Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное
общеобразовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2021 г., протокол № 5
с учетом изменений и дополнений,
утвержденных на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«17» июня 2021 г., протокол № 10,
вступающих в силу с 1 сентября 2021 года

Заведующий кафедрой

____ _В.В. Глаголев

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
**по проведению практических занятий по дисциплине (модулю)**

## "Математические методы в социологии"

**основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки

**39.03.01 Социология**

С направленностью (профилем)

**Социальные процессы и структуры на макро - и микроуровнях**

Форма обучения: *заочная*

Идентификационный номер образовательной программы: 390301-01-21

Тула 2021

**Разработчик методических указаний**

Бакулин Н.В., доцент, к.т.н., доцент

*(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)* *(подпись)*

## 2-ой семестр

## Введение в математический анализ
## 1. **Пределы**

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \ldots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число $u_n$. Тогда говорят, что определена последовательность чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots$ или, короче, последовательность $\{u_n\}$. Отдельные числа $u_n$ называются ее элементами.

<u>Определение 1.1.</u> Число $a$ называется пределом последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется зависящее от него натуральное число $N$ такое, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство: $|u_n - a| < \varepsilon.$ При этом пишут: $\lim\limits_{n\to} u_n = a.$

<u>Определение 1.2.</u> Говорят, что функция $f(x)$ стремится к $A$ $\big(f(x) \to A\big)$ при стремлении к $a\,(x \to a)$, где $A$ и $a$ – числа, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta.$

Аналогично, $\lim\limits_{x\to} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \quad ,$ если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta(M),$ где $M$ – произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.

1. Если существуют конечные $\lim\limits_{x\to a} f_1(x),\ \lim\limits_{x\to a} f_2(x),$ то

$$а)\ \lim_{x\to a}\big[f_1(x) \pm f_2(x)\big] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x)$$

$$б)\ \lim_{x\to a}\big[f_1(x)\ \ f_2(x)\big] = \lim_{x\to a} f_1(x)\ \ \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$в)\ \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \qquad \lim_{x\to a} f_2(x)\quad 0\ .$$

2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \quad 0,\ \ \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = 0$ ($A$ – конечно), то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \quad ,$$

если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\quad \lim\limits_{x\to a} f_2(x) =$ ($A$ – конечно), то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взять соответственно две последовательности: $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения. Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности: $\frac{0}{0};\ \text{—};\ 0\ \ ;\ \ -\ \ ;\ 0^0;\ 1\ \ ;\ \ ^0.$

<u>Пример 1.1.</u> При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно $x$ при $x\to$ или $n$ при $n\to$ для последовательностей (неопределенность — ) оба члена соотношения полезно предварительно разделить на $x^m$ или, соответственно, $n^m$где $m$ – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

*а*) $$\lim_{x\to}\frac{3x^4+2x^2-1}{5x^4+3x+2} = \text{—} = \lim_{x\to}\frac{x^4\ 3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{x^4\ 5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = \lim_{x\to}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to}3+\lim\limits_{x\to}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to}\frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to}5+\lim\limits_{x\to}\frac{3}{x^3}+\lim\limits_{x\to}\frac{2}{x^4}} = \frac{3+0+0}{5+0+0} = \frac{3}{5},$$ старшая степень $m=4,$ делится на $x^4$.

*б*) $$\lim_{n\to}\frac{3\sqrt{9n^4-2n^3+2}+4\sqrt[3]{8n^3+21}}{\sqrt[4]{n^4-3}+2\sqrt{4n^4+9n}} =$$

$$= \lim_{n\to} \frac{3\sqrt{n^4 \;\; 9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}} + 4\sqrt[3]{n^3 \;\; 8+\frac{21}{n^3}}}{\sqrt[4]{n^4 \;\; 1-\frac{3}{n^4}} + 2\sqrt{n^4 \;\; 4+\frac{9}{n^3}}} =$$

$$= \lim_{n\to} \frac{3n^2 \sqrt{9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}} + 4n\sqrt[3]{8+\frac{21}{n^3}}}{n\sqrt[4]{1-\frac{3}{n^4}} + 2n^2\sqrt{4+\frac{9}{n^3}}} =$$

$$= \lim_{n\to} \frac{3\sqrt{9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}} + \frac{4}{n}\sqrt[3]{8+\frac{21}{n^3}}}{\frac{1}{n}\sqrt[4]{1-\frac{3}{n^4}} + 2\sqrt{4+\frac{9}{n^3}}} = \frac{3\sqrt{9-0+0}+0\sqrt[3]{8+0}}{0\sqrt[4]{1-0}+2\sqrt{4+0}} = \frac{9}{4}$$

(неопределенность —, старшая степень $m=2,$ делится на $n^2$).

*в*) $\lim_{x\to}(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x+7}\right] = [\quad (\quad - \quad)] =$

$$= \lim_{x\to} \frac{(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x-7}\right]\left[\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}\right]}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to} \frac{(3x+1)\left(x^2+4x+5-x^2-4x+7\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to} \frac{(3x+1)\;12}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}} \; \frac{:x}{:x} =$$

$$= \lim_{x\to} \frac{12\;\; 3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}} = \frac{12\;\;3}{1+1} = 18.$$

Пример 1.2. Если $P(x)$ и $Q(x)$ – целые многочлены $x,$ $P(a) \quad 0$ или $Q(a) \quad 0,$ то предел рациональной дроби $P/Q$ при $x \to a$ находится непосредственно. Если же $P(a)=Q(a)=0$ (неопределенность $\frac{0}{0}$), то дробь $P/Q$ рекомендуется сократить один или несколько раз на $(x-a)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}= \ \frac{0}{0} \ =\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)\left(x^3+x^2+x-3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}=$$

$$= \ \frac{0}{0} \ =\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1+2}{1+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

<u>Пример 1.3.</u> Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность $\frac{0}{0}$).

*а*) $$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt[3]{5-x}}= \ \frac{0}{0} \ =\lim_{x\to 4}\frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{9-5-x}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\ \lim_{x\to 4}\frac{1}{3+\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\ \frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\ 1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\ 1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\ 1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}}{1-5+x}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\ 1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}}{x-4}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\ 1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\ =$$

$$=-\frac{1}{6}(1+1+1)=-\frac{1}{2}.$$

*б*) $$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}= \ \frac{0}{0} \ =\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(x^2-7x-8\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$= \frac{1}{9 \cdot 12} = \frac{1}{108}.$$

<u>Пример 1.4.</u> При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

следствием которого являются пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{arxtgx}{x} = 1.$$

*а*) $$\lim_{x\to 0}\left[ctg^2 3x - ctg^2 5x\right] \cdot \frac{tg^2 4x \cdot \arcsin^2 x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} - \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x}\right) \cdot \frac{\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2 \cdot 16x^2 \cdot \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 \cdot x^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 16x^2 \cdot \left(\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} - \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0}\frac{tg4x}{4x}\right)^2 \cdot \left(\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 3x \cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 \cdot 9x^2} - \frac{\cos^2 5x \cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2 \cdot 25x^2}\right) \cdot 1^2 \cdot 1^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{16}{9}\cos 3x - \frac{16}{25}\cos^2 5x\right) = \frac{16}{9} \cdot 1 - \frac{16}{25} \cdot 1 = \frac{256}{225}.$$

*б*) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 2x \cdot \sqrt{1-\cos 4x}}{x^2 \cdot \arcsin 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2 \cdot 4x^2 \cdot \sqrt{2\sin^2 2x}}{x^2 \cdot \frac{\arcsin 3x}{3x} \cdot 3x} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}\sin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x}{3x} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

<u>Пример 1.5.</u> При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда $x \to a$ и $a \neq 0$, рекомендуется предварительно провести замену $x - a = y$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cos\frac{\pi\ x}{6}}{x-3}=\ \frac{0}{0}\ =(x-3=y,\ y\to 0 \text{ при } x\to 3)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\frac{\pi\ (y+3)}{6}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ \cos\ \frac{\pi\ y}{6}+\frac{\pi}{2}\ =\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\pi}{6}\ \sin\frac{\pi\ y}{6}}{\frac{\pi\ y}{6}}=$$

$$=-\frac{\pi}{6}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi\ y}{6}}{\frac{\pi\ y}{6}}=-\frac{\pi}{6}\ \ 1=-\frac{\pi}{6}.$$

<u>Пример 1.6.</u> При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=c$ необходимо иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы $A=\lim\limits_{x\to a}f(x),\ B=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x),$ то $c=A^B\ \ (A>0)$;

2) если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\quad 1,\ \ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\pm\quad$, то вопрос о нахождении предела $c$ решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1,\ \ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\quad$, то следует воспользоваться «вторым замечательным пределом»: $\lim\limits_{x\to a}\left(1+g(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}}=e,$ где $g(x)\to 0$ при $x\to a$ и $e=2{,}718\ldots$ .

*а*) $$\lim_{x\to}\ \frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}^{\frac{x^2}{x-1}}=\ \frac{3}{2}^{\ -}\ =\frac{1}{\frac{3}{2}^{\ +}}=0, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x\to}\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}=\frac{3}{2},\qquad \lim_{x\to}\frac{x^2}{x-1}=-\quad .$$

*б*) $$\lim_{x\to 0}\ \frac{\sin 4x}{x}^{\ x+3}\ =4^3=64, \text{ т.к. } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\ \frac{\sin 4x}{4x}\quad 4=4,$$

$$\lim_{x\to 0}(x+3)=3.$$

*в*) $$\lim_{x\to}\ \frac{3x+1}{3x-1}^{\ 2x}\ =\left(1\quad\right)=\lim_{x\to}\ 1+\frac{7}{3x-6}^{\ 2x}\ =$$

$$=\lim_{x\to}\ 1+\frac{7}{3x-6}^{\frac{3x-6}{7}\frac{7}{3x-6}2x}=\lim_{x\to}\ 1+\frac{7}{3x-6}^{\frac{3x-6}{7}\ \lim\limits_{x\to}\frac{14x}{3x-6}}=e^{14/3}.$$

*г)* $$\lim_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{3}{x-3}}=\left(1\ \ \right)=\lim_{x\to 3}\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{3}{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{1}{6-2x}\ \frac{(6-2x)3}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{18-6x}{x-3}}=e^{-6}.$$

## 2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 2.1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,$ то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в окрестности точки $x=a$ (при $x\to a$).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ есть также бесконечно малая при $x\to a$.

Определение 2.2. Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x\to a$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=c,$ где $c$ – некоторое число, отличное от нуля, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x\to a$, если $c=0,$ то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $g(x)$ при $x\to a$.

Бесконечно малая $f(x)$ называется бесконечно малой порядка $n$ по сравнению с $g(x)$ при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g^n(x)}=c, \qquad 0<|c|<+\ \ .$$

Пример 2.1. При $x\to 0$ определить порядок малости функции $tgx-\sin x$ относительно $x.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ \ \frac{1}{\cos x}-1}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^n\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\ \sin^2\frac{x}{2}}{x^n\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{2}}{x^n\cos x}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{x^n}\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x}=$$

$$= 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{x^n}\ 1 = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}^{\ n}\ \ 2^n} = \frac{4}{2^n}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}^{\ n}}.$$

Этот предел будет равен константе $c\ \ 0$ при $n = 3,$ следовательно, функция $tgx - \sin x$ имеет порядок малости $n = 3$ относительно $x$ при $x \to 0$.

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

<u>Пример 2.2.</u> Определить порядок малости относительно $x$ при $x \to 0$ суммы $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$ .

Слагаемое $\sqrt[3]{x^2}$ имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно $x$, а слагаемое $\sqrt{x^3}$ – порядок $\frac{3}{2}$, следовательно, сумма имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно $x$ при $x \to 0$.

<u>Определение 2.3.</u> Если $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1,$ то бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$: $f(x) \sim g(x)$.

Например, при $x \to 0$ будем иметь:

$$\sin x \sim x,\quad tgx \sim x,\quad \arcsin x \sim x, arctgx \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x,\quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2},\quad e^x - 1 \sim x,\quad a^x - 1 \sim x\ \ln a\ (a\quad 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

<u>Пример 2.3.</u>

*а*) $$\lim_{x\to 0}\frac{3^{4tg^2x} - 5^{3\arcsin^2 3x}}{3\sin^2 4x + 7arctg^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{3^{4tg^2x} - 1\ -\ 5^{3\arcsin^2 x} - 1}{3\ (4x)^2 + 7\ (x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4tg^2x\ \ln 3 - 3\arcsin^2 3x\ \ln 5}{55x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4\ln 3\ x^2 - 3\ln 5\ (3x)^2}{55x^2} =$$

$$= \frac{4\ln 3 - 27\ln 5}{55}.$$

*б)* $\lim\limits_{x\to 0} \quad \frac{4\arcsin 2x}{3tg8x} \quad ^{\frac{ln(1+3x)}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4 \;\; 2x}{3 \;\; 8x} \quad ^{\frac{3x}{x}} = \quad \frac{1}{3} \quad ^{3} = \frac{1}{27}.$

*в)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(3-5x)-ln(3+7x)}{2\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{ln \;\; 3 \;\; 1-\frac{5}{3}x \quad - ln \;\; 3 \;\; 1+\frac{7}{3}x}{2x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{ln3 + ln \;\; 1-\frac{5}{3}x \;\; - ln3 - ln \;\; 1+\frac{7}{3}x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}x}{2x} = -2.$

Определение 2.4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ , то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$.

Подобно тому, как .то сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

Пример 2.4. Пусть $x \to$ . Определить порядок бесконечно большой $f(x) = \frac{x^5}{x+2}$ по сравнению с $x$.

$$\lim\limits_{x\to} \quad \frac{x^5}{x+2} : x^n \quad = \lim\limits_{x\to} \frac{x^5}{x^n(x+2)} = \lim\limits_{x\to} \frac{x^5}{x^{n+1} + x^n \;\; 2} = \lim\limits_{x\to} \frac{x^5}{x^{n+1}} = 1$$

при $n = 4.$

Определение 2.5.

1) Пусть функция $f(x) -$ бесконечно большая или бесконечно малая при $x \to$ и $\lim\limits_{x\to} \frac{f(x)}{c \;\; x^{\alpha}} = 1,$ где $c$ и $\alpha$ – константы, тогда функция $y = cx^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x \to$ .

2) Пусть функция $f(x) -$ бесконечно большая или бесконечно малая при $x \to a$ и $\lim\limits_{x\to} \frac{f(x)}{c \;\; (x-a)^{\alpha}} = 1,$ где $c$ и $\alpha$ – константы, тогда функция $y = c(x-a)^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x \to a$.

Пример 2.5.

*а*) Найти асимптотику (асимптотическое представление) функции $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to$ .

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\sim\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\ \ x^{1/2}},$$

следовательно, асимптотикой функции $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to$ является функция $\frac{1}{2}x^{-1/2}$; $c=\frac{1}{2}$; $\alpha=-\frac{1}{2}$.

*б*) Найти асимптотику функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x\to 1$.

При $x\to 1$ функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ является бесконечно большой: $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{3(1-x)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}(1-x)^{1/3}}$.

Асимптотикой в данном случае является функция $y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(1-x)^{-1/3}$.

*в*) Найти асимптотику функции $f(x)=x^3-3x+2$ при $x\to 1$.

В данном случае при $x\to 1$ функция $f(x)$ является бесконечно малой; $f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\sim 3(x-1)^2$.

Получаем асимптотику $y=3(x-1)^2$; $c=3$; $\alpha=2$.

3. Непрерывность функции.

Определение 3.1. Если $x<a$ и $x\to a,$ то условно пишут $x\to a-0,$ аналогично, если $x>a$ $x\to a,$ то $x\to a+0.$ Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ называют соответственно пределом слева функции $f(x)$ в точке $a$ и пределом справа функции $f(x)$ в точке $a$ (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство: $f(a-0)=f(a+0)$.

<u>Определение 3.2.</u> Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $a$, если

1) она определена в этой точке;

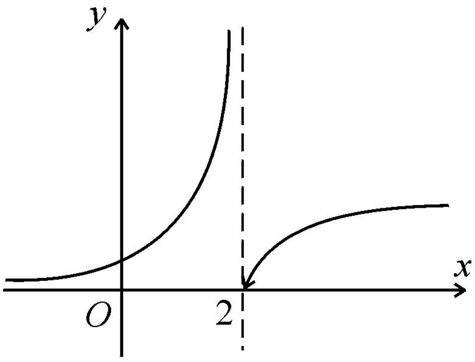
2) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a).$

Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются точками разрыва.

<u>Пример 3.1.</u>

*а*) Найти точки разрыва функции $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$, пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.

Функция $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ имеет разрыв в точке $x = 2$, т.к. она в этой точке не определена. При этом:




$$\lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+} \quad = + \quad ;$$

$$\lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-} \quad = \frac{1}{3^{+}} = \frac{1}{+} = 0.$$

*б*) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y = \frac{2^{\frac{1}{x+3}} + 4x - 8}{2^{\frac{1}{x+3}} + 4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка $x = -3$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to -3-0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = \frac{2^{-} \quad - 12 - 8}{2^{-} \quad + 4} = \frac{0 - 20}{0 + 4} = -5;$$

$$\lim_{x\to -3+0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = 1,$$ т.к. при $x \to -3 + 0$ имеем:

$$2^{1/(x+3)} + 4x - 8 \sim 2^{1/(x+3)}; \qquad 2^{1/(x+3)} + 4 \sim 2^{1/(x+3)}.$$

Величина скачка $\Delta = 1 - (-5) = 6.$

*в*) Найти точки разрыва, величину скачка $\Delta$ и построить график функции

$$y = \begin{cases} -3x, & x \quad 0 \\ 4\sin x, & 0 < x \quad \dfrac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \dfrac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

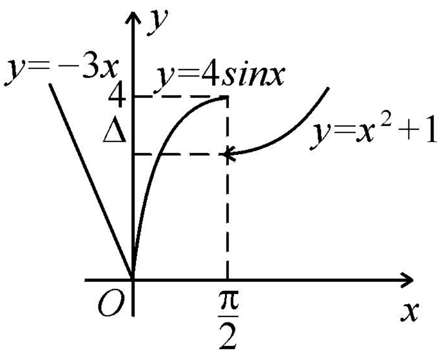
Данная функция непрерывна для $x \quad (- \quad ; \ 0) \cup \ 0; \ \dfrac{\pi}{2} \cup \dfrac{\pi}{2}; \quad + \quad .$

Исследуем только точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$, т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}(-3x) = 0; \qquad \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}(4\sin x) = 0;$$

$f(0) = -3x\Big|_{x=0} = 0,$ следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(4\sin x) = 4; \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sin\frac{\pi}{2} = 4;$$




$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\left(x^2 + 1\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1 = 3{,}467,$$

следовательно, точка $x = \dfrac{\pi}{2}$ – точка разрыва. Величина скачка

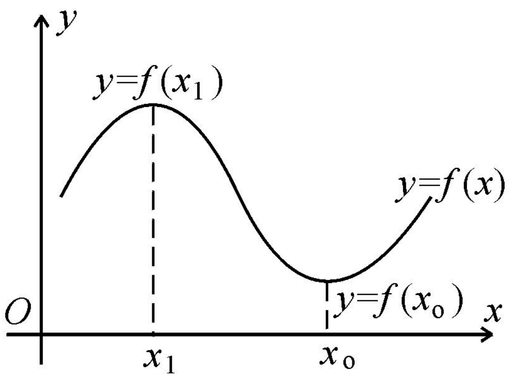
$$\Delta = 4 - \left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right) = 3 - \frac{\pi^2}{4} \approx 0{,}533.$$

## Дифференциальное исчисление функции одной переменной

## 1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек $x_1,\ x_2$, принадлежащих данному интервале (отрезку), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $f\ (x) > 0$ $\left(f\ (x) < 0\right)$ при $a < x < b,$ то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a;\ b]$.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками $x$ (где $f\ (x) = 0$ или же $f\ (x)$ не существует).




Если существует такая двусторонняя окрестность точки $x_o$, что для всякой точки $x\quad x_o$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_o)$, то точка $x_o$ называется точкой минимума функции $y = f(x)$, а число $f(x_o)$ – минимумом функции $y = f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x\quad x_1$ некоторой окрестности точки $x_1$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то $x_1$ называется точкой максимума функции $y = f(x)$, а $f(x_1)$ – максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции – экстремумом функции. Если $x_o$ – точка экстремума функции $f(x)$, то $f\ (x_o) = 0$ или же $f\ (x_o)$ не существует (*необходимое условие существования экстремума*). Обратное утверждение не верно: точки, в которых $f\ (x_o) = 0$ или $f\ (x_o)$ не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$.

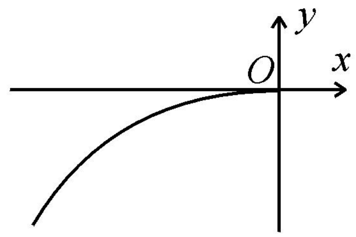
*Достаточный признак существования* и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ следующий: если существует такая окрестность $(x_o - \delta,\ x_o + \delta)$ критической точки $x_o$, что $f\ (x) > 0$ при $x_o - \delta < x < x_o$ и $f\ (x) < 0$ при $x_o < x < x_o + \delta$, то $x_o$ – точка максимума функции $f(x)$; если же $f\ (x) < 0$ при $x_o - \delta < x < x_o$ и $f\ (x) > 0$ при $x_o < x < x_o + \delta$, то $x_o$ – точка минимума функции $f(x)$.

Если, наконец, найдется такое положительное число $\delta$, что $f\ (x)$ сохраняет неизменный знак при $x_o - \delta < x < x_o + \delta$, то точка $x_o$ не является точкой экстремума функции $f(x)$.

*Наименьшее* (*наибольшее*) *значение* непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a;\ b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a;\ b]$.

Пример 1.1. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = x\ \sqrt{-5x}.$$




Область существования: $-5x \quad 0 \qquad x \quad 0.$

Находим критические точки:

$$y\ = \sqrt{-5x} + x\ \frac{1}{2\sqrt{-5x}}\ (-5) = \sqrt{-5x} - \frac{5x}{2\sqrt{-5x}} =$$

$$= \frac{-10x - 5x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{-15x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3\ (-5x)}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3}{2}\ \sqrt{-5x} \quad 0.$$

При $x \quad 0$ функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке $x = 0$: $\quad y(0) = 0.$

Пример 1.2. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = \sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}.$$

Область существования: $x \quad (- \quad ;\ + \quad ).$

Находим критические точки:

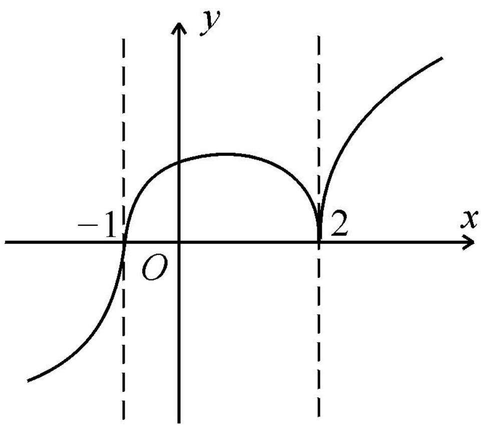
$$y\ = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)(x+1)}{3\ \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3\ \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}},$$

$y\ = 0 \qquad\qquad x_1 = 0,$

$y$ не существует $\qquad x_2 = -1;\ x_3 = 2.$ Получили три критические точки.

| $x$ | $(- \quad ;\ -1)$ | $-1$ | $(-1;\ \ 0)$ | $0$ | $(0;\ \ 2)$ | $2$ | $(2;\ \ + \quad )$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | + | не сущ. | + | 0 | – | не сущ. | + |
| $y$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

$$\lim_{x \to 2+0} y\ (x) = \lim_{x \to 2+0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = + \quad ; \quad \lim_{x \to 2-0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = - \quad .$$




$$\lim_{x\to 1-0} y(x) = \lim_{x\to 1+0} y(x) = + \quad .$$

Так как $y(x) = k,$ где $k -$ угловой коэффициент касательной, то при $x = -1$ и $x = 2$ касательная к графику функции перпендикулярна оси $Ox.$

$$y(-1) = 0; \quad y(0) = \sqrt[3]{4}; \quad y(2) = 0.$$

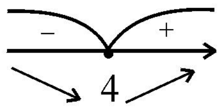
<u>Пример 1.3.</u> Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом 256 м$^3$ такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть $a -$ сторона квадрата основания, $h -$ глубина бассейна;

$$a^2 h = 256 \qquad a^2 = \frac{256}{h}, \quad a = \frac{16}{\sqrt{h}}, \quad h > 0;$$

$$S = S_{бок} + S_{дна} = 4ah + a^2 = 4\ \frac{16}{\sqrt{h}}\ h + \frac{256}{h} = 64\sqrt{h} + \frac{256}{\sqrt{h}} = F(h);$$

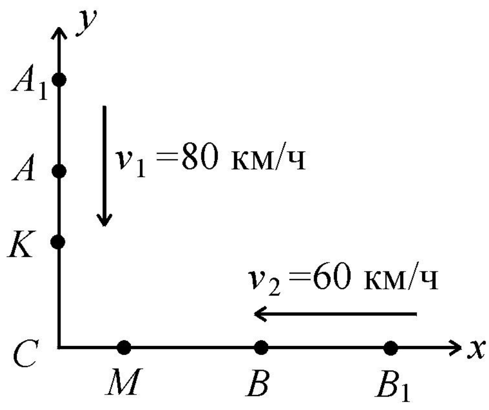
$$F\ (h) = \frac{64}{2\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32}{\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32h^{3/2} - 256}{h^2} = \frac{32}{h^2}\left(h^{3/2} - 8\right);$$




$F\ (h) = 0 \qquad h^{3/2} = 8; \quad h = 4.$ При $h = 4$ величина $F(h) = S$ будет наименьшей.

<u>Пример 1.4.</u> Две прямые железные дороги $AA_1$ и $BB_1$ перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте $C,$ причем $AC = 800$ км и $BC = 700$ км. Из пунктов $A$ и $B$ по направлению к $C$ одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно $80$ км/ч и $60$ км/ч. Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим ?

Отметим положение поездов в момент $t > 0$ точками $K$ и $M$.




$AK = 80t; \quad BM = 60t;$

$CK = AC - AK = 800 - 80t;$

$CM = CB - BM = 700 - 60t;$

$(KM)^2 = (CK)^2 + (CM)^2 =$

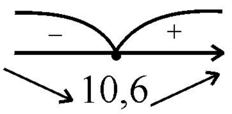
$= (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2; \quad KM$

минимально, если минимальна величина

$(KM)^2 = F(t) = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2;$

$F(t) = 2(800 - 80t)\ (-80) + 2(700 - 60t)\ (-60) =$

$= -128000 + 12800t - 84000t + 7200t = 20000t - 212000 = 0; \quad t = 10{,}6;$




$t = 10{,}6$ – точка минимума функции $F(t)$. Через $10{,}6$ часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.

## 2. АСИМПТОТЫ

Если точка $(x;\ y)$ непрерывно перемещается по кривой $y = f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Если существует число $a$ такое, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ , то прямая $x = a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to +} \dfrac{f(x)}{x} = k_1$ и $\lim\limits_{x\to +} \left[ f(x) - k_1 x \right] = b_1$, то прямая $y = k_1 x + b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to -} \dfrac{f(x)}{x} = k_2$ и $\lim\limits_{x\to -2} \left[ f(x) - k_2 x \right] = b_1$, то прямая $y = k_2 x + b_2$ будет асимптотой (*левая наклонная асимптота*).

График функции $y = f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

<u>Пример 2.1.</u> Найти асимптоты и построить график функции

$$y = 2x + \frac{3cos(x-1)}{x-1}.$$

Область существования: $x \quad 1.$

Ищем вертикальные асимптоты.

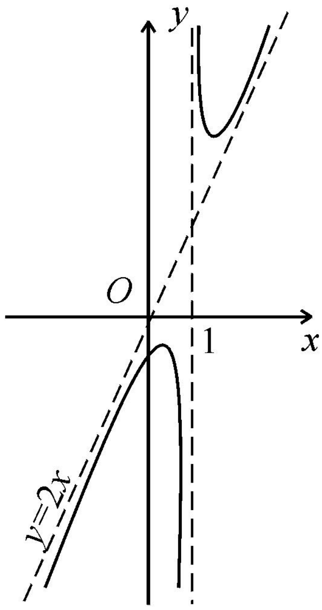
Функция имеет разрыв в точке $x = 1$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to 1-0} \ 2x + \frac{3cos(x-1)}{x-1} \ = 2 + \frac{3\ 1}{-0} = 2 - \quad = - \quad ;$$

$$\lim_{x\to 1+0} \ 2x + \frac{3cos(x-1)}{x-1} \ = 2 + \frac{3\ 1}{+0} = 2 + \quad = + \quad ;$$

следовательно, $x = 1$ – вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты в виде $y = kx + b.$




$$k=\lim_{x\to\pm}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm}\frac{1}{x}\quad 2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}\quad=$$

$$=2+0=2;\qquad b=\lim_{x\to\pm}\left[f(x)-kx\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm}\quad 2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}-2x\quad=$$

$$=\lim_{x\to\pm}\frac{3\cos(x-1)}{x-1}=0.$$

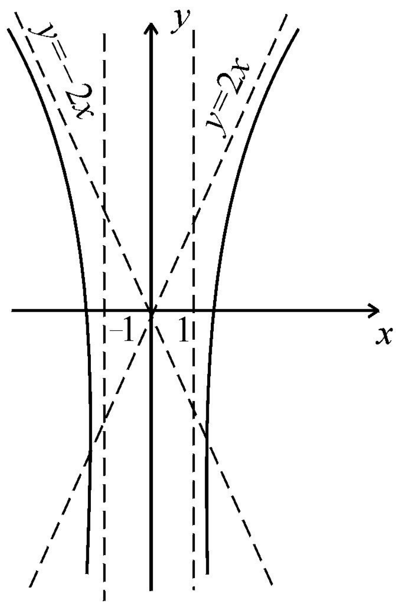
Следовательно, при $x\to\pm$ существует асимптота $y=2x.$

Пример 2.2. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}.$

Область существования: $x^2-1>0;\quad x^2>1;\quad x>1$ и $x<-1.$

$$y=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}};\qquad y(-x)=\frac{2(-x)^2-9}{\sqrt{(-x)^2-1}}=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}\qquad y(x)=y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при $x>1,$ а затем отразить его симметрично относительно оси $Oy.$




$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2-9}{+0}=-\qquad x=1-$$

вертикальная асимптота при $x\to 1+0.$

Пусть $x\to 1+\quad.$

$$k=\lim_{x\to+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+}\frac{2x^2-9}{x\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+}\frac{2x^2-9}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+}\frac{2-\frac{9}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=2.$$

$$b=\lim_{x\to+}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+}\quad\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}-2x\quad=$$

$$=\lim_{x\to+}\frac{2x^2-9-2x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+}\frac{\left(2x^2-9\right)^2-4x^2\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(2x^2-9+2x\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to +} \frac{-32x^2+81}{x^3\ \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\ \ 2-\frac{9}{x^2}+2\ \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

При $x \to +$ получаем асимптоту $y = 2x.$ График данной функции пересекает ось $Ox$ при $2x^2 - 9 = 0,$ т.е. в точках $x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$.

<u>Пример 2.3.</u> Найти асимптоты и построить график функции

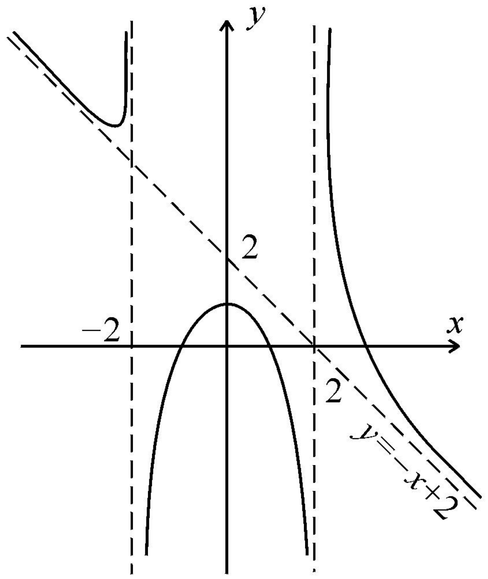
$$y = \frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}.$$

Область существования: $4-x^2 \quad 0 \qquad x \quad 2$ и $x \quad -2$.

В точках $x_1 = -2$ и $x_2 = +2$ функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{-8-8+6+2}{-0} = + \quad ;$$

$$\lim_{x\to -2+0} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{-8-8+6+2}{+0} = - \quad ;$$




$x = -2$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{8-8-6+2}{+0} = - \quad ;$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{8-8-6+2}{-0} = + \quad ;$$

$x = 2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x \to \pm$ ищем в виде: $y = kx + b.$

$$k = \lim_{x\to \pm} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{x\left(4-x^2\right)} =$$

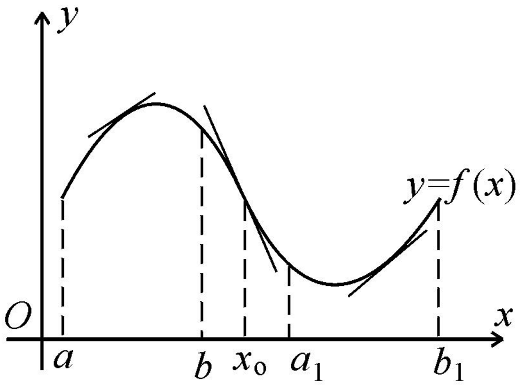
$$= \lim_{x\to \pm} \frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2}-1} = \frac{1}{-1} = -1; \qquad b = \lim_{x\to \pm} \left[\, f(x) - kx \right] =$$

$$= \lim_{x\to \pm} \ \frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2} + x \ = \lim_{x\to \pm} \frac{-2x^2+x+2}{4-x^2} = 2.$$

При $x \to \pm$ получаем асимптоту $y = -x + 2.$

## 3. НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ *вогнут вниз* на интервале $(a;\ b)$ (*вогнут вверх* на интервале $(a_1;\ b_1)$), если при $a < x < b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при $a_1 < x < b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала $(a;\ b)$ (или интервала $(a_1;\ b_1)$). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y = f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства $f''(x) < 0$ $\left(f''(x) > 0\right)$.




Точка $\left(x_o,\ f(x_o)\right)$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба.* Для абсциссы точки перегиба $x_o$ графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_o) = 0$ или $f''(x_o)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками* 2*-го рода.* Критическая точка 2-го рода $x_o$ является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_o - \delta < x < x_o$ и $x_o < x < x_o + \delta$, где $\delta -$ некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

<u>Пример.</u> Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

Имеем: $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}$. Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода: $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают всю область существования функции $(-\infty;\ +\infty)$ на три интервала.

| $x$ | $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | 0 | – | 0 | – |
| $y$ | | перегиб | | перегиб | |

Получили: кривая вогнута вверх при $x \quad - \quad ; -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x \quad \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad +$

и вогнута вверх при $x \quad -\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Точки $\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{e}}$ – точки перегиба.

## 4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область существования этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области существования. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются): четность, периодичность и т.д.

Далее нужно найти точки разрыва, асимптоты, точки экстремума функции, точки перегиба и т.д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции.

Пример 4.1. Провести полное исследование и построить график функции $y = x\ \sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Область существования: $x \quad (- \quad ; \quad + \quad )$.

$y(x) \quad y(-x)$ функция общего вида.

Так как функция определена при всех $x$, и у нее нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты при $x \to \pm$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm} \frac{x\ \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm} \sqrt[3]{(x+2)^2} = + \quad ,$$ следовательно, наклонных асимптот также нет.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y \ = \ x\ \sqrt[3]{(x+2)^2} \ = (x+2)^{2/3} + x\ \frac{2}{3}\ (x+2)^{-1/3} = \frac{3(x+2)+2x}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

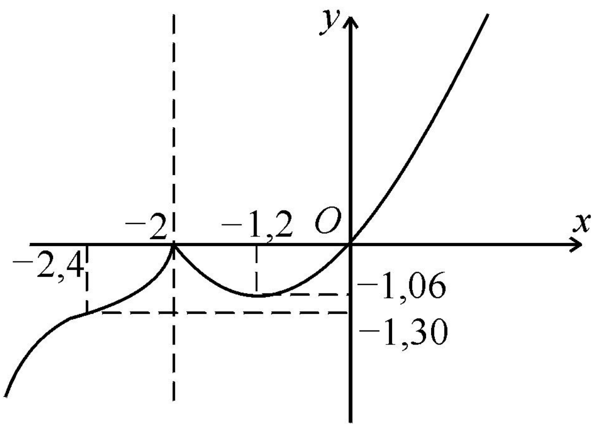
$y = 0 \qquad 5x + 6 = 0, \quad x = -1{,}2;$

$y$ не существует $\qquad x + 2 = 0, \quad x = -2.$

| $x$ | $(- \quad ; \ -2)$ | $-2$ | $(-2; \quad -1{,}2)$ | $-1{,}2$ | $(-1{,}2; \quad + \quad )$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | + | не сущ. | – | 0 | + |
| | | | | | |

| $y$ | | max | | min | |
|---|---|---|---|---|---|

$y_{max} = y(-2) = 0$ (касательная в этой точке перпендикулярна оси $Ox$).




$y_{min} = y(-1{,}2) = -1{,}2\ \sqrt[3]{0{,}64} \approx -1{,}06$ (касательная в этой точке параллельна оси $Ox$).

Исследуем функцию по второй производной.

$$y \;=\; \frac{5x+6}{(x+2)^{2/3}} \;=$$

$$= \frac{5\ \sqrt[3]{x+2} - (5x+6)\ \dfrac{1}{3\ \sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{15(x+2) - (5x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{10x+24}{3\ \sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

$y \;= 0$ при $x = -2{,}4;$ $\quad y$ не существует при $x = -2.$

| $x$ | $(-\ \ ;\ -2{,}4)$ | $-2{,}4$ | $(-2{,}4;\ \ -2)$ | $-2$ | $(-2;\ \ +\ \ )$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | – | 0 | + | не сущест. | + |
| $y$ | | перегиб | | | |

$y_{перегиба} = y(-2{,}4) = -2{,}4\ \sqrt[3]{(-2{,}4)^2} \approx -1{,}30; \qquad y(0) = 0.$

<u>Пример 4.2.</u> Провести полное исследование и построить график функции $y = \left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^2.$

Область существования: $x \quad -2.$

$y(x) \quad y(-x)$ функция общего вида.

$x = -2$ – точка разрыва, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to 2-0}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \left(\frac{4+1}{-0}\right)^2 = + \quad ; \qquad \lim_{x\to 2+0}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \left(\frac{4+1}{+0}\right)^2 = +$$

$x = 2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x \to \pm$ ищем в виде: $y = kx + b.$

$$k = \lim_{x\to\pm} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm} \frac{1}{x} \quad \frac{2x+1}{x+2} \quad ^{2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm} \left[ f(x) - kx \right] = \lim_{x\to\pm} \quad \frac{2x+1}{x+2} \quad ^{2} = 4.$$

При $x \to \pm$ получаем асимптоту $y = 4.$

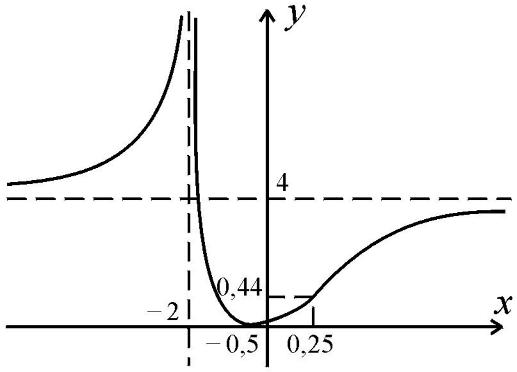
Исследуем функцию по первой производной.

$$y \; = 2 \quad \frac{2x+1}{x+2} \quad \frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{6(2x+1)}{(x+2)^2};$$

$y \; = 0 \qquad 2x+1 = 0, \quad x = -0{,}5;$

$y$ не существует $\qquad x = -2.$

| $x$ | $(- \;\; ; \; -2)$ | $(-2; \quad -0{,}5)$ | $-0{,}5$ | $(-0{,}5; \quad + \quad)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | + | – | 0 | + |
| $y$ | ↗ | ↘ | min | ↗ |




$y_{min} = y(-0{,}5) = 0.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y \; = 6 \; \frac{2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 \;\; (2x+1)}{(x+2)^6} =$$

$$= 6 \; \frac{2(x+2) - 3(2x+1)}{(x+2)^4} = \frac{6(1-4x)}{(x+2)^4};$$

$y \; = 0 \qquad 1 - 4x = 0; \qquad x = 0{,}25;$

$y$ не существует $\qquad x = -2.$

| $x$ | $(- \;\; ; \; -2)$ | $(-2; \quad 0{,}25)$ | $0{,}25$ | $(0{,}25; \quad + \quad)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | + | + | 0 | – |
| $y$ | | | перегиб | |

$$y_{перегиба} = y(0{,}25) = \quad \frac{1{,}5}{2{,}25} \quad ^{2} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

Пример 4.3. Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{e^{x-3}}{x-3}$.

Область существования: $x - 3 \quad 0; \qquad x \quad 3.$

$y(x) \quad y(-x)$ – функция общего вида.

В точке $x = 3$ функция терпит разрыв, т.к. в ней она не определена.

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{e^{x-3}}{x-3} = - \quad ,$$

$x = 3$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to 3+0} \frac{e^{x-3}}{x-3} = +$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

1) $x \to + \quad ,$

$$k = \lim_{x\to +} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \lim_{x\to +} \frac{\left(e^{x-3}\right)}{\left(x^2 - 3x\right)} = \lim_{x\to +} \frac{e^{x-3}}{2x-3} =$$

$$= \lim_{x\to +} \frac{\left(e^{x-3}\right)}{(2x-3)} = \lim_{x\to +} \frac{e^{x-3}}{2} = + \quad ,$$ следовательно, при $x \to +$ наклонных асимптот нет.

2) $x \to - \quad ,$

$$k = \lim_{x\to -} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \frac{0}{+} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to -} \left[ f(x) - kx \right] = \lim_{x\to -} \frac{e^{x-3}}{x-3} = 0,$$

при $x \to -$ получаем асимптоту $y = 0.$

Исследуем функцию по первой производной.

$$y = \frac{e^{x-3}}{x-3} = \frac{e^{x-3}\ (x-3) - e^{x-3}}{(x-3)^2} = e^{x-3}\ \frac{x-3-1}{(x-3)^2} = e^{x-3}\ \frac{x-4}{(x-3)^2},$$

$y = 0 \qquad x - 4 = 0,\ x = 4; \qquad y$ не существует $\qquad x = 3.$

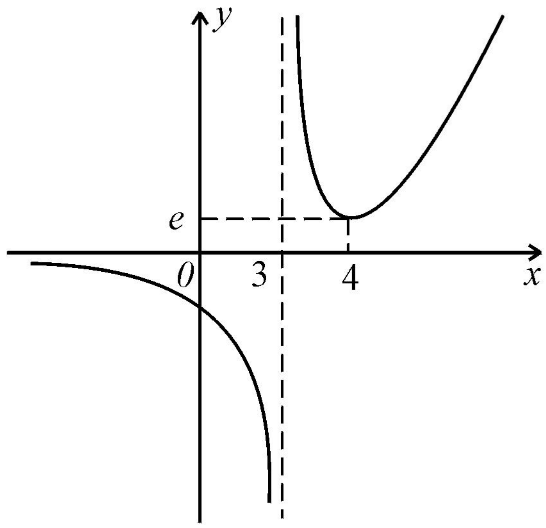
| $x$ | $(- \quad ; 3)$ | $(3; \quad 4)$ | $4$ | $(4; \quad + \quad )$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | – | – | 0 | + |
| $y$ | $\searrow$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

$y_{min} = y(4) = e \approx 2{,}72.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y \quad = e^{x-3} \quad \frac{x-4}{(x-3)^2} + e^{x-3} \quad \frac{(x-3)^2 - (x-4) \;\; 2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{e^{x-3}}{(x-3)^2} \quad \frac{x^2 - 7x + 12 - x + 5}{x-3} = \frac{e^{x-3} \quad \left(x^2 - 8x + 17\right)}{(x-3)^3}; \qquad y \qquad 0;$$




$y$ не существует $\qquad x = 3.$

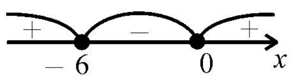
| $x$ | $(- \quad ; \; 3)$ | $(3; \quad + \quad )$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | | |

$$y(0) = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \approx --{,}02.$$

<u>Пример 4.4.</u> Провести полное исследование и построить график функции $y = ln\frac{x+6}{x} - 1.$

Область существования: $\frac{x+6}{x} > 0.$

$x > 0, \;\; x < -6.$




Функция общего вида.

$\lim\limits_{x \to -6-0} \; ln\frac{x+6}{x} - 1 \;\; = - \qquad\qquad x = -6$ – вертикальная асимптота.

$\lim\limits_{x \to -+0} \; ln\frac{x+6}{x} - 1 \;\; = + \qquad\qquad x = -0$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

$$k = \lim_{x \to \pm} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm} \frac{ln\frac{x+6}{x} - 1}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \to \pm} \left[ f(x) - kx \right] = \lim_{x \to \pm} \;\; ln\frac{x+6}{x} - 1 \;\; = -1.$$

При $x \to \pm$ получаем асимптоту $y = -1.$

Исследуем функцию по первой производной.

| $x$ | $(- \ ; \ -6)$ | $(0; \ + \ )$ |
| --- | --- | --- |
| $y$ | $-$ | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | $\searrow$ |

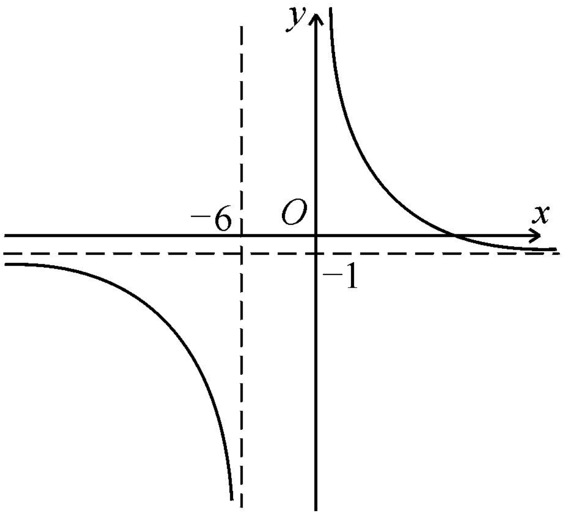
$$y = \frac{x}{x+6} \quad \frac{x-x-6}{x^2} = \frac{-6}{x(x+6)} \quad 0.$$

Экстремумов у функции нет.

Исследуем функцию по второй производной.

$$y = -6 \ \frac{-(x+6+x)}{x^2(x+6)^2} = \frac{6(2x+6)}{x^2(x+6)^2} = \frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2};$$

$y = 0 \qquad x+3=0; \quad x=-3$ – не входит в область существования.




| $x$ | $(- \ ; \ -6)$ | $(0; \ + \ )$ |
| --- | --- | --- |
| $y$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | | |

Точек перегиба нет.

$$ln\frac{x+6}{x} - 1 = 0 \qquad x = \frac{6}{e-1};$$

$$y \ \frac{6}{e-1} \quad = 0.$$

## Интегральное исчисление функции одной переменной

### 1. Неопределенный интеграл

*Первообразной функцией* для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F\ (x) = f(x)$.

*Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется ее общая первообразная

$$f(x)dx = F(x) + C \ .$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $F(x)$ − результат интегрирования, $C$ − произвольная постоянная.

*Свойства неопределенного интеграла*:

1. $(u(x)+v(x))dx = \quad u(x)dx + \quad v(x)dx$.
2. $A \quad f(x)dx = A \qquad f(x)dx$, где $A$ − постоянная.
3. Если $\quad f(x)dx = F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$, то $\quad f(u)du = F(u)+C$.

*Таблица простейших интегралов:*

1. $dx = x + C$.
7. $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
2. $x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \quad -1)$.
8. $\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
3. $\dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
9. $\dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$.
4. $a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \qquad e^x dx = e^x + C$.
10. $\dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C \quad$.
5. $\sin x dx = -\cos x + C \quad$.
11. $\dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + C, (a \quad 0)$.
6. $\cos x dx = \sin x + C$.
12. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C, (A \quad 0)$.

*Основные методы интегрирования*:

1. Подведение под знак дифференциала:

   а) к функции, стоящей под знаком дифференциала, можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) \pm A)$;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель: $df(x) = \frac{1}{A} d(A \quad f(x))$;

в) под знак дифференциала подводится функция по правилу: $f \ (x)dx = df(x)$.

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$udv = uv - \quad vdu$ , где $u = u(x), v = v(x)$.

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а) $a^x \quad P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $\qquad dv = a^x dx$.

б) $\sin ax \quad P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \sin axdx$.

в) $\cos ax \quad P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \cos axdx$,

г) $\ln ax \quad P_n(x)dx$, $u = \ln ax$, $dv = P_n(x)dx$,

д) $\arcsin ax \quad P_n(x)dx$, $u = \arcsin ax$, $dv = P_n(x)dx$,

е) $\mathrm{arctg} ax \quad P_n(x)dx$, $u = \mathrm{arctg} ax$, $dv = P_n(x)dx$,

где $P_n(x) -$ многочлен *n*-ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$f(x)dx = \quad f(\varphi(t))d\varphi(t) = \quad f(\varphi(t))\varphi \ (t)dt$, где $x = \varphi(t)$.

***Пример выполнения задания***.

Найти неопределенные интегралы:

а) $\frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; б) $\frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx$; в) $(3x + 4)e^{3x} dx$.

*Решение.*

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \quad \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx + \quad \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$$

$$= (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(\frac{x^2}{2}) =$$

$$= (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + -\frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\; 3(\arcsin x)^2 \; (\arcsin x) \; - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2) \; + C =$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 17 & \underline{x^2 - 4x + 3} \\
\underline{x^3 - 4x^2 + 3x} & x + 4 \\
4x^2 - 3x - 17 & \\
\underline{4x^2 - 16x + 12} & \\
13x - 29 &
\end{array}$$

Тогда

$$\frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx = \quad x + 4 + \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} \; dx = \; xdx + \; 4dx + \; \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \; \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx\,.$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)},$$

значит $13x - 29 = A(x-3) + B(x-1)$.

При $x = 3$ имеем $13 \; 3 - 29 = B(3-1)$, откуда $B = 5$;

при $x = 1$ имеем $13 \; 1 - 29 = A(1-3)$, откуда $A = 8$.

Получаем $\dfrac{13x-29}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{8}{x-1} + \dfrac{5}{x-3}$ и интегрируем

$$\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}dx = \frac{8}{x-1}dx + \frac{5}{x-3}dx = 8 \; \frac{d(x-1)}{x-1} + 5 \; \frac{d(x-3)}{x-3} =$$

$$= 8\ln|x-1| + 5\ln|x-3| + C$$

и окончательно получаем

$$\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + \ln|x-3| + C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + \ln|x-3| + C \quad = \frac{2x}{2} + 4 + \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3} =$$

$$= \frac{(x+4)(x-1)(x-3) + 8(x-3) + 5(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^3-17}{x^2-4x+3},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

*Замечание.*

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C \quad ; \qquad \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{(-k+1)}(x-a)^{-k+1} + C \quad ,$$

($k = 2,3,...$).

в) применим методом интегрирования по частям.

Примем $u = 3x+4$, $dv = e^{3x}dx$, тогда $du = 3dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$(3x+4)e^{3x}dx = (3x+4)\frac{1}{3}e^{3x} - \quad \frac{1}{3}e^{3x} \quad 3dx = \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \quad e^{3x}dx =$$

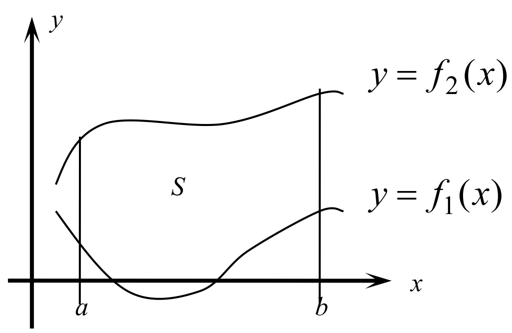
$$= \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3}e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C\,.$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1)+C) \ = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}\big(3(x+1)+1\big) = e^{3x}(3x+4)\,,$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

## 2. **Определенный интеграл**



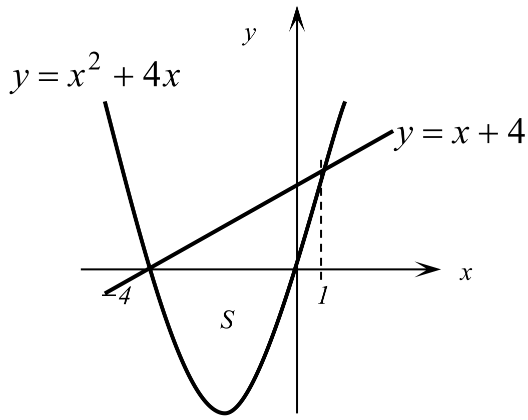

Если на плоскости $Oxy$ задана фигура, ограниченная двумя непрерывными линиями $y = f_1(x)$ , $y = f_2(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$ , $x = b$ , то площадь $S$ такой фигуры может быть вычислена по формуле

$$S = \ _a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx\text{, где } f_2(x) \quad f_1(x) \text{ на отрезке } [a,b].$$

***Пример 2.1*** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

*Решение.*

Заданные линии ограничивают на плоскости Оху криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.




Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \; x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int (4 - 3x - x^2)dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \; (\textit{кв. ед.}).$$

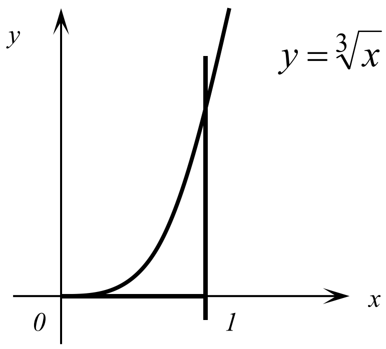
Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью *Ox* и прямыми $x = a$, $x = b$,

1) вокруг оси *Ox*, вычисляются по формуле $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$;

2) вокруг оси *Oy*, вычисляются по формуле $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.

**Пример**.*2.2* Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей *Ox* и *Oy* криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y = \sqrt[3]{x}$, осью *Ox* и прямой $x = 1$.

*Решение.*




1) объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox*, равен

$$V_x = \pi \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \pi \left. \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} \right|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \ (\textit{куб. ед.})$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy*, равен

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \sqrt[3]{x} dx = 2\pi \left. \frac{x^{7/3}}{7/3} \right|_0^1 = \frac{6\pi}{7} (\textit{куб. ед.}).$$

**Функции нескольких переменных**

Переменная величина *z* называется *функцией двух переменных x* и *y*, если каждой паре значений (*x,y*) из данной области соответствует единственное определенное значение $z = f(x, y)$.

Для функции $z = f(x, y)$ вводятся понятия *частных производных* первого порядка, которые определяются выражениями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

и *частных производных* второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ *максимум* (*минимум*), если значение этой функции в точке $M_0$ больше (меньше), чем значения функции в любой точке из окрестности точки $M_0$.

Необходимыми условиями существования *экстремума* (максимума или минимума) дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ является равенство нулю ее частных производных первого порядка:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{matrix}.$$

Точки, в которых частные производные обращаются в ноль, называются *стационарными точками* функции $z = f(x, y)$. Для того чтобы стационарная точка являлась экстремумом, в ней должны выполняться *достаточные условия*. Обозначим $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}$, $B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}$, $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$, $\Delta = AC - B^2$.

Если в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$

$\Delta > 0, A > 0$, то $M_0$ есть точка минимума;

$\Delta > 0, A < 0$, то $M_0$ есть точка максимума;

$\Delta < 0$, то в точке $M_0$ нет экстремума;

$\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

***Пример***. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 + 6$.

*Решение.*

1. Найдем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2y.$$

2. Запишем необходимые условия существования экстремума

$$\begin{array}{ll} 2-2x=0 \qquad\qquad & x=1 \\ 4-2y=0 & y=2 \end{array},$$

значит точка $M(1;2)$ является стационарной точкой функции.

3. Проверим выполнение в точке $M$ достаточного условия. Для этого найдем вторые частные производные функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2.$$

В точке $M(1;2)$ $A=-2, B=0, C=-2$ и $\Delta=(-2)\ (-2)-0=4$. Поскольку $\Delta=4>0, A=-2<0$, точка $M(1;2)$ является точкой максимума. Значение функции в этой точке $z\big|_M=2\ \ 1+4\ \ 2-1^2-2^2+6=11$.

Функция двух независимых переменных $z=f(x,y)$ принимает наибольшее и наименьшее значения в области *D*, ограниченной линией $\varphi(x,y)=0$, либо в стационарных точках, расположенных внутри области *D*, либо на границе этой области.

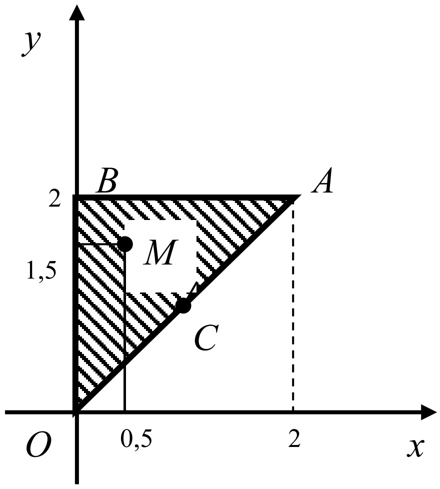
Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции $z=f(x,y)$ в заданной области $D$ решается по следующему плану:

1. Определяем стационарные точки функции, расположенные внутри области *D*, и вычисляем значения функции в этих точках.
2. Находим стационарные точки функции на границе $\varphi(x,y)=0$ области или на отдельных ее участках, заданных различными уравнениями, и вычисляем значения функции в этих точках.
3. Из всех вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

***Пример***. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+2xy-4x-y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=2$, $y=x$.

*Решение.*

1. Найдем стационарные точки функции из условий равенства нулю частных производных функции




$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4 = 0 \qquad x = 0{,}5$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 1 = 0 \qquad y = 1{,}5$$

Стационарная точка $M(0{,}5;1{,}5)$ лежит внутри заданной области $OAB$.

Значение функции в точке $M$ равно

$z|_M = 0{,}5^2 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5 - 4 \cdot 0{,}5 - 1{,}5 = -1{,}75$.

2. Исследуем поведение функции на границах области:

а) на границе $OA$ $y = x$, $0 \le x \le 2$, $z = x^2 + 2x \cdot x - 4 \cdot x - x$ или $z = 3x^2 - 5x$;

$z' = 6x - 5$, $z' = 0$ при $x = \dfrac{5}{6}$, тогда $y = \dfrac{5}{6}$ (так как $y$=$x$).

В точке $C\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6}\right)$ значение функции равно $z|_C = 3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 - 5\left(\dfrac{5}{6}\right) = -\dfrac{25}{12}$.

Вычислим значения функции в крайних точках отрезка $OA$.

В точке $O(0;0)$ $z|_O = 0$, в точке $A(2;2)$ значение функции равно

$z|_A = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 = 2$.

б) на границе $BA$ $y = 2$, $0 \le x \le 2$, $z = x^2 + 2x \cdot 2 - 4x - 2$ или $z = x^2 - 2$;

$z' = 2x$, $z' = 0$ при $x = 0$, а $y = 2$ согласно уравнению прямой $BA$.

В точке $B(0;2)$ значение функции равно $z|_B = 3 \cdot 0^2 - 2 = -2$.

в) на границе $OB$ $x = 0$, $0 \le y \le 2$, $z = -y$;

$z' = -1 \ne 0$ при всех $y \in [0;2]$, следовательно, стационарных точек на линии $OB$ нет.

3. Из всех вычисленных значений заданной функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$z\big|_A = 2$ – наибольшее значение функции в области $OAB$

$z\big|_C = -\dfrac{25}{12}$ – наименьшее значение функции в области $OAB$.

## 3-ий семестр

## <u>Векторная алгебра</u>

<u>Некоторые сведения из теории</u>

Вектор – направленный отрезок.

Равенство

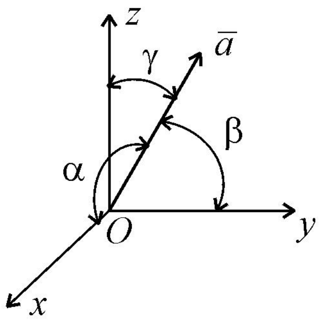
$$\vec{a} = (x, y, z)$$

(1) означает, что $x, y, z$ – проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (2)$$

позволяет по координатам вектора определить его модуль.




Если $\alpha, \beta, \gamma$ – углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad z = |\vec{a}|\cos\gamma, \qquad (3)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

(4)

Если известны начало вектора $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и конец $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1.$$

(5)

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$$

(6) и $\alpha\vec{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$, где $\alpha$ – любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Признак коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

(7)

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом:

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по осям соответственно $Ox, Oy, Oz$ в положительную сторону.

Любой вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

(8)

Скалярным произведением векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\ \vec{b} = |\vec{a}|\ \left|\vec{b}\right|\ cos\varphi, \tag{9}$$

$$\vec{a}\ \vec{b} = |\vec{a}|\ пр_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\ пр_{\vec{b}}\vec{a}, \tag{10}$$

$$\vec{a}\ \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \tag{11}$$

т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a}\ \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

(12) Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{13}$$

$$cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{14}$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа этой силы определяется

$$W = \vec{F}\ \vec{S}.$$

(15)

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a}\ \ \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}|\ \left|\vec{b}\right|\ sin\varphi$, где $\varphi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3. вектор $\vec{c}$ образует с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a}\quad\vec{b}=-\vec{b}\quad\vec{a}.$$

(16) Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S=\left|\vec{a}\quad\vec{b}\right|, \tag{17}$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\quad\vec{b}\right|. \tag{18}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a}\quad\vec{b}=0$, в частности, $\vec{a}\quad\vec{a}=0$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a}=\left(x_1,\, y_1,\, z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2,\, y_2,\, z_2\right)$, то

$$\vec{a}\quad\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{19}$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке $M$, а вектор $\vec{a}$ идет из некоторой точки $O$ в точку $M$, то вектор $\vec{a}\quad\vec{F}$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки $O$:

$$m_{o}\vec{F}=\vec{a}\quad\vec{F}. \tag{20}$$

<u>Смешанным произведением</u> трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a}\quad\vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\quad\vec{b}\right)\ \vec{c}=\vec{a}\ \left(\vec{b}\quad\vec{c}\right).$$

(21) Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$$V=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}. \tag{22}$$

Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0.$$

(23) Для векторов $\vec{a}=\left(x_1,\, y_1,\, z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2,\, y_2,\, z_2\right)$, $\vec{c}=\left(x_3,\, y_3,\, z_3\right)$ смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

(24)

<u>Задача 1.</u> На материальную точку действуют силы:

$$\vec{F}_1=\left(2,-1,1\right),\quad \vec{F}_2=\left(-1,2,2\right),\quad \vec{F}_3=\left(1,1,-2\right).$$

Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2,-1,0)$ в положение $B(4,1,-1)$.

Решение. Найдем равнодействующую

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(2-1+1,-1+2+1,1+2-2)=(2,2,1).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(4-2,1+1,-1-0)=(2,2,-1).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W=\vec{R}\ \vec{S}=2\ \ 2+2\ \ 2+1\ \ (-1)=7.$$

Задача 2. Дана сила $\vec{F}=(3,4,-2)$ и точка ее приложения $A(2,-1,3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. По формуле (20) $m_o\vec{F}=\vec{r}\quad\vec{F}$. Вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$ по формуле (5) имеет координаты $\vec{r}=(2,-1,3)$, по формуле (19)

$$\vec{r}\quad\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}=-10\vec{i}+13\vec{j}+11\vec{k}.$$

Итак, $m_o\vec{F}=(-10,13,11)$. Модуль момента находим по формуле (2):

$$\left|m_o\vec{F}\right|=\sqrt{(-10)^2+(13)^2+(11)^2}=\sqrt{390}\approx 19{,}748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$\cos\alpha=\frac{-10}{19{,}748}=-0{,}506,\quad \cos\beta=\frac{13}{19{,}748}=0{,}658,\quad \cos\gamma=\frac{11}{19{,}748}=0{,}557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha=120^\circ 24',\qquad \beta=48^\circ 51',\qquad \gamma=56^\circ 9'.$$

Контроль: должно быть $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. У нас:

$$(-0{,}506)^2+(0{,}658)^2+(0{,}557)^2=0{,}999.$$

Задача 3. Написать разложение вектора $\vec{x}=(5,16,2)$ по векторам $\vec{p}=(2,1,0)$, $\vec{q}=(0,-2,0)$, $\vec{r}=(-1,5,2)$.

Решение.

1. Разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ имеет вид

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{p}+\alpha_2\vec{q}+\alpha_3\vec{r}$$

или в координатной форме

$$x_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 q_1 + \alpha_3 r_1$$
$$x_2 = \alpha_1 p_2 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 r_2$$
$$x_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 q_3 + \alpha_3 r_3.$$

2. С учетом числовых значений координат векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ и $\vec{x}$ получим систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{array}{lll} 2\ \alpha_1 + 0\ \alpha_2 - 1\ \alpha_3 = 5 & 2\alpha_1 = 5 + \alpha_3 & \alpha_1 = 3 \\ 1\ \alpha_1 - 2\ \alpha_2 + 5\ \alpha_3 = 16 & 2\alpha_2 = \alpha_1 + 5\alpha_3 - 16 & \alpha_2 = -4 \\ 0\ \alpha_1 + 0\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 & \alpha_3 = 1 & \alpha_3 = 1. \end{array}$$

3. Разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид:

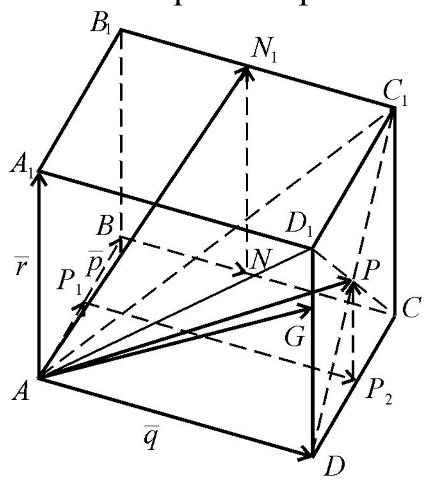
$$\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}$.

<u>Задача 4.</u> В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$ образуют базис. Разложить векторы $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN_1}$ по выбранному базису, если точка $G$ делит ребро $DD_1$ в отношении 1:2; точка $P$ – точка пересечения диагоналей грани $DD_1C_1C$; точка $N_1$ – середина ребра $B_1C_1$.

<u>Решение.</u>

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:




$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r}$,

$$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

## Аналитическая геометрия на плоскости

## <u>Прямая линия. Ее уравнение</u>

$$Ax + By + C = 0 \ - \qquad (38)$$

общее уравнение прямой.

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} \ -$$

(39) уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$, $\vec{a} = (m, n) -$ вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) = 0 \ - \qquad (40)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с перпендикулярным вектором $\vec{n} = (A, B)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \ - \qquad (41)$$

уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ - \qquad (42)$$

уравнение прямой в «отрезках», где $a, b -$ величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \ - \qquad (43)$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\varphi$ и отрезком $b -$ отсекаемым на оси $Oy$.

$$y - y_\circ = k(x - x_\circ) \ -$$

(44) уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с угловым коэффициентом $k$.

$$d = \frac{|\,Ax_\circ + By_\circ + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ - \qquad (45)$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

$$\delta = \frac{Ax_\circ + By_\circ + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ - \qquad (45a)$$

отклонение точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} \ -$$

(46) угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$.

$$k_1 = k_2 \ - \qquad (47)$$

условие параллельности прямых.

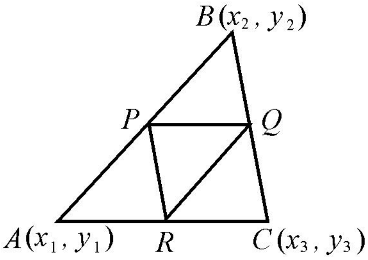
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \ -$$

(48) условие перпендикулярности прямых.

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| - \qquad (49)$$

угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами $k_1$ и $k_2$.

Задача 6. Даны середины сторон треугольника $P(1, 2), Q(5, 1), R(-4, 3)$. Составить уравнения его сторон.




1 способ. Так как точки $P, Q, R$ являются серединами отрезков $AB, AC, BC$, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 = 2 & y_1 + y_2 = 4 \\ x_2 + x_3 = 10 & y_2 + y_3 = -2 \\ x_1 + x_3 = -8, & y_1 + y_3 = 6, \end{array}$$

получаем

$$\begin{array}{lll} x_1 = -8 & y_1 = 6 & \\ x_2 = 0 & y_2 = 0 & A(-8, 6), \quad B(10, -2), \quad C(0, 0). \\ x_3 = 10, & y_3 = -2, & \end{array}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение $AB$:

$$\frac{x + 8}{10 + 8} = \frac{y - 6}{-2 - 6}, \qquad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение $BC$:

$$\frac{x - 10}{0 - 10} = \frac{y + 2}{0 + 2}, \qquad x + 5y = 0.$$

Уравнение $AC$:

$$\frac{x + 8}{0 + 8} = \frac{y - 6}{0 - 6}, \qquad 3x + 4y = 0.$$

2 способ. Не определяя координат точек $A, B, C$, составим уравнение каждой из сторон треугольника $ABC$, как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника $PQR$ параллельно противолежащей стороне.

Уравнение $AB$: прямая $AB$ проходит через точку $P$ параллельно вектору $\overrightarrow{QR} = (-9, 4)$. Используем уравнение (39).

$$\frac{x - 1}{-9} = \frac{y - 2}{4} \qquad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение $BC$: прямая $BC$ проходит через точку $Q$ параллельно вектору $\overrightarrow{PR} = (-5, 1)$.

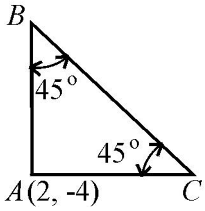
$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y+1}{1} \qquad\qquad x + 5y = 0.$$

Уравнение $AC$: прямая $AC$ проходит через точку $R$ параллельно вектору $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$.

$$\frac{x+4}{4} = \frac{y-3}{-3} \qquad\qquad 3x + 4y = 0.$$

Ответ: $4x + 9y - 22 = 0, \quad x + 5y = 0, \quad 3x + 4y = 0.$

Задача 7. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x + 3y - 5 = 0$ и вершину прямого угла $(2, -1)$.




$AB = BC$ (по условию), поэтому $ABC = \quad ACB = 45^\circ$, $k_{BC} = -\dfrac{2}{3}$ ( по формуле (46)). Уравнения катетов $AB$ и $BC$ составляем по формуле (44): $y + 1 = k(x-2).$

$$tg45^\circ = \left| \frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} \right|, \qquad (49)$$

$$\frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} = \pm 1.$$

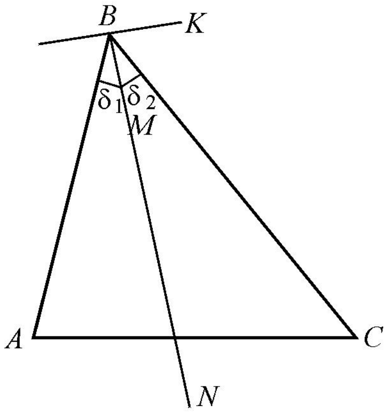
Решая эти уравнения, получим:

$$k = \frac{1}{5}, \quad y + 1 = \frac{1}{5}(x-2), \quad 5y + 5 = x - 2, \qquad x - 5y - 7 = 0.$$

$$k = -5, \quad y + 1 = -5(x-2), \quad y + 1 = -5x + 10, \quad 5x + y - 9 = 0.$$

Ответ: $x - 5y - 7 = 0, \quad 5x + y - 9 = 0.$

Задача 8. В треугольнике с вершинами $A(3, -2),\ B(-1, 1),\ C(5, -7)$ найти биссектрису внутреннего угла $ABC$.




1) Составим уравнения сторон угла $ABC$, воспользовавшись формулой (41).

Сторона $BA$:

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-1}{-2-1}, \qquad -3x-4y+1=0.$$

Сторона $BC$:

$$\frac{x+1}{5+1}=\frac{y-1}{-4-1}, \qquad -8x-6y-2=0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Приравняем расстояния от произвольной точки биссектрисы $M(x,\, y)$ до сторон угла $BA$ и $BC$, вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-8x-6y-2|}{\sqrt{8^2+6^2}}, \qquad \frac{|-3x-4y+1|}{5}=\frac{|-8x-6y-2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x-4y+1)=-8x-6y-2 \quad \text{и} \quad 2(-3x-4y+1)=-(-8x-6y-2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине $B$ треугольника $ABC$:

$$x-y+3=0 \qquad \text{(а)}$$

и

$$x+y=0. \qquad \text{(б)}$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника $BN$ отклонения вершин треугольника $A$ и $C$ имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла $BK$ – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек $A$ и $C$ от прямой (а) по формуле (40,а):

$$\delta_A=\frac{3-(-2)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}>0, \qquad \delta_C=\frac{5-(-7)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{2}}>0,$$

следовательно, уравнение (а) – это уравнение прямой $BK$. Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника $ABC$ при вершине $B$:

$$x+y=0.$$

Ответ: $x+y=0$.

## <u>Линии второго порядка</u>

<u>Окружность.</u> Уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (50)$$

определяет окружность радиуса $R$ с центром $C(a, b)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $a = b = 0$, то уравнение окружности примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

(51)

Общее алгебраическое уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

есть уравнение окружности, если $A = C \quad 0, \quad B = 0,$ т.е.

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (52)$$

<u>Эллипс.</u>

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; -$$

(53)

уравнение эллипса (канонический вид).

$$b^2 = a^2 - c^2, \qquad a > b.$$

(54)

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1(-c, 0) \text{ и } F_2(c, 0).$$

(55)

Начало координат $O$ – центр симметрии эллипса, а оси координат – оси симметрии эллипса. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ называются вершинами эллипса, $a$ и $b$ – большая и малая полуоси. Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$$

(56)

называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, т.к. выражается через отношение его полуосей

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \quad \frac{b}{a}^{\;2}}\;. \qquad (57)$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a = b$, т.е. $\varepsilon = 0.$

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \; - \qquad (58)$$

уравнения директрис.

Если фокусы эллипса расположены на оси $Oy$, то уравнение эллипса имеет тот же вид (58), но $b > a$. Фокусы имеют координаты: $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$. Уравнения директрис

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon}. \tag{59}$$

Гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ - \tag{60}$$

каноническое уравнение гиперболы.

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad a < c. \tag{61}$$

Фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка $O -$ центр симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, которые называются ее действительными вершинами, а величина $a -$ действительной полуосью гиперболы. Точки $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ называются мнимыми вершинами, а $b -$ мнимая полуось. Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y = \pm \frac{b}{a} x \tag{62}$$

являются асимптотами гиперболы, т.е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1. \tag{63}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{64}$$

Если $a = b$, гипербола называется равносторонней. В этом случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \ - \tag{65}$$

директрисы гиперболы.

Если уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ , \qquad (66)$$

то асимптоты гиперболы:

$$x=\pm\frac{b}{a}y,$$

(67)

фокусы $F_1(0,-c),\ \ F_2(0,c)$.

$$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}\ -$$

(68)

уравнения директрис.

<u>Парабола.</u>

Каноническое уравнение параболы

$$y^2=2px \qquad (p>0),$$

(69)

где $p-$ расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2},$ координаты фокуса $F\ \ \frac{p}{2},0$ . Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы $\varepsilon=1$.

В ряде случаев рассматривают параболы:

а) $y^2=-2px,\ \ F\ \ -\frac{p}{2},0$ – фокус, $x=\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (70)

б) $x^2=2py,\ \ F\ \ 0,\frac{p}{2}$ – фокус, $y=-\frac{p}{2}-$ уравнение директрисы; (71)

в) $x^2=-2py,\ \ F\ \ 0,-\frac{p}{2}$ – фокус, $y=\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы. (72)

Для всех случаев $p>0.$

<u>Задача 9.</u> Среди прямых параллельных прямой $2x+y=0,$ выделить касательные к окружности $x^2+y^2=1.$

<u>Решение.</u> Уравнение всякой прямой, параллельной данной, можно записать в виде

$$2x+y+c=0.$$

Касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку, поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно иметь только один ответ.

Из уравнения прямой $y=-2x-c.$

$$y = -2x - c$$

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad x^2 + (-2x - c)^2 = 1, \quad 5x^2 + 4cx + c^2 - 1 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда дискриминант равен нулю: $(4c)^2 - 4 \cdot 5 \cdot \left(c^2 - 1\right) = 0,$ откуда $c = \pm\sqrt{5}$.

Итак, искомые касательные имеют уравнения

$$2x + y + \sqrt{5} = 0, \qquad 2x + y - \sqrt{5} = 0.$$

<u>Задача 10.</u> Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225.$ Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

<u>Решение.</u> Делим на 225, получаем

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отсюда следует по формуле (53), что $a = 5,\ b = 3.$ Из формулы (54):

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, \quad c = \pm 4.$$

По формуле (55): $F_1(-4, 0), \quad F_2(4, 0).$

Эксцентриситет (56): $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}.$

Уравнения директрис согласно (58): $x = \pm\dfrac{5}{4/5} = \pm\dfrac{25}{4}.$

Ответ: $a = 5,\ b = 3;\ \ F_1(-4, 0), \quad F_2(4, 0);\ \ \varepsilon = \dfrac{4}{5};\ \ x = \pm\dfrac{25}{4}.$

<u>Задача 11.</u> Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая полуось $2\sqrt{6}$, а расстояние между фокусами $F_1F_2 = 8$.

<u>Решение.</u> $b = 2\sqrt{6}, \quad F_1F_2 = 2c = 8, \quad c = 4.$

По формуле (54): $a^2 = b^2 + c^2,\ \ a^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 + 4^2 = 40,\ \ a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$

Уравнение эллипса согласно (53): $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{24} = 1.$

<u>Задача 12.</u> Асимптоты гиперболы имеют уравнения $4y \pm 3x = 0$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать ее каноническое уравнение.

<u>Решение.</u> Уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{3}{4}x$, согласно формуле (62): $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4}.$ Кроме того $F_1F_2 = 2c = 20,\ c = 10.$ По формуле (61): $c^2 = a^2 + b^2,$ получаем систему уравнений

$$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$$

$$a^2+b^2=100.$$

Решая ее, получаем $a=8,\ b=6.$ Следовательно, каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$

<u>Задача 13.</u> Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=-1.$ Найти координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

<u>Решение.</u> Фокусы данной гиперболы расположены на оси $Oy$.

$$a=1,\ b=3,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}. \qquad (61)$$

Значит фокусы имеют координаты $F_1\left(0,-\sqrt{10}\right),\quad F_2\left(0,\ \sqrt{10}\right)$. Вершины $A_1(0,-1),\ A_2(0,1),\ B_1(-3,0),\ B_2(3,0).$ Эксцентриситет по формуле (64):

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{3},\quad \varepsilon=\sqrt{10}.$$

Уравнения асимптот: $x=\pm\frac{b}{a}y \qquad x=\pm 3y.$

Уравнения директрис: $y=\pm\frac{b}{c} \qquad y=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}.$

<u>Задача 14.</u> Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(1,-2)$ и симметрична относительно оси $Oy.$ Написать ее уравнение. Найти фокус и директрису.

<u>Решение.</u> Уравнение искомой параболы по формуле (72) имеет вид $x^2=-2py.$ Точка $A(1,-2)$ лежит на параболе. Подставляем координаты точки $A$ в уравнение: $1=-2p\ (-2) \qquad p=\frac{1}{4}.$ Следовательно, искомое уравнение будет $x^2=-\frac{1}{2}y$ или $y=-2x^2.$

Фоку параболы: $F\ \ 0,-\frac{1}{8}$ . Уравнение директрисы согласно (72): $y=\frac{1}{8}.$

<u>Задача 15.</u> На параболе $y^2=4x$ найти точки, расстояния которых от директрисы равно 5.

<u>Решение.</u> Уравнение директрисы данной параболы $x=-\frac{p}{2},$ $2p=4,\ p=2,\ x=-1.$ Тогда расстояние от оси $Oy$ до искомой

$\ell = 4 - \dfrac{p}{2} = 5 - 1 = 4$ точки и это расстояние определит координату $x$ данной точки, т.е. $x = 4$. Координату $y$ найдем из уравнения параболы:

$$y^2 = 4x, \quad y^2 = 4\ 4 = 16, \quad y = \pm 4.$$

Итак, $M_1(4{,}4),\ M_2(4, -4)$.

## Элементы линейной алгебры
## Действия над матрицами. Ранг матрицы

Определение 1. Система $m\ n$ чисел, расположенных в прямоугольной таблице из $m$ строк и $n$ столбцов,

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{matrix}, \qquad (1)$$

называется матрицей. Строки и столбцы называются рядами матрицы.

Числа $a_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$, составляющие матрицу, называются ее элементами. Здесь первый индекс $i$ означает номер строки элемента, а второй $j$ – номер его столбца.

Для матрицы (1) употребляют и сокращенную запись $A = (a_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) или $A = (a_{ij})_{m\ n}$. При этом говорят, что матрица $A$ имеет тип $m\ n$.

Если $m = n$, то матрица называется квадратной порядка $n$, если же $m\ n$, то матрица называется прямоугольной. Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется определителем квадратной матрицы $A$. В частности, матрица может состоять из одного числа, это матрица типа $1 \times 1$: $A(10)$, может состоять из одной строки или одного столбца:

$$A = \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{n1} \end{matrix} \text{ и } B = (b_{11} \quad b_{12} \quad \dots \quad b_{1m}).$$

Их типы $n\ 1$ и $1\ m$ соответственно. Квадратная матрица вида

$$A = \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{matrix}$$

называется диагональной и обозначается кратко $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Если все $a_i = 1$ в диагональной матрице, то она называется единичной и обозначается буквой $E$. Итак, $E = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}$.

Квадратная матрица называется симметрической, если элементы матрицы, симметрично расположенные относительно главной диагонали, равны между собой. Матрица, все элементы которой равны 0, называется нулевой матрицей и обозначается буквой $O$. Если нужно подчеркнуть тип, то пишут $O_{m\ n}$.

Рассмотрим действия над матрицами.

Определение 2. Матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ считаются равными, если они одного типа, и соответствующие элементы их равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n)$.

Определение 3. Суммой (разностью) матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового типа называется матрица $C = (c_{ij})$ того же типа, элементы которой равны суммам (разностям) соответствующих элементов матриц $A$ и $B$, т.е. $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Пример.

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{matrix} + \begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{matrix}$$

Очевидно выполнение свойств:

1) $A + B = B + A$,
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$,
3) $A + 0 = A$.

Определение 4. Произведение матрицы $A = (a_{ij})$ на число $\lambda$ (или, все равно, числа $\lambda$ на матрицу $A$) называется матрица $C = (\lambda\ a_{ij})$, т.е. все элементы которой получены из соответствующих элементов умножением на число $\lambda$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

Из определения очевидны свойства:

1) $1 \cdot A = A$,
2) $0 \cdot A = 0$,
3) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = \lambda\mu A$,
4) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Определим умножение двух матриц. Пусть даны матрицы $A = (a_{ij})_{mn}$ и $B = (b_{ij})_{pq}$. Причем, пусть число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$, т.е. $n = p$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

Определение 5. Произведением матриц $A$ и $B$ называется матрица

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{pmatrix}$$

типа $m \times q$, каждый элемент которой получается как сумма произведений элементов $i$-ой строки матрицы $A$ на соответствующие элементы $j$-ого столбца матрицы $B$: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, q)$.

Из определения следует, что квадратные матрицы можно перемножать лишь одного порядка.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\ C = A \cdot B?$$

$$C = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 8\cdot 0 + 1\cdot 3 & -3\ 1 - 6 + 8 + 1 \\ 2 - 4 + 0 + 9 & -1 + 12 + 0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Справедливы свойства:

1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,
2) $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B$,
3) $(A + B) \cdot C = AC + BC$,
4) $C(A + B) = CA + CB$.

Произведение двух матриц не обладает переместительным свойством, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Пример.

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{matrix}.$$

$$A\ B = \begin{matrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{matrix}, \quad B\ A = \begin{matrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{matrix}. \quad A\ B \quad B\ A.$$

Более того, может быть, что произведение $A\ B$ существует, а $B\ A$ не имеет даже смысла.

Пример.

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}. \quad AB = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}.$$

$B\ A$ не существует, так как число столбцов в $B$ больше числа строк в $A$.

Если $A\ B = B\ A$, то матрицы $A$ и $B$ называются перестановочными или коммутативными. Например, единичная матрица $E$ перестановочна с любой квадратной матрицей того же порядка. $A\ E = E\ A = A$, т.е. $E$ играет роль единицы при умножении.

Определение 6. Обратной матрицей по отношению к данной называется матрица, которая будучи умноженной справа (или слева) на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Матрицу, обратную к матрице $A$, обозначают $A^{-1}$. По определению $A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = E$.

Определение 7. Матрица называется неособенной, если: 1) она квадратная; 2) ее определитель отличен от нуля.

Справедлива теорема. Всякая неособенная матрица имеет обратную матрицу (без доказательства).

Практически, если дана неособенная матрица

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}, \quad \text{т.е.} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 0, \quad \text{то}$$

$$A^{-1} = \begin{matrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{matrix},$$

где $A_{ij}\ (i, j = 1, 2, \dots, n)$ есть алгебраические дополнения (миноры со знаками) соответствующих элементов $a_{ij}$. Следует заметить, что при составлении матрицы $A^{-1}$ алгебраические дополнения для элементов $i$ -ой строки матрицы $A$ записываются в $i$ -ом столбце матрицы $A^{-1}$ (транспонируются).

Пример.

Для матрицы $A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{matrix}$ найти обратную $A^{-1}$.

Определитель $\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \quad 0$ , т.е. $A$ неособенная.

$$A^{-1} = \begin{matrix} \frac{-1}{-1} & \frac{3}{-1} & \frac{-2}{-1} \\ \frac{3}{-1} & \frac{-3}{-1} & \frac{1}{-1} \\ \frac{-2}{-1} & \frac{1}{-1} & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix} .$$

Оказываются справедливы свойства:

1) Определитель обратной матрицы равен обратной величине определителя исходной матрицы.

$$\Delta_{A^{-1}} = \frac{1}{\Delta_A}$$

2) Обратная матрица произведения равна произведению обратных матриц сомножителей, взятому в обратном порядке.

$$(A \ B)^{-1} = B^{-1} \ A^{-1}$$

Ранг матрицы

Пусть дана прямоугольная матрица

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} .$$

Если в ней выбрать произвольно $k$ столбцов и $k$ строк ($k \quad min(m,n)$), то элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка $k$. Определитель этой матрицы называется минором k-го порядка матрицы $A$.

Определение 1. Рангом матрицы $A$ называется максимальный порядок минора матрицы, отличного от нуля, т.е. $A$ имеет ранг $r$, если

1) найдется хоть один минор в $A$ порядка $r$, отличный от нуля;

2) все миноры порядка $r+1$ и выше равны 0. Символически обозначают $R_g$. Минор порядка $r$ называется базисным минором матрицы. Матрица может иметь и несколько базисных миноров, но они все имеют одинаковый порядок $r = R_g A$.

Практически вычисляют миноры с первого порядка и выше по порядку. Если найден минор r-ого порядка неравный нулю, то оказывается достаточно вычислить лишь миноры $r+1$ порядка, содержащие его. Если они равны нулю все, то ранг матрицы равен $r$. Если хоть один не равен нулю, то операцию применяют к нему.

Пример.

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Есть миноры 1-ого и 2-ого порядков неравные нулю. А все третьего – равны нулю, так как содержат строку из нулей. Значит, $r_A = 2$.

Однако прямое вычисление миноров матрицы очень трудоемко. Поэтому матрицу предварительно преобразуют.

Определение 2. Под элементарным преобразованием матрицы понимают следующие операции:

1) умножение какой-либо строки (столбца) матрицы на число неравное нулю;

2) прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число;

3) перестановка двух строк (двух столбцов) матрицы.

Справедлива теорема. При элементарном преобразовании ранг матрицы не меняется.

Эту теорему используют для практического вычисления ранга матрицы. Стараются сначала преобразовать матрицу так, чтобы в ней было побольше нулей, а затем уже определяют ранг.

Довольно часто при этом матрица $A$ приводится к виду

$$\begin{matrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & \dots & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r\,r+1} & \dots & c_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} .$$

Эта матрица называется трапециевидной.

Например.

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Есть трапециевидная. Как видим, ее ранг легко вычисляется $r = 2$.

Треугольная матрица

$\begin{matrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ – частный случай трапециевидной. $\begin{matrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \end{matrix}$ тоже трапециевидная.

Оказывается любую матрицу $A$ при помощи элементарных преобразований над строчками и перестановок столбцов можно сделать трапециевидной.

Пример.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}, \ r = 3.$$

## Матричный метод решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса решения систем

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix} \qquad (1)$$

Обозначим $A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$ матрицу из коэффициентов, через $\bar{b} = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{matrix}$ матрицу-столбец свободных членов, через $\bar{x} = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{matrix}$ матрицу-столбец из неизвестных. Тогда система (1) кратко может быть записана в виде матричного уравнения $A\bar{x} = \bar{b}$. (2)

Пусть матрица $A$ неособенная, т.е. $\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \ 0$. Тогда существует обратная матрица $A^{-1}$.

Умножим обе части уравнения (2) слева на матрицу $A^{-1}$, получим

$A^{-1}\ A\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$ или $\bar{x} = A^{-1}\ \bar{b}$ (3),

что и дает решение системы (1).

Пример.

Решить систему уравнений:

$$\begin{matrix} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{matrix}$$

Решение.

Запишем систему в матричной форме.

$$\begin{matrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \begin{matrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{matrix}$$

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \quad 0$$

Вычислим обратную матрицу $A^{-1}$ : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ , отсюда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Значит: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Замечание. Нетрудно видеть, что матричная формула (3) может быть записана в виде $n$ формул $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$ , $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$ , ..., $x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$ – Формулы Крамера. Здесь $\Delta x_k$ получается из $\Delta$ заменой k-го столбца столбцом свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Метод Гаусса решения систем

Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы или по формулам Крамера удобно при наличии небольшого числа уравнений, и когда число уравнений и неизвестных совпадает. Если же их много, или количества не совпадают, нужно считать много определителей, что трудоемко. Удобнее оказывается метод последовательного исключения неизвестных.

Пусть дана произвольная система $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ,

составленная из коэффициентов при неизвестных, называется матрицей системы (1).

Матрица $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$,

получающаяся из $A$ добавлением столбца свободных членов, называется расширенной матрицей системы (1).

Матрица $B$, очевидно, вполне определяет систему (1).

Определение 1. Под элементарными преобразованиями системы линейных уравнений понимаются следующие операции:

1) умножение какого-либо уравнения системы на число неравное нулю;

2) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число;

3) перемена местами двух уравнений в системе.

Делая элементарное преобразование в системе, получаем новую систему. При этом каждому преобразованию системы соответствует такое же преобразование над строчками расширенной матрицы $B$ и, очевидно, наоборот.

Решением системы (1) называется любая совокупность значений неизвестных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая удовлетворяет каждому уравнению системы.

Определение 2. Две системы линейных уравнений от одних и тех же неизвестных называются равносильными (эквивалентными),если каждое решение одной из них является решением другой и наоборот.

Если знаем решения одной из равносильных систем, то мы знаем решение и другой. Поэтому решают ту, что проще. Основой практического решения систем является теорема.

Теорема. При элементарных преобразованиях система переходит в равносильную систему.

При помощи элементарных преобразований можно значительно упростить заданную систему. Решив упрощенную, мы, согласно теореме, найдем решения исходной. Упрощения добиваются разными способами. Наиболее распространен метод Гаусса. При помощи элементарных преобразований систему сводят к такому виду, чтобы ее матрица коэффициентов оказалась трапециевидной или близкой к таковой. Иногда для этого приходится менять нумерацию неизвестных, т.е. в матрице переставлять столбцы. Когда же матрица системы стала трапециевидной, уже нетрудно решить вопрос о совместности системы, о числе решений и найти сами решения. Так как каждому элементарному преобразованию системы соответствует элементарное преобразование над строчками расширенной матрицы этой системы и наоборот, то можно вместо самой системы оперировать с расширенной матрицей системы.

Пример.

Решить систему

$$x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1$$
$$2x_1-x_2-2x_3-3x_4=2$$
$$3x_1+2x_2-x_3+2x_4=-5$$
$$2x_1-3x_2+2x_3+x_4=11$$

Составим расширенную матрицу и элементарными преобразованиями над строчками упростим ее.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 11 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -47 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{matrix}$$

Из 3-ей строчки вычтем 4-ую и изменим знак на противоположный.

Заданная система равносильна, таким образом, системе

$$x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1$$
$$x_2-2x_3+7x_4=-8$$
$$-18x_3+36x_4=-40$$
$$18x_4=-7$$

Отсюда уже легко найдем

$$x_4=-\frac{7}{18},\ x_3=\frac{13}{9},\ x_2=-\frac{43}{18},\ x_1=\frac{2}{3}.$$

Используя матрицы $A$ и $B$ системы, нетрудно дать условие совместности системы, т.е. того случая, когда система имеет решение.

Теорема Кронекера-Копелли. Для того, чтобы система линейных уравнений имела решение (была совместна), необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы, т.е. чтобы $r_A=r_B$.

О количестве решений при этом говорит другая теорема.

Теорема (о числе решений). Пусть система линейных уравнений совместна, тогда, если ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r_A=n$), то система имеет единственное решение, если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($r_A<n$), то система имеет бесконечно много решений, а именно: некоторым $n-r_a$ неизвестным можно придать произвольные значения, тогда оставшиеся $r_A$ неизвестных определяются уже единственным образом.

## 4-ый семестр

## Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называют дифференциальными уравнениями *с разделяющимися переменными*:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x)}{f_1(y)} \to f_1(y)dy = f_2(x)dx \, , \qquad (1)$$

или в дифференциальной форме

$$f_1(x) \; f_2(y)dx + f_3(x) f_4(y)dy = 0 \, . \qquad (2)$$

Разделим обе части уравнения (2) на произведение функций $f_2(y) f_3(x)$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = 0 \qquad (2')$$

и, после интегрирования, получим общий интеграл (общее решение) уравнения:

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \quad \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = C \, .$$

При делении на $f_2(y) f_3(x)$ может произойти потеря некоторых частных решений. Пусть, например, при $y = y_0$ имеем $f_2(y_0) = 0$, тогда функция $y = y_0$ является решением уравнения (2 $'$), т.к. $dy = dy_0 = 0$. Решением может также быть функция $x = x_0$, если $f_3(x_0) = 0$.

| |
|---|
| ***Пример***. Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка $x(y+1)dx - \left(x^2+1\right)ydy = 0$. |

*Решение:*

Данное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, причем $f_1(x) = x$; $f_2(y) = y + 1$; $f_3(x) = x^2 + 1$; $f_4(y) = -y$ . Разделим обе части уравнения на произведение

$$f_2\left(y\right) f_3\left(x\right) = \left(y+1\right)\left(x^2+1\right)$$

и получим

$$\frac{xdx}{x^2+1} - \frac{ydy}{y+1} = 0 .$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\frac{xdx}{x^2+1} - \quad 1 - \frac{1}{y+1} \quad dy = C ,$$

используя подведение под знак дифференциала

$$\frac{\frac{1}{2} d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} - \quad dy + \quad \frac{d\left(y+1\right)}{y+1} = C ,$$

получим общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - y + \ln\left|y+1\right| = C .$$

При делении на $f_2\left(y\right) = y + 1$ потеряно частное решение: $y = -1$.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y \; + p\left(x\right) y = q\left(x\right), \tag{3}$$

линейное относительно искомой функции и её производной, называется *линейным*.

Уравнение (3) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными следующим образом. Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций: $y = u\left(x\right) \; v\left(x\right)$ . Одна из этих функций может быть абсолютно произвольной, а вторая определяется в зависимости от первой так, чтобы их произведение удовлетворяло уравнению (3).

Из равенства $y = u \cdot v$ находим $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тогда в соответствие с (3) имеем $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или $u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x)$. Выберем в качестве $v(x)$ какое-нибудь частное решение уравнения

$$v' + p(x)v = 0, \tag{4}$$

тогда для отыскания $u(x)$ получим уравнение

$$u'v = q(x). \tag{5}$$

Найдем $v(x)$, разделяя переменные в (4):

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \text{ откуда } \ln v = -\int p(x)dx \text{ и } v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Зная $v(x)$, найдем $u(x)$ из уравнения (5):

$$\frac{du}{dx}v = q(x) \Rightarrow du = e^{\int p(x)dx} q(x)dx, \text{ тогда } u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Общее решение линейного уравнения (3) имеет вид

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

***Пример***. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y' - 2y = 1$.

*Решение.*

Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций:

$$y = u(x) \cdot v(x), \text{ тогда } y' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

и подставим полученные выражения в заданное уравнение

$$u'v + uv' - 2uv = 1.$$

Вынесем за скобки $u(x)$

$$u\,v + u\left(v\ \ - 2v\right) = 1$$

и, приравнивая к нулю выражение в скобках, получим и решим два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными:

| | |
|---|---|
| $v\ \ - 2v = 0$ | $u\,v = 1$ |
| $\dfrac{dv}{v} = 2dx$ | $\dfrac{du}{dx}e^{2x} = 1$ |
| $\ln v = 2x$ | $du = e^{-2x}dx$ |
| $v = e^{2x}$ | $u = \ \ e^{-2x}dx,$ |
| | $u = -\dfrac{1}{2}\ \ e^{-2x}d(-2x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} + C$ |

Запишем общее решение заданного дифференциального уравнения в виде

$$y = uv = \ \ -\frac{1}{2}e^{-2x} + C\quad e^{2x}, \text{ или } y = -\frac{1}{2} + Ce^{2x}.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y\ \ + a_1 y\ \ + a_2 y = f\left(x\right) \tag{6}$$

называется неоднородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами $a_1$ и $a_2$.

Общее решение этого уравнения $y = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения; $y^*$ – частное решение уравнения (6). Дифференциальное уравнение

$$y\ \ + a_1 y\ \ + a_2 y = 0 \tag{7}$$

является однородным и называется соответствующим неоднородному уравнению (6). Общее решение однородного уравнения (7) находят по корням характеристического уравнения

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение может иметь три случая для корней $r_1$ и $r_2$:

1) *корни характеристического уравнения действительные и различные*: $r_1 \neq r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\overline{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные;

2) *корни характеристического уравнения действительные и равные*: $r_1 = r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\overline{y} = e^{r_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные;

3) *корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа* $r_{1,2} = \alpha \pm \beta\ i,\ \beta \neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\overline{y} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные.

Частное решение $y^*$ неоднородного уравнения (6) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в зависимости от вида правой части уравнения $f(x)$.

*Первый случай*. Правая часть уравнения (6) имеет вид $f\left(x\right) = P\left(x\right)e^{mx}$, где $P\left(x\right)$ – многочлен. Тогда уравнение (6) имеет частное решение вида

$$y^* = x^k Q\left(x\right)e^{mx}, \qquad (8)$$

где $Q\left(x\right)$ – полный многочлен той же степени от *x*, что и $P\left(x\right)$, но с неопределенными коэффициентами;

$k = 0$, если число $m$ не является корнем характеристического уравнения;

$k = 1$, если число $m$ является простым корнем характеристического уравнения;

$k = 2$, если число $m$ является двукратным корнем характеристического уравнения.

Правило сохраняет свою силу и при $m = 0$, когда $f(x)=P(x)$ – многочлен.

Неопределенные коэффициенты в многочлене $Q\left(x\right)$ определяют подстановкой функции (8) и ее производных в уравнение (6) с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $x$ в обеих частях уравнения.

**_Пример_**. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:
$y\ \ -3y\ \ -4y=4x-1,\quad y\big|_{x=0}=2,\quad y\ \big|_{x=0}=3.$

*Решение.* Характеристическое уравнение $r^2-3r-4=0$ имеет два различных действительных корня $r_1=-1,\ r_2=4$, следовательно, $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$. Правая часть уравнения имеет вид $f\left(x\right)=4x-1=\left(4x-1\right)\ e^{0\,x}$, где $m=0$ и не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение при $k=0$ ищем в виде $y^*=x^0\ \left(Ax+B\right)\ e^{0\,x}=Ax+B$, $\left(y^*\right)=A$, $\left(y^*\right)=0.$ После подстановки в дифференциальное уравнение получаем

$$0-3A-4(Ax+B)=4x-1;$$
$$-3A-4Ax-4B=4x-1;$$
$$-4A\ \ x+(-3A-4B)=4\ \ x+(-1);$$
$$x^1:\ -4A=4;\qquad A=-1$$
$$x^0:\ -3A-4B=-1,\quad -4B=-1+3A=-4,\quad B=1$$

Частным решением является функция $y^*=Ax+B=-1\ \ x+1=1-x.$ Общим решением является функция $y=\overline{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}-x+1.$

Найдем значение констант $C_1,C_2$ из начальных условий. Для этого определим $y\ =-C_1e^{-x}+4C_2e^{4x}-1$.

Тогда $y\big|_{x=0}=C_1+C_2+1=2,\qquad C_1=0,$

$y'\big|_{x=0}=-C_1+4C_2-1=3,\qquad C_2=1.$

Искомым частным решением является функция $y=e^{4x}-x+1$.

***Пример***.Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:
$y \;\; -4y \;\; +4y=e^{2x}, \quad y\big|_{x=0}=2, \quad y \;\big|_{x=0}=3.$

*Решение.* Характеристическое уравнение $r^2-4r+4=0$ имеет двукратный корень $r_1=2$, следовательно, $\overline{y}=e^{2x}\left(C_1+C_2x\right)$. Правая часть уравнения имеет вид $f\left(x\right)=e^{2x}, \;\; m=2$ является двукратным ( $k=2$ ) корнем характеристического уравнения, тогда частное решение ищем в виде

$$y^*=x^2 \;\; Ae^{2x}, \;\; \left(y^*\right) \;=x^2 \;\; 2Ae^{2x}+2x \;\; Ae^{2x}=2Ae^{2x}\left(x^2+x\right),$$

$$\left(y^*\right) \;\; =4Ae^{2x}\left(x^2+x\right)+2Ae^{2x}\left(2x+1\right)=Ae^{2x}\left(4x^2+8x+2\right).$$

После подстановки $y^*$ и ее производных в исходное дифференциальное уравнение получаем

$$Ae^{2x}\left(4x^2+8x+2\right)-4 \;\; 2Ae^{2x}\left(x^2+x\right)+4Ae^{2x} \;\; x^2=e^{2x},$$

$$Ae^{2x}\left(\cancel{4x^2}+\cancel{8x}+2\cancel{-8x^2}\cancel{-8x}+\cancel{4x^2}\right)=e^{2x},$$

$$2Ae^{2x}=e^{2x},$$

$$2A=1, \quad A=\frac{1}{2}.$$

Частным решением является функция $y^*=\dfrac{1}{2}e^{2x} \;\; x^2.$

Общим решением является функция $y=\overline{y}+y^*=e^{2x}\left(C_1+C_2x\right)+\dfrac{1}{2}e^{2x} \;\; x^2.$

Найдем значение констант $C_1, C_2$ из начальных условий. Для этого определим производную

$$y \;\; =e^{2x}\left(2C_1+2C_2x+C_2\right)+e^{2x}\left(x^2+x\right),$$

и получим систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y\big|_{x=0} = e^{0}\ C_1 = 2, \quad C_1 = 2$$

$$y'\big|_{x=0} = e^{0}\left(2C_1 + C_2\right) = 3, \quad C_2 = -1$$

Искомым решением является функция $y = \overline{y} + y^{*} = e^{2x}\left(2 - x\right) + \frac{1}{2}e^{2x}\ \ x^{2}.$

## Теория вероятностей

При классическом определении *вероятность события* определяется равенством

$P(A) = m/n$ ,

где $m$ – число элементарных исходов испытаний, благоприятствующих появлению события $A$, $n$ – общее число элементарных исходов испытания. *Числом сочетаний* из $l$ элементов по $k$ называют количество комбинаций, составленных из $l$ элементов по $k$, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}.$$

***Пример***. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

*Решение:*

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь три детали из пятнадцати, то есть $n = C_{15}^{3}$;

б) число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, равно числу способов, которыми можно выбрать три окрашенных детали из 10, то есть $m = C_{10}^3$;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{\dfrac{10!}{3!\,7!}}{\dfrac{15!}{3!\,12!}} = \frac{10!\,12!}{7!\,15!} = \frac{\cancel{7!}\ 8\ 9\ 10\ \cancel{12!}}{\cancel{7!}\ \cancel{12!}\ 13\ 14\ 15} = \frac{24}{91} \approx 0,26.$$

**_Пример_.** В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны 5 деталей. Определить вероятность того, что среди отобранных деталей ровно три стандартных.

*Решение:*

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь пять деталей из десяти, то есть $n = C_{10}^5$;

б) найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных пяти деталей ровно три стандартные): три стандартные детали можно выбрать из 7 стандартных деталей $C_7^3$ способами; при этом остальные (5–3=2) детали должны быть нестандартными, которые можно выбрать из (10–7=3) нестандартных деталей, имевшихся в партии, $C_3^2$ способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов $m = C_7^3\ C_3^2$;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^3\ C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{\dfrac{7!}{3!\,4!}\ \dfrac{3!}{2!\,1!}}{\dfrac{10!}{5!\,5!}} = \frac{7!\,5!\,5!}{2!\,4!\,10!} = \frac{\cancel{7!}\ \cancel{4!}\ 5\ 5!}{2\ \cancel{4!}\ \cancel{7!}\ 8\ 9\ 10} = \frac{5!}{4\ 8\ 10} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Вероятность события $A$, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события $A$:

$$P(A) = P(H_1)\ P_{H_1}(A) + P(H_2)\ P_{H_2}(A) + .... + P(H_n)\ P_{H_n}(A)\ ,$$

где $P(H_1) + P(H_2) + .... + P(H_n) = 1$ .

Приведенную формулу называют *формулой полной вероятности*.

***Пример***. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь. Найти вероятность того, что она окажется бракованной.

*Решение:*

а) обозначим через $A$ событие – взятая деталь является бракованной. Можно сделать три предположения (гипотезы): $H_1$ – деталь выбрана из первой партии; $H_2$ – деталь выбрана из второй партии; $H_3$ – деталь выбрана из третьей партии. Поскольку число деталей во всех трех партиях равно, вероятности гипотез равны

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

б) условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из первой парии, $P_{H_1}(A) = 0$ ; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из второй парии, $P_{H_2}(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ ; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из третьей парии, $P_{H_3}(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ .

в) искомая вероятность того, что выбранная наудачу деталь является бракованной, находится по формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Вероятность того, что в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна $p$ ($0 < p < 1$), событие наступит ровно $k$ раз (безразлично в какой последовательности), определяется по *формуле Бернулли*

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q=1-p$ – вероятность того, что событие в каждом из испытаний не появится.

**_Пример_**. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех.

*Решение:*

а) пусть событие $A$ – из 4 семян взойдут не менее трех семян; событие $B$ – из 4 семян взойдут 3 семени; событие $C$ – из 4 семян взойдут 4 семени. По теореме сложения вероятностей

$$P(A)=P(B)+P(C).$$

б) вероятности событий $B$ и $C$ определим по формуле Бернулли:

$$P(B)=P_4(3)=C_4^3 p^3 q^{4-3}=\frac{4!}{3!(4-3)!}\cdot 0{,}9^3\cdot(1-0{,}9)=0{,}2916,$$

$$P(C)=P_4(4)=C_4^4 p^4 q^{4-4}=0{,}9^4=0{,}6561.$$

в) искомая вероятность $P(A)=0{,}2916+0{,}6561=0{,}9477$.

Если число повторяющихся испытаний велико, то определение вероятности по формуле Бернулли затруднено из-за громоздкости вычислений. В этом случае применяют приближенную формулу, выражающую *локальную теорему Лапласа*:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \ \varphi(x)\,,$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ определяются из таблицы, приведенной в приложении 1.

При малых значениях вероятности $p$ для вычисления $P_n(k)$ применяют асимптотическую *формулу Пуассона*

$P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} \ e^{-\lambda}$, где $e = 2{,}7182...;\ \lambda = np$.

Эта формула используется при $\lambda \quad 10$, причем чем меньше $p$ и больше $n$, тем результат точнее.

***Пример***. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдут 350 семян.

*Решение.*

а) из условия задачи $p = 0{,}9;\ q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;\ n = 400;\ k = 350$. Тогда $x = \dfrac{350 - 400 \ \ 0{,}9}{\sqrt{400 \ \ 0{,}9 \ \ 0{,}1}} = -\dfrac{10}{6} \approx -1{,}67$;

б) из таблицы в приложении 1 находим $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67) = 0{,}0989$;

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \ \ 0.9 \ \ 0{,}1}} \ \ 0{,}0989 \approx 0{,}0165\,.$$

***Пример***. Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

*Решение.*

Из условия задачи $p = 0{,}0002;\ n = 10000; k = 6$ . Тогда $\lambda = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2$ . Искомая вероятность равна

$$P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} \approx \frac{64}{720} \cdot 0{,}1353 \approx 0{,}012 .$$

Если вероятность наступления события *A* в каждом из *n* испытаний постоянна и равна *p*, то вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что событие *A* в таких испытаниях наступит не менее $k_1$ раз и не более $k_2$ раз, определяется по интегральной теореме Лапласа формулой:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx ,$$

где $\alpha = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $\beta = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$ .

Функция $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется функцией Лапласа. В приложении 2 даны значения этой функции для $0 \le x \le 5$ . При $x > 5$ функция $\Phi(x) = 0{,}5$ . При отрицательных значениях *x* в силу нечетности функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Используя функцию Лапласа, имеем

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) .$$

***Пример***.Процент всхожести семян пшеницы равен 90%. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

*Решение.*

а) из условия задачи $p = 0{,}9; q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1; n = 500; k_1 = 400; k_2 = 440$ .

Тогда $\alpha = \dfrac{400 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -7{,}45$ ; $\beta = \dfrac{440 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -1{,}49$ .

б) из таблицы в приложении 2 находим

$$\Phi(-1,49) = -\Phi(1,49) \approx -0,4319\ ; \quad \Phi(-7,45) = -\Phi(7,45) \approx -0,5\ .$$

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(400 \quad k \quad 440) \approx \Phi(-1,49) - \Phi(-7,45) = -0,4312 + 0,5 = 0,0681\ .$$

## Дискретная случайная величина. Закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия, их вычисление и свойства.

Определение 1. Случайной величиной называется величина, принимающая в результате опыта одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.

Определение 2. Случайная величина называется дискретной, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Определение 3.Случайная величина называется непрерывной, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Дискретные случайные величины.

Для задания дискретной случайной величины нужно знать ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Соответствие между ними называется законом распределения случайной величины. Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.

Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется рядом распределения:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ | … |
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ | … |

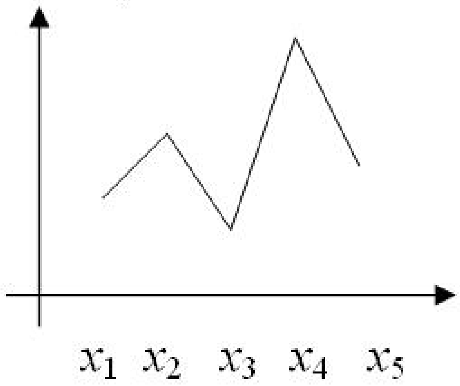
Заметим, что событие, заключающееся в том, что случайная величина примет одно из своих возможных значений, является достоверным, поэтому $\displaystyle\sum_{i=1}^{n(\ )} p_i = 1.$

Пример. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Составить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий после двух выстрелов.

Решение. Очевидно, что X может принимать три значения: 0, 1 и 2. Их вероятности найдены в примере, рассмотренном в лекции 3. Следовательно, ряд распределения имеет вид:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
| $p_i$ | 0,12 | 0,46 | 0,42 |

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде многоугольника распределения – ломаной, соединяющей точки плоскости с координатами ($x_i$, $p_i$).




Функция распределения.

Определение 4. Функцией распределения F(x) случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x:

$$F(x) = p(X < x) \qquad (1)$$

Свойства функции распределения.

1) $0 \le F(x) \le 1$. Действительно, так как функция распределения представляет собой вероятность, она может принимать только те значения, которые принимает вероятность.

2) Функция распределения является неубывающей функцией, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$. Это следует из того, что$F(x_2) = p(X < x_2) = p(X < x_1) + p(x_1 \le X < x_2) \ge F(x_1)$.

3) $\lim\limits_{x \to -} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to +} F(x) = 1.$ В частности, если все возможные значения X лежат на интервале [a, b], то F(x) = 0 при $x \le a$ и F(x) = 1 при $x \ge b$. Действительно, X < a – событие невозможное, а X < b – достоверное.

4) Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала [a, b], равна разности значений функции распределения на концах интервала:

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

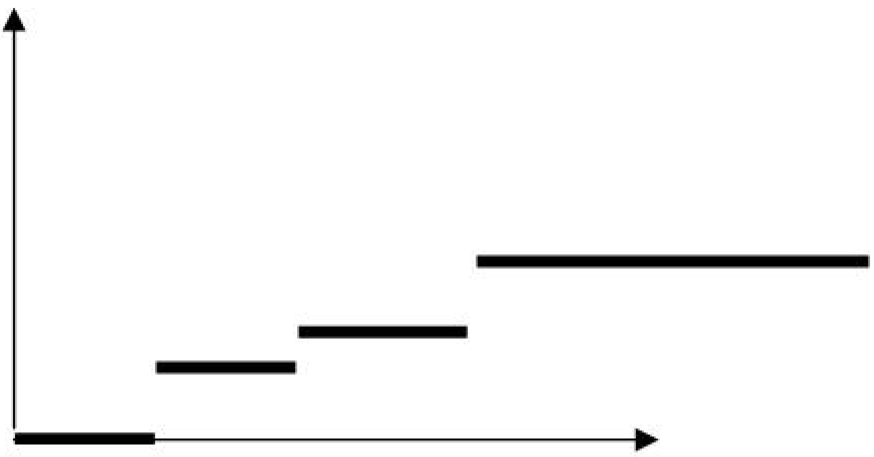
Справедливость этого утверждения следует из определения функции распределения (см. свойство 2).

Для дискретной случайной величины значение F(x) в каждой точке представляет собой сумму вероятностей тех ее возможных значений, которые меньше аргумента функции.

Пример. Найдем F(x) для предыдущего примера:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; x \quad 0 \\ 0{,}12, \; 0 < x \quad 1 \\ 0{,}12 + 0{,}46 = 0{,}58, \; 1 < x \quad 2 \\ 0{,}58 + 0{,}42 = 1, \; x > 2 \end{cases}$$

Соответственно график функции распределения имеет ступенчатый вид:



Биномиальное распределение

Вернемся к схеме независимых испытаний и найдем закон распределения случайной величины X – числа появлений события A в серии из п испытаний. Возможные значения A: 0, 1, …, п. Соответствующие им вероятности можно вычислить по формуле Бернулли:

$$p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (2)$$

(p – вероятность появления A в каждом испытании).

Такой закон распределения называют биномиальным, поскольку правую часть равенства (2) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Пример. Составим ряд распределения случайной величины X – числа попаданий при 5 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8.

p(X=0) = $1 \cdot (0{,}2)^5$ = 0,00032; p(X=1) = $5 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^4$ = 0,0064; p(X=2) = $10 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^3$ = 0,0512; p(X=3) = $10 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^2$ = 0,2048; p(X=4) = $5 \cdot (0{,}8)^4 \cdot 0{,}2$ = 0,4096; p(X=5) = $1 \cdot (0{,}8)^5$ = 0,32768. Таким образом, ряд распределения имеет вид:

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p | 0.00032 | 0.0064 | 0.0512 | 0.2048 | 0.4096 | 0.32728 |

Распределение Пуассона.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, принимающую только целые неотрицательные значения (0, 1, 2,…, т,…), последовательность которых не ограничена. Такая случайная величина называется распределенной по закону Пуассона, если вероятность того, что она примет значение т, выражается формулой:

$$p(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \qquad (3)$$

где а – некоторая положительная величина, называемая параметром закона Пуассона.

Покажем, что сумма всех вероятностей равна 1:

$$\sum_{m=0} p(X = m) = e^{-a} \sum_{m=0} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \quad e^{a} = 1$$

(использовано разложение в ряд Тейлора функции $e^x$).

Рассмотрим типичную задачу, приводящую к распределению Пуассона. Пусть на оси абсцисс случайным образом распределяются точки, причем их распределение удовлет-воряет следующим условиям:

1) вероятность попадания некоторого количества точек на отрезок длины l зависит только от длины отрезка и не зависит от его расположения на оси (то есть точки распределены с одинаковой средней плотностью);
2) точки распределяются независимо друг от друга (вероятность попадания какого-либо числа точек на данный отрезок не зависит от количества точек, попавший на любой другой отрезок);
3) практическая невозможность совпадения двух или более точек.

Тогда случайная величина Х – число точек, попадающих на отрезок длины l – распре-делена по закону Пуассона, где а – среднее число точек, приходящееся на отрезок длины l.

Замечание. В лекции 3 говорилось о том, что формула Пуассона выражает биномиальное распределение при большом числе опытов и малой вероятности события. Поэтому закон Пуассона часто называют законом редких явлений.

## Непрерывная случайная величина. Функция распределения. Плотность распределения. Числовые характеристики. Нормальное распределение непрерывной случайной величины

Определение и свойства функции распределения сохраняются и для непрерывной случайной величины, для которой функцию распределения можно считать одним из видов задания закона распределения. Но для непрерывной случайной величины вероятность каждого отдельного ее значения равна 0. Это следует из свойства 4 функции распределения:p(X = a) = F(a) – F(a) = 0. Поэтому для такой случайной величины имеет смысл говорить только о вероятности ее попадания в некоторый интервал.

Вторым способом задания закона распределения непрерывной случайной величины является так называемая плотность распределения (плотность вероятности, дифференциальная функция).

Определение 1. Функция f(x), называемая плотностью распределения непрерывной случайной величины, определяется по формуле:

$f(x) = F'(x)$ (1)

то есть является производной функции распределения.

Свойства плотности распределения.

1) f(x) $\geq$ 0, так как функция распределения является неубывающей.

2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ , что следует из определения плотности распределения.

3) Вероятность попадания случайной величины в интервал (a, b) определяется формулой $p(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$ Действительно,

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (условие нормировки). Его справедливость следует из того, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1.$

5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$ так как $F(x) \to const$ при $x \to \pm\infty$ .

Пример 1. Плотность распределения непрерывной случайной величины задана формулой

$$f(x) = \frac{C}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty .$$

Найти: а) значение константы С; б) вид функции распределения; в) p(-1 < x < 1).

Решение. а) значение константы С найдем из свойства 4:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{1+x^2}dx = C\,arctg\,x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = C\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = C\pi = 1,\ \text{откуда}\ C=\frac{1}{\pi}.$$

б) $$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{\pi}arctg\ t\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}\left(arctgx+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}.$$

в) $$p(-1<x<1)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}arctgx\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0{,}5.$$

Пример 2. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{x-2}{2}, & 2<x\le 4\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Найти плотность распределения.

Решение.

$$f(x)=\begin{cases}0', & x\le 2\\ \left(\dfrac{x-2}{2}\right)', & 2<x\le 4\\ 1', & x>4\end{cases}=\begin{cases}0, & x\le 2\\ 0{,}5, & 2<x\le 4\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Определение 1. Непрерывная случайная величина называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1)$$

Замечание. Таким образом, нормальное распределение определяется двумя параметрами: а и σ.

График плотности нормального распределения называют нормальной кривой (кривой Гаусса). Выясним, какой вид имеет эта кривая, для чего исследуем функцию (1).

1) Область определения этой функции: (-∞, +∞).

2) f(x) > 0 при любом x (следовательно, весь график расположен выше оси Ox).

3) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0,$ то есть ось Ox служит горизонтальной асимптотой графика при $x\to\pm\infty$.

4) $f'(x)=-\dfrac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=0$ при x = a; $f'(x)>0$ при x > a, $f'(x)<0$ при x < a. Следовательно, $\left(a,\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ - точка максимума.

5) F(x – a) = f(a – x), то есть график симметричен относительно прямой x = a.

6) $f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\left(1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right) = 0$ при $x = a \pm \sigma$, то есть точки $\left(a \pm \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ являются точками перегиба.

Примерный вид кривой Гаусса изображен на рис.1.

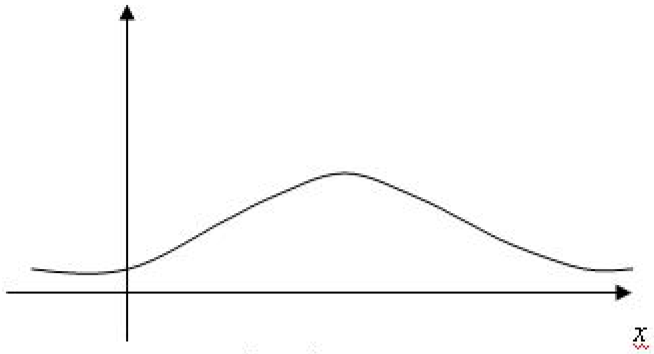



Рис.1.

Найдем вид функции распределения для нормального закона:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \qquad (2)$$

Перед нами так называемый «неберущийся» интеграл, который невозможно выразить через элементарные функции. Поэтому для вычисления значений F(x) приходится пользоваться таблицами. Они составлены для случая, когда a = 0, а σ = 1.

Определение 2. Нормальное распределение с параметрами a = 0, σ = 1 называется нормированным, а его функция распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (3)$$

- функцией Лапласа.

Замечание. Функцию распределения для произвольных параметров можно выразить через функцию Лапласа, если сделать замену: $t = \frac{x-a}{\sigma}$, тогда $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Найдем вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на заданный интервал:

$$p(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (4)$$

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a = 3, σ = 2. Найти вероятность того, что она примет значение из интервала (4, 8).

Решение.

$$p(4 < x < 8) = F(8) - F(4) = \Phi\left(\frac{8-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{4-3}{2}\right). = \Phi(2{,}5) - \Phi(0{,}5) = 0{,}9938 - 0{,}6915 = 0{,}3023.$$

Правило «трех сигм».

Найдем вероятность того, что нормально распределенная случайная величина примет значение из интервала (а - 3σ, а + 3σ):

$$p(a - 3\sigma < x < a + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0{,}9986 - 0{,}0014 = 0.9973.$$

Следовательно, вероятность того, что значение случайной величины окажется вне этого интервала, равна 0,0027, то есть составляет 0,27% и может считаться пренебрежимо малой. Таким образом, на практике можно считать, что все возможные значения нормально распределенной случайной величины лежат в интервале (а - 3σ,а + 3σ).

Полученный результат позволяет сформулировать правило «трех сигм»: если случайная величина распределена нормально, то модуль ее отклонения от x = a не превосходит 3σ.

## Основные понятия математической статистики

.

Математическая статистика - наука, занимающаяся определением по опытным данным (полученным на основе наблюдений) вероятностей элементарных событий и их характеристики, которые в теории вероятностей предполагались заданными. Чаще, впрочем, приходится определять на основе наблюдений над случайной величиной ее закон распределения.

Методы математической статистики разделяются на:

1. параметрические методы
2. непараметрические методы

В дальнейшем рассматриваются только непрерывные и дискретные величины. Под законом распределения СВ. понимается соотношение, устанавливающее связь между возможными множествами значений случайной величины и соответствующим им вероятностями.

Генеральной совокупностью - называется совокупность, включающая в себя все возможные значения данных СВ, а ее числовые характеристики генеральными. Такую совокупность практически трудно создать в силу бесконечного ее объема, поэтому чаще всего статистика оперирует с некоторой частью генеральной совокупности, которая называется - выборкой. а ее числовые характеристики выборочными, подсчитанными на основе реализации выборки.

Под случайной повторной выборкой объема n понимают совокупность случайных величин $X_1,\dots X_n$, не зависимых между собой.

Пусть в результате достаточно большого числа наблюдений за игрой с помощью одной и той же кости мы получили следующие данные:

| Грани | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Итого |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Наблюдения | 140 | 80 | 200 | 400 | 100 | 80 | 1000 |

Подобную таблицу наблюдений за СВ часто называют выборочным распределением, а соответствующую ей картинку (диаграмму) — гистограммой.

Какую же информацию несет такая табличка или соответствующая ей гистограмма?

Прежде всего, всю, — так как иногда и таких данных о значениях случайной величины нет и их приходится либо добывать (эксперимент, моделирование), либо считать исходы такого сложного события равновероятными — по $1/6$ на любой из исходов.

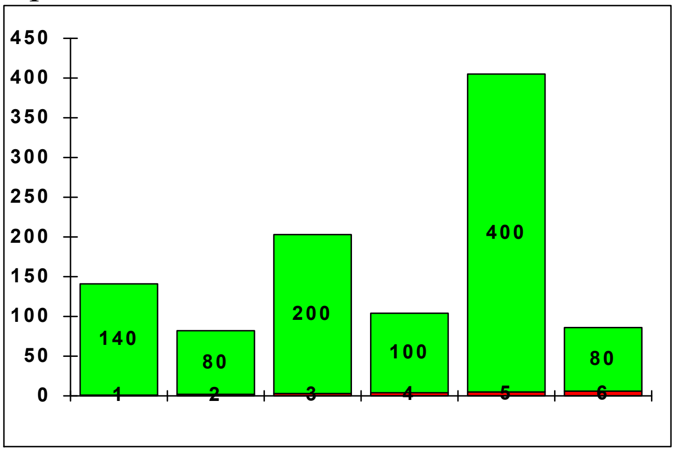
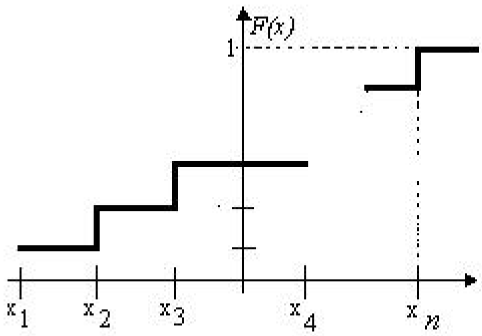



Рис. 1 С другой стороны — очень мало, особенно в цифровом, численном описании СВ. Как, например, ответить на вопрос: — а, сколько в среднем мы выигрываем за одно бросание кости, если выигрыш соответствует выпавшему числу на грани?

Эмпирическая функция распределения



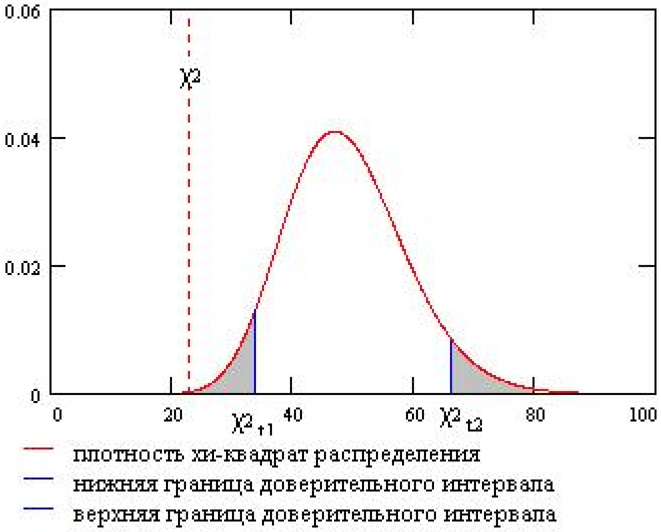

Эмпирическая функция распределения определяется следующим образом

$$F_п(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < x_{(1)} \\ k/n, \text{ при } x_{(k)} \quad x < x_{(k+1)} \\ 1, \quad \text{при } x \quad x_{(n)} \end{cases}$$

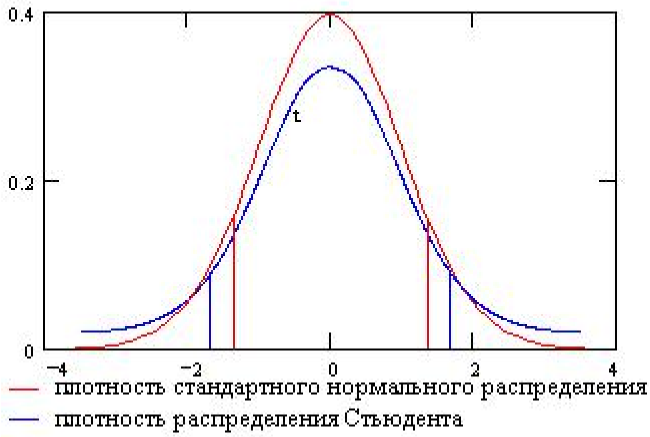
На рисунке приведен характерный вид эмпирической функции распределения

## Математические методы проверки гипотез

1.Хи-квадрат распределение ( $\chi_n^2$ -распределение) – распределение суммы п независимых стандартных нормально распределенных случайных величин $\chi_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ Параметр п называется числом степеней свободы - распределения.

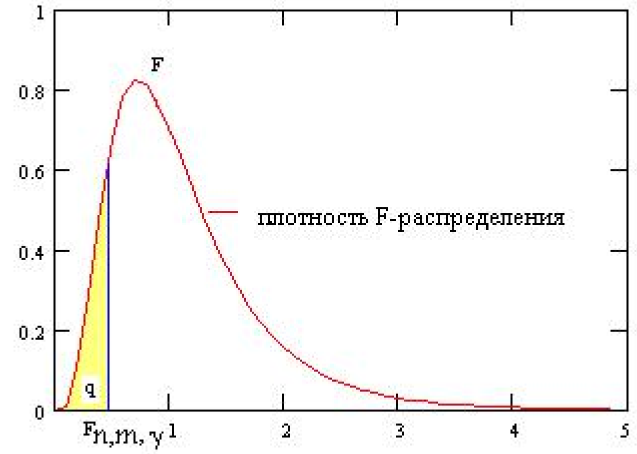



Нетрудно проверить, что М $\chi_n^2$ = п, так как М $\chi_1^2$= 1, а D $\chi_n^2$=2 п. С ростом п – числа степеней свободы у - распределения уменьшается асимметрия, и нормированная величина $\dfrac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}$ с ростом $n \to$ приближается по распределению стандартному нормальному закону. В таблицах с двумя входами п и γ приводятся значения односторонних квантилей $\chi_n^2$ - распределения. На рис приведена плотность $\chi_n^2$ - распределения и приведен доверительный интервал $P(\chi_{t1}^2 < \chi_n^2 < \chi_{t2}^2) = \gamma = 0{,}95$ , определяемый с помощью односторонних квантилей.




2. Распределение Стьюдента является следующим по важности после $\chi_n^2$ . Случайная величина $T_n$ имеет распределение Стьюдента, если она равна отношению стандартной нормально распределенной и корня квадратного из случайной величины вида, $\dfrac{\chi_n^2}{n}$ т.е., $T_n = \dfrac{x\sqrt{n}}{\sqrt{\chi_n^2}}$ . С ростом параметра п. $t_n$ -распределение приближается к нормальному

Двусторонний квантиль $t_{\gamma/2,\,(n-1)}$ больше соответствующего квантиля $u_{\gamma/2}$ стандартного нормального закона (см.рис).




Распределение Фишера $F_{n, m}$ (дисперсионное отношение) имеет случайная величина равна отношению $\frac{\chi_n^2\ m}{n\ \chi_n^2}$ двух случайных величин имеющих распределение $\chi_n^2$, причем каждая из них делится на число своих степеней свободы. Квантили $F_{n,m,\gamma}$ находятся из таблиц с тремя входами. Кроме того, распределения Стьюдента $\frac{\chi_n^2}{n}$ и Фишера $F_{n, m}=\frac{\chi_n^2\ m}{n\ \chi_n^2}$ с ростом n или m распределение Фишера приближается к нормальному, поэтому квантили в таблицах приведены лля не больших значений степеней свободы, а при их значительных значениях они заменяются соответствующими квантилями стандартного нормального закона

Асимптотические утверждения теории вероятностей, применяемые в математической статистике

Условия широкого применения нормального распределения связаны с центральной предельной теоремой Чебышева, которая утверждает, что распределение, какого–либо признака (параметра) при действии на него большого числа независимых причин сводится к нормальному независимо от вида исходного распределения. Согласно неравенству Чебышева при любом типе распределения не менее 88% его значений будут в диапазоне +\– 3σ.

Большинство важных задач, когда имеется бедная априорная (до проведения опыта) информация о законе распределения наблюдаемой случайной величины, связано с большими объемами выборки n, что математически формализуется как $n \to \infty$ и решаются на основе закона больших чисел и центральной предельной теоремы

Закон больших чисел. Под законом больших чисел понимают ряд теорем, объединенных идеей устойчивости средних результатов при большом числе наблюдений.

Теорема Чебышева. Пусть попарно независимые случайные величины $X_i$

($i=1,2,...$) $DX_i \le C$ - некоторая константа. Тогда при $n \to \infty$ имеет место сходимость по вероятности выборочных средних $\bar{X}_n$ $=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i$ , т.е. для любого достаточно малого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1,\ \varepsilon > 0$$

Последнее утверждение следует из неравенства Чебышева:

Если случайная величина X имеет конечные MX и DX , то справедливы оценки для вероятностей попадания случайной величины X на хвосты распределения и в $\varepsilon$ -окрестность математического ожидания

$P(|X - MX|>\varepsilon)<\frac{DX}{\varepsilon^2}$ и $P(|X - MX|< \varepsilon)>1- \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Теорема Маркова. Случайные величины $X_i$ (i=1,2,...) удовлетворяют условию $\frac{1}{n^2} D \sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$ при $n \to \infty$ . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место сходимость по вероятности $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1,\ \varepsilon > 0$

Кроме сходимости по вероятности в приложениях встречается сходимость в средне квадратическом, т.е. средний квадрат отклонений случайной последовательности $\lim_{n\to\infty} M(\overline{X}_n - M\overline{X}_n)^2 = 0$, короче $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - MX_i) \xrightarrow{с.к} 0$,

Центральная предельная теорема

Нормированная и центрированная сумма $Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)$ попарно независимых одинаково распределенных случайных величин $X_i$ с математическим ожиданием $Mx_i$ = a и дисперсией $DX_i = \sigma^2$ распределена асимптотически нормально со средним 0 и дисперсией 1

$Z_n \sim N(0;1)$ при $п \to \infty$

Эмпирическая функция распределения играет фундаментальную роль в математической статистике. Важнейшее ее свойство состоит в том, что при увеличении числа наблюдений над случайной величиной X происходит сближение этой функции с теоретической. Смысл этого утверждения раскрывает следующая теорема

Теорема 1. Пусть $F_п$ (x) - эмпирическая функция распределения, построенная по выборке $X=(X_1, X_2, ..., X_п)$ и F(x) - соответствующая теоретическая функция распределения. Тогда для любого $x \in R$ и любого достаточно малого $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|F_n(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right) = 1$$

По своему определению эмпирическая функция распределения $F_п$ (x) случайная величина и в ней содержится вся статистическая информация о наблюдаемой случайной величине X. Для любого $x \in R$ значение $F_п$ (x) - случайная величина, реализации которой являются числа 0, $^1/_n$, $^2/_n$,...,$^{(1-п)}/_n$, $^{п.}/_n$ = 1, при этом $P(F_п (x) = {}^k/_n) = P(\mu_{п.}(x) = k)$. Но из определения случайная величина $\mu_п(x)$ распределена по биномиальному закону Bi( п, p), где p= P $(X \le x) = F(x)$, поэтому $P(F_п(x) = {}^k/_n) = C_n^k F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$, и относительная частота $F_п(x) = {}^k/_n$ при $п \to \infty$ сходится в силу закона больших чисел (в силу теоремы Бернулли) по вероятности к F(x).

Предельные теоремы для эмпирической функции распределения Справедлив следующий гораздо более сильный результат, принадлежащий В.И. Гливенко (1933)

Теорема 2. В условиях теоремы 1.1

$$P(\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in R} |F_n(x) - F(x)| = 0) = 1$$

Другими словами утверждение теоремы, означает, что отклонение

$$D_n = D_n(X) = \sup_{x \in R} |F_n(x) - F(x)|$$

эмпирической функции распределения от теоретической на всей осей с вероятностью 1 будет сколько угодно мало при достаточно большом объеме выборки.

Приведем еще один результат, принадлежащий А.Н.Колмогорову (1933), который позволяет при больших п оценивать вероятности заданных отклонений случайной величины $D_n$ от нуля

Теорема 3. (Колмогорова) Если функция $F_n(x)$ непрерывна, то при любом фиксированном t >0

$$\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}D_n \le t) = K(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2t^2}$$

При этом предельную функцию распределения K(t) можно с хорошим приближением использовать для практических расчетов уже при $п \ge 20$. Уровень значимости $\alpha$ принимается чаще всего в пределах 0,10 – 0,20

Теорему Колмогорова обычно применяют для того, чтобы определить границы, в которых с заданной вероятностью находится теоретическая функция распределения F(x), если она неизвестна. Пусть для заданного коэффициента доверия $\gamma \in (0;1)$ число $t_\gamma$ (называемое квантилем) определяется уравнением $K(t_\gamma) = \gamma$. Тогда из утверждения теоремы Колмогорова имеем $P(\lambda = \sqrt{n} D_n \le t_\gamma) = P(F_п(x) - t_\gamma / \sqrt{n} \le F(x) \le F_п(x) + t_\gamma / \sqrt{n}$ для всех x$) \to K(t_\gamma) = \gamma$ при $п \to \infty$. Учитывая свойство $0 \le F(x) \le 1$ неравенство можно уточнить следующим образом: $\max(0, F_п(x) - t_\gamma / \sqrt{n}) \le F(x) \le \min(F_п(x) + t_\gamma / \sqrt{n}, 1)$. Область, определяемая этими нижней и верхней границы, называется асимптотической - доверительной зоной для теоретической функции. Для определения числовых значений $t_\gamma$ при различных $\gamma$ можно воспользоваться табулированными значениями функции K(t).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | 0,50 | 0,60 | 0,70 | 0,80 | 0,90 | 0,95 | 0,98 | 0,99 | 0,999 |
| $t\gamma$ | 0,828 | 0,895 | 0,974 | 1,073 | 1,224 | 1,358 | 1,510 | 1,627 | 1,950 |

Сформулируем еще один важный результат выборочной теории, принадлежащий Н.В.Смирнову (1944), который обычно используют для проверки предположения (гипотезы) о том, что две выборки получены из одного и того же распределения

Теорема 4. (Смирнова) Пусть $F_{1n}(x)$ и $F_{2m}(x)$ - две эмпирические функции распределения, построенные на основе двух независимых выборок объема n и m из одного и того же распределения и

$D_{n,m} = \sup_{x \in R} |F_{1n}(x) - F_{2m}(x)|$

Тогда, если теоретическая плотность распределения F(x) непрерывна, то при любом фиксированном t >0

P( $\sqrt{\frac{n m}{n+m}} D_{n,m} \le t$ ) = K(t), где функция K(t) определена в теореме Колмогорова.

Выборочные характеристики

Выборочные моменты. Пусть $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$ - выборка из распределения с F(x) и $F_n(x)$ - теоретической и эмпирической функцией распределения. Как F(x) ставят в соответствие $F_n(x)$, любой теоретической характеристике $g= \int g(x)dF(x)$ можно поставить в соответствие ее статистический G=G(X), вычисляемый по формуле

$$G= \int g(x)dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i).$$

Случайную величину G называют эмпирической или выборочной характеристикой, ответствующей теоретической характеристике g. Таким образом, выборочная характеристика - это среднее арифметическое значение функции g(x) для элементов выборки X.

Если $g(x) = x^k$, то G - выборочный момент k-го порядка, который будем обозначать $A_k$ : $A_k=A_k(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

При k =1 величину $A_k$ называют выборочным средним и обозначают символом:

$$\bar{X} = A_1= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Значения случайных величин $A_k$ и $\bar{X}$ для заданной реализации и выборки X будем обозначать соответствующими строчными буквами $a_k$ и $a_1= \bar{x}$.

Аналогично, центральным выборочным моментом k-го порядка называют случайную величину $M_k = M_k(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^k$

При k =2 величину $M_k$ называют выборочной дисперсией и обозначают символом

$$S^2 = S^2(X): S^2 = M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Значения случайных величин $M_k$ и $S^2$ для заданной реализации выборки X обозначаются строчными буквами $m_k$ и $m_2 = s^2$.

Между выборочными и центральными выборочными моментами сохраняются те же соотношение, что и между теоретическими $\alpha_k = MX^k$ $\mu_k = M(X - \alpha_1)^k$. В частности G; $M_3 = A_3 - 3XA_2 + 2\cdot\overline{X}^3$ $M_4 = A_4 - 4XA_3 + 6A_2X^2 - \overline{X}^4$

Моменты выборочного среднего и выборочной дисперсии. Выборочная характеристика G является случайной величиной, поэтому можно говорить о ее распределении, которое называют выборочным распределением, и рассматривать характеристики этого распределения. Остановимся на некоторых характеристиках среднего $\overline{X}$ и дисперсии выборки $S^2$. Так как для повторной выборки $X_i$ независимые и одинаково распределены так же, как наблюдаемая случайная величина X, то

$$M\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = MX = \alpha_1;\ D\overline{X} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\overline{X} = \frac{1}{n}DX = \frac{\sigma^2}{n}$$

Так как центральные моменты $M_k$ не зависит от начала отсчета на шкале значений случайной величины X, то без ограничения общности с самого начала можно считать, что $\alpha_1 = MX = 0$ (в противном перейдем к центрированной случайной величине $X' = X - \alpha_1$). С учетом этого получим

$$MS^2 = MA_2 - M\overline{X}^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(n-1)\sigma^2}{n}.$$

Представим $S^2$ в виде

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} X_i X_j$. Принимая во внимание MX = 0 вычислим моменты выборочной дисперсии

$$MS^2 = M\left(\frac{(n-1)^2}{n^4}\sum_{i=1}^{n} X_i^4 + \frac{2(n-1)^2+4}{n^4}\sum_{i<j} X_i^2 X_j^2\right) = \frac{(n-1)^2}{n^3}\mu_4 + \frac{(n-1)^2+2}{n^3}\mu_2^2$$

Отсюда получаем $DS^2 = M(S^2)^2 - (MS^2)^2 = \frac{(n-1)^2}{n^3}\left(\mu_4 - \frac{(n-3)}{(n-1)}\mu_2^2\right)$.

Оценки параметров законов распределения подразделяются на точечные и интервальные.

Точечная оценка неизвестного параметра $\theta$ определяется одним числом $\hat{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$,

интервальная - двумя числами $\hat{\theta}_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\hat{\theta}_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ которые являются случайными концами доверительного интервала, накрывающего оцениваемый параметр $\theta$ с заданной доверительной вероятностью P (некоторых учебниках эта вероятность обозначается как 1-$\alpha$ или $\gamma$). Интервальные оценки как правило строятся на основе точечных.

Свойства точечных оценок

1. Несмещенность: $\hat{\theta}$ ($x_1$, $x_2$ ,..., $x_n$) как случайная величина имеет мат. ожидание равное истинному значению параметра $\rightarrow M\hat{\theta}$ ( $x_1$, $x_2$ ,..., $x_n$) = θ.

2.Состоятельность: при возрастании п $\lim_{n\to} P\left(\left|\hat{\theta}(x_1,...,x_n)-\theta\right|<\varepsilon\right)=1$, ε>0.

Если оценка $\hat{\theta}$ $\hat{\theta}$ ($x_1$, $x_2$ ,..., $x_n$) имеет вид среднего по выборки некоторой функции наблюдения, то свойство состоятельности следует из закона больших чисел.

3.Эффективность: Если имеется две оценки $\hat{\theta}_1$($x_1$, $x_2$ ,..., $x_n$) и $\hat{\theta}_2$($x_1$, $x_2$ ,..., $x_n$), то оценка $\hat{\theta}_1$($x_1$, $x_2$ ,..., $x_n$) эффективнее, чем $\hat{\theta}_2$($x_1$, $x_2$ ,..., $x_n$), если дисперсии D ( $\hat{\theta}_1$) < D( $\hat{\theta}$ 2). Нижнюю границу для дисперсии точечной оценки параметра дает неравенство Рао - Крамера.

Наиболее применяемыми методами получения точечных оценок являются методы: 1) максимального правдоподобия и 2) моментов.

Нижняя граница дисперии точечной оценки параметра

неравенства Рао-Крамера

В предположении, что оценка $\hat{\theta}$ ($x_1$, $x_2$ ,..., $x_n$) несмещеная, т.е. M( $\hat{\theta}$ ($x_1$, $x_2$ ,..., $x_n$)) = θ, ее качество характеризуемое ее дисперсией D( $\hat{\theta}$ ($x_1$, $x_2$ ,..., $x_n$ )) имеет нижнюю границу, определяемую неравеством Рао-Крамера

$$D(\hat{\theta}) = M(\hat{\theta}(x_1, x_2 ,..., x_n))- \theta)^2 = \frac{1}{J(\theta,n)} = \frac{1}{nJ(\theta)},$$

где $J(\theta)=M \ \frac{\partial \ln f(x|\theta)}{\partial\theta}^{2}$ - информация Фишера, содержащаяся в одном наблюдении над с.в.X о параметре θ . В силу аддитивности информация Фишера о параметре θ содержащаяся в повторной выборке объема п равна J(θ,п) = п J(θ). Для оценки многомерного параметра ($\theta_1 ... \theta_s$) используют векторную случайную величину ( $\hat{\theta}_1$, ..., $\hat{\theta}$ s) характеристикой качества является ковариационная (дисперсионная)матрица Cov( $\hat{\theta}$ ) с элементами $c_{ij}$( $\hat{\theta}$ i; $\hat{\theta}$ j) выражающие ко вариации между параметрами θi и θ j. J( θ ) - информационная матрица с элементами $J_{ij}(\theta)=M \ \frac{\partial \ln f(x|\theta)}{\partial\theta_i} \frac{\partial \ln f(x|\theta)}{\partial\theta_j}$ . неравенство Рао - Крамера принимает матричный вид $D(\hat{\theta}) \ \frac{1}{n} J^{-1}(\theta)$

Следует отметить, что доказательство неравенства Рао - Крамера основано на предположении достаточной гладкой зависимости плотности от параметра, чтобы можно было дифференцировать под знаком математического ожидания по входящему параметру, если эти предположения нарушаются, то неравенство Рао – Крамера перестает быть верным, как например в случае параметра, который определяет носитель распределения, в этом случае могут возникать, так называемые суперэффективные оценки. Неравенство Рао – Крамера нетрудно обобщить на случай наличия смещения у рассматриваемых оценок.

Метод максимального правдоподобия

Метод максимального правдоподобия основан на понятии функции правдоподобия выборки L($x_1$, $x_2$,...,$x_n$; θ ), которая равна логарифму совместного закона распределения: в дискретном случае $\ln\{P(X_1=x_1|\theta)\cdot P(X_2=x_2|\theta)\cdot\ ...\ \cdot P(X_n=x_n|\theta)\}$ и в непрерывном случае равна $\ln\{f(x_1|\theta)\cdot f(x_2|\theta)\cdot ...\cdot f(x_n|\theta)\}$. В качестве оценки при заданных результатах наблюдениях $x_1$, $x_2$,...,$x_n$ принимается то значение $\hat{\theta}$ ($x_1$, $x_2$,...,$x_n$) при которых функция правдоподобия принимает наибольшее значение. Использование логарифма совместного закона распределения обусловлено его монотонностью и выпуклостью и удобством взятия частных производных от L(θ), которые, приравнивая к нулю, находим критическое значение $\hat{\theta}$ ($x_1$, $x_2$,...,$x_n$)– оценку максимального правдоподобия . Как правило оценки максимального правдоподобия эффективны так как для их получения используется вся информация о параметре, сосредоточенная в данной выборке с данным законом распределения

Метод моментов.

В силу закона больших чисел выборочные моменты принимают близкие к значениям теоретических моментов. Приравнивая эти близкие значения получаем уравнение для нахождения оценки $\hat{\theta}$ ($x_1$, $x_2$,...,$x_n$) неизвестного параметра θ.

Естественно, что при построении оценок по методу моментов используется лишь та информация о параметре, сосредоточенная в данной выборке, которая содержится в используемом выборочном моменте, поэтому оценки метода моментов не всегда эффективны.

Поясним применение этих методов на примере нормального закона распределения с двухпараметрической плотностью

$f(x|a,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}$ , при любом x. Причем математическое ожидание MX = a и дисперсия DX = $\sigma^2$.

Пусть ($x_1$, $x_2$,...,$x_n$) независимые наблюдения, имеющие нормальное распределение случайной величины с неизвестными математическим ожиданием a и $\sigma^2$ . Найдем точечные оценки параметров a и $\sigma^2$ по методу максимального правдоподобия и методу моментов на основе выборки объема n и ее математическое ожидание.

Функция правдоподобия равна $L(a, \sigma^2) = \ln\{f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot ...\cdot f(x_n)\}$ = $-\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$ . ее частная производная по a: $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)=0$ и $\hat{a}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$.

Из свойства математического ожидания и повторности выборки M( $\bar{x}$ ) = a, т.е. $\bar{x}$ - несмещенная оценка генерального среднего M(X) = a. Найдем, используя свойства дисперсии и повторность выборки дисперсию D( $\bar{x}$ ) = $\frac{1}{n}\ \sigma^2$ , т.е. дисперсия выборочного среднего в п раз меньше дисперсии одного наблюдения и, следовательно, в силу закона больших чисел состоятельна.

Для нахождения оценки параметра $\sigma^2$ находим частную производную

L(a, $\sigma^2$) по $\sigma^2$: $\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \frac{n}{2\sigma^2} = 0$

и заменяя a на оценку $\bar{x}$ получим оценку параметра $\sigma^2$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Используя свойства математического ожидания и дисперсии независимых одинаково распределенных величин $X_1$, $X_2$ ,..., $X_п$ можно показать, что $\hat{\sigma}^2$ - смещенная оценка M( $\hat{\sigma}^2$ ) = $\frac{n-1}{n}\ \sigma^2$ , но это смещение асимптотически мало.

Представив $\hat{\sigma}^2$ в виде $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - n(\bar{x} - a)^2$ или

$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)$ , где $y_i$ - независимые стандартные нормально распределенные случайные величины, находим M( $\hat{\sigma}^2$ ) = $\sigma^2$(n−1)/п. Теперь находим M( $\hat{\sigma}^2$ )$^2$ = $\sigma^4$n− 2{3n+n(n-1)−2(3+(n-1))+3}=$\sigma^4$n − 2(n$^2$ -1) и D( $\hat{\sigma}^2$ ) = M( $\hat{\sigma}^2$ )$^2$ − M 2 ( $\hat{\sigma}^2$ ) =2$\sigma^4$(n-1)/ n$^2$.

От смещения можно избавится рассматривая исправленную выборочную дисперсию $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ , при этом M $s^2$= $\sigma^2$ и $Ds^2=2\sigma^4/(n-1)$.

Покажем также некоррелируемость оценок $\bar{x}$ и $s^2$, т.е. их коэффициент корреляции (второй центральный смешанный момент) равен нулю R( $\bar{x}$, $s^2$) = = M ( $\bar{x}$−a)($s^2$−$\sigma^2$)

R = M(x −a)$s^2$= $\frac{1}{n-1}$ M( $\bar{x}$ −a) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - n(\bar{x} - a)^2$ = 0

Приравнивая по методу моментов выборочные и теоретические моменты получим те же оценки для a и $\sigma^2$. Это совпадение обясняется тем , что для нормального распределения информация о математическом ожидании a полностью содержится в выборочном среднем $\bar{x}$ , a информация о $\sigma^2$ полностью сосредоточена во втором центральном выборочном моменте. В подобных случаях можно говорить о достаточной выборочной статистике для данного параметра

Пусть $\hat{\theta}$ ($x_1$, $x_2$,..., $x_n$) точечная оценка неизвестного параметра θ найденная по выборке объема n, чем меньше случайная разность $|\hat{\theta} - \theta|$, тем лучше качество оценки. Зная распределение СВ $\hat{\theta}$ и задавшись некоторым положительным числом ε можно найти вероятность выполнения неравенства $P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = \gamma$, которую называют доверительной вероятностью.

Интервальные оценки параметров

Доверительным интервалом для неизвестного параметра θ называется интервал со случайными границами, зависящими от результатов выборки, который накрывает истинное значение параметра θ с заданной вероятностью (доверия). При построении доверительного интервала для параметра θ задают заранее доверительную вероятность $\gamma = 1 - \alpha$ (можно задавать вероятность α противоположного события - уровень значимости $\alpha = 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}01$) и по ней находят точность ε или половину длины доверительного интервала

$$\hat{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) - \varepsilon < \theta < \hat{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n) + \varepsilon$$

накрывающего неизвестный неизвестный параметр θ с вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$. Таким образом объем выборки n, длина интервала 2 ε и доверительная вероятность $1-\alpha$ связаны с друг другом и задав любую пару величин можно найти третью.

Пусть $x_1$, $x_2$ ,..., $x_n$ независимые случайные величины имеющие нормальное распределение с известной дисперсией $\sigma^2$ и неизвестным параметром a. Поскольку точечная оценка $\hat{a} = \bar{x}$ имеет нормальный закон распределения $N(a; \sigma^2/n)$, то при построении доверительного интервала для a используем стандартную нормально распределенную СВ $U = \sqrt{n}(\bar{x} - a)/\sigma$ распределенную по нормальному закону N(0;1), плотность которого $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}u^2)$ - называется локальной функцией Лапласа, а ее функция распределения F(u) выражается через нечетную интегральную функцию Лапласа $\Phi(u) = \int_0^u \varphi(x)dx$ $F(u) = 0{,}5 + \Phi(u)$, значения функций Лапласа приведены в таблицах (как правило в приложениях) любого учебника по теории вероятностей и математической статистики только для положительных значений аргумента с учетом их четности и нечетности.

Поскольку вероятность попадания любой СВ X распределенной по закону $N(a; \sigma^2)$ в интервал $(\alpha; \beta)$ выражается через значения интегральной функции Лапласа,

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

то введем понятие двустороннего квантиля $u_{\gamma/2}$ нормального закона определяемого по таблице функции Ф(u) как значение стандартной нормально распределенной СВ $U = u_{\gamma/2}$ такое, что $P(-u_{\gamma/2} < U < u_{\gamma/2}) = 2\Phi(u_{\gamma/2}) = \gamma$

Следовательно доверительный интервал для параметра а при известной дисперсии $\sigma^2$ имеет вид $\bar{x} - \frac{\sigma\ u_{\gamma/2}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{\sigma\ u_{\gamma/2}}{\sqrt{n}}$ и накрывает параметр а с доверительной вероятностью $\gamma = 1 - \alpha$. Точность интервальной оценки (половина длины интервала) равна $\varepsilon = \frac{\sigma\ u_{\gamma/2}}{\sqrt{n}}$

В случае неизвестной дисперсии среднее квадратическое отклонение $\sigma$ заменяется на оценку $s = \sqrt{s^2}$ и при построении доверительного интервала используется двусторонний квантиль $t_{\gamma/2,(n-1)}$ распределения Стьюдента, определяемого из таблицы имеющей два входа: доверительную вероятность $\gamma = 1 - \alpha$, число степеней свободы $k = n - 1$. Половина длины доверительного интервала для среднего при неизвестной дисперсии $\varepsilon = \frac{s\ t_{\gamma/2,(n-1)}}{\sqrt{n}}$ при том же числе наблюдений n больше чем при известной дисперсии. Сам доверительный интервал имеет вид $\bar{x} - \frac{s\ t_{\gamma/2,(n-1)}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{s\ t_{\gamma/2,(n-1)}}{\sqrt{n}}$.

Доверительный интервал для дисперсии задается неравенством:

$\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{\gamma/2,(n-1)}} < \sigma^2 < \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\gamma/2,(n-1)}}$, где $\chi^2_{\alpha,(n-1)}$ квантили $\chi^2$ распределения, определяемого из таблицы с двумя входами: доверительной вероятностью $\alpha$ и числом степеней свободы $k = n - 1$. Извлекая корни квадратные получим интервальную оценку с тем же коэффициентом доверия $1-\alpha$ для среднего квадратического отклонения $\sigma$.