

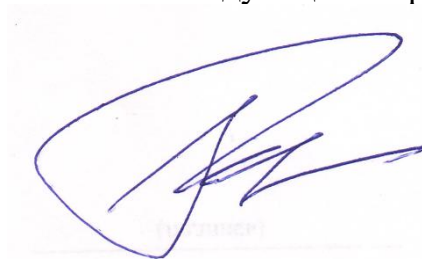
МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры  
«Вычислительная механика и математика»  
« 14 » января 2021 г., протокол № 5  
с учетом изменений и дополнений,  
утвержденных на заседании кафедры  
«Вычислительная механика и математика»  
«17» июня 2021 г., протокол № 10,  
вступающих в силу с 1 сентября 2021 года

Заведующий кафедрой



В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
по проведению практических занятий по дисциплине (модулю)  
**"Математика в социально-гуманитарной сфере"**

**основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**45.03.02 Лингвистика**  
с направленностью (профилем)  
**Перевод и переводоведение**

Форма обучения: заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 450302-01-21

Тула 2021 год

## Разработчик методических указаний



Бакулин Н.В., доцент, к.т.н., доцент

\_\_\_\_\_  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

\_\_\_\_\_  
(подпись)

## 1. Множества. Операции над множествами

Понятие множества в математике относится к неопределяемым (подобно понятиям числа и точки).

Множеством является совокупность объектов, объединенных каким-либо признаком.

Объекты – элементы множества – обозначаются строчными буквами. Сами множества обозначаются заглавными (прописными) буквами латинского алфавита. Тот факт, что  $a$  является элементом множества  $A$  обозначается  $a \in A$  (говорят, что  $a$  принадлежит  $A$ ); то, что  $a$  не является элементом множества  $A$ , обозначается  $a \notin A$  (говорят, что  $a$  не принадлежит  $A$ ).

Считается, что множество задано, если перечислены все его элементы или названо характеристическое свойство, по которому можно определить, принадлежит данный элемент множеству или нет, например:

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ или } M = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 5\}$$

Пример: Найти элементы множества:  $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 2x^2 - 7x + 3 = 0\}$ .

Решив квадратное уравнение, находим его корни  $x_1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ ,  $x_2 = 3 \in \mathbb{N}$ , значит  $A = \{3\}$ .

- Множества, состоящие из одних и тех же объектов, называются равными

Пример:  $A = \{0, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 2, 0\}$

$$A = B$$

- Если каждый элемент множества  $B$  является элементом множества  $A$ , то  $B$  называется подмножеством множества  $A$ :  $B \subset A$

Пример:  $B = \{3, 2\} \subset A = \{3, 2, 0\}$

– подмножество любого множества;  $A$  подмножество  $A$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

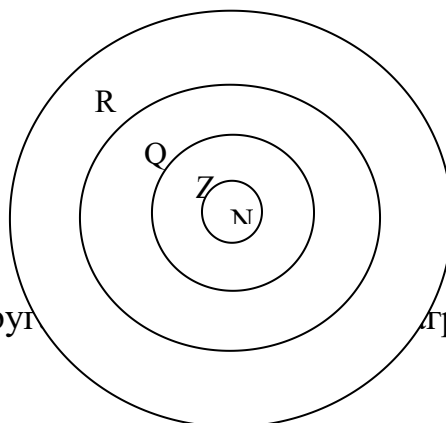
$\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}$  – множество целых чисел

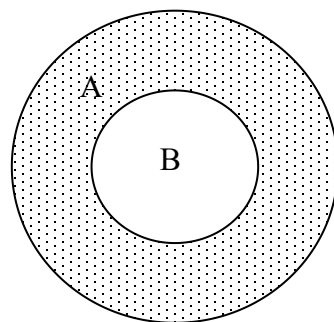
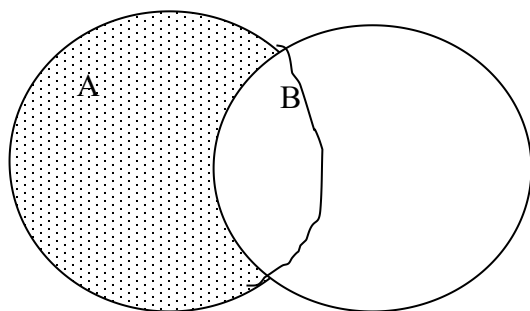
$\mathbb{Q}$  – множество рациональных чисел

$\mathbb{R}$  – множество действительных чисел

Изобразим множества  $A$  и  $B$  кругами (граммы Эйлера-Венна)



- Множество  $C$ , элементами которого являются все элементы множества  $A$ , не принадлежащие множеству  $B$ , называется разностью множеств  $A$  и  $B$  и записывается  $C = A \setminus B$ .



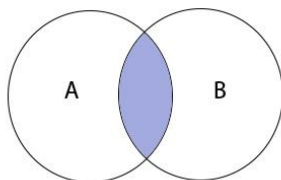
Примеры

- 1)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2\}$      $A \setminus B = \{3\}$
- 2)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4\}$      $A \setminus B = \{1, 2\}$
- 3)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$      $A \setminus B = \emptyset$

- Если  $B \subset A$ , то  $A \setminus B$  – дополнение множества  $B$  до множества  $A$
- Множество  $C$ , состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству  $A$  так и множеству  $B$  (и только из этих элементов), называется пересечением множеств  $A$  и  $B$ :  $C = A \cap B$ .

Пример:  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$

$$C = A \cap B = \{2, 3\}$$



- Множества, пересечение которых есть пустое множество, называются непересекающимися:  $\{0,1\} \cap \{2\} = \emptyset$ .

Пример.

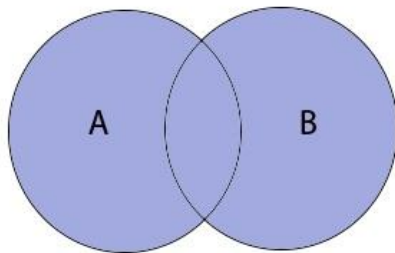
$$1) \begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \{-2; 1\} \cap [0; +\infty) = \{1\}$$

- Множество  $C$ , состоящее из всех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$  и  $B$ , называется объединением множеств  $A$  и  $B$ :  $C = A \cup B$

Пример.  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$

$$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$



Пример:

$$1) (x+1)(x^2-4)=0 \quad \{-2, -1, 2\} \text{—совокупность решений}$$

$$x > 5$$

$$2) (x-5)(x+3) > 0 \quad \begin{matrix} x > -3 & x > 5 \\ x < 5 & x < -3 \end{matrix} \quad (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$$

$$x < -3$$

Составить множества:

1)  $A$  — натуральные делители числа 12.

2)  $B \setminus A$ , если  $A = \{-5, -4, -3\}$ ,  $B = \{-5, -4, -3, -2\}$ .

3)  $R \setminus Q, Z \setminus N$

4) а)  $[1;7] \cup [5;8], [1;7] \cap [5;8], [1;7] \setminus [5;8], [5;8] \setminus [1;7]$

б)  $(0;3] \cup [5;7), (0;3] \cap [5;7), (0;3] \setminus [5;7), [5;7) \setminus (0;3]$

5) Объединение и пересечение корней уравнений

$$x^2 + 9x - 10 = 0 \text{ и } x^2 - 3x + 2 = 0$$

6) Запишите решение неравенства  $(x-1)(x-6) \leq 0$

7)  $A$  – натуральные делители числа 18,

$B$  – натуральные делители числа 45. Найти  $A \cap B$ .

8) Найти  $A \cap B$ , если  $A = \{x: x \in Z, |x| < 5\}$   $B = \{x: x \in N, |x-1| < 7\}$

9) Найти  $A \cup B$ , если  $A = \{x: x^2 - 6x + 9 \leq 0\}$   $B = \{x: x \in Z, |x| \leq 1\}$

• Множество  $A$  называется эквивалентным множеству  $B$  ( $A \sim B$ ), если между элементами множеств  $A$  и  $B$  можно установить взаимно однозначное соответствие.

Различают конечные и бесконечные множества.

• Число элементов множества  $A$  называется его мощностью или кардинальным числом ( $|A|$  или  $card A$ ).

Конечное множество, состоящее из  $n$  элементов имеет мощность  $|A| = n$ .

Если  $A \sim N$ , то множество  $A$  счетное.

Если  $A \sim R$ , то  $A$  – континуальное множество или множество мощности континуум.

**Задачи для самостоятельного решения.**

Изобразить диаграммы Эйлера-Венна для следующих множеств:

а)  $(A \cap B) \setminus C$

б)  $(A \cup B) \setminus C$

в)  $(A \cap B) \cap C$

г)  $(A \setminus B) \cap C$

д)  $(A \setminus B) \cup C$

е)  $(A \setminus B) \setminus C$

ж)  $(A \cap B) \cup C$

## Множество комплексных чисел

**Определение.** Комплексным числом называют всякую упорядоченную пару  $(x, y)$  действительных чисел.

Его обозначают  $z = x + yi$ ,  $x, y \in R$ , где  $i = \sqrt{-1}$  или  $i^2 = -1$ .

Пример. Решить уравнение  $x^2 + 6x + 25 = 0$  над множеством комплексных чисел

Вычислим дискриминант:  $D = b^2 - 4ac = 36 - 100 = -64$ .

Тогда  $\sqrt{D} = \sqrt{-64} = \sqrt{-1} \sqrt{64} = \sqrt{-1} \cdot 8 = 8i$

Найдем корни уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm 8i}{2} = \frac{2(-3 \pm 4i)}{2} = -3 \pm 4i.$$

Запись  $z = x + yi$  называется *алгебраической формой* записи комплексного числа. Действительные числа  $x$  и  $y$  называют соответственно *действительной* и *мнимой частью* комплексного числа  $z = x + yi$ :

$$\operatorname{Re} z = x \text{ и } \operatorname{Im} z = y.$$

Суммой двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + y_1 i$  и  $z_2 = x_2 + y_2 i$  называют комплексное число  $z = z_1 + z_2$ , действительная часть которого равна  $x = x_1 + x_2$ , а мнимая равна  $y = y_1 + y_2$ , т.е.

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Разностью двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + y_1 i$  и  $z_2 = x_2 + y_2 i$  называют комплексное число  $z = z_1 - z_2$ , действительная часть которого равна  $x = x_1 - x_2$ , а мнимая равна  $y = y_1 - y_2$ , т.е.

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Произведением двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + y_1 i$  и  $z_2 = x_2 + y_2 i$  называется комплексное число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Число  $\bar{z} = x - yi$  называется *сопряженным* (комплексно сопряженным) числу  $z = x + yi$ . Отметим, что  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ .

Частным (отношением) двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + y_1 i$  и  $z_2 = x_2 + y_2 i$  при  $z_2 \neq 0$  (т.е.  $x_2 \neq 0$ ,  $y_2 \neq 0$ ) называют комплексное число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Пример. Вычислить  $(2 - 3i)^2 + 2i^{15}$

$$\begin{aligned} (2 - 3i)^2 + 2i^{15} &= 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 + 2i^{14} = 4 - 12i + 9i^2 + 2(i^2)^7 = \\ &= 4 - 12i + 9i^2 + 2(i^2)^7 = 4 - 12i - 9 + 2(-1)^7 i = -5 - 12i - 2i = -5 - 14i \end{aligned}$$

Пример. Вычислить  $\frac{7+3i}{3i-1}$

$$\begin{aligned}\frac{7+3i}{3i-1} &= \frac{7+3i}{-1+3i} = \frac{(7+3i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{-7-21i-3i-9i^2}{(-1)^2+3^2} = \\ &= \frac{-7-24i+9}{1+9} = \frac{2-24i}{10} = \frac{1-12i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{12}{5}i.\end{aligned}$$

Пример. Записать число  $z = -\frac{2\sqrt{2}}{1+i}$  в алгебраической форме.

Число  $z$  в алгебраической форме имеет вид  $z = x + yi$ . Преобразуем дробь, умножив числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\begin{aligned}z &= -\frac{2\sqrt{2}}{1+i} = -\frac{2\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{2\sqrt{2}(1-i)}{1-i^2} = -\frac{2\sqrt{2}(1-i)}{2} = \\ &= -\sqrt{2}(1-i) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i\end{aligned}$$

Алгебраическая форма:  $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ . Здесь  $\operatorname{Re} z = x = -\sqrt{2}$  и  $\operatorname{Im} z = y = \sqrt{2}$ .

### Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить  $(4+5i)^2(5-4i)$  Ответ:  $115 + 236i$
2. Вычислить  $\frac{4-5i}{5+4i} - 2i^{19} + i^{25} - i^{14} + 2i^3$  Ответ: 1
3. Вычислить  $\frac{2-5i}{3+i}$  Ответ:  $0,1 - 1,7i$

## 2. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

**О п р е д е л е н и е.** Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов.  $m \times n$  — порядок или размер матрицы. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

имеет размер  $2 \times 4$ , так как в этой матрице количество строк равно  $m = 2$ , а количество столбцов равно  $n = 4$ . Числа, из которых состоит матрица, называются элементами. В общем случае матрицы символически обозначаются следующим образом



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| = \|a_{ij}\|.$$

Типы матриц:

1. Прямоугольные –  $m \neq n$ .
2. Квадратные –  $m = n$ .
3. Трапецеидальные – прямоугольные матрицы, у которых  $a_{ij} = 0$  при  $i < j$  или  $i > j$ .
4. Треугольные – квадратные матрицы, у которых  $a_{ij} = 0$  при  $i < j$  или  $i > j$ .
5. Диагональные – квадратные матрицы, у которых  $a_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ .
6. Единичная матрица – диагональная матрица, у которой  $a_{ii} = 1$ .
7. Транспонированная матрица  $A^T$  – это матрица, которая получается из матрицы  $A$  путём замены в ней строк столбцами.

**Примеры матриц.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ -4 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ – прямоугольная матрица,}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ – квадратная матрица,}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ – трапецеидальная матрица,}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ – треугольная матрица,}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ – диагональная матрица,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица.}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ – транспонированная матрица для}$$

матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

## 2.2. Действия с матрицами

С матрицами можно выполнять следующие операции:

1) **Сложение матриц.** Матрица  $C = \|c_{ij}\|$  называется суммой матриц  $A = \|a_{ij}\|$  и  $B = \|b_{ij}\|$ ,

если  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , Матрица  $A$  и  $B$  должны быть одного и того же порядка, Матрица  $C$  получится того же порядка, что и матрицы  $A$  и  $B$ .

**Пример.** Найдите сумму матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Элементы матрицы  $C$  получаем путём суммирования соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+1) & (1+2) & (3+3) \\ (1+3) & (-1+2) & (2+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) **Умножение матрицы на число.** Матрица  $C = \|c_{ij}\|$  называется произведением матрицы  $A = \|a_{ij}\|$  на число  $\lambda$ , если  $\|c_{ij}\| = \|\lambda a_{ij}\|$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

**Пример.** Найдите произведение матрицы на число  $\lambda = 5$ .

**Решение.** Элементы матрицы  $C$  получаем путём умножения элементов матрицы  $A$  на число  $\lambda = 5$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 & 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 5 & 1 \cdot 5 \\ -1 \cdot 5 & 6 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 5 \\ -5 & 30 \end{pmatrix}$$

3) **Умножение матриц.** Матрица  $C = \|c_{ij}\|$  называется произведением матрицы  $A = \|a_{ik}\|$  размер  $m \times p$  и

матрицы  $B = \begin{vmatrix} b_{ij} \end{vmatrix}$  размером  $p \times n$ , если элементы матрицы  $C$  вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (1)$$

Перемножать можно только матрицы, у которых количество столбцов первой равно количеству строк второй. Произвольные матрицы перемножать нельзя.

**Пример.** Найдите произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 10 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Согласно формуле (1), имеем

$$c_{11} = \sum_{k=1}^4 a_{1k} b_{k1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14,$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^4 a_{1k} b_{k2} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 10,$$

$$c_{13} = \sum_{k=1}^4 a_{1k} b_{k3} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 10,$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^4 a_{2k} b_{k1} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 7,$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^4 a_{2k} b_{k2} = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 6,$$

$$c_{23} = \sum_{k=1}^4 a_{2k} b_{k3} = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 7$$

Значит,

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 10 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Рассмотренные операции с матрицами обладают теми же свойствами, что и операции сложения и умножения для вещественных чисел, за исключением произведения матриц, которое не коммутативно, т.е.  $AB \neq BA$ . В этом можно убедиться с помощью следующего примера

для матриц  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ . Находим произведения

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+6 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 & 0 \cdot 2 + 0 \\ 0+0 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Как видим,

## Определители

Каждой квадратной матрице по определённому правилу можно поставить в соответствие единственное число. Это число называется определителем и символически обозначается

$$\det A = \Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Порядок определителя равен порядку квадратной матрицы.

Определитель второго порядка вычисляется следующим образом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (2)$$

т.е. из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол), вычитается произведение элементов, находящихся на побочной диагонали (идущей из левого нижнего в правый верхний угол).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

*Пример.* Вычислите определитель матрицы

*Решение.* Значения элементов матрицы  $A$ , т.е.

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = -3, \quad a_{21} = 5, \quad a_{22} = 8$$


Подставляем в формулу (2) и получаем

$$\det A = 1 \cdot 8 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23.$$

Определитель третьего порядка вычисляется с помощью формулы


$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \quad (3)$$

**З а м е ч а н и е.** Чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников (правило Саррюса). Оно заключается в следующем. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются на главной диагонали и в вершинах треугольников, симметричных относительно главной диагонали



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

**П р и м е р.** Вычислите определитель матрицы .

**Р е ш е н и е.** Подставляем значения элементов матрицы в формулу (3) и находим величину заданного определителя

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-5)(-1) + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-5) \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) =$$

$$= 4 + 15 + 4 - 6 + 40 + 1 = 58.$$


Для вычисления определителей третьего порядка можно пользоваться ещё правилом «3×5». Согласно этому правилу к заданной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

добавляют ещё первые два столбца

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются на главной диагонали и на отрезках, параллельных главной диагонали



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются на побочной диагонали и на отрезках, параллельных побочной диагонали



$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \\ \diagup \end{array} \left( \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right).$$

Определитель  $\det A$  равен сумме указанных произведений элементов с учетом их знаков.

### *Основные свойства определителей*

Рассмотрим основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка

**С в о й с т в о 1.** Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\det A^T = \det A. \quad (4)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \det A^T &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Из чего следует справедливость равенства (4).

Из свойства 1 следует, что свойствами определителей, сформулированные для строк будут такими же как и для столбцов. Поэтому следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк.

**С в о й с т в о 2.** При умножении элементов строки определителя на некоторое число определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В справедливости этого свойства можно убедиться, вычислив эти определители

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ & = ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{13}a_{21}a_{32} + ka_{12}a_{23}a_{31} - ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{12}a_{21}a_{33} - ka_{11}a_{23}a_{32} \\ & = k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) \\ & = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**Свойство 3.** Определитель равен нулю в следующих случаях:

а) одна из строк нулевая

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

б) две равные строки

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

в) элементы двух строк пропорциональны

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

В справедливости перечисленных свойств легко убедиться с помощью формулы (3).

**С в о й с т в о 4.** Если две какие-либо строки определителя поменять местами, то знак определителя изменится на противоположный

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство этого свойства выполняется с помощью формулы (3).

**С в о й с т в о 5.** Если в определителе некоторая строка, например, первая является линейной комбинацией двух строк с коэффициентами  $\lambda$  и  $\mu$

$$a_{11} = \lambda b_{11} + \mu c_{11}, \quad a_{12} = \lambda b_{12} + \mu c_{12}, \quad a_{13} = \lambda b_{13} + \mu c_{13},$$

то определитель будет равен сумме двух определителей, определяемых формулой

$$\begin{vmatrix} \lambda b_{11} + \mu c_{11} & \lambda b_{12} + \mu c_{12} & \lambda b_{13} + \mu c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \lambda b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mu c_{11} & \mu c_{12} & \mu c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Справедливость этого свойства можно доказать, сравнив значения левой и правой частей равенства, найденные с помощью формулы (3).

**С в о й с т в о 6.** Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число

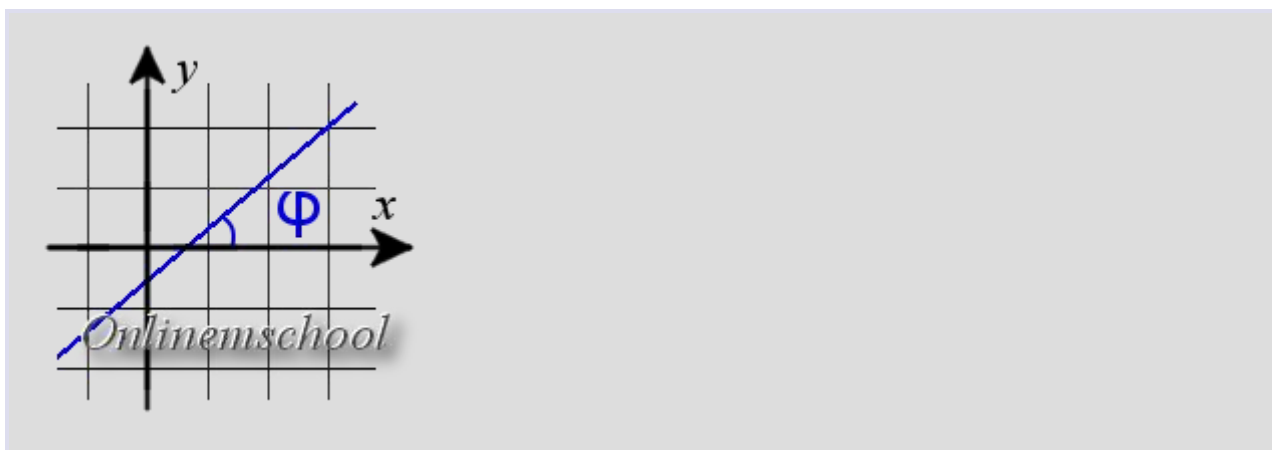
$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

### 3. Уравнение прямой на плоскости

Любую прямую на плоскости можно задать линейным уравнением первой степени относительно переменных  $x$  и  $y$  вида

$$Ax + By + C = 0,$$

где  $A$  и  $B$  не могут быть одновременно равны нулю.



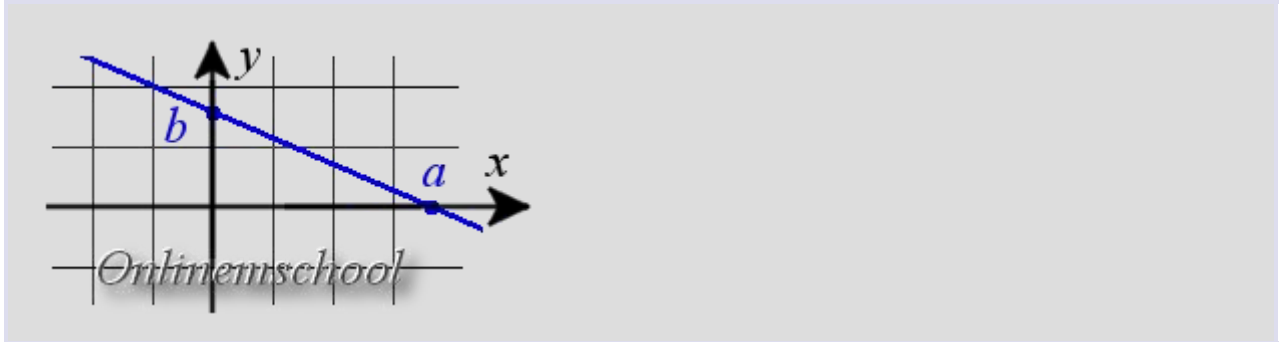
Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Общее уравнение прямой при  $B \neq 0$  можно привести к виду

$$y = kx + b$$

где  $k$  - **угловой коэффициент** равный тангенсу угла, образованного данной прямой и положительным направлением оси  $OX$ .

$$k = \operatorname{tg} \varphi$$



*Уравнение прямой в отрезках на осях*

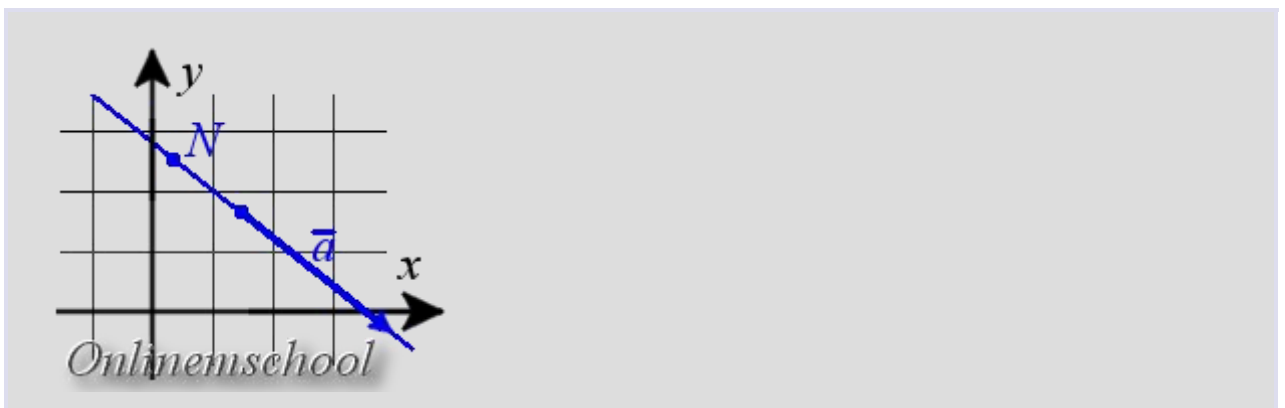
Если прямая пересекает оси  $Ox$  и  $Oy$  в точках с координатами  $(a, 0)$  и  $(0, b)$ , то она может быть найдена используя формулу **уравнения прямой в отрезках**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

*Уравнение прямой, проходящей через две различные точки на плоскости*

Если прямая проходит через две точки  $M(x_1, y_1)$  и  $N(x_2, y_2)$ , такие что  $x_1 \neq x_2$  и  $y_1 \neq y_2$ , то **уравнение прямой** можно найти, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



*Каноническое уравнение прямой на плоскости*

Если известны координаты точки  $N(x_0, y_0)$  лежащей на прямой и направляющего вектора  $a = \{l; m\}$  ( $l$  и  $m$  не равны нулю), то уравнение прямой можно записать в каноническом виде, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

**Пример .** Найти уравнение прямой проходящей через две точки  $M(1, 7)$  и  $N(2, 3)$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой для уравнения прямой проходящей через две точки

$$x - 2 - 1 = y - 3 - 7$$

Упростив это уравнение получим *каноническое уравнение прямой*

$$x - 11 = y - 7 - 4$$

Выразим  $y$  через  $x$  и получим *уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y - 7 = -4(x - 1)$$

$$y = -4x + 11$$

#### 4.Пределы

Одним из основных понятий математического анализа является понятие предела. Примерами применения понятия предела могут служить окружность как предел вписанных и описанных многоугольников при бесконечном увеличении числа сторон или касательная как предельное положение секущей при сближении точек пересечения. Говорят, что функция  $y=f(x)$  имеет предел  $A$  при  $x$  стремящемся к  $x_0$ , если значения функции  $f(x)$  сколь угодно близко приближаются к числу  $A$ , когда значения переменной  $x$  сколь угодно близко приближаются к числу  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \text{ из } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

#### Пример №1

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4}$ .

### Решение:

Данная функция элементарная, т.к. получена из основных элементарных функций (постоянной и степенной) с помощью конечного числа арифметических действий. Поскольку  $x = -1$  принадлежит области определения функции, то ее предел в точке  $x = -1$  равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4} = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 2}{2(-1)^2 + 2(-1) - 4} = \frac{0}{-4} = 0.$$

Число  $A$  называется пределом числовой последовательности  $y_n = f(n)$ , если для любой окрестности точки  $A$  все члены последовательности, начиная с некоторого номера  $N$ , принадлежат этой окрестности.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$$

Обозначение:  $n \rightarrow \infty$ .

(Символ  $\infty$  означает «бесконечно большую величину».)

С понятием предела числовой последовательности тесно связано понятие предела функции на бесконечности, которое на языке логических символов имеет вид:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0: \forall |x| > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

.

### Основные теоремы о пределах

**Внимание!** Если предел существует, то он единственный.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$

**Теорема 1.** Предел постоянной равен самой постоянной:  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$$

**Теорема 2.** Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ . Тогда:

1) предел суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A + B;$$

2) предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B;$$

В частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot A;$$

3) предел частного двух функций равен частному пределов этих функций при условии, что предел делителя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

### Пример №2

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4}$

**Решение:**

Воспользовавшись теоремами о пределах частного, суммы и произведения, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 2x - 4)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 3x + \lim_{x \rightarrow -1} 2}{\lim_{x \rightarrow -1} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 2x - \lim_{x \rightarrow -1} 4} \\ &= \frac{(\lim_{x \rightarrow -1} x)^2 + 3 \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 2}{2(\lim_{x \rightarrow -1} x)^2 + 2 \lim_{x \rightarrow -1} x - \lim_{x \rightarrow -1} 4} = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 2}{2(-1)^2 + 2(-1) - 4} = \frac{0}{-4} = 0. \end{aligned}$$

Если вычисление пределов приводит к неопределенным выражениям

вида  $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty), (0 \cdot \infty)$ ,

необходимо провести дополнительные исследования, т.е. «раскрыть неопределенность».



## Раскрытие неопределенностей

Раскрытие неопределенностей вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right)$ .

1. Если  $f(x)$  — рациональная дробь, то числитель и знаменатель дроби раскладывают на множители.

### Пример №3

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4}$

**Решение:**

Числитель и знаменатель дроби  $\frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4}$  при  $x = -2$  обращаются в  $\left(\frac{0}{0}\right)$ .

Имеем неопределенность вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, а затем применим теоремы о пределах частного, суммы и произведения:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+1)}{2(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+1)}{2(x-1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

2. Если  $f(x)$  — дробь, содержащая иррациональные выражения, то выделение множителей вида  $(x - x_0)$  достигается переводом иррациональностей в числитель или знаменатель.

### Пример №4

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3x} - 1}{5x}$ .

**Решение:**

Имеем неопределенность вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$ . Избавимся от иррациональности в числителе, умножив и разделив дробь на сопряженное к числителю выражение  $\sqrt{1-3x} + 1$ . Получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3x} - 1}{5x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-3x} - 1)(\sqrt{1-3x} + 1)}{5x(\sqrt{1-3x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-3x}{5x(\sqrt{1-3x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{5x(\sqrt{1-3x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{5(\sqrt{1-3x} + 1)} = \frac{-3}{5(1+1)} = -\frac{3}{10} = -0,3.$$

3. В остальных случаях для раскрытия неопределенности

вида  $\left( \frac{0}{0} \right)$  используют первый замечательный предел (см. п. 3.4) или эквивалентные бесконечно малые функции (см. п. 3.5).

**Раскрытие неопределенностей вида  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ .** Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)$

Если  $f(x)$  — рациональная дробь или дробь, содержащая иррациональности, то числитель и знаменатель делят на  $x$  в старшей степени.

### Пример №5

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4}$ , если 1)  $a=2$ ; 2)  $a=1$ ; 3)  $a=4$ .

**Решение:**

Числитель и знаменатель дроби конечного предела не имеют. Имеем

неопределенность вида  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ . Для ее раскрытия разделим числитель и знаменатель дроби на высшую степень  $x$  (в первом и втором случаях на  $x^2$ , во третьем — на  $x^4$ ), а затем воспользуемся теоремами о пределах функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{2 + 0 - 0} = \frac{1}{2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x - 4} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}} =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x + 2}{2x^2 + 2x - 4} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}}{\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^4}} = \left( \frac{1}{0} \right) = \infty.$$

**Вывод.** Предел рациональной дроби на бесконечности равен отношению коэффициентов при старших степенях, если эти степени совпадают, нулю — если показатель степени числителя меньше показателя степени знаменателя и бесконечности в противном случае.

покажем на примерах.

### Пример №6

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ .

**Решение:**

Имеем неопределенность вида  $(\infty - \infty)$  которая преобразуется к

неопределенности вида  $\left( \frac{0}{0} \right)$  приведением функции к общему знаменателю:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} \\ &= \frac{-(1+2)}{1+1+1} = -1.\end{aligned}$$

### Пример №7

Вычислить предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 - 2n - 1} - \sqrt{n^2 - 7n + 3} \right)$$

**Решение:**

Для раскрытия неопределенности вида  $(\infty - \infty)$  умножим и разделим выражение в скобках на сопряженное:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 - 2n - 1} - \sqrt{n^2 - 7n + 3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 2n - 1) - (n^2 - 7n + 3)}{\sqrt{n^2 - 2n - 1} + \sqrt{n^2 - 7n + 3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 4}{\sqrt{n^2 - 2n - 1} + \sqrt{n^2 - 7n + 3}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right).\end{aligned}$$

Получили неопределенность вида  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$ . Раскроем ее, разделив все члены полученного выражения на  $n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{4}{n}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}}} = \frac{5 - 0}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{5}{2}.$$

### Замечательные пределы

Первый замечательный предел. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \left[ \begin{array}{l} \arcsin x = y \Rightarrow x = \sin y \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = 1 \quad (\text{аналогично}).$$

## 5. Производная

Производная функции в точке — это предел отношения приращения функции  $\Delta y$  к приращению аргумента  $\Delta x$ :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Производные элементарных функций

Функция	Производная
$f(x) = C, C \in R$	0
$f(x) = x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sin x$	$\cos x$
$f(x) = \cos x$	$-\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
$f(x) = \ln x$	$1/x$
$f(x) = \log_a x$	$1/(x \cdot \ln a)$
$f(x) = e^x$	$e^x$

Если элементарную функцию умножить на произвольную постоянную, то производная новой функции тоже легко считается:

$$(C \cdot f)' = C \cdot f'.$$

В общем, константы можно выносить за знак производной. Например:

$$(2x^3)' = 2 \cdot (x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2.$$

Очевидно, элементарные функции можно складывать друг с другом, умножать, делить — и многое другое. Так появятся новые функции, уже не особо элементарные, но тоже дифференцируемые по определенным правилам. Эти правила рассмотрены ниже.

### Производная суммы и разности

Пусть даны функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , производные которых нам известны. К примеру, можно взять элементарные функции, которые рассмотрены выше. Тогда можно найти производную суммы и разности этих функций:

$$1. (f + g)' = f' + g'$$

$$2. (f - g)' = f' - g'$$

Итак, производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных. Слагаемых может быть больше. Например,  $(f + g + h)' = f' + g' + h'$ .

Задача. Найти производные функций:  $f(x) = x^2 + \sin x$ ;  $g(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ .

Функция  $f(x)$  — это сумма двух элементарных функций, поэтому:

$$f'(x) = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x;$$

Аналогично рассуждаем для функции  $g(x)$ . Только там уже три слагаемых (с точки зрения алгебры):

$$g'(x) = (x^4 + 2x^2 - 3)' = (x^4 + 2x^2 + (-3))' = (x^4)' + (2x^2)' + (-3)' = 4x^3 + 4x + 0 = 4x \cdot (x^2 + 1).$$

Ответ:

$$f'(x) = 2x + \cos x;$$

$$g'(x) = 4x \cdot (x^2 + 1).$$

### Производная произведения

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Задача. Найти производные функций:  $f(x) = x^3 \cdot \cos x$ ;  $g(x) = (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x$ .

Функция  $f(x)$  представляет собой произведение двух элементарных функций, поэтому все просто:

$$f'(x) = (x^3 \cdot \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\sin x) = x^2 \cdot (3\cos x - x \cdot \sin x)$$

У функции  $g(x)$  первый множитель чуть посложней, но общая схема от этого не меняется. Очевидно, первый множитель функции  $g(x)$  представляет собой многочлен, и его производная — это производная суммы. Имеем:

$$g'(x) = ((x^2 + 7x - 7) \cdot e^x)' = (x^2 + 7x - 7)' \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot (e^x)' = (2x + 7) \cdot e^x + (x^2 + 7x - 7) \cdot e^x = e^x \cdot (2x + 7 + x^2 + 7x - 7) = (x^2 + 9x) \cdot e^x = x(x + 9) \cdot e^x.$$

Ответ:

$$f'(x) = x^2 \cdot (3\cos x - x \cdot \sin x);$$

$$g'(x) = x(x + 9) \cdot e^x.$$

### Производная частного

Если есть две функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , причем  $g(x) \neq 0$  на интересующем нас множестве, можно определить новую функцию  $h(x) = f(x)/g(x)$ . Для такой функции тоже можно найти производную:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Задача. Найти производные функций:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad g(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

В числителе и знаменателе каждой дроби стоят элементарные функции, поэтому все, что нам нужно — это формула производной частного:

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$g'(x) = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{(x^2)' e^x - x^2 (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2x e^x - x^2 e^x}{(e^x)^2}$$

Разложим числитель на множители — это значительно упростит ответ:

$$g'(x) = \frac{2x e^x - x^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{x e^x (2 - x)}{(e^x)^2} = \frac{x(2 - x)}{e^x}$$

Ответ:

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}; \quad g'(x) = \frac{x(2 - x)}{e^x}$$

## Производная сложной функции

Задача. Найти производные функций:  $f(x) = e^{2x+3}$ ;  $g(x) = \sin(x^2 + \ln x)$

Заметим, что если в функции  $f(x)$  вместо выражения  $2x + 3$  будет просто  $x$ , то получится элементарная функция  $f(x) = e^x$ . Поэтому делаем замену: пусть  $2x + 3 = t$ ,  $f(x) = f(t) = e^t$ . Ищем производную сложной функции по формуле:

$$f'(x) = f'(t) \cdot t' = (e^t)' \cdot t' = e^t \cdot t'$$

А теперь — внимание! Выполняем обратную замену:  $t = 2x + 3$ . Получим:

$$f'(x) = e^t \cdot t' = e^{2x+3} \cdot (2x + 3)' = e^{2x+3} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x+3}$$

Теперь разберемся с функцией  $g(x)$ . Очевидно, надо заменить  $x^2 + \ln x = t$ . Имеем:

$$g'(x) = g'(t) \cdot t' = (\sin t)' \cdot t' = \cos t \cdot t'$$

Обратная замена:  $t = x^2 + \ln x$ . Тогда:

$$g'(x) = \cos(x^2 + \ln x) \cdot (x^2 + \ln x)' = \cos(x^2 + \ln x) \cdot (2x + 1/x).$$

Ответ:  $f'(x) = 2 \cdot e^{2x+3}$ ;

$g'(x) = (2x + 1/x) \cdot \cos(x^2 + \ln x)$ .

Задача. Найти производную функции:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x - 7}$$

Для начала перепишем корень в виде степени с рациональным показателем:

$$f(x) = (x^2 + 8x - 7)^{0,5}.$$

Теперь делаем замену: пусть  $x^2 + 8x - 7 = t$ . Находим производную по формуле:

$$f'(x) = f'(t) \cdot t' = (t^{0,5})' \cdot t' = 0,5 \cdot t^{-0,5} \cdot t'.$$

Делаем обратную замену:  $t = x^2 + 8x - 7$ . Имеем:

$$f'(x) = 0,5 \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5} \cdot (x^2 + 8x - 7)' = 0,5 \cdot (2x + 8) \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5}.$$

Наконец, возвращаемся к корням:

$$f'(x) = \frac{0,5 \cdot (2x + 8)}{\sqrt{x^2 + 8x - 7}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x - 7}}$$

Ответ:

$$f'(x) = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x - 7}}$$



## Уравнение касательной к графику функции

Уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$  имеет вид

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Мы подразумеваем, что существует конечное значение производной  $f'(x_0)$ , в противном случае касательная прямая либо вертикальна (если  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = \infty$ ), либо не существует (если  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x)$ ).

В зависимости от углового коэффициента  $k_x = f'(x_0)$ , касательная может быть параллельна оси абсцисс ( $k_x = 0$ ), параллельна оси ординат ( $k_x = \infty$  в этом случае уравнение касательной будет иметь вид  $x = x_0$ ), возрастать ( $k_x > 0$ ) или убывать ( $k_x < 0$ ).

*Пример.*

Составить уравнение касательной к графику

$$y = e^{x+1} + \frac{x^3}{3} - \frac{6-\sqrt{3}}{3}x - \frac{17-\sqrt{3}}{3}$$

функции в точке  $(-1; -3)$  и определить угол наклона.

*Решение.*

Функция определена для всех действительных чисел. Так как

$(-1; -3)$  – точка касания, то  $x_0 = -1$ ;  $f(x_0) = -3$ .

Находим производную и вычисляем ее значение в точке  $x_0 = -1$ :

$$\begin{aligned} y' &= \left( e^{x+1} + \frac{x^3}{3} - \frac{6-\sqrt{3}}{3}x - \frac{17-\sqrt{3}}{3} \right)' = \\ &= (e^{x+1})' + \left( \frac{x^3}{3} \right)' - \left( \frac{6-\sqrt{3}}{3}x \right)' - \left( \frac{17-\sqrt{3}}{3} \right)' = e^{x+1} + x^2 - \frac{6-\sqrt{3}}{3} \\ y'(x_0) &= y'(-1) = e^{-1+1} + (-1)^2 - \frac{6-\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Так как значение производной в точке касания есть угловой коэффициент касательной, а он равен тангенсу угла наклона,

$$k_x = \operatorname{tg} \alpha_x = y'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

то

$$\alpha_x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}, \text{ а}$$

Следовательно, угол наклона касательной равен  
уравнение касательной прямой имеет вид

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} (x + 1) - 3$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} x - \frac{9 - \sqrt{3}}{3}$$

## 6. Случайные события и вероятность

### Элементы комбинаторики

**Определение.** *Комбинаторика* – раздел дискретной математики, который изучает количества комбинаций, составленных из конечного числа элементов заданного конечного множества элементов различной природы, различающиеся количеством и/или порядком. К таким комбинациям относятся

- *перестановки*  $P_n$  - число способов, которыми можно переставить  $n$  элементов. Число перестановок из  $n$  элементов можно найти по формуле  $P_n = n!$ .

- *сочетания*  $C_n^m$  - число способов, которыми можно из  $n$  элементов выбрать  $m$  элементов, причем порядок элементов в комбинации из  $m$  элементов безразличен. Число перестановок из  $n$  элементов по  $m$  элементов можно найти по формуле  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ , при этом  $C_n^m = C_n^{n-m}$ .

- *размещения*  $A_n^m$  - число способов, которыми можно из  $n$  элементов выбрать  $m$  элементов, располагая взятые  $m$  элементов в различном порядке. Число размещений из  $n$  элементов по  $m$  элементов можно найти по формуле  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ .

### Случайные события

### Непосредственный подсчет вероятности

**Определение.** Под *случайным событием* понимается всякий факт, который в результате испытания может произойти или не произойти.

Вероятность события характеризует степень объективной возможности наступления этого события.

**Определение.** Несколько событий в данном испытании называются попарно *несовместными*, если никакие два из них не могут появиться вместе.

**Определение.** Несколько событий в данном испытании называются *равновозможными*, если ни одно из них не является объективно более возможным по сравнению с остальными.

**Определение.** Несколько событий в данном испытании образуют *полную группу*, если в результате испытания обязательно должно появиться хотя бы одно из них.

**Определение.** Случайные события, образующие полную группу несовместных и равновозможных событий, называются *случаями (исходами, шансами)*.

**Определение (Классическое определение вероятности).** Если результаты одного испытания можно представить в виде полной группы  $n$  равновозможных и несовместных исходов и если событие  $A$  появляется только в  $m$  случаях, то вероятность события  $A$  равна отношению числа случаев, в которых событие  $A$  появляется, к общему числу всех случаев:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Заметим, что всегда  $0 \leq P(A) \leq 1$ . При этом событие, для которого  $P(A) = 0$ , называется *невозможным*, а событие, для которого  $P(A) = 1$ , называется *достоверным*.

Понятие геометрической вероятности можно рассматривать как обобщение понятия классической вероятности на случай с бесконечным (несчетным) числом исходов. Если брошенная наудачу точка может попасть в любую точку области  $G$ , то вероятность попасть в какую-либо часть  $g$  области  $G$  (событие  $A$ ) пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему) и не зависит от расположения и формы этой части:

$$P(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}.$$

### Основные теоремы теории вероятностей

**Определение.** Суммой  $A + B$  двух событий  $A$  и  $B$  называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

**Определение.** Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Если несколько событий попарно несовместны, то их сумма сводится к появлению одного события (безразлично какого). Для двух несовместных событий  $A$  и  $B$  их сумма  $A + B$  есть событие, состоящее в появлении или  $A$ , или  $B$ .

**Определение.** Произведением  $A \cap B$  двух событий  $A$  и  $B$  называется событие, состоящее в совместном (одновременном или последовательном) наступлении обоих этих событий.

**Определение.** Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий.

**Определение.** Два события называются *независимыми*, если наступление одного из них не меняет вероятности наступления другого.

**Определение.** Несколько событий называются *попарно независимыми*, если любые два из них независимы, т.е. вероятность наступления одного из них не зависит от наступления других.

**Теорема** (сложения вероятностей несовместных событий) Пусть  $A$  и  $B$  - несовместные события, тогда  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**Следствие.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - попарно несовместные события, образующие полную группу, тогда

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

**Следствие.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - попарно независимые события, тогда вероятность наступления хотя бы одного из этих событий находится по формуле

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n)$$

**Определение.** Два несовместных события, образующие полную группу, называются *противоположными* и обозначаются как  $A$  и  $\bar{A}$ , при этом  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ .

**Теорема** (сложения вероятностей совместных событий) Пусть  $A$  и  $B$  - совместные события, тогда  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**Теорема** (умножения вероятностей независимых событий) Пусть  $A$  и  $B$  - независимые события, тогда  $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

**Следствие.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - попарно независимые события, тогда

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$$

**Определение.** Вероятность события  $B$ , вычисленная в предположении, что событие  $A$  произошло, называется *условной вероятностью* события  $B$  и обозначается  $P(B | A)$ .

**Теорема** (умножения вероятностей зависимых событий) Пусть  $A$  и  $B$  - зависимые события, тогда  $P(A \cap B) = P(A) P(B | A)$ .

**Следствие.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - зависимые события, тогда

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

**Пример.** В коробке 5 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашены. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среди 2-х извлеченных изделий окажется: а) одно окрашенное; б) 2 окрашенных; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Воспользуемся формулой классического подсчета вероятностей

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Очевидно, общее количество возможных исходов  $n$  равно

$$n = C_5^2 = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$

а) Определим число благоприятных исходов  $m$ . Очевидно, что способов, которыми можно извлечь 1 окрашенное изделие из 3 и 1 неокрашенное изделие из 2, равно соответственно:  $C_3^1 = \frac{3!}{2! 1!} = 3$  и  $C_2^1 = \frac{2!}{1! 1!} = 2$ .

Всего получится  $m = 6$  способов.

$$\text{Тогда } P(A) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

б) Определим число благоприятных исходов  $m$ . Способов, которыми можно извлечь 2 окрашенных изделия из 3, равно  $C_3^2 = \frac{3!}{2! 1!} = 3$ .

Тогда  $m = 3$ .

$$\text{Тогда } P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

в) *Первый способ.* Событие  $A$  – извлекли хотя бы одно окрашенное изделие. Тогда событие  $\bar{A}$  – ни одного окрашенного. Определим число благоприятных исходов  $m$ . Способов, которыми можно извлечь 2 неокрашенных изделия из 2 равно  $C_2^2 = 1$ .

Всего получится  $m = 1$  способ.

$$P(\bar{A}) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

$$\text{Тогда } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,1 = 0,9.$$

*Второй способ.* Хотя бы одно окрашенное – одно или два. В решении под а) подсчитана вероятность того, что извлечено одно окрашенное изделие, под б) – два окрашенных. Тогда вероятность того, что извлечено хотя бы одно окрашенное изделие, равна сумме  $P(A) = 0,6 + 0,3 = 0,9$

Пример. Из урны, содержащей два белых и три черных шара, извлекают по одному без возвращения все шары. Найти вероятности событий: 1) третий шар белый; 2) третий и четвертый шары белые; 3) пятый шар белый, если первый был белый.

1) Возможны следующие варианты:

Первый шар – белый, второй – черный, третий – белый.

Первый шар – черный, второй – белый, третий – белый.

Первый шар – черный, второй – черный, третий – белый.

Найдем вероятность каждого из этих вариантов, используя теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$$p_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10},$$

$$p_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10},$$

$$p_3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}.$$

Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий получаем  $p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ .

2) Найдем вероятность того, что первый шар – черный, второй – черный, третий – белый, четвертый – белый, используя теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$$p = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

3) Найдем вероятность того, что первый шар – белый, второй – черный, третий – черный, четвертый – черный, пятый – белый, используя теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$$p = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{10}.$$

Пример. Вероятности появления каждого из двух независимых событий  $A$  и  $B$  соответственно равны 0,6 и 0,5. Найти вероятность появления только одного из них.

Событие  $C$ , состоящее в появлении только одного из событий  $A$  и  $B$ , заключается в том, что появляется событие  $A$ , но не появляется событие  $B$  или события  $B$  наступает, а событие  $A$  не наступает. Вероятность появления события  $A$  равна  $P(A) = 0,6$ , а ненаступления события  $A$  равна  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$ . Вероятность появления события  $B$  равна  $P(B) = 0,5$ , а  $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,5 = 0,5$ .

Тогда  $P(C) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,5 = 0,5$ .

Пример. Вероятности того, что определенная таблица содержится в каждом из трех справочников равны 0,6; 0,9; 0,75. Найти вероятность того, что таблица не содержится ни в одном справочнике.

Пусть событие  $A$  состоит в том, что таблица не содержится ни в одном справочнике.

Событие  $A_1$  – таблица содержится в первом справочнике, тогда  $p(A_1) = 0,6$ , а вероятность того, что таблица не содержится в первом справочнике  $p(\bar{A}_1) = 1 - p(A_1) = 0,4$ .

Аналогично,  $A_2$  - таблица содержится во втором справочнике, тогда  $p(A_2)=0,9$ , а вероятность того, что таблица не содержится во втором справочнике  $p(\bar{A}_2)=1-p(A_2)=0,1$ .

И,  $A_3$  - таблица содержится в третьем справочнике, тогда  $p(A_3)=0,75$ , а вероятность того, что таблица не содержится в третьем справочнике  $p(\bar{A}_3)=1-p(A_3)=0,25$ .

События  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  независимы, поэтому по теореме об умножении вероятностей  $p(A)=p(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3)=0,4 \cdot 0,1 \cdot 0,25=0,01$ .

Пример. Кадровая служба банка на объявление в Интернете получила 300 резюме. Практика показывает, что вероятность того, что претендент имеет высшее образование, равна 0,7, вероятность того, что претендент имеет опыт работы в банке – 0,3, а вероятность того, что претендент имеет и высшее образование, и опыт работы в банке – 0,2. Оценить количество претендентов, имеющих или опыт работы в банке, или высшее образование.

Пусть событие  $A$  состоит в том, что претендент имеет высшее образование,  $B$  — претендент имеет опыт работы в банке. По условию  $p(A)=0.7$ ,  $p(B)=0.3$ . Событие  $AB$  состоит в том, что претендент имеет и высшее образование, и опыт работы в банке.  $p(AB)=0.2$ .

Найдем вероятность того, что претендент, имеет или опыт работы в банке, или высшее образование, то есть  $p(A+B)$ .

Так как  $A$  и  $B$  совместные события, то по теореме о сумме вероятностей совместных событий

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB).$$

$$p(A+B)=0.7+0.3-0.2=0.8$$

Оценим количество претендентов, имеющих или опыт работы в банке, или высшее образование. Всего 300 претендентов. Следовательно,  $300 \cdot 0.8 = 240$  претендентов имеют или опыт работы в банке, или высшее образование.

Объем контактной работы обучающегося при освоении дисциплины (модуля)

### Основная литература

1. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. /Д.Я. Стройк— Москва : Наука, 1990. — 256 с.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. [Электронный ресурс] — Электрон.дан. — СПб. : Лань, 2017. — 224 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/92615> — Загл. с экрана.

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов. Т.1 / Н.С.Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2010 .— 416 с.
4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов : в 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2009 .— 544 с.
5. Лакерник А.Р. Высшая математика. Краткий курс [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Лакерник А.Р.— Электрон.текстовые данные.— М.: Логос, 2008.— 528 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/9112.html>.— ЭБС «IPRbooks»
6. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2012. – 479 с.
7. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Кнорус, 2010. – 664 с.
8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2010. – 288с.
9. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2011. – 404 с.
10. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Кнорус, 2010. – 493 с.

### **Дополнительная литература**

1. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. – Режим доступа :<https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214370663049600009433>, по паролю
2. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. – Режим доступа по паролю :<https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214412943155100008498>, по паролю

### **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. Успехи математических наук/ Российская академия наук. - М.: Наука, 1995-ISSN 0042-1316
2. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/>, по паролю.- Загл. с экрана



3. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.-Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/>, по паролю.- .- Загл. с экрана

4. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: <http://elibrary.ru/> , по паролю.- Загл. с экрана.

5. НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа, режим доступа <http://cyberleninka.ru/> ,свободный.- Загл. с экрана.

6. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа :[http://window.edu.ru.](http://window.edu.ru/) ,свободный.- Загл. с экрана.

7. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа :[http://exponenta.ru.](http://exponenta.ru/) ,свободный.-Загл. с экрана.