МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 14 » января 2021 г., протокол № 5
с учетом изменений и дополнений,
утвержденных на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«17» июня 2021 г., протокол № 10,
вступающих в силу с 1 сентября 2021 года

Заведующий кафедрой

В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий по дисциплине (модулю)
"Математика в социально - гуманитарной сфере"

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
39.03.01 Социология

с направленностью (профилем)
Социальные процессы и структуры на макро- и микроуровнях

Форма обучения: заочная
Идентификационный номер образовательной программы: 39301-01-21

Тула 2021 год

Разработчик методических указаний

Бакулин Н.В., доцент, к.т.н., доцент ________________________________

_________ _______

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

1. Множества. Операции над множествами

Понятие множества в математике относится к неопределяемым (подобно понятиям числа и точки).

Множеством является совокупность объектов, объединенных каким-либо признаком.

Объекты – элементы множества – обозначаются строчными буквами. Сами множества обозначаются заглавными (прописными) буквами латинского алфавита. Тот факт, что a является элементом множества A обозначается $a \quad A$ (говорят, что a принадлежит A); то, что a не является элементом множества A,обозначается $a \quad A$ (говорят, что a не принадлежит A).

Считается, что множество задано, если перечислены все его элементы или названо характеристическое свойство, по которому можно определить, принадлежит данный элемент множеству или нет, например:

$M = \{1,2,3,4,5\}$ или $M = \{x: \; x \quad N, 1 \quad x \quad 5\}$

<u>Пример</u>: Найти элементы множества: $A = \{x: \; x \quad N, \; 2x^2 - 7x + 3 = 0\}$.

Решив квадратное уравнение, находим его корни $x_1 = \frac{1}{2} \quad N$, $x_2 = 3 \quad N$, значит $A = \{3\}$.

- Множества, состоящие из одних и тех же объектов, называются равными

<u>Пример</u>: $A = \{0,2,3\}$, $B = \{3,2,0\}$

$A = B$

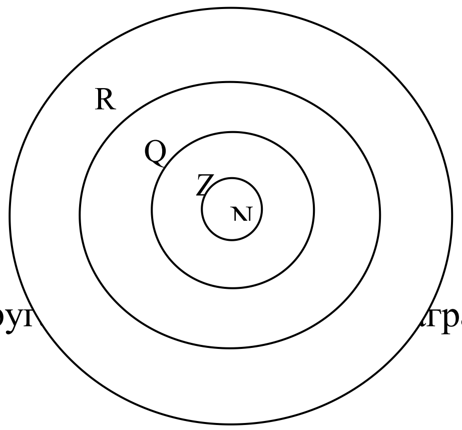
- Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то B называется подмножеством множества A: $B \quad A$

<u>Пример</u>: $B = \{3,2\} \quad A = \{3,2,0\}$

– подмножество любого множества; A подмножество A

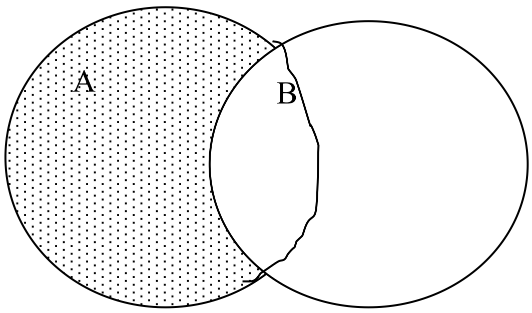
$N \quad Z \quad Q \quad R$

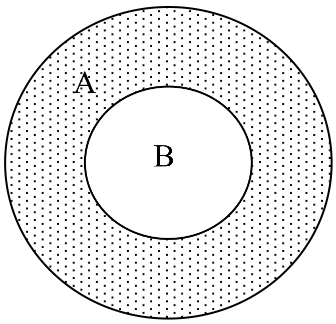
N –множество натуральных чисел
Z – множество целых чисел
Q – множество рациональных чисел
R – множество действительных чисел



Изобразим множества A и B кру граммы Эйлера-Венна)

- Множество C , элементами которого являются все элементы множества A , не принадлежащие множеству B , называется разностью множеств A и B и записывается $C = A \setminus B$.





Примеры

1) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2\}$ $\qquad A \setminus B = \{3\}$

2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$ $\qquad A \setminus B = \{1,2\}$

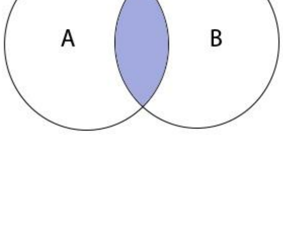
3) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ $\qquad A \setminus B =$

- Если $B \quad A$, то $A \setminus B$ – дополнение множества B до множества A

- Множество C , состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству A так и множеству B (и только из этих элементов), называется пересечением множеств A и $B: C = A \bigcap B$.

<u>Пример</u>: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

$C = A \bigcap B = \{2,3\}$



- Множества, пересечение которых есть пустое множество, называются непересекающимися: $\{0,1\} \bigcap \{2\} = \quad$.

<u>Пример</u>.

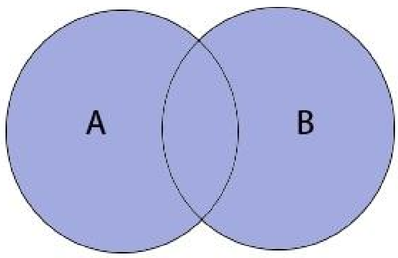
1) $\begin{matrix} x^2 + 4x + 4 = 0 \\ x \quad 0 \end{matrix}$

2) $\begin{matrix} x^2 + x - 2 = 0 \\ x \quad 0 \end{matrix}$ $\quad \{-2;1\} \bigcap [0;+ \quad) = \{1\}$

- Множество C, состоящее из всех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, называется объединением множеств A и $B : C = A \bigcup B$

<u>Пример.</u> $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

$C = A \bigcup B = \{1,2,3,4\}$



<u>Пример:</u>

1) $(x+1)(x^2-4) = 0$ $\{-2,-1,2\}$–совокупность решений

2) $(x-5)(x+3) > 0$ $\quad \begin{matrix} x > 5 \\ x > -3 \\ x < 5 \\ x < -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x > 5 \\ x < -3 \end{matrix} \quad (- \quad ;-3) \bigcup (5;+ \quad)$

Составить множества:

1) A– натуральные делители числа 12.

2) $B \setminus A$, если $A = \{-5,-4,-3\}$, $B = \{-5,-4,-3,-2\}$.

3) $R \setminus Q$, $Z \setminus N$

4) а) $[1;7] \cup [5;8]$, $[1;7] \cap [5;8]$, $[1;7] \setminus [5;8]$, $[5;8] \setminus [1;7]$

б) $(0;3] \cup [5;7)$, $(0;3] \cap [5;7)$, $(0;3] \setminus [5;7)$, $[5;7) \setminus (0;3]$

5) Объединение и пересечение корней уравнений

$x^2 + 9x - 10 = 0$ и $x^2 - 3x + 2 = 0$

6) Запишите решение неравенства $(x-1)(x-6) \quad 0$

7) A – натуральные делители числа 18,

B – натуральные делители числа 45. Найти $A \cap B$.

8) Найти $A \cap B$, если $A = \{x:\ x \quad Z, |x| < 5\}$ $B = \{x:\ x \quad N, |x-1| < 7\}$

9) Найти $A \cup B$, если $A = \{x:\ x^2 - 6x + 9 \quad 0\}$ $B = \{x:\ x \quad Z, |x| \quad 1\}$

• Множество A называется эквивалентным множеству B ($A \sim B$), если между элементами множеств A и B можно установить взаимно однозначное соответствие.

Различают конечные и бесконечные множества.

• Число элементов множества A называется его мощностью или кардинальным числом ($|A|$ или $cardA$).

Конечное множество, состоящее из n элементов имеетмощность $|A| = n$.

Если $A \sim N$, то множество A счетное.

Если $A \sim R$, то A – континуальное множество или множество мощности континуум.

Задачи для самостоятельного решения.

Изобразить диаграммы Эйлера-Венна для следующих множеств:

а) $(A \cap B) \setminus C$

б) $(A \cup B) \setminus C$

в) $(A \cap B) \cap C$

г) $(A \setminus B) \cap C$

д) $(A \setminus B) \cup C$

е) $(A \setminus B) \setminus C$

ж) $(A \cap B) \cup C$

Множество комплексных чисел

Определение. *Комплексным числом* называют всякую упорядоченную пару (x, y) действительных чисел.

Его обозначают $z = x + yi,\ x, y \quad R$, где $i = \sqrt{-1}$ или $i^2 = -1$.

Пример. Решить уравнение $x^2 + 6x + 25 = 0$ над множеством комплексных чисел

Вычислим дискриминант: $D = b^2 - 4ac = 36 - 100 = -64$.

Тогда $\sqrt{D} = \sqrt{-64} = \sqrt{-1 \quad 64} = \sqrt{-1} \quad \sqrt{64} = 8i$

Найдем корни уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = \frac{2(-3 \pm 4i)}{2} = -3 \pm 4i.$$

Запись $z = x + yi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.Действительные числаx и y называют соответственно *действительной* и *мнимой частью* комплексного числа $z = x + yi$:

$$\operatorname{Re} z = x \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называют комплексное число $z = z_1 + z_2$, действительная часть которого равна $x = x_1 + x_2$, а мнимая равна $y = y_1 + y_2$, т.е.

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называют комплексное число $z = z_1 - z_2$, действительная часть которого равна $x = x_1 - x_2$, а мнимая равна $y = y_1 - y_2$, т.е.

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число

$$z = z_1 \quad z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Число $\bar{z} = x - yi$ называется *сопряженным* (комплексно сопряженным) числу $z = x + yi$. Отметим, что $z \quad \bar{z} = x^2 + y^2$.

Частным (отношением) двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ при $z_2 \neq 0$ (т.е. $x_2 \neq 0,\ y_2 \neq 0$) называют комплексное число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} i.$$

Пример. Вычислить $(2 - 3i)^2 + 2i^{15}$

$(2 - 3i)^2 + 2i^{15} = 2^2 - 2 \quad 2 \quad 3i + (3i)^2 + 2i^{14} \quad i = 4 - 12i + 9i^2 + 2(i^2)^7 \quad i =$

$= 4 - 12i + 9i^2 + 2(i^2)^7 \quad i = 4 - 12i - 9 + 2 \quad (-1)^7 i = -5 - 12i - 2i = -5 - 14i$

Пример. Вычислить $\frac{7+3i}{3i-1}$

$$\frac{7+3i}{3i-1}=\frac{7+3i}{-1+3i}=\frac{(7+3i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}=\frac{-7-21i-3i-9i^2}{(-1)^2+3^2}=$$

$$=\frac{-7-24i+9}{1+9}=\frac{2-24i}{10}=\frac{1-12i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{12}{5}i.$$

Пример. Записать число $z=-\frac{2\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$ в алгебраической форме.

Число z в алгебраической форме имеет вид $z=x+yi$. Преобразуем дробь, умножив числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$z=-\frac{2\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=-\frac{2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\frac{2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{1-i^2}=-\frac{2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}{2}=$$

$$=-\sqrt{2}(1-\mathrm{i})=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

Алгебраическая форма: $z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.Здесь $\mathrm{Re}z=x=-\sqrt{2}$ и $\mathrm{Im}z=y=\sqrt{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $(4+5i)^2(5-4i)$ Ответ: $115+236i$
2. Вычислить $\frac{4-5i}{5+4i}-2i^{19}+i^{25}-i^{14}+2i^3$ Ответ: 1
3. Вычислить $\frac{2-5i}{3+i}$ Ответ: $0,1-1,7i$

2. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

О п р е д е л е н и е. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. $m\times n$ – порядок или размер матрицы. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

имеет размер 2×4, так как в этой матрице количество строк равно $m=2$, а количество столбцов равно $n=4$. Числа, из которых состоит матрица, называются элементами. В общем случае матрицы символически обозначаются следующим образом

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \| a_{ij} \|$$
.

Типы матриц:

1. Прямоугольные – $m \neq n$.
2. Квадратные – $m = n$.
3. Трапецеидальные – прямоугольные матрицы, у которых $a_{ij} = 0$ при $i < j$ или $i > j$.
4. Треугольные – квадратные матрицы, у которых $a_{ij} = 0$ при $i < j$ или $i > j$.
5. Диагональные – квадратные матрицы, у которых $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.
6. Единичная матрица – диагональная матрица, у которой $a_{ii} = 1$.
7. Траспонированная матрица A^T – это матрица, которая получается из матрицы A путём замены в ней строк столбцами.

П р и м е р ы   м а т р и ц.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
– прямоугольная матрица,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$
– квадратная матрица,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
– трапецеидальная матрица,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$ – треугольная матрица,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$ – диагональная матрица,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

2.2. Действия с матрицами

С матрицами можно выполнять следующие операции:

1) ***Сложение матриц.*** Матрица $C=\|c_{ij}\|$ называется суммой матриц $A=\|a_{ij}\|$ и $B=\|b_{ij}\|$,

если $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, Матрица *A* и *B* должны быть одного и того же порядка, Матрица *C* получится того же порядка, что и матрицы *A* и *B*.

П р и м е р. Найдите сумму матриц $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Элементы матрицы C получаем путём суммирования соответствующих элементов матриц *A* и *B*

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2+1) & (1+2) & (3+3)\\ (1+3) & (-1+2) & (2+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$$

2) ***Умножение матрицы на число.*** Матрица $C=\|c_{ij}\|$ называется произведением матрицы $A=\|a_{ij}\|$ на число λ, если $\|c_{ij}\|=\|\lambda a_{ij}\|$.

П р и м е р. Найдите произведение матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ -1 & 6\end{pmatrix}$ на число $\lambda=5$.

Р е ш е н и е. Элементы матрицы C получаем путём умножения элементов матрицы A на число $\lambda=5$

$$\lambda A=\begin{pmatrix}1\cdot5 & 3\cdot5\\ 2\cdot5 & 1\cdot5\\ -1\cdot5 & 6\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 15\\ 10 & 5\\ -5 & 30\end{pmatrix}$$

3) ***Умножение матриц***. Матрица $C=\|c_{ij}\|$ называется произведением матрицы $A=\|a_{ik}\|$ размером $m\times p$ и

матрицы $B = \left| b_{ij} \right|$ размером $p \times n$, если элементы матрицы C вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \tag{1}$$

Перемножать можно только матрицы, у которых количество столбцов первой равно количеству строк второй. Произвольные матрицы перемножать нельзя.

-

П р и м е р. Найдите произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 10 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Согласно формуле (1), имеем

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k} b_{k1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14,$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k} b_{k2} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 10,$$

$$c_{13} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k} b_{k3} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 10,$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{4} a_{2k} b_{k1} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 7,$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^{4} a_{2k} b_{k2} = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 6,$$

$$c_{23} = \sum_{k=1}^{4} a_{2k} b_{k3} = -1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 5\cdot 1 = 7.$$

Значит,

$$C = A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 10 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Рассмотренные операции с матрицами обладают теми же свойствами, что и операции сложения и умножения для вещественных чисел, за исключением произведения матриц, которое не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$. В этом можно убедиться с помощью следующего примера для матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Находим произведения

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+6 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0\cdot 2+0 \\ 0+0 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Как видим, $AB = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Определители

Каждой квадратной матрице по определённому правилу можно поставить в соответствие единственное число. Это число называется определителем и символически обозначается

$$\det A = \Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Порядок определителя равен порядку квадратной матрицы.

Определитель второго порядка вычисляется следующим образом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (2)$$

т.е. из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол), вычитается произведение элементов, находящихся на побочной диагонали (идущей из левого нижнего в правый верхний угол).

П р и м е р. Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Значения элементов матрицы A, т.е.

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = -3,\ a_{21} = 5,\ a_{22} = 8$$

Подставляем в формулу (2) и получаем

$$\det A = 1 \cdot 8 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23.$$

Определитель третьего порядка вычисляется с помощью формулы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (3)$$

З а м е ч а н и е. Чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников (правило Саррюса). Оно заключается в следующем. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются на главной диагонали и в вершинах треугольников, симметричных относительно главной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «–», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

П р и м е р. Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Подставляем значения элементов матрицы в формулу (3) и находим величину заданного определителя

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 1\cdot 4 + 3\cdot(-5)(-1) + 2\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot(-5)\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot(-1) =$$

$$= 4 + 15 + 4 - 6 + 40 + 1 = 58.$$

Для вычисления определителей третьего порядка можно пользоваться ещё правилом «3×5». Согласно этому правилу к заданной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

добавляют ещё первые два столбца

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются на главной диагонали и на отрезках, параллельных главной диагонали

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «–», располагаются на побочной диагонали и на отрезках, параллельных побочной диагонали

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Определитель $\det A$ равен сумме указанных произведений элементов с учетом их знаков.

Основные свойства определителей

Рассмотрим основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка

С в о й с т в о 1. Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\det A^T = \det A. \tag{4}$$

Действительно,

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23},$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

Из чего следует справедливость равенства (4).

Из свойства 1 следует, что свойствами определителей, сформулированные для строк будут такими же как и для столбцов. Поэтому следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк.

С в о й с т в о 2. При умножении элементов строки определителя на некоторое число определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В справедливости этого свойства можно убедиться, вычислив эти определители

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{13}a_{21}a_{32} + ka_{12}a_{23}a_{31} - ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{12}a_{21}a_{33} - ka_{11}a$$

$$= k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Определитель равен нулю в следующих случаях:

а) одна из строк нулевая

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

б) две равные строки

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

в) элементы двух строк пропорциональны

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

В справедливости перечисленных свойств легко убедиться с помощью формулы (3).

С в о й с т в о 4. Если две какие-либо строки определителя поменять местами, то знак определителя изменится на противоположный

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство этого свойства выполняется с помощью формулы (3).

С в о й с т в о 5. Если в определителе некоторая строка, например, первая является линейной комбинацией двух строк с коэффициентами λ и μ

$$a_{11} = \lambda b_{11} + \mu c_{11}, \;\; a_{12} = \lambda b_{12} + \mu c_{12}, \;\; a_{13} = \lambda b_{13} + \mu c_{13},$$

то определитель будет равен сумме двух определителей, определяемых формулой

$$\begin{vmatrix} \lambda b_{11} + \mu c_{11} & \lambda b_{12} + \mu c_{12} & \lambda b_{13} + \mu c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \lambda b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu c_{11} & \mu c_{12} & \mu c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Справедливость этого свойства можно доказать, сравнив значения левой и правой частей равенства, найденные с помощью формулы (3).

Свойство 6. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число

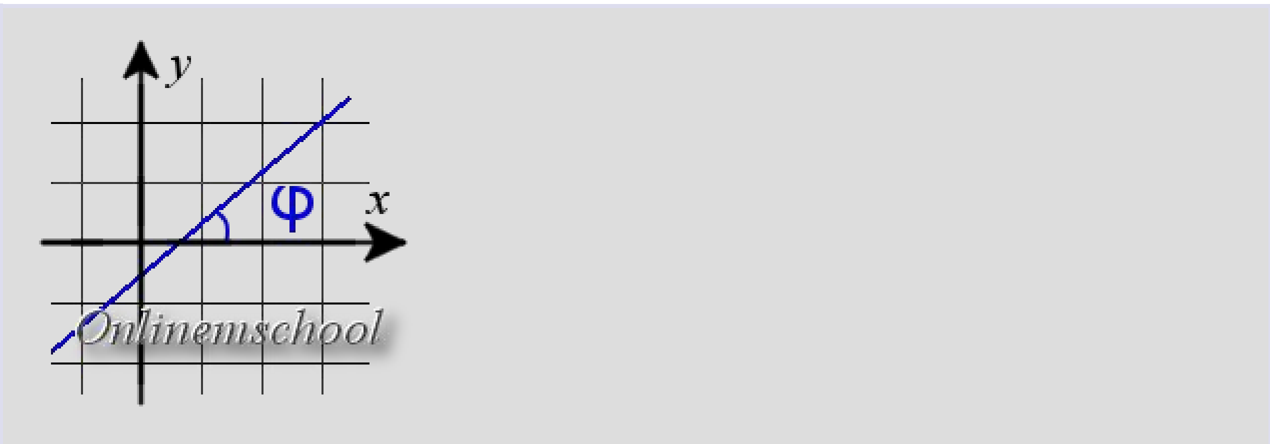
$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3.Уравнение прямой на плоскости

Любую прямую на плоскости можно задать линейным уравнением первой степени относительно переменных x и y вида

$$A x + B y + C = 0,$$

где A и B не могут быть одновременно равны нулю.



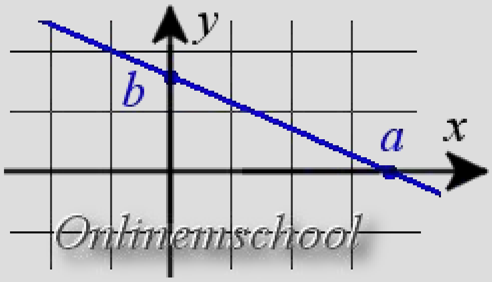
Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Общее уравнение прямой при B≠0 можно привести к виду

$$y = k x + b$$

где k - **угловой коэффициент** равный тангенсу угла, образованного данной прямой и положительным направлением оси OX.

$$k = \operatorname{tg} \varphi$$



Уравнение прямой в отрезках на осях

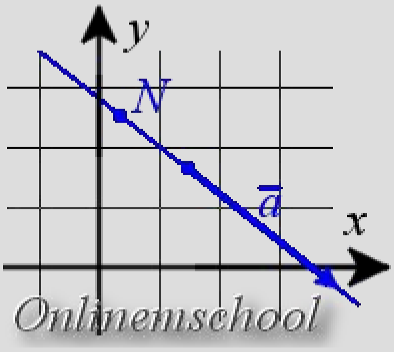
Если прямая пересекает оси OX и OY в точках с координатами (a, 0) и (0, b), то она может быть найдена используя формулу **уравнения прямой в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки на плоскости

Если прямая проходит через две точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$, такие что $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, то **уравнение прямой** можно найти, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



Каноническое уравнение прямой на плоскости

Если известны координаты точки $N(x_0, y_0)$ лежащей на прямой и направляющего вектора $a = \{l; m\}$ (l и m не равны нулю), то уравнение прямой можно записать в каноническом виде, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Пример . Найти уравнение прямой проходящей через две точки
$M(1, 7)$ и $N(2, 3)$.

Решение. Воспользуемся формулой для уравнения прямой проходящей через две точки

$$x - 12 - 1 = y - 73 - 7$$

Упростив это уравнение получим *каноническое уравнение прямой*

$$x - 11 = y - 7\text{-}4$$

Выразим у через х и получим *уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y - 7 = -4(x - 1)$$

$$y = -4x + 11$$

4.Пределы

Одним из основных понятий математического анализа является понятие предела. Примерами применения понятия предела могут служить окружность как предел вписанных и описанных многоугольников при бесконечном увеличении числа сторон или касательная как предельное положение секущей при сближении точек пересечения. Говорят, что функция $y=f(x)$ имеет предел А при х стремящемся к x_0, если значения функции $f(x)$ сколь угодно близко приближаются к числу А, когда значения переменной х сколь угодно близко приближаются к числу x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon>0 \;\exists\; \delta=\delta(\varepsilon)>0\text{: } \forall x \text{ из } 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|$$

Пример №1

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4}$.

Решение:

Данная функция элементарная, т.к. получена из основных элементарных функций (постоянной и степенной) с помощью конечного числа арифметических действий. Поскольку $x=-1$ принадлежит области определения функции, то ее предел в точке $x=-1$ равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+2x-4}=\frac{(-1)^2+3(-1)+2}{2(-1)^2+2(-1)-4}=\frac{0}{-4}=0.$$

Число А называется пределом числовой последовательности $y_n=f(n)$, если для любой окрестности точки А все члены последовательности, начиная с некоторого номера N, принадлежат этой окрестности.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

(Символ $\propto$ означает «бесконечно большую величину».)

С понятием предела числовой последовательности тесно связано понятие предела функции на бесконечности, которое на языке логических символов имеет вид:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon)>0:\ \forall\ |x|>N \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

.

Основные теоремы о пределах

Внимание! Если предел существует, то он единственный.

Теорема 1. Предел постоянной равен самой постоянной: $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$.

Теорема 2. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда:

1) предел суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=A+B;$$

2) предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B;$$

в частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = c\cdot A\,;$$

3) предел частного двух функций равен частному пределов этих функций при условии, что предел делителя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}\quad (B\neq 0)$$

Пример №2

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+2x-4}$

Решение:

Воспользовавшись теоремами о пределах частного, суммы и произведения, получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+2x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+3x+2)}{\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+2x-4)} = \frac{\lim\limits_{x\to -1} x^2 + \lim\limits_{x\to -1} 3x + \lim\limits_{x\to -}}{\lim\limits_{x\to -1} 2x^2 + \lim\limits_{x\to -1} 2x - \lim\limits_{x\to -}}$$

$$= \frac{(\lim\limits_{x\to -1} x)^2 + 3\lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 2}{2(\lim\limits_{x\to -1} x)^2 + 2\lim\limits_{x\to -1} x - \lim\limits_{x\to -1} 4} = \frac{(-1)^2+3(-1)+2}{2(-1)^2+2(-1)-4} = \frac{0}{-4} = 0.$$

Если вычисление пределов приводит к неопределенным выражениям вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, необходимо провести дополнительные исследования, т.е. «раскрыть неопределенность».

Раскрытие неопределенностей

Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right)$.

1. Если $f(x)$ — рациональная дробь, то числитель и знаменатель дроби раскладывают на множители.

Пример №3

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4}$

Решение:

Числитель и знаменатель дроби $\frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4}$ при $x=-2$ обращаются в нуль. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, а затем применим теоремы о пределах частного, суммы и произведения:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+1)}{2(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+1)}{2(x-1)} =$$

2. Если $f(x)$ — дробь, содержащая иррациональные выражения, то выделение множителей вида $(x - x_0)$ достигается переводом иррациональностей в числитель или знаменатель.

Пример №4

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - 3x} - 1}{5x}$.

Решение:

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Избавимся от иррациональности в числителе, умножив и разделив дробь на сопряженное к числителю выражение $\sqrt{1 - 3x} + 1$. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-3x}-1}{5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-3x}-1\right)\left(\sqrt{1-3x}+1\right)}{5x\left(\sqrt{1-3x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-3x\ldots}{5x\left(\sqrt{1-3\ldots}\right.}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{5x\left(\sqrt{1-3x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-3}{5\left(\sqrt{1-3x}+1\right)}=\frac{-3}{5(1+1)}=-\frac{3}{10}=-0{,}3.$$

3. В остальных случаях для раскрытия неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ используют первый замечательный предел (см. п. 3.4) или эквивалентные бесконечно малые функции (см. п. 3.5).

Раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Если $f(x)$ — рациональная дробь или дробь, содержащая иррациональности, то числитель и знаменатель делят на x в старшей степени.

Пример №5

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^a+3x+2}{2x^2+2x-4}$, если 1) a=2; 2) a— 1; 3) a=4.

Решение:

Числитель и знаменатель дроби конечного предела не имеют. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для ее раскрытия разделим числитель и знаменатель дроби на высшую степень x (в первом и втором случаях на x^2, во третьем — на x^4), а затем воспользуемся теоремами о пределах функций:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+2x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{1+0+0}{2+0-0}=\frac{1}{2};$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+3x+2}{2x^2+2x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{2x^2+2x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x+2}{2x^2+2x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}{\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^4}}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty.$$

Вывод. Предел рациональной дроби на бесконечности равен отношению коэффициентов при старших степенях, если эти степени совпадают, нулю — если показатель степени числителя меньше показателя степени знаменателя и бесконечности в противном случае.

покажем на примерах.

Пример №6

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

Решение:

Имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$ которая преобразуется к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ приведением функции к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+}{1+x+}$$

$$=\frac{-(1+2)}{1+1+1}=-1.$$

Пример №7

Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-7n+3}\right)$$

Решение:

Для раскрытия неопределенности вида $(\infty-\infty)$ умножим и разделим выражение в скобках на сопряженное:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n-1}-\sqrt{n^2-7n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-2n-1)-(n^2-7n+}{\sqrt{n^2-2n-1}+\sqrt{n^2-7n+}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-4}{\sqrt{n^2-2n-1}+\sqrt{n^2-7n+3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Получили неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Раскроем ее, разделив все члены полученного выражения на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{4}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{n}+\frac{3}{n^2}}}=\frac{5-0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{5}{2}.$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{c}\arcsin x=y\Rightarrow x=\sin y\\ x\to 0\Rightarrow y\to 0\end{array}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$$ (аналогично).

5.Производная

Производная функции в точке — это предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Производные элементарных функций

Функция	Производная
$f(x) = C, C \in R$	0
$f(x) = x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$\cos x$
$f(x) = \cos x$	$-\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$1/\cos^2 x$
$f(x) = \mathrm{ctg}\, x$	$-1/\sin^2 x$
$f(x) = \ln x$	$1/x$
$f(x) = \log_a x$	$1/(x \cdot \ln a)$
$f(x) = e^x$	e^x

Если элементарную функцию умножить на произвольную постоянную, то производная новой функции тоже легко считается:

$$(C \cdot f)' = C \cdot f'.$$

В общем, константы можно выносить за знак производной. Например:

$$(2x^3)' = 2 \cdot (x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2.$$

Очевидно, элементарные функции можно складывать друг с другом, умножать, делить — и многое другое. Так появятся новые функции, уже не особо элементарные, но тоже дифференцируемые по определенным правилам. Эти правила рассмотрены ниже.

Производная суммы и разности

Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$, производные которых нам известны. К примеру, можно взять элементарные функции, которые рассмотрены выше. Тогда можно найти производную суммы и разности этих функций:

1. $(f + g)' = f' + g'$
2. $(f - g)' = f' - g'$

Итак, производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных. Слагаемых может быть больше. Например, $(f + g + h)' = f' + g' + h'$.

Задача. Найти производные функций: $f(x) = x^2 + \sin x$; $g(x) = x^4 + 2x^2 - 3$.

Функция $f(x)$ — это сумма двух элементарных функций, поэтому:

$$f'(x) = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x;$$

Аналогично рассуждаем для функции $g(x)$. Только там уже три слагаемых (с точки зрения алгебры):

$$g'(x) = (x^4 + 2x^2 - 3)' = (x^4 + 2x^2 + (-3))' = (x^4)' + (2x^2)' + (-3)' = 4x^3 + 4x + 0 = 4x \cdot (x^2 + 1).$$

Ответ:
$f'(x) = 2x + \cos x$;
$g'(x) = 4x \cdot (x^2 + 1)$.

Производная произведения

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Задача. Найти производные функций: $f(x) = x^3 \cdot \cos x$; $g(x) = (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x$.

Функция $f(x)$ представляет собой произведение двух элементарных функций, поэтому все просто:

$$f'(x) = (x^3 \cdot \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\sin x) = x^2 \cdot (3\cos x - x \cdot \sin x)$$

У функции $g(x)$ первый множитель чуть посложней, но общая схема от этого не меняется. Очевидно, первый множитель функции $g(x)$ представляет собой многочлен, и его производная — это производная суммы. Имеем:

$$g'(x) = ((x^2 + 7x - 7) \cdot e^x)' = (x^2 + 7x - 7)' \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot (e^x)' = (2x + 7) \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x = e^x \cdot (2x + 7 + x^2 + 7x - 7) = (x^2 + 9x) \cdot e^x = x(x + 9) \cdot e^x.$$

Ответ:
$f'(x) = x^2 \cdot (3\cos x - x \cdot \sin x)$;
$g'(x) = x(x + 9) \cdot e^x$.

Производная частного

Если есть две функции $f(x)$ и $g(x)$, причем $g(x) \neq 0$ на интересующем нас множестве, можно определить новую функцию $h(x) = f(x)/g(x)$. Для такой функции тоже можно найти производную:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Задача. Найти производные функций:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad g(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

В числителе и знаменателе каждой дроби стоят элементарные функции, поэтому все, что нам нужно — это формула производной частного:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

$$g'(x) = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{(x^2)'e^x - x^2(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2}$$

Разложим числитель на множители — это значительно упростит ответ:

$$g'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{xe^x(2 - x)}{(e^x)^2} = \frac{x(2 - x)}{e^x}$$

Ответ:

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}; \quad g'(x) = \frac{x(2 - x)}{e^x}$$

Производная сложной функции

Задача. Найти производные функций: $f(x) = e^{2x+3}$; $g(x) = \sin(x^2 + \ln x)$

Заметим, что если в функции $f(x)$ вместо выражения $2x + 3$ будет просто x, то получится элементарная функция $f(x) = e^x$. Поэтому делаем замену: пусть $2x + 3 = t$, $f(x) = f(t) = e^t$. Ищем производную сложной функции по формуле:

$$f'(x) = f'(t) \cdot t' = (e^t)' \cdot t' = e^t \cdot t'$$

А теперь — внимание! Выполняем обратную замену: $t = 2x + 3$. Получим:

$$f'(x) = e^t \cdot t' = e^{2x+3} \cdot (2x + 3)' = e^{2x+3} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x+3}$$

Теперь разберемся с функцией $g(x)$. Очевидно, надо заменить $x^2 + \ln x = t$. Имеем:

$$g'(x) = g'(t) \cdot t' = (\sin t)' \cdot t' = \cos t \cdot t'$$

Обратная замена: $t = x^2 + \ln x$. Тогда:

$$g'(x) = \cos(x^2 + \ln x) \cdot (x^2 + \ln x)' = \cos(x^2 + \ln x) \cdot (2x + 1/x).$$

Ответ: $f'(x) = 2 \cdot e^{2x+3}$;
$g'(x) = (2x + 1/x) \cdot \cos(x^2 + \ln x)$.

Задача. Найти производную функции:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x - 7}$$

Для начала перепишем корень в виде степени с рациональным показателем:

$$f(x) = (x^2 + 8x - 7)^{0,5}.$$

Теперь делаем замену: пусть $x^2 + 8x - 7 = t$. Находим производную по формуле:

$$f'(x) = f'(t) \cdot t' = (t^{0,5})' \cdot t' = 0,5 \cdot t^{-0,5} \cdot t'.$$

Делаем обратную замену: $t = x^2 + 8x - 7$. Имеем:

$$f'(x) = 0,5 \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5} \cdot (x^2 + 8x - 7)' = 0,5 \cdot (2x + 8) \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5}.$$

Наконец, возвращаемся к корням:

$$f'(x) = \frac{0,5 \cdot (2x + 8)}{\sqrt{x^2 + 8x - 7}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x - 7}}$$

Ответ:

$$f'(x) = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x - 7}}$$

Уравнение касательной к графику функции

Уравнение касательной к графику функции *y = f(x)* в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0).$$

Мы подразумеваем, что существует конечное значение производной $f'(x_0)$, в противном случае касательная прямая либо вертикальна (если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x) = \infty$), либо не существует (если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$).

В зависимости от углового коэффициента $k_x = f'(x_0)$, касательная может быть параллельна оси абсцисс ($k_x = 0$), параллельна оси ординат ($k_x = \infty$ в этом случае уравнение касательной будет иметь вид $x = x_0$), возрастать ($k_x > 0$) или убывать ($k_x < 0$).

Пример.

Составить уравнение касательной к графику функции $y = e^{x+1} + \frac{x^3}{3} - \frac{6-\sqrt{3}}{3}x - \frac{17-\sqrt{3}}{3}$ в точке *(-1;-3)* и определить угол наклона.

Решение.

Функция определена для всех действительных чисел . Так как

(-1;-3) – точка касания, то $x_0 = -1; \quad f(x_0) = -3$.

Находим производную и вычисляем ее значение в точке $x_0 = -1$:

$$y' = \left(e^{x+1} + \frac{x^3}{3} - \frac{6-\sqrt{3}}{3}x - \frac{17-\sqrt{3}}{3}\right)' =$$

$$= \left(e^{x+1}\right)' + \left(\frac{x^3}{3}\right)' - \left(\frac{6-\sqrt{3}}{3}x\right)' - \left(\frac{17-\sqrt{3}}{3}\right)' = e^{x+1} + x^2 - \frac{6-\sqrt{3}}{3}$$

$$y'(x_0) = y'(-1) = e^{-1+1} + (-1)^2 - \frac{6-\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Так как значение производной в точке касания есть угловой коэффициент касательной, а он равен тангенсу угла наклона, то $k_к = tg\alpha_к = y'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Следовательно, угол наклона касательной равен $\alpha_к = arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, а уравнение касательной прямой имеет вид

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) - 3$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{9-\sqrt{3}}{3}$$

6. Случайные события и вероятность

Элементы комбинаторики

Определение. *Комбинаторика* – раздел дискретной математики, который изучает количества комбинаций, составленных из конечного числа элементов заданного конечного множества элементов различной природы, различающиеся количеством и/или порядком. К таким комбинациям относятся

- *перестановки* P_n - число способов, которыми можно переставить n элементов. Число перестановок из n элементов можно найти по формуле $P_n = n!$.

- *сочетания* C_n^m - число способов, которыми можно из n элементов выбрать m элементов, причем порядок элементов в комбинации из m элементов безразличен. Число перестановок из n элементов по m элементов можно найти по формуле $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, при этом $C_n^m = C_n^{n-m}$.

- *размещения* A_n^m - число способов, которыми можно из n элементов выбрать m элементов, располагая взятые m элементов в различном порядке. Число размещений из n элементов по m элементов можно найти по формуле $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Случайные события

Непосредственный подсчет вероятности

Определение. Под *случайным событием* понимается всякий факт, который в результате испытания может произойти или не произойти.

Вероятность события характеризует степень объективной возможности наступления этого события.

Определение. Несколько событий в данном испытании называются попарно *несовместными*, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Определение. Несколько событий в данном испытании называются *равновозможными*, если ни одно из них не является объективно более возможным по сравнению с остальными.

Определение. Несколько событий в данном испытании образуют *полную группу*, если в результате испытания обязательно должно появиться хотя бы одно из них.

Определение. Случайные события, образующие полную группу несовместных и равновозможных событий, называются *случаями (исходами, шансами).*

Определение (*Классическое определение вероятности*). Если результаты одного испытания можно представить в виде полной группы n равновозможных и несовместных исходов и если событие A появляется только в m случаях, то вероятность события A равна отношению числа случаев, в которых событие A появляется, к общему числу всех случаев:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Заметим, что всегда $0 \quad P(A) \quad 1$. При этом событие, для которого $P(A) = 0$, называется *невозможным,* а событие, для которого $P(A) = 1$, называется *достоверным*.

Понятие геометрической вероятности можно рассматривать как обобщение понятия классической вероятности на случай с бесконечным (несчетным) числом исходов. Если брошенная наудачу точка может попасть в любую точку области G, то вероятность попасть в какую-либо часть g области G (событие A) пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему) и не зависит от расположения и формы этой части:

$$P(A) = \frac{мера\ g}{мера\ G}.$$

Основные теоремы теории вероятностей

Определение. *Суммой* $A + B$ двух событий A и B называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Определение. *Суммой* нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Если несколько событий попарно несовместны, то их сумма сводится к появлению одного события (безразлично какого). Для двух несовместных событий A и B их сумма $A + B$ есть событие, состоящее в появлении или A, или B.

Определение. *Произведением* $A \ B$ двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном (одновременном или последовательном) наступлении обоих этих событий.

Определение. *Произведением* нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий.

Определение. Два события называются *независимыми*, если наступление одного из них не меняет вероятности наступления другого.

Определение. Несколько событий называются *попарно независимыми,* если любые два из них независимы, т.е. вероятность наступления одного их них не зависит от наступления других.

Теорема (сложения вероятностей несовместных событий) Пусть A и B - несовместные события, тогда $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Следствие. Пусть $A_1, A_2 ..., A_n$ - попарно несовместные события, образующие полную группу, тогда

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Следствие. Пусть $A_1, A_2 ..., A_n$ - попарно независимые события, тогда вероятность наступления хотя бы одного из этих событий находится по формуле

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A_1}\ \ \overline{A_2}\ \ \overline{A_n})=1-P(\overline{A_1})\ \ P(\overline{A_2})\quad\ P(\overline{A_n})$$

Определение. Два несовместных события, образующие полную группу, называются *противоположными* и обозначаются как A и $\overline{A}$, при этом $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Теорема (сложения вероятностей совместных событий) Пусть A и B - совместные события, тогда $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\ \ B)$

Теорема (умножения вероятностей независимых событий) Пусть A и B - независимые события, тогда $P(A\ \ B)=P(A)\ \ P(B)$

Следствие. Пусть $A_1, A_2 ..., A_n$ - попарно независимые события, тогда

$$P(A_1\ \ A_2\ \ ...\ \ A_n)=P(A_1)\ \ P(A_2)\quad\ P(A_n)$$

Определение. Вероятность события *B*, вычисленная в предположении, что событие *A* произошло, называется *условной вероятностью* события *B* и обозначается $P(B/A)$.

Теорема (умножения вероятностей зависимых событий) Пусть A и B - зависимые события, тогда $P(A\ \ B)=P(A)\ \ P(B/A)$.

Следствие. Пусть $A_1, A_2 ..., A_n$ - зависимые события, тогда

$$P(A_1\ \ A_2\quad\ A_n)=P(A_1)\ \ P(A_2 | A_1)\ \ P(A_3 | A_1 A_2)\quad\ P(A_n | A_1 A_2 A_3\quad\ A_{n-1})$$

<u>Пример.</u>В коробке 5 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашены. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среди 2-х извлеченных изделий окажется: а) одно окрашенное; б) 2 окрашенных; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Воспользуемся формулой классического подсчета вероятностей $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Очевидно, общее количество возможных исходов n равно

$n = C_5^2 = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{4\ 5}{2} = 10$.

а) Определим число благоприятных исходов *m*. Очевидно, что способов, которыми можно извлечь 1 окрашенное изделие из 3 и 1 неокрашенное изделие из 2, равно соответственно: $C_3^1 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$ и $C_2^1 = \frac{2!}{1!\,1!} = 2$.

Всего получится $m = 6$ способов.

Тогда $P(A) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = 0,6$.

б) Определим число благоприятных исходов *m*. Способов, которыми можно извлечь 2 окрашенных изделия из 3, равно $C_3^2 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$.

Тогда $m = 3$.

Тогда $P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} = 0,3$.

в) *Первый способ.* Событие *A* – извлекли хотя бы одно окрашенное изделие. Тогда событие $\overline{A}$ - ни одного окрашенного. Определим число благоприятных исходов *m*. Способов, которыми можно извлечь 2неокрашенное изделия из 2 равно $C_2^2 = 1$.

Всего получится $m = 1$ способов.

$$P(\overline{A}) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Тогда $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Второй способ. Хотя бы одно окрашенное – одно или два. В решении под а) подсчитана вероятность того, что извлечено одно окрашенное изделие, под б) – два окрашенных. Тогда вероятность того, что извлечено хотя бы одно окрашенное изделие, равна сумме $P(A) = 0,6 + 0,3 = 0,9$

<u>Пример.</u> Из урны, содержащей два белых и три черных шара, извлекают по одному без возвращения все шары. Найти вероятности событий: 1) третий шар белый; 2) третий и четвертый шары белые; 3) пятый шар белый, если первый был белый.

1) Возможны следующие варианты:

Первый шар – белый, второй – черный, третий – белый.

Первый шар – черный, второй – белый, третий – белый.

Первый шар – черный, второй – черный, третий – белый.

Найдем вероятность каждого из этих вариантов, используя теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$p_1 = \frac{2}{5}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$,

$p_2 = \frac{3}{5}\ \frac{2}{4}\ \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$,

$p_3 = \frac{3}{5}\ \frac{2}{4}\ \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$.

Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий получаем $p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$.

2) Найдем вероятность того, что первый шар – черный, второй – черный, третий – белый, четвертый - белый, используя теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$$p = \frac{3}{5}\ \frac{2}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

3) Найдем вероятность того, что первый шар – белый, второй – черный, третий – черный, четвертый – черный, пятый - белый, используя теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$$p = \frac{2}{5}\ \frac{3}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ 1 = \frac{1}{10}.$$

Пример. Вероятности появления каждого из двух независимых событий *A* и *B* соответственно равны 0,6 и 0,5. Найти вероятность появления только одного из них.

Событие *C*, состоящее в появлении только одного из событий *A* и *B*, заключается в том, что появляется событие *A*, но не появляется событие *B* или событии *B* наступает, а событие *A* не наступает. Вероятность появления события *A* равна $P(A) = 0{,}6$, а ненаступления события *A* равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Вероятность появления события *B* равна $P(B) = 0{,}5$, а $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Тогда $P(C) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0{,}6\ \ 0{,}5 + 0{,}4\ \ 0{,}5 = 0{,}5$.

Пример. Вероятности того, что определенная таблица содержится в каждом из трех справочников равны 0,6; 0,9; 0,75. Найти вероятность того, что таблица не содержится ни в одном справочнике.

Пусть событие*A* состоит в том, что таблица не содержится ни в одном справочнике.

Событие A_1 - таблица содержится в первом справочнике, тогда $\mathrm{p}(\mathrm{A}_1) = 0{,}6$, а вероятность того, что таблица не содержится в первом справочнике $\mathrm{p}(\overline{\mathrm{A}}_1) = 1 - \mathrm{p}(\mathrm{A}_1) = 0{,}4$.

Аналогично, A_2 - таблица содержится во втором справочнике, тогда $\mathrm{p}(\mathrm{A}_2) = 0{,}9$, а вероятность того, что таблица не содержится во втором справочнике $\mathrm{p}(\overline{\mathrm{A}}_2) = 1 - \mathrm{p}(\mathrm{A}_2) = 0{,}1$.

И, A_3 - таблица содержится в третьем справочнике, тогда $\mathrm{p}\left(\mathrm{A}_3\right)=0,75$, а вероятность того, что таблица не содержится в третьем справочнике $\mathrm{p}\left(\overline{\mathrm{A}}_3\right)=1-\mathrm{p}\left(\mathrm{A}_3\right)=0,25$.

События A_1, A_2, A_3 независимы, поэтому по теореме об умножении вероятностей $\mathrm{p}\left(\mathrm{A}\right)=p\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right)=p\left(\overline{A}_1\right)p\left(\overline{A}_2\right)p\left(\overline{A}_3\right)=0,4\ \ 0,1\ \ 0,25=0,01$.

<u>Пример.</u> Кадровая служба банка на объявление в Интернете получила 300 резюме. Практика показывает, что вероятность того, что претендент имеет высшее образование, равна 0,7, вероятность того, что претендент имеет опыт работы в банке – 0,3, а вероятность того, что претендент имеет и высшее образование, и опыт работы в банке – 0,2. Оценить количество претендентов, имеющих или опыт работы в банке, или высшее образование.

Пусть событие A состоит в том, что претендент имеет высшее образование, B -– претендент имеет опыт работы в банке. По условию $\mathrm{p}\left(\mathrm{A}\right)=0.7$, $\mathrm{p}\left(\mathrm{B}\right)=0.3$. Событие AB состоит в том, что претендент имеет и высшее образование, и опыт работы в банке. $p\left(AB\right)=0.2$.

Найдем вероятность того, что претендент, имеет или опыт работы в банке, или высшее образование, то есть $p\left(A+B\right)$.

Так какA иB совместные события, то по теореме о сумме вероятностей совместных событий

$$p\left(A+B\right)=p\left(A\right)+p\left(B\right)-p\left(AB\right).$$

$$p\left(A+B\right)=0.7+0.3-0.2=0.8$$

Оценим количество претендентов, имеющих или опыт работы в банке, или высшее образование. Всего 300 претендентов. Следовательно, $300\ \ 0.8=240$ претендентов имеют или опыт работы в банке, или высшее образование.

Объем контактной работы обучающегося при освоении дисциплины (модуля)

Основная литература

1. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. /Д.Я. Стройк— Москва : Наука, 1990. — 256 с.

2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. [Электронный ресурс] — Электрон.дан. — СПб. : Лань, 2017. — 224 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/92615 — Загл. с экрана.

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов. Т.1 / Н.С.Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2010 .— 416 с.

4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов : в 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2009 .— 544 с.

5. Лакерник А.Р. Высшая математика. Краткий курс [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Лакерник А.Р.— Электрон.текстовые данные.— М.: Логос, 2008.— 528 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/9112.html.— ЭБС «IPRbooks»

6. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2012. – 479 с.

7. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Кнорус, 2010. – 664 с.

8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2010. – 288с.

9. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2011. – 404 с.

10. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Кнорус, 2010. – 493 с.

Дополнительная литература

1. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. – Режим доступа :https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/ 2014100214370663049600009433, по паролю

2. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. – Режим доступа по паролю :https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/201410021441294315510000 8498, по паролю

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Успехи математических наук/ Российская академия наук. - М.: Наука, 1995-ISSN 0042-1316

2. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- Режим доступа: https://tsutula.bibliotech.ru/, по паролю.- Загл. с экрана

3. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/, по паролю.- .- Загл. с экрана

4. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: http://elibrary.ru/ , по паролю.- Загл. с экрана.

5. НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа, режим доступа http://cyberleninka.ru/ ,свободный.- Загл. с экрана.

6. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа :http: //window.edu.ru. ,свободный.- Загл. с экрана.

7. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа :http: //exponenta.ru. ,свободный.-Загл. с экрана.