_i}{|M|}.$$

7. Индексный (пороговый) метод центра тяжести (ICOG). Здесь метод центра тяжести применяется не ко всему НМ, а только к той его части, в которой значение принадлежности повышает заданный порог β :

$$ICOG(A, \beta) = \frac{\int_{x \in M} (\mu_A(x)x)dx}{\int_{x \in M} \mu_A(x)dx}; M \in X; x \in M \rightarrow \mu_A(x) > \beta.$$

На рис. 9.12 показан пример ICOG при $\beta = 0,5$

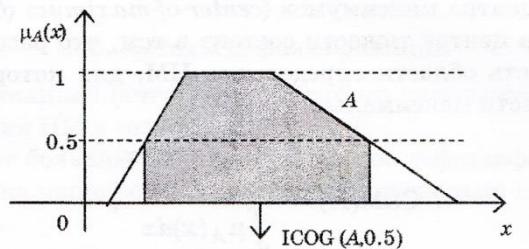


Рис.9.12.

8. Метод середины максимума (mean-of-maximum (MOM)). Это пороговый метод центра тяжести, в котором порог соответствует максимуму функции принадлежности (рис. 9.13):

$$MOM(A) = ICOG(A, hgt(A)).$$

9. Метод наибольшего из максимумов LOM (LargestOfMaximums):

$$LOM(A) = \max(x); \forall x \in X; \mu_A(x) = \max(\mu_A(x)).$$

10. Метод наименьшего из максимумов SOM (SmallestOfMaximums):

$$LOM(A) = \min(x); \forall x \in X; \mu_A(x) = \max(\mu_A(x)).$$

Очевидно, что для унимодального НМ методы MOM, LOM и SOM совпадают.

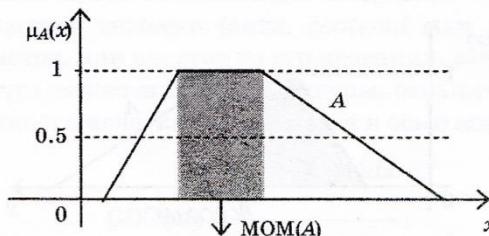


Рис.9.13.

9.4. Табличное представление базы правил

4

На практике часто используют вариант, при котором нечеткие правила имеют две посылки.

Например, пусть посылки x_1 , x_2 и заключение упредставляют собой лингвистические переменные, каждая из которых описывается набором из 5 термов

$$T(x_1) = T(x_2) = T(y) = \{\text{ОБ}, \text{ОМ}, \text{Н}, \text{ПМ}, \text{ПБ}\},$$

где ОБ – «отрицательное большое», ОМ – «отрицательное малое», Н – «нулевое», ПБ – «положительное большое», ПМ – «положительное малое».

Таким образом, правила имеют вид:

$$\text{ЕСЛИ } (x_1 = H) \text{ И } (x_2 = H), \text{ ТО } y = \text{ПМ}.$$

Максимальное количество возможных правил равно произведению мощностей терм-множеств посылок. В рассматриваемом примере

$$\text{card}(T(x_1)) * \text{card}(T(x_2)) = 25$$

Если все правила известны, то содержимое базы правил удобно отображать в виде так называемой таблицы лингвистических правил (ТЛП) (рис.9.14).

		x_2				
		ОБ	ОМ	Н	ПМ	ПБ
x_1	ОБ	ПВ	ПС	ПС	ПМ	ПБ
	ОМ	ПС	ПМ	ПМ	Н	ОМ
	Н	ПС	ПМ	ПМ	ОМ	ОС
	ПМ	ПМ	ОМ	ОМ	ОМ	ОС
	ПБ	Н	ОМ	ОС	ОС	ОБ

Рис.9.14.

В зависимости от решаемой задачи ТЛП может описывать, например, динамику объекта управления (x_1 – вход объекта, x_2 – выход объекта, y – изменение выхода объекта), или поведение (x_1 –ошибка, x_2 – изменение ошибки, y –сигнал управления).

Механизм функционирования ТЛП иллюстрирует пример, показанный на рис. 9.15, где для описания терм-множеств посылок используются трапециевидные функции принадлежности.

Заключение различных нечетких правил могут совпадать. Окрашенные участки на рис. 9.15 означают зоны взаимодействия (конкуренции) соседних правил. В каждый момент времени здесь могут срабатывать не более 4 правил.

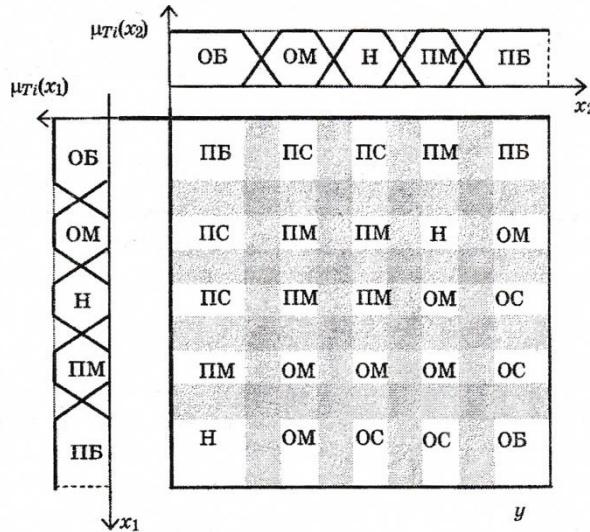


Рис.9.15.

При выборе другого способа описания функции принадлежности термов (треугольные или гауссовые функции) зона взаимодействий правил расширяется, и поведение нечеткой системы изменится.

Однако наибольшее значение для функционирования нечеткой системы имеет выбор правил.

2.8. Требования к базе правил

Хорошая база правил должна удовлетворять требованиям непротиворечивости, полноты и непрерывности.

1. Непротиворечивость (англ. consistency) означает, что в базе не должно быть правил, которые имели бы при сходных посылках существенно различные заключения. Рассмотрим правила с одной посылкой и одним заключением:

$$R_j: \text{Если } A_j, \text{ то } B_j,$$

где A_i и B_j — нечеткие множества, определенные на универсальных множествах X_i и Y_j .

Степень непротиворечивости двух правил R_j и R_k может быть оценена по формуле

$$C(R_j, R_k) = \left| \max_x(\mu_{A_j}(x) \uparrow \mu_{A_k}(x)) - \max_y(\mu_{B_j}(y) \uparrow \mu_{B_k}(y)) \right|.$$

Противоречивость правила R_j по отношению ко всей базе из N правил выражается формулой

$$C(R_j) = \sum_{i=1}^N C(R_j, R_i), i \neq j. \quad 4$$

Таким образом, можно выявить «плохие» правила, не согласующиеся с остальной частью базы правил.

2. Полнота (англ. completeness) базы правил означает, что не может быть «белых пятен» во входном пространстве правил. Для каждого текущего состояния X должно существовать хотя бы одно управляющее правило, посылки которого имеют ненулевую принадлежность для X .

Полнота базы правил может быть оценена по формуле

$$CM(X) = \sum_{k=1}^{N_R} \left\{ \prod_{i=1}^{N_X} \mu_{A_{i,k}}(x_i) \right\},$$

где N_R - количество правил; N_X – количество посылок каждого правила.

Возможны следующие показатели полноты базы правил:

$CM(X) = 0$ - неполная база правил (есть «белое пятно»);

$CM(X) = 1$ - строгая полная;

$CM(X) < 1$ - не совсем полная;

$CM(X) > 1$ – избыточная база правил.

3. Непрерывность базы правил. Например, пусть посылки представляют собой НМ, образующие нечеткое разбиение базовой шкалы:

$$A_1 < A_2 < \dots A_{i-1} < A_i < A_{i+1} < \dots A_N.$$

Пусть в базе правил имеются два правила:

R_n : Если $x_1 = A_{1,n}$ и $x_2 = A_{2,n}$, то $y = B_n$

R_m : Если $x_1 = A_{1,m}$ и $x_2 = A_{2,m}$, то $y = B_m$

В непрерывной базе правил выполняются условия:

Если $A_{1,n} = A_{1,m}$, то $A_{2,n} \cap A_{2,m} \neq \emptyset$.

Если $A_{2,n} = A_{2,m}$, то $A_{1,n} \cap A_{1,m} \neq \emptyset$.

Соответственно, при выполнении этих условий должно выполняться:

$$B_n \cap B_m \neq \emptyset.$$

Таким образом, непрерывность базы правил означает, что близким посылкам должны соответствовать близкие заключения.

9.5. Нечеткая система как универсальный аппроксиматор

Нечеткие производственные системы лишены недостатков обычных производственных систем. Как было показано в ряде работ [], система нечетких правил позволяет аппроксимировать любую функцию $Y=F(X)$, заданную на ограниченном непрерывном множестве значений U , т. е. выполняется

$$\sup_{X \in U} \|F(X) - \bar{F}(X)\| \leq \varepsilon,$$

где X – вектор аргументов функции; $\bar{F}(X)$ - выход нечеткой системы, ε – произвольная малая константа.

Так в работе [] было показано, что нечеткая система, использующая набор из N правил

R_i : Если $(x_i \text{ есть } A_i)$ и $(y_i \text{ есть } B_i)$, то $(z_i \text{ есть } C_i)$; $i = 1, 2, \dots, N$, является универсальным аппроксиматором при следующих условиях:

1. Для описания посылок и заключений используются гауссовые функции принадлежности

$$A_i(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - a_{i1}}{\beta_{i1}}\right)^2\right); B_i(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y - a_{i2}}{\beta_{i2}}\right)^2\right); \\ C_i(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z - a_i}{\beta_i}\right)^2\right);$$

2. Логическая операция & описывается как произведение:

$$[A_i(x) \& B_i(y)] = A_i(x)B_i(y);$$

3. Импликация применяется в виде произведения

$$[A_i(x) \& B_i(y)] \rightarrow C_i(z) = A_i(x)B_i(y)C_i(z);$$

4. Для дефазификации используется дискретный метод центра тяжести

$$z = \frac{\sum_{i=1}^N c_i A_i B_i}{\sum_{i=1}^N A_i B_i}.$$

Было показано, что нечеткая логическая система может быть универсальным аппроксиматором и при других условиях:

1. Для описания посылок и заключений используются симметричные треугольные функции

$$A_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|a_i - x|}{\alpha_i}, & \text{если } |a_i - x| \leq \alpha_i, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$B_i(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|b_i - x|}{\beta_i}, & \text{если } |b_i - x| \leq \beta_i, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$C_i(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|c_i - z|}{\gamma_i}, & \text{если } |c_i - z| \leq \gamma_i, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$
4

2. Логическая операция & описывается как min:

$$[A_i(x) \& B_i(y)] = \min(A_i(x)B_i(y));$$

3. Используется импликация Mamdani

$$[A_i(x) \& B_i(y)] \rightarrow C_i(z) = \min(\min(A_i(x)B_i(y)), C_i(z));$$

3. Для дефазификации применяется дискретный метод центра тяжести:

$$z = \frac{\sum_{i=1}^N \min(\min(A_iB_i), C_i(z))}{\sum_{i=1}^N \min(A_iB_i)}.$$

На практике абсолютно точная аппроксимация не требуется, достаточно приближения с некоторой допустимой ошибкой.

9.6. Нечеткий вывод в матричной форме

Процедура нечеткого вывода допускает компактную запись в матричной форме при следующих условиях:

- 1) Для описания термов посылок используются треугольные функции принадлежности, и термы образуют нечеткое разбиение соответствующих базовых множеств;
- 2) Заключения описываются синглетонами, для дефазификации используется дискретный метод центра тяжести.

Рассмотрим сначала систему нечетких правил с одной посылкой и одним заключением, которая реализует отображение $f: X \rightarrow Y$ (рис. 2.20, где Fи DF – обозначение операций фазификации и дефазификации).

При сделанных допущениях формула дискретного метода центра тяжести упрощается:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^N a_i y_i}{\sum_{i=1}^N a_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_{T_i}(x) y_i}{\sum_{i=1}^N \mu_{T_i}(x)} = \sum_{i=1}^N \mu_{T_i}(x) y_i = XY.$$

Таким образом, выходной сигнал нечеткой системы получается как скалярное произведение двух векторов: X–вектора степеней принадлежности входного значения к различным термам входной переменной и Y–вектора центров термов выходной переменной.

4

Рассмотрим пример. Пусть для описания входной и выходной переменных используются по 5 термов (рис. 9.15).

Вектор степеней принадлежности посылки имеет вид:

$$X = \{\mu_{T_i}(x')\} = [\mu_{\text{ОБ}}(x') \mu_{\text{ОМ}}(x') \mu_{\text{Н}}(x') \mu_{\text{ПМ}}(x') \mu_{\text{ПБ}}(x')] = [0 \ 0 \ 0.3 \ 0.7 \ 0].$$

Нечеткая система вывода использует 5 правил:

- Если $x=\text{ОБ}$, то $y=\text{ОБ}$, иначе
- Если $x=\text{ОМ}$, то $y=\text{ОМ}$, иначе
- Если $x=\text{Н}$, то $y=\text{Н}$, иначе
- Если $x=\text{ПМ}$, то $y=\text{ПМ}$, иначе
- Если $x=\text{ПБ}$, то $y=\text{ПБ}$.

Нечетким заключениям соответствует вектор

$$Y = [-1 \ -0.5 \ 0 \ 0.5 \ 1]^T,$$

так что результат нечеткого вывода получается по формуле:

$$y = XY = [0 \ 0 \ 0.3 \ 0.7 \ 0] [-1 \ -0.5 \ 0 \ 0.5 \ 1]^T = 0.35.$$

Рассмотрим далее систему нечетких правил с двумя посылками и одним заключением, которая реализует отображение $f: X_1 * X_2 \rightarrow Y$ (рис. 2.23).

Поскольку заключения представлены синглетонами, правые части правил можно описать с помощью матрицы

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Допустим, что в некоторый момент времени входная переменная x_1 имеет следующий вектор степеней принадлежности

$$X_1 = \{\mu_{T_i}(x_1)\} = [\mu_{\text{ОБ}}(x_1) \mu_{\text{ОМ}}(x_1) \mu_{\text{Н}}(x_1) \mu_{\text{ПМ}}(x_1) \mu_{\text{ПБ}}(x_1)] = [0 \ 0 \ 0.3 \ 0.7 \ 0].$$

Это означает, что в матрице правил R будут запускаться только правила, входящие в третью и четвертую строку.

Пусть для второй входной переменной вектор степеней принадлежности имеет вид

$$X_2 = \{\mu_{T_i}(x_2)\} = [\mu_{\text{ОБ}}(x_2) \mu_{\text{ОМ}}(x_2) \mu_{\text{Н}}(x_2) \mu_{\text{ПМ}}(x_2)] = [0 \ 0.2 \ 0.8].$$

Это означает, что в R будут запускаться только правила, входящие во второй и третий столбец. Таким образом:

4

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 (\mu_{T_i}(x_1) \mu_{T_j}(x_2)) y_{ij}}{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 (\mu_{T_i}(x_1) \mu_{T_j}(x_2))} = \\
 &= \frac{(0.3 * 0.2) * 0 + (0.3 * 0.8)(-0.5) + (0.7 * 0.2)(-0.5) + (0.7 * 0.8)(-0.5)}{0.3 * 0.2 + 0.3 * 0.8 + 0.7 * 0.2 + 0.7 * 0.8} \\
 &= \frac{-0.47}{1} = -0.47.
 \end{aligned}$$

Такой же результат можно получить, используя матричную запись:

```

>> x1 = [0 0 0.3 0.7 0];
>> x2 = [0 0.2 0.8]';
>> R = [1 1 0.5; 0.5 0.5 0; 0.5 0 -0.5; 0 -0.5 -0.5; -0.5 -1 -1];
>> x1 * R * x2
ans = -0.47

```

Таким образом, при двух входных переменных результат нечеткого логического вывода описывается формулой:

$$y = X_1 R X_2$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10

10. СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ. МОДЕЛИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

10.1. Система управления с обратной связью

Рассмотрим традиционную систему управления с отрицательной обратной связью (рис.10.1).

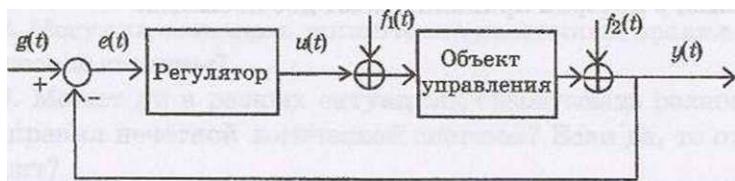


Рис. 10.1. Система управления с обратной связью

Задающее воздействие $g(t)$ описывает желаемое значение выхода объекта управления $y(t)$. Ошибка управления $e(t) = g(t) - y(t)$ используется регулятором для формирования сигнала управления $u(t)$. Объект представляет собой динамическую систему, которая может быть неустойчивой или обладать плохими динамическими свойствами. Регулятор служит для улучшения динамического поведения объекта. Шумы на входе и выходе объекта $f_1(t)$ и $f_2(t)$ могут быть одним из источников неточности (нечеткости) задачи управления (при синтезе регулятора ими часто пренебрегают).

Классическая теория управления ориентирована в основном на синтез линейных регуляторов для линейных объектов. Свойство линейности позволяет получить удобные алгоритмы оценки таких важных системных свойств, как устойчивость, управляемость, наблюдаемость и т. д.

Однако все реальные объекты являются нелинейными, и линеаризация их математического описания требует рассмотрения некоторой рабочей точки, относительно которой рассматриваются малые отклонения.

Нелинейность математической модели выражается в присутствии нелинейных блоков, таких как насыщение, сухое трение, гистерезис и т. д. В частности, введение в структуру рис. 10.1 ограничения на значение сигнала управления делает ее нелинейной. Нелинейность также возникает, если в математическом описании присутствуют нелинейные функции (квадрат, квадратный корень, тригонометрические функции и т. п.).

Нечеткие логические регуляторы (НЛР), нелинейные по своей сути, могут управлять линейными объектами лучше, чем классические регуляторы, а также управлять нелинейными объектами, для которых линейные регуляторы неприменимы.

4

Для линейных скалярных объектов (с одним входом и одним выходом) при описании переходных процессов традиционно рассматривается реакция $y(t)$ на скачкообразное входное воздействие $g(t)$, и используются такие параметры, как (рис. 10.2):

- время нарастания t_H , т. е. время, за которое переменная $y(t)$ возрастает с 0.1 до 0.9 установившегося значения $y_{yst}(t)$;
- *перерегулирование* δ - $((y_{max}(f) - y_{yst}(t))/100) \%$;
- установившаяся ошибка $e = g(t) - y_{yst}(t)$;
- время переходного процесса t_{pp} (время от начала переходного процесса до момента, когда $y(t)$ не покидает интервал $y_{cen} \pm 0.05$);
- t_3 - время затухания переходного процесса (время между моментом первого достижения сигналом $y(t)$ единичного уровня и моментом, начиная с которого значения $y(t)$ остаются внутри интервала $[1 \pm 0.05]$).

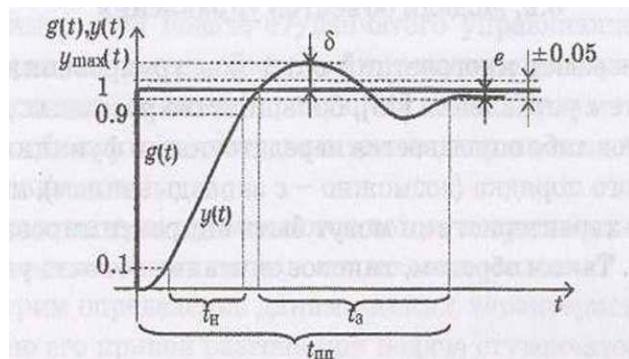


Рис. 10.2. параметры переходного процесса.

Реакция объекта на ступенчатое входное воздействие называется переходной функцией или кривой разгона.

По характеру установившегося значения выходной величины объекта (при подаче на вход единичного скачка) все объекты делятся на две группы: с самовыравниванием и без самовыравнивания.

Самовыравниванием называется свойство регулируемого объекта после изменения входного сигнала самостоятельно вернуться к новому установившемуся состоянию (см. рис. 10.2). Самовыравнивание облегчает

работу регулятора. Устойчивое функционирование объекта управления без самовыравнивания невозможно без регулятора.

10.2. Модели объектов управления

4

Как показывает многолетний опыт проектирования систем управления [48], большинство реальных динамических объектов либо описывается передаточными функциями первого или второго порядка (возможно - с запаздыванием), либо их динамические характеристики могут быть аппроксимированы этими функциями. Таким образом, типовое описание объекта управления имеет вид:

$$W(p) = \frac{k \exp(-\varphi p)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}; T_1 > 2T_2. \quad (10.1.)$$

При наличии звена запаздывания ($\exp(-\varphi p)$) порядок передаточной функции возрастает n раз, где n - порядок разложения экспоненциальной функции в ряд Паде.

Для объектов управления с явно выраженной преобладающей постоянной времени передаточная функция упрощается:

$$W(p) = \frac{k \exp(-\varphi p)}{(Tp + 1)} \quad (3.2.)$$

где K, T, φ коэффициент усиления, постоянная времени и запаздывание, которые должны быть определены в окрестности номинального режима работы объекта.

Для объекта управления без самовыравнивания передаточная функция имеет вид

$$W(s) = \frac{K e^{-\varphi s}}{S} \quad (3.3.)$$

Возникает задача определения параметров динамической модели объекта управления (идентификации). Это можно сделать экспериментально на реальном объекте управления. Могут рассматриваться временные или частотные характеристики объекта управления.

Рассмотрим экспериментальные методы определения временных динамических характеристик объекта управления. Они делятся на два класса: активные и пассивные.

Активные методы предполагает подачу на вход объекта пробных тестирующих сигналов, таких как ступенчатый или прямоугольный импульс.

В зависимости от вида пробного сигнала выбирают соответствующие методы обработки выходного сигнала объекта управления.

Возникает задача определения параметров динамической модели объекта управления (идентификации). Это можно сделать экспериментально на реальном объекте управления. Могут рассматриваться временные или частотные характеристики объекта управления.

Рассмотрим экспериментальные методы определения временных динамических характеристик объекта управления. Они делятся на два класса: активные и пассивные.

Активные методы предполагает подачу на вход объекта пробных тестирующих сигналов, таких как ступенчатый или прямоугольный импульс.

В зависимости от вида пробного сигнала выбирают соответствующие методы обработки выходного сигнала объекта управления.

Так, например, при подаче ступенчатого управляющего сигнала снимают кривую разгона объекта, а при подаче прямоугольного импульсного сигнала снимают кривую отклика. Кривая отклика снимается для объектов, не допускающих подачу на вход объекта ступенчатых сигналов.

Пассивные методы применяются тогда, когда невозможно нарушение нормального хода технологического процесса.

Рассмотрим определение динамических характеристик объекта вида (10.2) по его кривой разгона при подаче ступенчатого пробного сигнала.

В начальный момент необходимо, чтобы система управления находилась в покое, т. е. регулируемая величина $y(t)$ и задающее воздействие $g(t)$ не изменялись, а внешние возмущения отсутствовали. Затем на вход исполнительного механизма подается ступенчатое воздействие, и состояние объекта начинает изменяться.

При снятии кривой разгона необходимо выполнить ряд условий:

- 1) если проектируется система стабилизации, то кривая разгона должна сниматься в окрестности рабочей точки процесса;
- 2) кривые разгона необходимо снимать как при положительных, так и отрицательных скачках управляющего сигнала. По виду кривых можно судить о степени асимметрии объекта;

- 3) при наличии зашумленного выхода желательно снимать несколько кривых разгона с их последующим наложением друг на друга и получением усредненной кривой.

4

Сняв кривую разгона, и оценив характер объекта управления (с самовыравниванием или без) можно определить параметры соответствующей передаточной функции. В частности, с этой целью можно использовать метод касательной к точке перегиба кривой разгона.

Рассмотрим пример использования метода касательной для объекта с самовыравниванием (рис. 10.3).

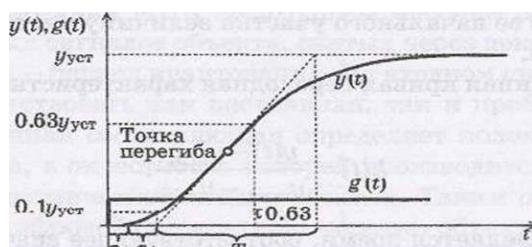


Рис. 10.3. График кривой разгона

Точка перегиба соответствует переходу кривой от режима ускорения к режиму замедления темпа нарастания выходного сигнала. Постоянная времени T определяется в соответствии с графиком рис. 10.3. Достаточно точной считается также оценка вида

$$T = \tau_{0,63} - \tau_3$$

Динамическое запаздывание T также определяется по графику, и складывается из двух компонентов:

$$T = \tau_3 + \tau_d$$

где τ_3 - чистое (емкостное) запаздывание, x_d - транспортное запаздывание.

Для объекта с самовыравниванием динамический коэффициент усиления K показывает, во сколько раз данное звено усиливает входной сигнал (см. рис. 10.3):

$$K = \frac{y_{ycm}}{g}.$$

Для объекта без самовыравнивания вида (10.3) динамический коэффициент усиления K определяется как отношение установившейся скорости изменения выходной величины y к величине скачка входного сигнала. При единичном скачке

$$K = \frac{\Delta_y}{\Delta_t}.$$

4

Для определения динамических характеристик объекта вида (10.1) можно использовать метод Орманса.

Этот метод позволяет по нормированной кривой разгона определить две доминирующие постоянные объекта управления.

Перед началом обработки переходную характеристику требуется пронормировать (диапазон изменения нормированной кривой 0-1) и выделить из ее начального участка величину чистого временного запаздывания.

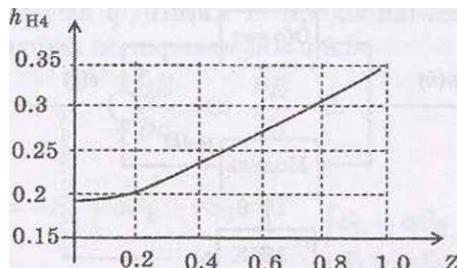
Нормированная кривая переходная характеристика определяется формулой

$$h(t) = \frac{y(t) - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}.$$

Затем определяется время, соответствующее значению $yH = 0.7$ и обозначается t_7 . Полученный интервал делится на три части. Поднимается перпендикуляр до кривой разгона и определяется величина yH_4 . Аналитически доказана связь между точками кривой разгона и параметрами модели, а именно

$$t_7 = 1.2(T_1 + T_2); t_4 = \frac{t_7}{3}.$$

Постоянныe времени объекта управления T_x и T_2 определяются с помощью вспомогательной величины Z_2 , для нахождения которой используется номограмма (рис. 10.4).



4

Рис. 10.4. Номограмма для определения величины Z^2

Постоянныe времени объекта управления T_1 и T_2 определяются по следующим формулам:

$$T_1 = \frac{t_7}{2.4}(1+z); T_2 = \frac{t_7}{2.4}(1-z).$$

Если $hH4 < 0.19$, то для определения динамики объекта используют метод площадей. Если $T_1 >> T_2$ то можно перейти к модели первого порядка.

Наиболее универсальным алгоритмом определения параметров модели следует признать метод наименьших квадратов (МНК). С его помощью можно построить модель не только второго, но и более высоких порядков.

Для использования МНК необходимы массивы значений входных и выходных сигналов объекта, снятых через некоторый интервал времени T_k - период квантования. Во входном сигнале объекта должна присутствовать как постоянная, так и пробная составляющие. Постоянная составляющая определяет положение рабочей точки процесса, в окрестности которой производится определение параметров динамической модели объекта. Таким образом работа происходит с цифровой (дискретной) моделью объекта.

Пусть цифровая модель первого порядка задана в виде

$$y_M(k) = ay(k-1) + bu(k-1).$$

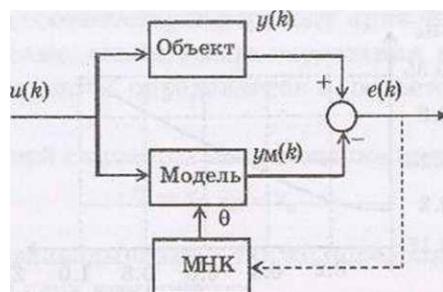


Рис. 10.5. Структурная схема эксперимента

Схема эксперимента показана на рис. 10.5, где M - модель объекта, $u(k)$, $y(k)$, $y_M(k)$; 9 - входной и выходной сигналы объекта, выходной

сигнал модели и вектор оценки параметров; $e(k)$ - текущая ошибка идентификации.

Пусть накоплено $N-f-1$ точек измерения входного и выходного сигналов объекта. В методе наименьших квадратов обобщенная ошибка идентификации должна быть минимальна:

$$E = \sum_{k=1}^{N+1} e(k)^2 \rightarrow \min_{\theta}.$$

Введем обозначения

$$A = y(k) - ay(k-1); B = bu(k-1),$$

Тогда

$$E = \sum_{k=1}^{N+1} [A - B]^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим

$$E = S_1 - 2aS_2 + a^2S_3 - 2bS_4 + 2abS_5 + b^2S_6,$$

$$S_1 = \sum y^2(k);$$

$$S_2 = 2a \sum y(k)y(k-1);$$

$$S_3 = a^2 \sum y^2(k-1);$$

$$S_4 = 2b \sum y(k)u(k-1);$$

$$S_5 = 2ab \sum y(k)u(k-1);$$

$$S_6 = b^2 \sum u^2(k-1).$$

Условие минимума функции E предполагает равенство нулю частных производных по параметрам a и b :

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0; \frac{\partial E}{\partial b} = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a} = -S_2 + aS_3 + bS_5 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} = -S_4 + aS_5 + bS_6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} S_2 = aS_3 + bS_5 \\ S_4 = aS_5 + bS_6 \end{cases}$$

Таким образом, можно записать

$$A\theta = B.$$

где

$$A = \begin{bmatrix} S_3 & S_5 \\ S_5 & S_6 \end{bmatrix}; \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} S_2 \\ S_4 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, для вычисления оценок вектора параметров объекта управления по методу наименьших квадратов получена формула

$$\theta = A^{-1}B.$$

4

Обратная матрица A^{-1} всегда существует, так как исходная матрица A симметричная и положительно определенная.

Зная параметры дискретной модели можно определить параметры передаточной функции объекта

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1} = \frac{y(p)}{u(p)};$$

Связь между параметрами дискретной модели и передаточной функции определяется формулами:

$$a = e^{\frac{-Tk}{T}}; b = K(1-a).$$

Откуда следует, что

$$T = -\frac{T_k}{\ln(a)}; K = \frac{b}{1-a}.$$

В пакете **MatLab** подобные преобразования выполняются единственно для моделей любого порядка.

При использовании МНК получаемые оценки вычисляются с некоторыми ошибками, которые называются смещением оценок. Для получения хороших результатов необходимо выполнить ряд условий, главные из которых заключаются в том, чтобы тестирующий сигнал был достаточно разнообразным, а объем выборки был достаточно большим.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 11

11. ПИД-РЕГУЛЯТОРЫ

4

В промышленности наиболее часто используется пропорционально-интегро-дифференциальный закон управления, описываемый формулой

$$u(p) = k_{p,I}e(t) + k_d \frac{de(t)}{dt} + k_i \int e(t)dt, \quad (11.1)$$

где k_p, k_d, k_i - параметры закона управления.

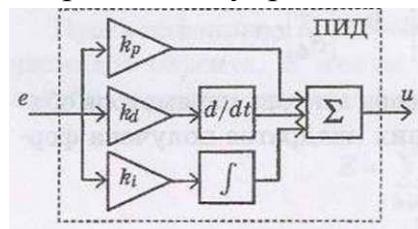


Рис.11.1. Структура ПИД –регулятора.

Закон (11.1) реализуется с помощью цифровых или аналоговых ПИД-регуляторов (рис.11.1), а также их упрощенных модификаций: П, ПД, ПИ и И-регуляторов, которые получаются при разных комбинациях слагаемых, входящих в формулу (11.1). Управляющая поверхность ПИД-регулятора является гиперплоскостью, ПД и ПИ-регуляторов - плоскостью, поведение П и И-регуляторов описывается прямой, т. е. все эти регуляторы являются линейными.

Компоненты ПИД-регулятора оказывают различное влияние на переходный процесс (табл. 11.1).

Таблица 11.1

Эффекты при увеличении коэффициентов ПИД-регулятора

Коэффициент	Время нарастания	Установившаяся ошибка	Перерегулирование
Пропорциональный	уменьшает	уменьшает	увеличивает
Дифференциальный	не влияет	не влияет	уменьшает
Интегральный	уменьшает	устраняет	увеличивает

Таким образом, в формуле (11.1) первое слагаемое отвечает за быстродействие системы (время нарастания), а также за величину установившейся ошибки. Второе слагаемое позволяет увеличить демпфирование системы, т. е. подавить нежелательные колебания и уменьшить перерегулирование. Третье слагаемое позволяет уменьшить до нуля установившуюся ошибку в системе.

Если математическая модель объекта известна достаточно точно, то параметры ПИД-регулятора можно определить в результате выбранной процедуры оптимизации, например с помощью генетического алгоритма.

В общем случае ПИД-регуляторы можно отнести к категории экспертных регуляторов, поскольку они могут настраиваться путем непосредственных экспериментов с объектом в соответствии с известными методиками (Зиглера - Николса и др.).

Метод Зиглера - Николса формулируется в двух вариантах - для замкнутой и разомкнутой системы. Рассматриваются П, ПИ и ПИД-регуляторы.

Перепишем закон управления ПИД-регулятора в виде передаточной функции

$$H(S) = K_p \left(1 + T_d S + \frac{1}{T_i s}\right).$$

Рассмотрим первый вариант (замкнутая система):

- 1) коэффициенты k_d и k_i устанавливаются равными нулю, а коэффициент k_p увеличивается до тех пор, пока в системе не возникнут автоколебания.
- 2) обозначим предельное значение k_p как P , а период автоколебаний как T .
- 3) значения коэффициентов регулятора рассчитываются в соответствии с табл. 11.2.

Таблица 11.2
Расчет коэффициентов регулятора (вариант 1)

		T_i	T_d
П	$0.5 P$		
ПИ	$0.45 P$	$T/1.2$	
ПИД	$0.6 P$	$T/2$	$T/8$

Пусть объект управления описывается передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^3 + 15p^2 + 2p + 1}.$$

Требуется рассчитать параметры ПИД-регулятора

4

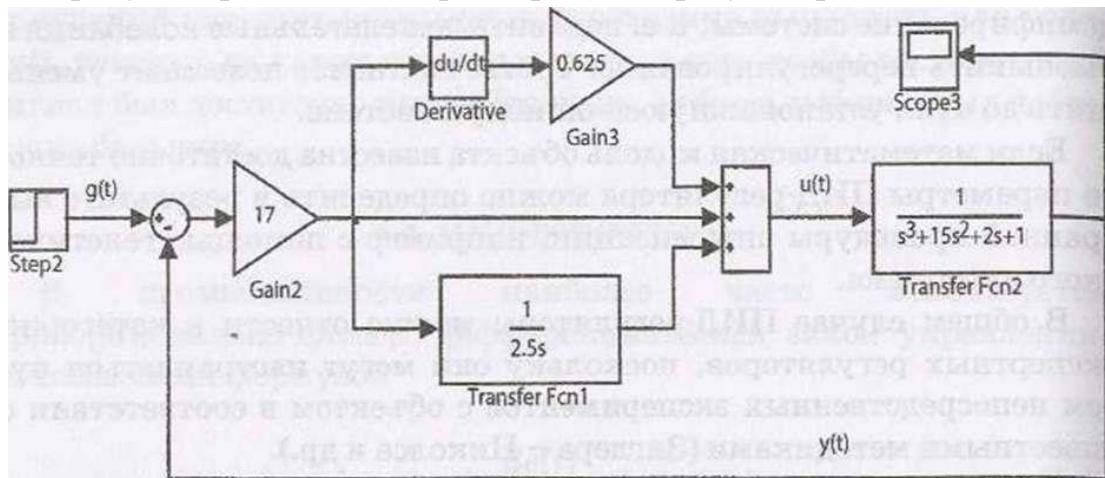


Рис. 11.2. Моделирование работы ПИД-регулятора

Схема моделирования вSimulinkMatLab показана на рис. 11.2. Автоколебания в системе возникают при $K_p=28$ (рис. 11.3). Таким образом, $P = 28$, $T \sim 5$.

В соответствии с табл. 11.2 получаем:

$$K_p \approx 17; T_d \approx 0.625; T_i \approx 2.5.$$

Переходный процесс для ПИД-регулятора показан на рис. 11.4.

Рассмотрим второй вариант (разомкнутая система).

На вход системы подается единичный скачок. Независимо от того, является система устойчивой или неустойчивой, строится касательная к точке перегиба кривой переходного процесса, и определяются два параметра: R и L (рис. 11.5). Далее коэффициенты выбранного типа регулятора рассчитываются в соответствии с табл. 11.3.

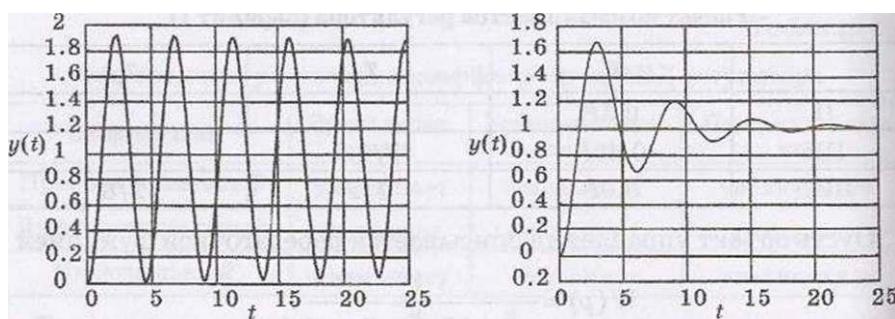


Рис. 11.3. Незатухающие колебания
системе управления Рис. 11.4. Переходный процесс в
системе с ПИД-регулятором

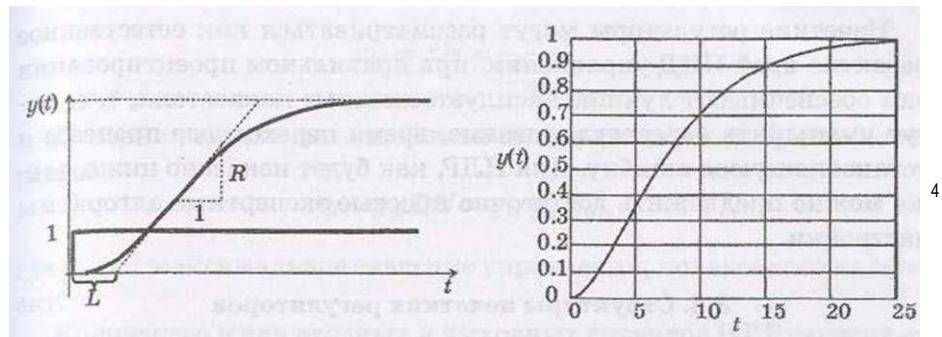


Рис. 11.5. Определение параметров
устойчивой системы Рис. 11.6. Переходный процесс для
для системы без регулятора

Таблица 11.3

Расчет коэффициентов регулятора (вариант 2)

	K_p	T_i	T_d
П	$1/(RL)$		
ПИ	$0.9/(RL)$	$3L$	
ПИД	$1.2/(RL)$	$2L$	$0.5L$

Пусть объект управления описывается передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{17p^2 + 8p + 1}.$$

Требуется рассчитать параметры ПИД-регулятора. Кривая переходного процесса для разомкнутой системы показана на рис. 11.6.

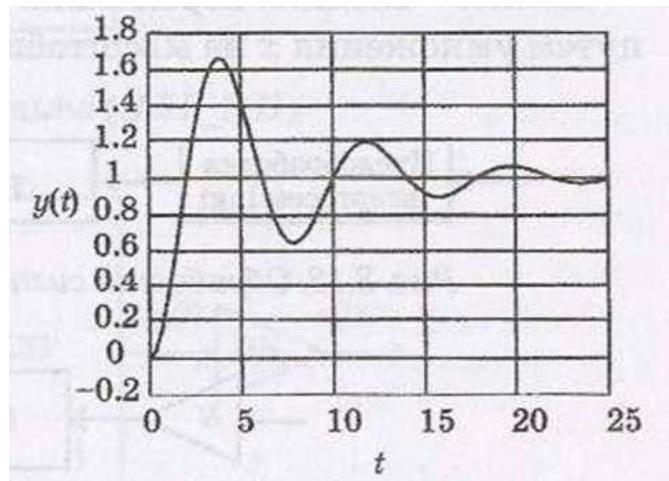


Рис. 11.7. Переходный процесс в системе с ПИД-регулятором

По кривой переходного процесса, показанной на рис. 11.6, определяем
 $L \approx 1; R \approx 0.1.$

Затем по формулам табл. 11.2 имеем

$$K_p \approx 12; T_d \approx 0.5; T_i \approx 2.$$

процесс для замкнутой системы показан на рис. 11.7.

Как показывают рис. 7.4 и 7.7, Для ПИД-регуляторов, рассчитанных по методике Зиглера - Николса>> характерно большое перерегулирование (порядка 60%).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 12

12. ПРИМЕР СИНТЕЗА НЕЧЕТКОГО РЕГУЛЯТОРА П-ТИПА

4

В *SimulinkMatLab*контейнером для системы нечеткого логического вывода является блок *FuzzyLogicController*(пакет *FuzzyLogicToolBox*).

Синтезируем нелинейный НЛР_П в соответствии с методикой, изложенной в методическом материале 4-го занятия, для объекта, описываемого передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{1}{0.02s^2 + 0.4s + 1}.$$

Этот объект является устойчивым, но время переходного процесса слишком велико (рис. 12.1).

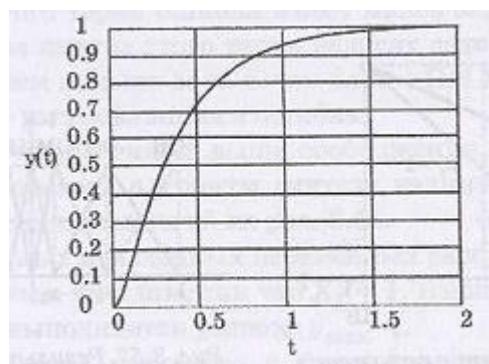


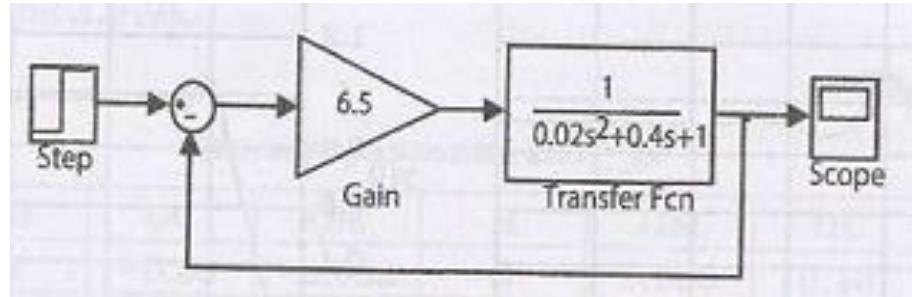
Рис. 12.1. Реакция объекта управления на единичный скачок

Требуется обеспечить переходный процесс с малым временем нарастания, установившейся ошибкой $\Delta < 3\%$ и перерегулированием $\delta \leq 10\%$.

Будем использовать описанный выше 3-шаговый алгоритм проектирования.

1. Рассмотрим НЛР_П с тремя правилами, который имеет единичный коэффициент усиления (рис. 12.1 и 12.2). Такой регулятор не оказывает влияния на процесс управления. Выберем базовый коэффициент усиления $k_p = 6.5$, при этом обеспечивается условие $y_{max}=1$ (см. рис. 12.2 и 12.3).

Таким образом, центрами термов ОБ и ПБ будут точки -1 и 1.



4

Рис. 12.2. Базовый П-регулятор

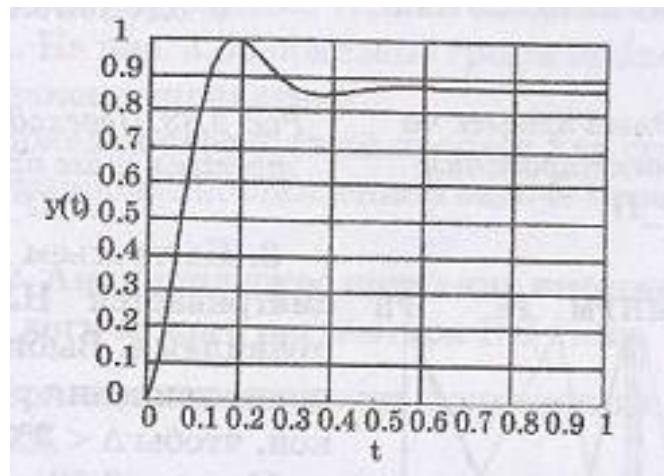


Рис. 12.3. Переходный процесс при базовом коэффициенте усиления

2. Рассмотрим НЛР_П с тремя правилами (рис. 12.4). Блок Saturation служит для приведения входной переменной к заданному диапазону. Термы выходной переменной регулятора располагаются по базовой шкале в соответствии с рис. 12.4, термы входной переменной - в соответствии с рис. 12.5. Методом проб и ошибок выбирается значение $x_1 = 0.5$ (рис. 12.5), при этом обеспечивается Минимальное время нарастания при заданном перерегулировании.

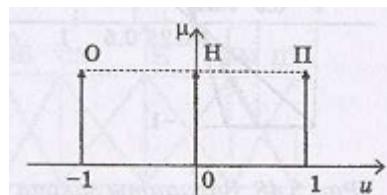


Рис. 12.4. Описание выхода регулятора с тремя правилами.

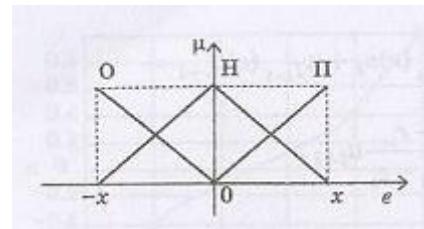


Рис. 12.5. Описание входа регулятора с тремя правилами

Переходный процесс показан на рис. 12.6.

Центральми термов ОС и ПС будут точки $-0.5 * 0.66 = -0.33$ и $0.5 * 0.66 = 0.33$.

4

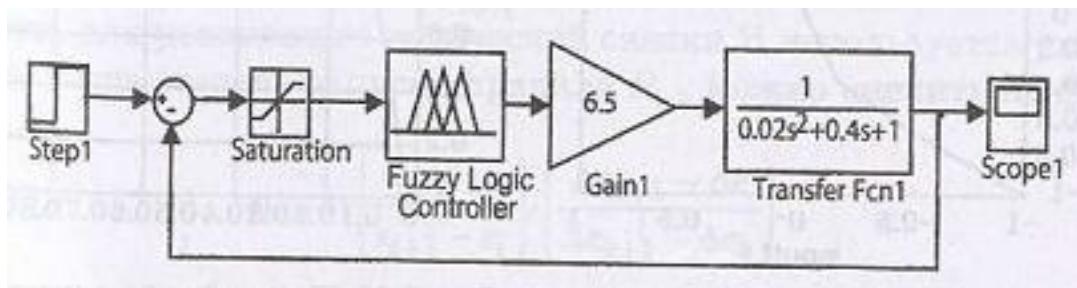


Рис.

12.3. Система с нечетким регулятором Π -типа.

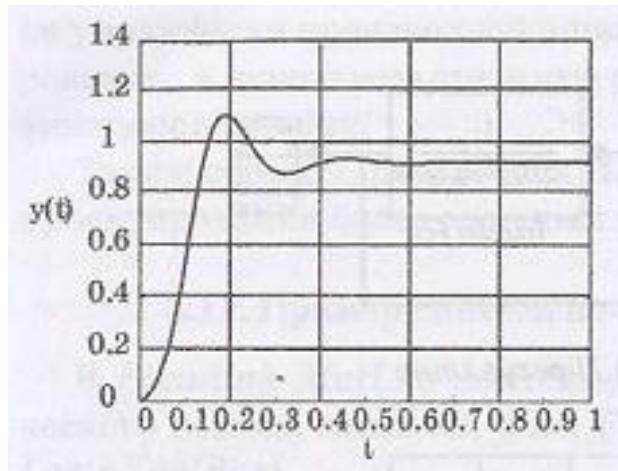


Рис. 12.6. Переходный процесс на втором шаге проектирования НЛР Π

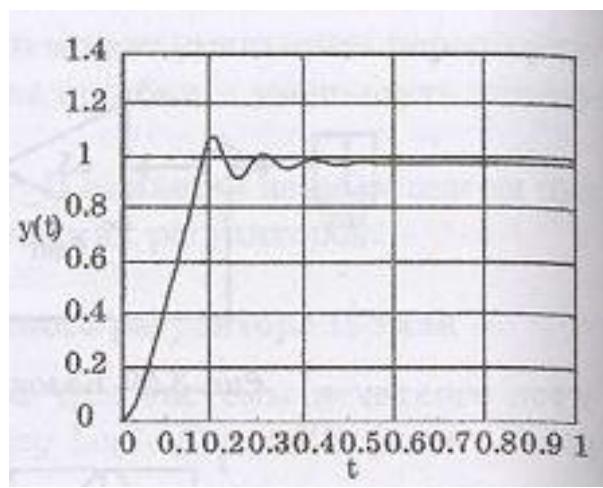


Рис. 12.7. Переходный процесс на третьем шаге проектирования НЛР Π

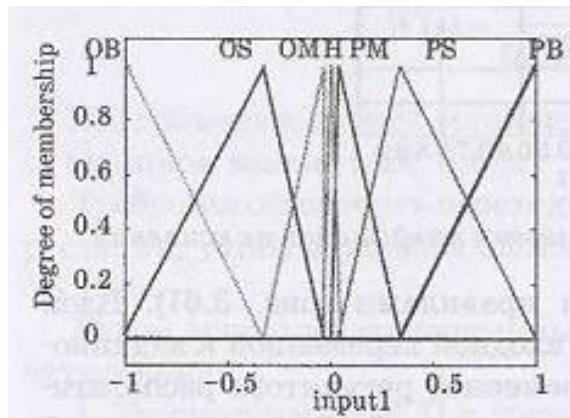


Рис. 12.8. Описание термов ошибки управления

3. На третьем шаге снова рассматривается НЛР_П с тремя правилами. Выбирается коэффициент усиления регулятора x_2 такой, чтобы $\Delta < 3\%$. На рис. 12.6 показан переходный процесс, удовлетворяющий этим критериям (при $x_2 = 0.1$).

Центральми термов ОМ и ПМ будут точки $-0.1 \cdot 0.33 = -0.033$ и $0.1 \cdot 0.33 = 0.033$.

4. На последнем шаге необходимо получить нелинейный закон управления НЛР_П. Центры термов входной переменной (e) рассчитываются в соответствии с табл. 12.1.

*Таблица 12.1
Закон управления НЛР_П*

	ОБ	ОС	ом	И	ПМ	ПС	ПБ
e	-1	$-0.66 * x_2$	$-0.33 * x_1$	0	$0.33 * x_1$	$0.66 * x_2$	1
u	-1	-0.66	-0.33	0	0.33	0.66	1

Центры термов выходной переменной (u) располагаются равномерно (табл.12.2)

*Таблица 12.2
Закон управления НЛР_П*

	ОБ	ОС	ОМ	И	ПМ	ПС	ПБ
e	-1	-0.33	-0.033	0	0.033	0.33	1
u	-1	-0.66	-0.33	0	0.33	0.66	1

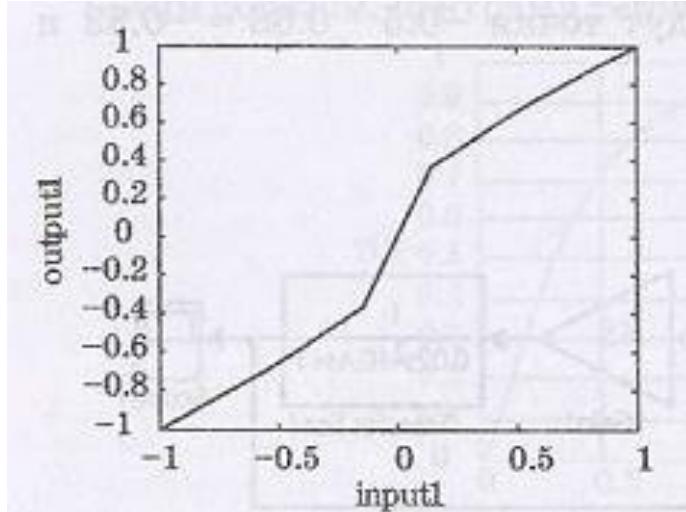


Рис. 12.9. Итоговый закон управления НЛР_П

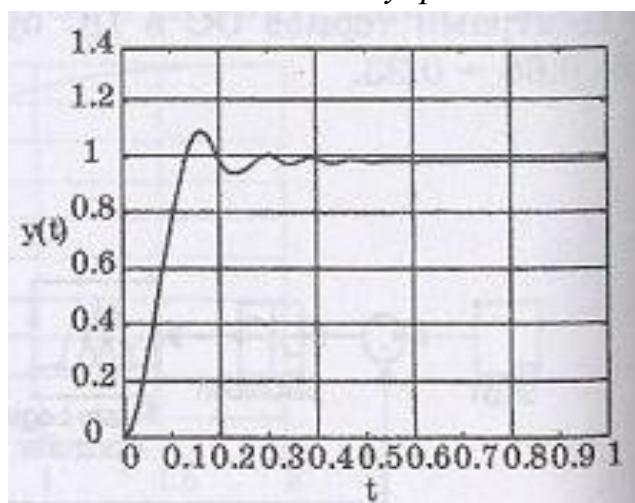


Рис. 12.10. Переходный процесс для НЛР_П с семью правилами

Окончательное расположение термов входной переменной показано на рис. 12.7. На рис. 12.9 показано графическое представление получившегося закона управления.

На рис. 12.10 показан переходный процесс для синтезированного НЛР_П, он удовлетворяет поставленной задаче проектирования.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 13

13. ПРИМЕР СИНТЕЗА НЕЧЕТКОГО РЕГУЛЯТОРА ПИ - ТИПА

4

Рассмотрим пример. В соответствии с рис. 13.1 сформируем в *SimulinkMatLab* модель системы управления с НЛР_ПИ при $x=0.08$ (рис. 13.2).

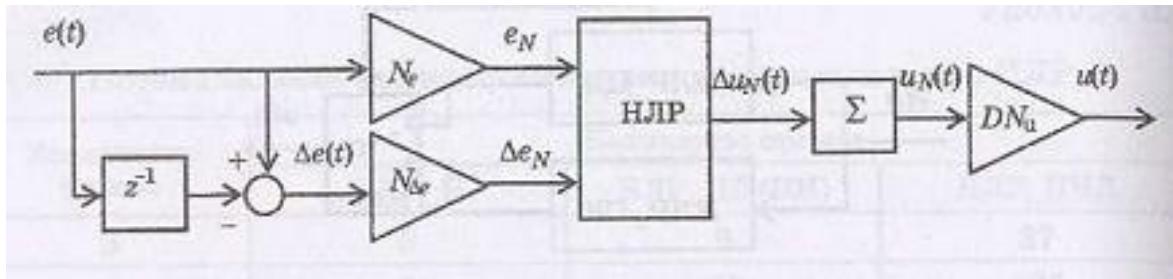


Рис. 13.1. Дискретное описание НЛР_ПИ

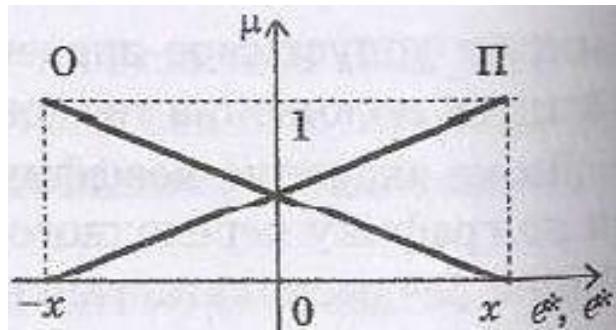


Рис. 13.2. Лингвистическое описание входов и выхода НЛР_ПИ

Таблица 13.1

Лингвистические правила НЛР_ПИ

Таблица правил		$e^*(k)$		$\Delta u^*(t)$
		O	Pi	
$\Delta e^*(k)$	O	O	H	
	Pi	H	Pi	

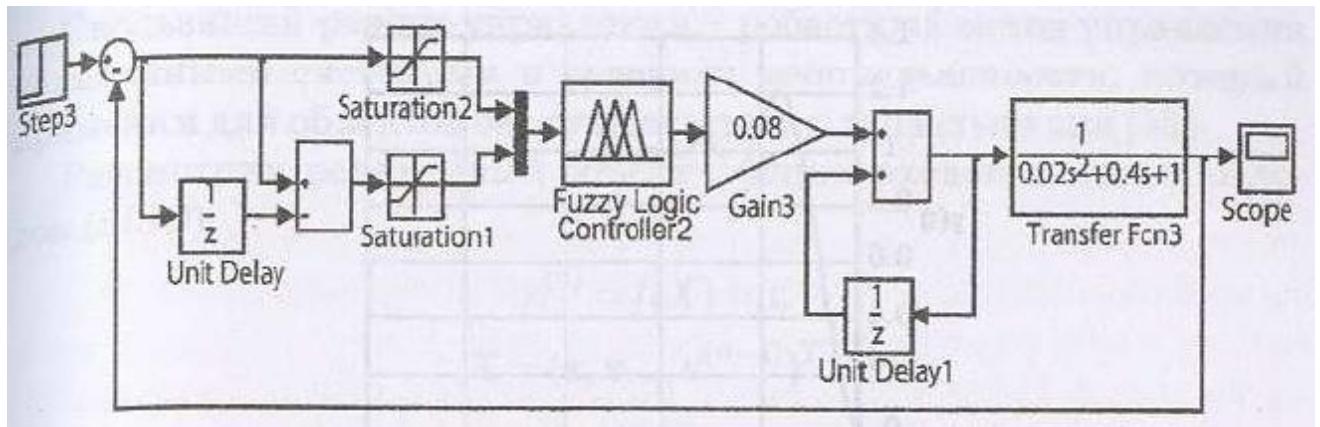


Рис. 13.3. Система с НЛР_ПИ в SimulinkMatLab

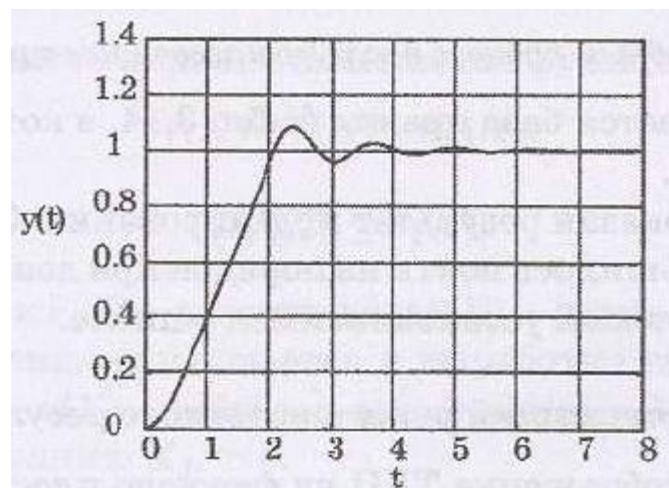


Рис. 13.4. Переходный процесс для системы с НЛР_ПИ

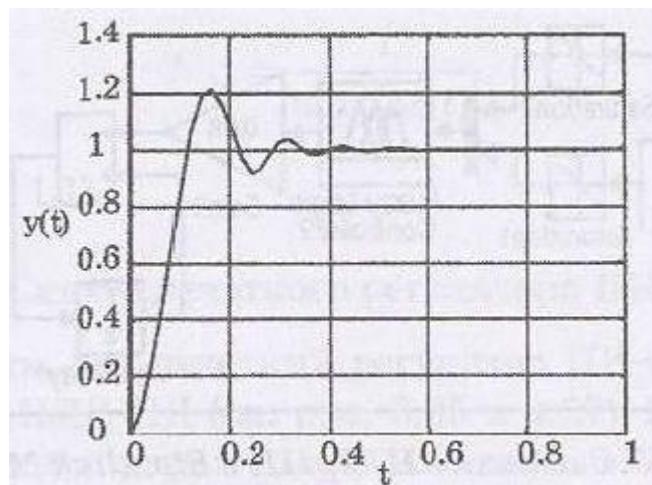
На рис. 13.4 приведен переходный процесс для синтезированной системы. Рис. 13.4 показывает, что достигнута нулевая установившаяся ошибка, однако время установления получается слишком большим. Следовательно, закон управления, заданный табл. 13.1, не вполне удовлетворителен. Рассмотрим алгоритм пошаговой настройки НЛР_ГШ, который (как и в случае с НЛР ПД) начинается с конструирования НЛР_П.

Алгоритм включает следующие шаги.

1. Синтезируется НЛР_П, отвечающий заданным требованиям к перерегулированию, времени нарастания и установившейся ошибке. После этого шага оказывается известным положение термов ЛП «Ошибка» и «Сигнал управления», а также значение коэффициента Денормализации.

$$N_{ie} = \frac{1}{\max \left| \int e(t) dt \right|}.$$

2. Термы ЛП «интеграл ошибки управления» равномерно располагаются по базовой шкале.



4

Рис. 13.5. Переходный процесс после пошаговой настройки НЛР_ПИ

3. Рассматривается база правил (табл. 13.1, в которой вместо Δe^* используется $J e^*$).

На рис. 13.5 показан результат моделирования. Очевидно, время нарастания уменьшилось почти на порядок при допустимом перерегулировании и нулевой установившейся ошибке.

Практическое занятие № 14

Синтез нечеткого регулятора ПИД-типа

4

Рассмотрим реализацию структуры НЛР_ПИД рис. 14.1 с использованием синтезированных выше НЛР_ПД и НЛР_ПИ (рис. 14.2).



Рис.14.1.

На рис. 14.3 показан переходный процесс в системе.

Существуют также альтернативные варианты синтеза НЛР_ПИД, рассмотрим некоторые из них.

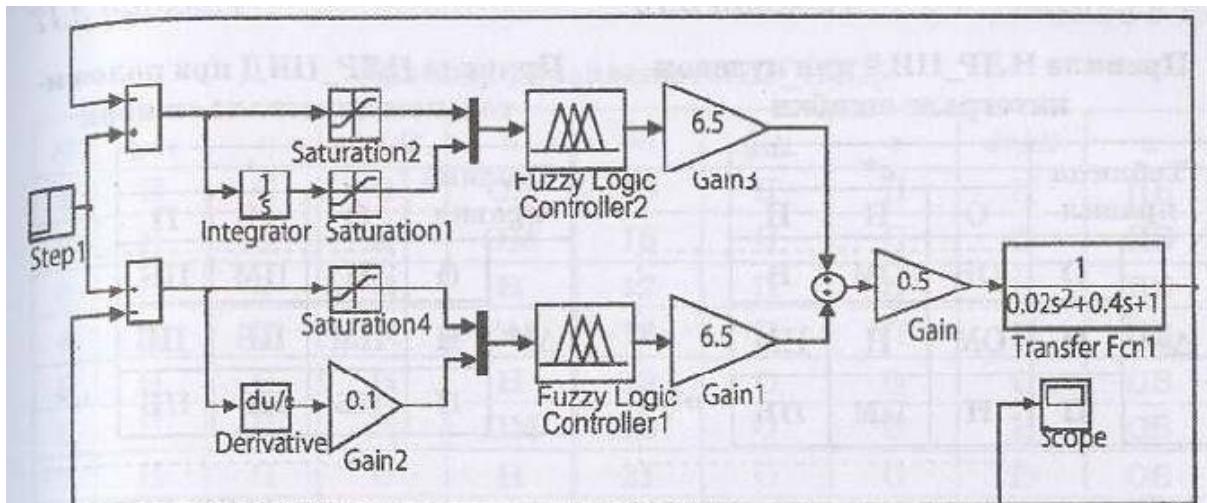


Рис. 14.2. Схема моделирования НЛР_ПИД в SimulinkMatLab

Рассмотрим далее реализацию структуры, показанной на рис. 14.2, т. е. непосредственно НЛР_ПИД, получающего на входе ошибку, ее производную и интеграл.

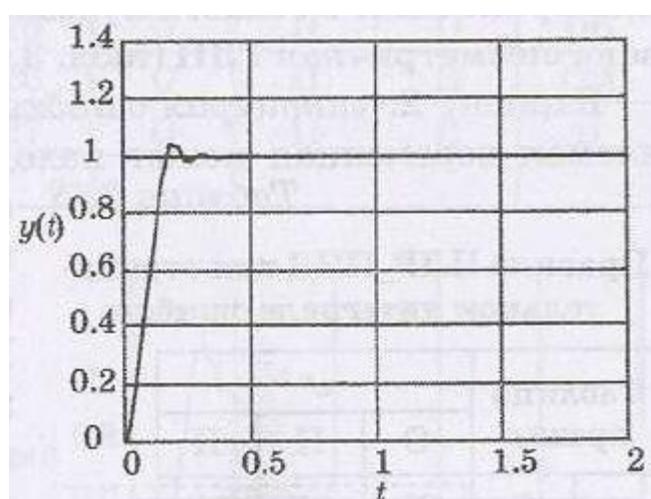


Рис. 14.3. Переходный процесс под управлением НЛР_ПИД

С целью минимизации количества правил будем для входных переменных использовать по 3 терма (что дает 27 управляющих правил). При этом каждой переменной соответствует собственный масштаб базовой шкалы x (рис. 14.4).

Для описания сигнала управления будем использовать 5 термов

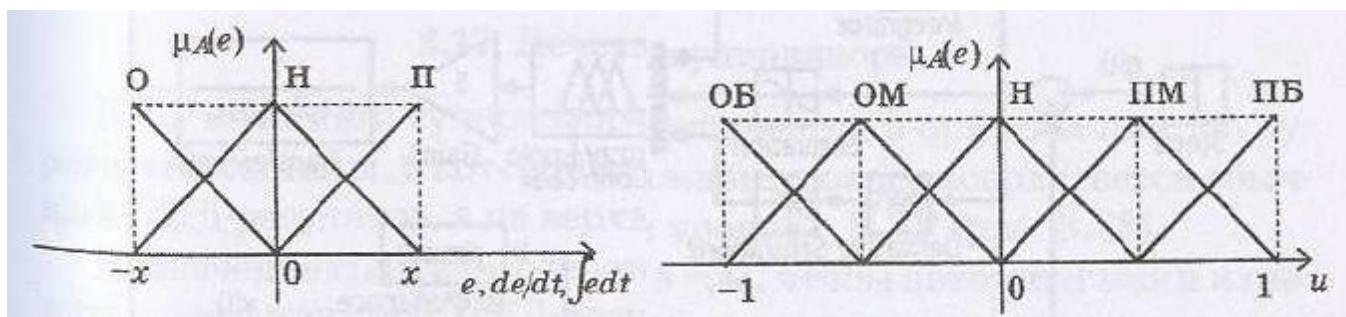


Рис. 14.4. Лингвистическое описание

Лингвистическое описание
входных переменных НЛР_ПИД
переменной НЛР_ПИД

Рис 14.5.

выходной

Таблица 14.1

Правила НЛР_ПИД при нулевом
интеграле ошибки

Таблица правил		e^*		
		О	Н	П
Δe^*	О	ОВ	ОМ	Н
	Н	ОМ	Н	ПМ
	П	Н	ПМ	ПБ

Таблица 14.2

Правила НЛР_ПИД при положи-
тельном интеграле ошибки

Таблица правил		e^*		
		О	Н	П
Δe^*	О	Н	ПМ	ПБ
	Н	ПМ	ПБ	ПБ
	П	ПБ	ПБ	ПБ

Рассмотрим проекции поверхности управления НЛР_ПИД на плоскость $e, de/dt$ при различных лингвистических значениях $\int edt$.

Вариант 1: «интеграл ошибки» = $\langle H \rangle$. В этой ситуации колебания происходят в области нулевой ошибки, и может быть использована симметричная ТЛП (табл. 14.1).

Вариант 2: «интеграл ошибки» = $\langle 77 \rangle$. В этой ситуации управляемая переменная может находиться в области положительной ошибки, тогда требуется сигнал коррекции, величина которого пропорциональна росту ошибки. Если же интеграл ошибки положительный, а сама ошибка отрицательная и уменьшается, то коррекция нулевая (табл. 14.3).

Таблица 14.3

		Правила НЛР_ПИД при отрицательном интеграле ошибки		
Таблица правил		e^*		
		O	H	P
Δe^*	O	OБ	OБ	OБ
	H	OБ	OБ	OМ
	P	OБ	OМ	H

u^*

Вариант 3:
 $ki \rangle = \langle O \rangle$.

«интеграл ошибки»
 Этот вариант оказывается симметричным предыдущему варианту (табл. 14.3).

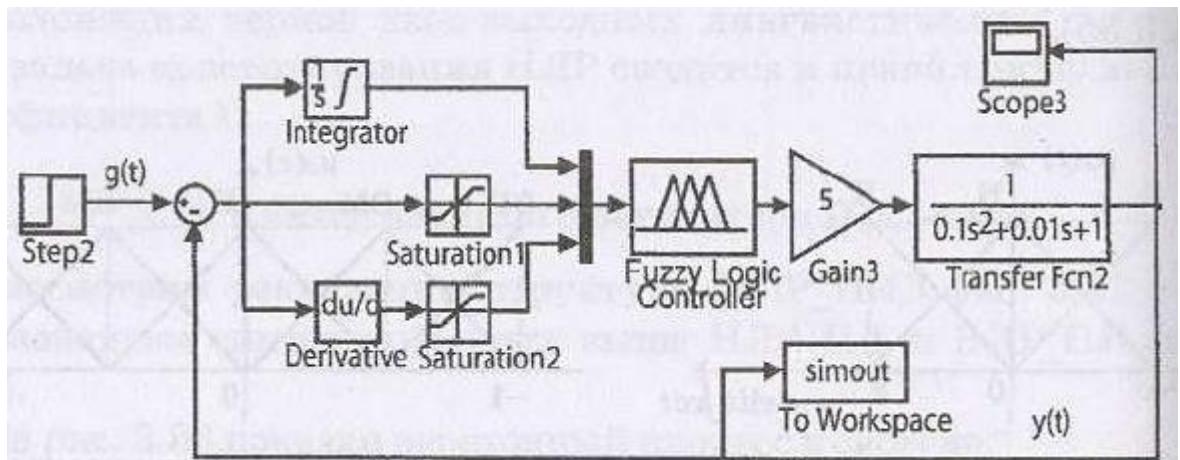


Рис. 14.6. Схема НЛР_ПИД в SimulinkMatLab

Таблица 14.4

Правила управления НЛР_ПИД

Nº	$\int e dt$	e	de/dt	u	Nº	$\int e dt$	e	de/dt	u
1	Н	О	О	ОВ	15	П	Н	П	ПБ
2	Н	О	Н	ОМ	16	П	П	О	ПВ
3	Н	О	П	Н	17	П	П	Н	ПВ
4	Н	Н	О	ОМ	18	П	П	П	ПВ
5	Н	Н	Н	Н	19	О	О	О	ОВ
6	Н	Н	П	ПМ	20	О	О	Н	ОВ
7	Н	П	О	Н	21	О	О	П	ОВ
8	Н	П	Н	ПМ	22	О	Н	О	ОВ
9	Н	П	П	ПВ	23	О	Н	Н	ОВ
10	П	О	О	Н	24	О	Н	П	ОМ
11	П	О	Н	ПМ	25	О	П	О	ОВ
12	П	О	П	ПВ	26	О	П	Н	ОМ
13	П	Н	О	ПМ	27	О	П	П	Н
14	П	Н	Н	ПВ					

Общая таблица правил приобретает следующий вид (табл. 14.4), она содержит 27 правил, и каждое правило имеет три посылки.

На рис. 14.6 показана структурная схема НЛР_ПИД в *SimulinkMatLab*, а на рис. 14.7 - переходный процесс в системе. В схеме использован интегратор с насыщением, иначе НЛР_ПИД вырождается в НЛР_ПД.

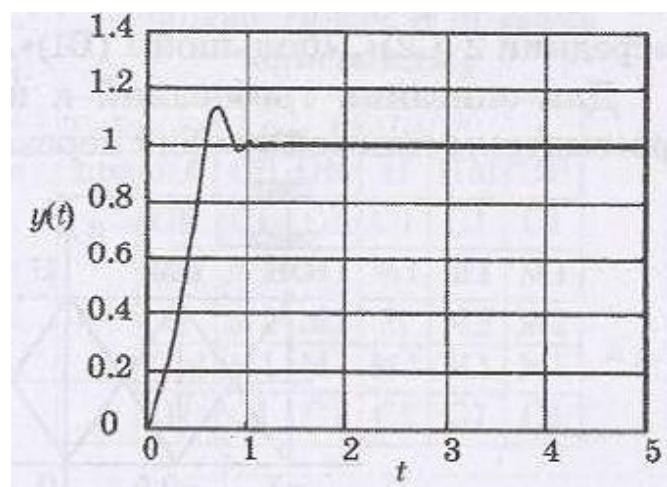


Рис. 14.7. Переходный процесс под управлением НЛР_ПИД

Литература

1. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник для вузов : в 5 т.. Т. 5. Методы современной теории автоматического управления / К. А. Пупков [и др.] ; под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. 2-е изд., перераб. и доп. М. : МГТУ им.Баумана, 2004. 784 с. : ил. (Методы теории автоматического управления/под общ.ред.К.А.Пупкова) . ISBN 5-7038-2190-8 (Т. 5) ((в пер.)) . ISBN 5-7038-2194-0. [12 экземпляров ТулГУ]
2. Гаскаров, Д.В. Интеллектуальные информационные системы : Учебник для вузов / Д.В.Гаскаров. М. : Высш.шк., 2003. 431с. ISBN 5-06-004611-7 /в пер./ : 111.00. [10 экземпляров ТулГУ]
3. Ясницкий, Л.Н. Введение в искусственный интеллект : учеб. пособие для вузов / Л.Н. Ясницкий. М. : Академия, 2005. 176с. : ил. (Высшее профессиональное образование: Информатика и вычислительная техника) . ISBN 5-7695-1958-4 : 139.00. [5 экземпляров ТулГУ]
4. Усков, А.А. Интеллектуальные технологии управления. Искусственные нейронные сети и нечеткая логика / А.А.Усков, А.В.Кузьмин. М. : Горячая линия-Телеком, 2004. 143с. : ил. ISBN 5-93517-181-3 : 123.00. [3 экземпляра ТулГУ]
5. Смолин, Д.В. Введение в искусственный интеллект: конспект лекций / Д.В.Смолин. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. 208с. : ил. ISBN 5-9221-0513-2 /в пер./ : 236.00. [3 экземпляра ТулГУ]
6. Павлов, С. Н. Системы искусственного интеллекта. Часть 1 : учебное пособие / С. Н. Павлов. Системы искусственного интеллекта. Часть 1, Весь срок охраны авторского права. Томск : Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Эль Контент, 2011. 176 с. ISBN 978-5-4332-0013-5. [ЭБС “IPRbooks ”].
7. Пальмов, С. В. Интеллектуальные системы и технологии : учебное пособие / С. В. Пальмов. Интеллектуальные системы и технологии, Весь срок охраны авторского права. Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2017. 195 с. ISBN 2227-8397. [ЭБС “IPRbooks ”].
8. Назаров, Дмитрий Михайлович. Интеллектуальные системы: основы теории нечетких множеств : Учебное пособие для вузов / Назаров Д. М., Конышева Л. К. 3-е изд., испр. и доп. Москва: Юрайт, 2020. 186 с. (Высшее образование) . ISBN 978-5-534-07496-3 : 519.00. [ЭБС “Юрайт”]

9. Васильев, В.И.Уфимский авиацион. техн. ин-т. Интеллектуальные системы управления с использованием нечеткой логики : учеб.пособие / В.И.Васильев, Б.Г.Ильясов; Уфимский авиац.техн.ун-т. Уфа, 1995. 100с. : ил. : 6.00. [1 экземпляр ТулГУ] 4
10. Системы искусственного интеллекта. Практический курс : учеб. пособие для вузов / В. А. Чулюков [и др.]. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 293 с : ил. (Адаптивные и интеллектуальные системы) . ISBN 978-5-94774-731-7 ((в пер.)) . [1 экземпляр ТулГУ]
11. Аверкин, А.Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интелекта / А.Н.Аверкин [и др.]; под ред. Д.А.Поспелова. М.: Наука, 1986. 312с.: ил. (Проблемы искусственного интеллекта; 8) . ISBN /В пер./ : 2.40. [1 экземпляр ТулГУ]
12. Батыршин, И.З. Нечеткие гибридные системы.Теория и практика / Батыршин И.З.[и др.];под ред.Н.Г.Ярушкиной. М. : Физматлит, 2007. 208с. (Информационные и компьютерные технологии) . ISBN 978-5-9221-0786-0 /в пер./ : 130.00. [1 экземпляр ТулГУ]
13. Пенькова, , Т. Г. Модели и методы искусственного интеллекта : учебное пособие / Т. Г. Пенькова, Ю. В. Вайнштейн. Модели и методы искусственного интеллекта, 2025-10-09. Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2019. 116 с. ISBN 978-5-7638-4043-8. [ЭБС “IPRbooks”].
14. Трофимов, В. Б. Экспертные системы в АСУ ТП: учебник / В. Б. Трофимов, И. О. Темкин. Экспертные системы в АСУ ТП, 2025-08-03. Москва, Вологда : Инфра-Инженерия, 2020. 284 с. ISBN 978-5-9729-0480-8 [ЭБС “IPRbooks”].
15. Лубенцева, Е. В. Системы управления с динамическим выбором структуры, нечеткой логикой и нейросетевыми моделями: монография / Е. В. Лубенцева. Системы управления с динамическим выбором структуры, нечеткой логикой и нейросетевыми моделями, Весь срок охраны авторского права. Ставрополь : Северо-Кавказский федеральный университет, 2014. 248 с. ISBN 978-5-88648-902-6. [ЭБС “IPRbooks”].
16. Сырецкий, Г. А. Моделирование систем. Часть 2. Интеллектуальные системы : учебное пособие / Г. А. Сырецкий. Моделирование систем. Часть 2. Интеллектуальные системы, 2025-02-05. Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2010. 80 с. ISBN 978-5-7782-1341-8. [ЭБС “IPRbooks”].