Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное
общеобразовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Вычислительная механика и математика»

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2021г., протокол № 5
Заведующий кафедрой
_______________ В.В.Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**
**по проведению практических занятий по дисциплине (модулю)**
**«Математика»**

**Основной профессиональной образовательной программы**
**высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
**09.03.04 Программная инженерия**

с направленностью (профилем)
**Мобильные и веб-приложения**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 090304-01-21

Тула 2021 год

**Разработчик методических указаний**

Инченко О.В.,к.ф.-м.н.______________________ ____________

*(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)* *(подпись)*

## Аналитическая геометрия в пространстве $R^3$

## Векторная алгебра

Некоторые сведения из теории

Вектор – направленный отрезок.

Равенство

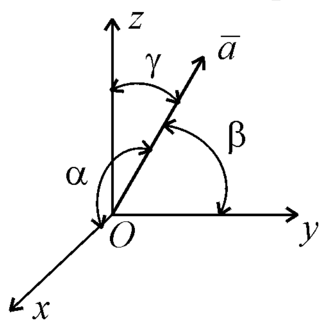
$$\vec{a} = (x,\, y,\, z) \tag{1}$$

означает, что $x, y, z$ – проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2}$$

позволяет по координатам вектора определить его модуль.




Если $\alpha, \beta, \gamma$ – углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то $cos\,\alpha,\ cos\,\beta,\ cos\,\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

$$x = |\,\vec{a}\,|\,cos\,\alpha, \quad y = |\,\vec{a}\,|\,cos\,\beta, \quad z = |\,\vec{a}\,|\,cos\,\gamma, \tag{3}$$

$$cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1. \tag{4}$$

Если известны начало вектора $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и конец $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$, то координаты вектора находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1. \tag{5}$$

Если $\vec{a} = (x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2,\, y_2,\, z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2,\, y_1 \pm y_2,\, z_1 \pm z_2) \tag{6}$$

и $\alpha\vec{a} = (\alpha x_1,\, \alpha y_1,\, \alpha z_1)$, где $\alpha$ – любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Признак коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{7}$$

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом:

$$\left|\,\vec{i}\,\right| = \left|\,\vec{j}\,\right| = \left|\,\vec{k}\,\right| = 1.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по осям соответственно $Ox, Oy, Oz$ в положительную сторону.

Любой вектор $\vec{a} = (x,\, y,\, z)$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{8}$$

<u>Скалярным произведением</u> векторов $\vec{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $\vec{b} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\varphi, \tag{9}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}, \tag{10}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \tag{11}$$

т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{12}$$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \tag{13}$$

$$cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}}. \tag{14}$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа этой силы определяется

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}. \tag{15}$$

<u>Векторным произведением</u> вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot sin\varphi$, где $\varphi -$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3. вектор $\vec{c}$ образует с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \tag{16}$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|, \tag{17}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \tag{18}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, в частности, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\vec{b} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке $M$, а вектор $\vec{a}$ идет из некоторой точки $O$ в точку $M$, то вектор $\vec{a}\times\vec{F}$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки $O$:

$$m_{\circ}\vec{F}=\vec{a}\times\vec{F}. \qquad (20)$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a}\times\vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right). \qquad (21)$$

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$$V=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}. \qquad (22)$$

Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0. \qquad (23)$$

Для векторов $\vec{a}=\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2, y_2, z_2\right)$, $\vec{c}=\left(x_3, y_3, z_3\right)$ смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (24)$$

Задача 1. На материальную точку действуют силы:

$$\vec{F}_1=\left(2, -1, 1\right), \quad \vec{F}_2=\left(-1, 2, 2\right), \quad \vec{F}_3=\left(1, 1, -2\right).$$

Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A\left(2, -1, 0\right)$ в положение $B\left(4, 1, -1\right)$.

Решение. Найдем равнодействующую

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\left(2-1+1, -1+2+1, 1+2-2\right)=\left(2, 2, 1\right).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S}=\overrightarrow{AB}=\left(4-2, 1+1, -1-0\right)=\left(2, 2, -1\right).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W=\vec{R}\cdot\vec{S}=2\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot\left(-1\right)=7.$$

Задача 2. Дана сила $\vec{F}=\left(3, 4, -2\right)$ и точка ее приложения $A\left(2, -1, 3\right)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. По формуле (20) $m_{\circ}\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}$. Вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$ по формуле (5) имеет координаты $\vec{r}=\left(2, -1, 3\right)$, по формуле (19)

$$\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}=-10\vec{i}+13\vec{j}+11\vec{k}.$$

Итак, $m_{\circ}\vec{F}=(-10,\ 13,\ 11)$. Модуль момента находим по формуле (2):

$$\left|m_{\circ}\vec{F}\right|=\sqrt{(-10)^2+(13)^2+(11)^2}=\sqrt{390}\approx 19{,}748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$cos\,\alpha=\frac{-10}{19{,}748}=-0{,}506,\quad cos\,\beta=\frac{13}{19{,}748}=0{,}658,\quad cos\,\gamma=\frac{11}{19{,}748}=0{,}557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha=120^\circ 24',\qquad \beta=48^\circ 51',\qquad \gamma=56^\circ 9'.$$

Контроль: должно быть $cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1.$ У нас:

$$(-0{,}506)^2+(0{,}658)^2+(0{,}557)^2=0{,}999.$$

Задача 3. Написать разложение вектора $\vec{x}=(5,\ 16,\ 2)$ по векторам $\vec{p}=(2,\ 1,\ 0),\ \ \vec{q}=(0,\ -2,\ 0),\ \ \vec{r}=(-1,\ 5,\ 2).$

Решение.

1. Разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ имеет вид

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{p}+\alpha_2\vec{q}+\alpha_3\vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases}x_1=\alpha_1 p_1+\alpha_2 q_1+\alpha_3 r_1\\ x_2=\alpha_1 p_2+\alpha_2 q_2+\alpha_3 r_2\\ x_3=\alpha_1 p_3+\alpha_2 q_3+\alpha_3 r_3.\end{cases}$$

2. С учетом числовых значений координат векторов $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ и $\vec{x}$ получим систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$:

$$\begin{cases}2\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2-1\cdot\alpha_3=5\\ 1\cdot\alpha_1-2\cdot\alpha_2+5\cdot\alpha_3=16\\ 0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+2\alpha_3=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha_1=5+\alpha_3\\ 2\alpha_2=\alpha_1+5\alpha_3-16\\ \alpha_3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=3\\ \alpha_2=-4\\ \alpha_3=1.\end{cases}$$

3. Разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ имеет вид:

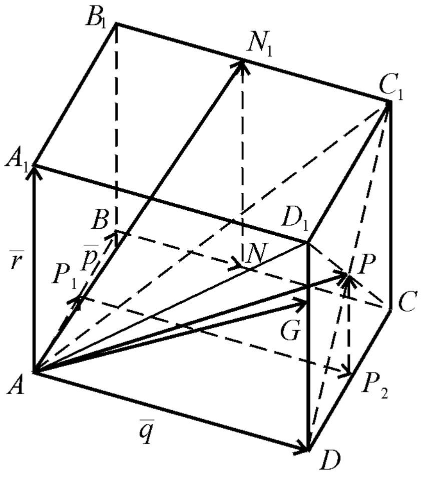
$$\vec{x}=3\vec{p}-4\vec{q}+\vec{r}.$$

Ответ: $\vec{x}=3\vec{p}-4\vec{q}+\vec{r}.$

Задача 4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{p},$ $\overrightarrow{AD}=\vec{q},\ \ \overrightarrow{AA_1}=\vec{r}$ образуют базис. Разложить векторы $\overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{AP},$ $\overrightarrow{AN_1}$ по выбранному базису, если точка $G$ делит ребро $DD_1$ в отношении 1:2; точка $P$ – точка пересечения диагоналей грани $DD_1C_1C$; точка $N_1$ – середина ребра $B_1C_1$.

Решение.

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:




$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r}$,

$$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

## Прямая и плоскость

## Плоскость. Ее уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad - \tag{25}$$

общее уравнение плоскости.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) + C(z - z_\circ) = 0 \quad - \tag{26}$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad - \tag{27}$$

уравнение плоскости «в отрезках». Здесь $a, b, c$ – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad - \tag{28}$$

нормальное уравнение плоскости.

$$d = \frac{|Ax_\circ + By_\circ + Cz_\circ + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad - \tag{29}$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad - \tag{30}$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

## Прямая. Ее уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} - \tag{31}$$

общее уравнение прямой (прямая задана пересечением двух плоскостей).

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} = \frac{z - z_\circ}{p} - \tag{32}$$

каноническое уравнение прямой, где $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ – точка, принадлежащая прямой, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой (вектор, параллельный прямой).

$$\begin{cases} x = x_\circ + mt \\ y = y_\circ + nt \\ z = z_\circ + pt \end{cases} - \tag{33}$$

параметрические уравнения прямой.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} - \tag{34}$$

уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2 + p_1{}^2} \cdot \sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2 + p_2{}^2}} - \tag{35}$$

угол между двумя прямыми, где $\vec{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ – направляющие векторы прямых.

$$sin\psi = \frac{|\, Am + Bn + Cp \,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + c^2}} - \tag{36}$$

угол между прямой и плоскостью, где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\left| \overrightarrow{A_1A_2} \;\; \overrightarrow{A_1A_3} \;\; \overrightarrow{A_1A_4} \right|$$ – объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$,

где $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ – координаты вершин пирамиды.

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \qquad (37)$$

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, $A_4(0, 8, 0)$. Найти:

1) угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$;

2) угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$;

3) объем пирамиды $V$;

4) расстояние от точки $A_4$ до плоскости $A_1A_2A_3$;

5) точку $A_4'$, симметричную точке $A_4$ относительно плоскости $A_1A_2A_3$;

6) точку $A_4''$, симметричную точке $A_4$ относительно прямой $A_1A_3$.

Решение.

1) Угол между ребрами находим по формуле (35).

$\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = (3-2,\ 0-1,\ 1-(-1)) = (1,\ -1,\ 2)$ − направляющий вектор прямой $A_1A_2$;

$\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_4} = (0-2,\ 2-1,\ 0-(-1)) = (-2,\ 7,\ 1)$ − направляющий вектор прямой $A_1A_4$.

$$cos\varphi = \frac{1\cdot(-2) - 1\cdot 7 + 2\cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}} = -\frac{7}{18}.$$

2) Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через три точки $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, по формуле (30)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & 0-1 & 1+1 \\ 2-2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot 0 - (y-1)\cdot 4 + (z+1)\cdot(-2) = 0,$$

$$-4y + 4 - 2z - 2 = 0,$$

$4y + 2z - 2 = 0$ − уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

$\vec{n} = (0,\ 2,\ 1)$ − нормальный вектор плоскости;

$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_4} = (-2,\ 7,\ 1)$ − направляющий вектор прямой $A_1A_4$.

Находим угол $\psi$ между прямой $A_1A_4$ и плоскостью $A_1A_2A_3$ по формуле (36)

$$sin\psi = \frac{0\cdot(-2)+2\cdot 7+1\cdot 1}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+7^2+1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{54}} = 0{,}9114.$$

3) Находим объем пирамиды по формуле (37)

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1,\,-1,\,2);\quad \overrightarrow{A_1A_3} = (0,\,-2,\,4);\quad \overrightarrow{A_1A_4} = (-2,\,7,\,1).$$

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(-2+8-8-28) = -\frac{1}{6}(-30) = 15.$$

4) Расстояние от точки $A_4$ до плоскости $A_1A_2A_3$ находим по формуле (29).

$$d = \frac{|2\cdot 8+0-1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}69.$$

5) Чтобы найти точку $A_4'$, симметричную точке $A_4$ относительно плоскости $A_1A_2A_3$, сделаем следующее.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через точку $A_4$ по формуле (32). За направляющий вектор прямой $\vec{a} = \vec{n} = (0,\,2,\,1)$ берем нормальный вектор плоскости, т.к. прямая перпендикулярна плоскости:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-0}{1},\qquad \frac{x}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{1}.$$

Составим параметрические уравнения этой прямой по формуле (33):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t+8 \\ z = t. \end{cases}$$

Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью $A_1A_2A_3$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t+8 \\ z = t \\ 2y+z-1 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -6+8 = 2 \\ z = t \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 2(2t+8)+t-1 = 0,$$

$$5t+15 = 0,\qquad t = -3.$$

Получаем точку $M(0,\,2,\,-3)$; т.к. точка $A_4'$ симметрична точке $A_4$ относительно плоскости $A_1A_2A_3$, то точка $M$ является серединой отрезка $A_4A_4'$, поэтому

$$x_M = \frac{x_4+x_4'}{2},\qquad 0 = \frac{0+x_4'}{2},\qquad x_4' = 0;$$

$$y_M = \frac{y_4 + y_4'}{2}, \qquad 2 = \frac{8 + y_4'}{2}, \qquad y_4' = -4;$$

$$z_M = \frac{z_4 + z_4'}{2}, \qquad -3 = \frac{0 + z_4'}{2}, \qquad z_4' = -6.$$

$A_4'(0, -4, -6)$.

6) Чтобы найти точку $A_4''$, симметричную точке $A_4$ относительно прямой $A_1A_3$, составим уравнение плоскости, проходящей через точку $A_4$ перпендикулярно прямой $A_1A_3$ по формуле (26). За нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \vec{a} = (0, -2, 4)$ берем направляющий вектор прямой $A_1A_3$, т.к. плоскость перпендикулярна прямой.

$$0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 3) + 4 \cdot (z - 0) = 0, \quad -2y + 16 + 4z = 0, \quad y = 2z - 8 = 0.$$

Уравнение прямой $A_1A_3$ составляем по формуле (34).

$$\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z+1}{3+1}, \qquad \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

Параметрические уравнения прямой $A_1A_3$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1. \end{cases}$$

Находим точку $N$ пересечения прямой $A_1A_3$ и плоскости:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1 \\ y - 2z - 8 = 0, \end{cases}$$

$$-2t + 1 - 2(4t - 1) - 8 = 0, \qquad -10t - 5 = 0, \qquad t = -\frac{1}{2},$$

$$x = 2, \quad y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2, \quad z = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3.$$

Итак, точка $N(2, 2, -3)$. Так как точка $A_4''$ симметрична точке $A_4$ относительно прямой $A_1A_3$, то точка $N$ является серединой отрезка $A_4A_4''$, тогда

$$x_N = \frac{x_4 + x_4''}{2}, \qquad 2 = \frac{0 + x_4''}{2}, \qquad x_4'' = 4,$$

$$y_N = \frac{y_4 + y_4''}{2}, \qquad 2 = \frac{8 + y_4''}{2}, \qquad y_4'' = -4,$$

$$z_N = \frac{z_4 + z_4''}{2}, \qquad -3 = \frac{0 + z_4''}{2}, \qquad z_4'' = -6, \quad \text{точка} \quad A_4''(4, -4, -6).$$

## Аналитическая геометрия на плоскости

Некоторые сведения из теории

### Прямая линия. Ее уравнение

$$Ax + By + C = 0 \; - \tag{38}$$

общее уравнение прямой.

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} \; - \tag{39}$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$, $\vec{a} = (m, n)$ – вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) = 0 \; - \tag{40}$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с перпендикулярным вектором $\vec{n} = (A, B)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \; - \tag{41}$$

уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \; - \tag{42}$$

уравнение прямой в «отрезках», где $a, b$ – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \; - \tag{43}$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\varphi$ и отрезком $b$ – отсекаемым на оси $Oy$.

$$y - y_\circ = k(x - x_\circ) \; - \tag{44}$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с угловым коэффициентом $k$.

$$d = \frac{|\,Ax_\circ + By_\circ + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \; - \tag{45}$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

$$\delta = \frac{Ax_\circ + By_\circ + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \; - \tag{45а}$$

отклонение точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} \ - \tag{46}$$

угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$.

$$k_1 = k_2 \ - \tag{47}$$

условие параллельности прямых.

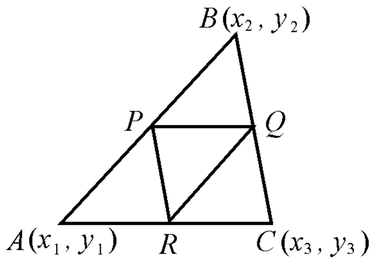
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \ - \tag{48}$$

условие перпендикулярности прямых.

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \ - \tag{49}$$

угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами $k_1$ и $k_2$.

Задача 6. Даны середины сторон треугольника $P(1,\ 2),\ Q(5,\ 1),\ R(-4,\ 3)$. Составить уравнения его сторон.




1 способ. Так как точки $P,\ Q,\ R$ являются серединами отрезков $AB,\ AC,\ BC$, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 6, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{array}{lll} x_1 = -8 & y_1 = 6 & \\ x_2 = 0 & y_2 = 0 & A(-8,\ 6), \quad B(10,\ -2), \quad C(0,\ 0). \\ x_3 = 10, & y_3 = -2, & \end{array}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение $AB$:

$$\frac{x + 8}{10 + 8} = \frac{y - 6}{-2 - 6}, \qquad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение $BC$:

$$\frac{x - 10}{0 - 10} = \frac{y + 2}{0 + 2}, \qquad x + 5y = 0.$$

Уравнение $AC$:

$$\frac{x + 8}{0 + 8} = \frac{y - 6}{0 - 6}, \qquad 3x + 4y = 0.$$

2 способ. Не определяя координат точек $A, B, C$, составим уравнение каждой из сторон треугольника $ABC$, как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника $PQR$ параллельно противолежащей стороне.

Уравнение $AB$: прямая $AB$ проходит через точку $P$ параллельно вектору $\overrightarrow{QR} = (-9, 4)$. Используем уравнение (39).

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y-2}{4} \quad \Rightarrow \quad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение $BC$: прямая $BC$ проходит через точку $Q$ параллельно вектору $\overrightarrow{PR} = (-5, 1)$.

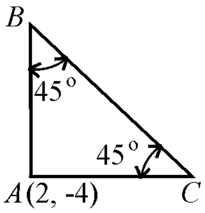
$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y+1}{1} \quad \Rightarrow \quad x + 5y = 0.$$

Уравнение $AC$: прямая $AC$ проходит через точку $R$ параллельно вектору $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$.

$$\frac{x+4}{4} = \frac{y-3}{-3} \quad \Rightarrow \quad 3x + 4y = 0.$$

Ответ: $4x + 9y - 22 = 0, \quad x + 5y = 0, \quad 3x + 4y = 0.$

Задача 7. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x + 3y - 5 = 0$ и вершину прямого угла $(2, -1)$.




$AB = BC$ (по условию), поэтому $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$, $k_{BC} = -\frac{2}{3}$ ( по формуле (46)). Уравнения катетов $AB$ и $BC$ составляем по формуле (44): $y + 1 = k(x-2)$.

$$tg45^\circ = \left| \frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} \right|, \tag{49}$$

$$\frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} = \pm 1.$$

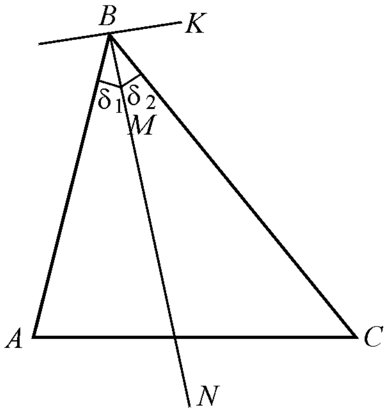
Решая эти уравнения, получим:

$$k = \frac{1}{5}, \quad y + 1 = \frac{1}{5}(x-2), \quad 5y + 5 = x - 2, \qquad x - 5y - 7 = 0.$$

$$k = -5, \quad y + 1 = -5(x-2), \quad y + 1 = -5x + 10, \quad 5x + y - 9 = 0.$$

Ответ: $x - 5y - 7 = 0, \qquad 5x + y - 9 = 0.$

Задача 8. В треугольнике с вершинами $A(3,-2)$, $B(-1,1)$, $C(5,-7)$ найти биссектрису внутреннего угла $\angle ABC$.




1) Составим уравнения сторон угла $\angle ABC$, воспользовавшись формулой (41).

Сторона $BA$:

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-1}{-2-1}, \qquad -3x-4y+1=0.$$

Сторона $BC$:

$$\frac{x+1}{5+1}=\frac{y-1}{-4-1}, \qquad -8x-6y-2=0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Приравняем расстояния от произвольной точки биссектрисы $M(x,y)$ до сторон угла $BA$ и $BC$, вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-8x-6y-2|}{\sqrt{8^2+6^2}}, \qquad \frac{|-3x-4y+1|}{5}=\frac{|-8x-6y-2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x-4y+1)=-8x-6y-2 \quad \text{и} \quad 2(-3x-4y+1)=-(-8x-6y-2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине $B$ треугольника $ABC$:

$$x-y+3=0 \qquad \text{(а)}$$

и

$$x+y=0. \qquad \text{(б)}$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника $BN$ отклонения вершин треугольника $A$ и $C$ имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла $BK$ – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек $A$ и $C$ от прямой (а) по формуле (40,а):

$$\delta_A=\frac{3-(-2)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}>0, \qquad \delta_C=\frac{5-(-7)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{2}}>0,$$

следовательно, уравнение (а) – это уравнение прямой $BK$. Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника $ABC$ при вершине $B$:

$$x+y=0.$$

Ответ: $x+y=0$.

## Линии второго порядка

Окружность. Уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (50)$$

определяет окружность радиуса $R$ с центром $C(a, b)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $a = b = 0$, то уравнение окружности примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{51}$$

Общее алгебраическое уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

есть уравнение окружности, если $A = C \neq 0, \quad B = 0,$ т.е.

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{52}$$

<u>Эллипс.</u>

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ - \tag{53}$$

уравнение эллипса (канонический вид).

$$b^2 = a^2 - c^2, \qquad a > b. \tag{54}$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1(-c, 0) \ \text{и} \ F_2(c, 0). \tag{55}$$

Начало координат $O -$ центр симметрии эллипса, а оси координат – оси симметрии эллипса. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ называются вершинами эллипса, $a$ и $b -$ большая и малая полуоси. Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1 \tag{56}$$

называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, т.к. выражается через отношение его полуосей

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{57}$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a = b$, т.е. $\varepsilon = 0$.

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \ - \tag{58}$$

уравнения директрис.

Если фокусы эллипса расположены на оси $Oy$, то уравнение эллипса имеет тот же вид (58), но $b > a$. Фокусы имеют координаты: $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$. Уравнения директрис

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}. \tag{59}$$

Гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ - \tag{60}$$

каноническое уравнение гиперболы.

$$b^2=c^2-a^2, \quad a<c. \tag{61}$$

Фокусы имеют координаты $F_1(-c,\,0)$ и $F_2(c,\,0)$. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка $O-$ центр симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a,\,0)$, $A_2(a,\,0)$, которые называются ее действительными вершинами, а величина $a-$ действительной полуосью гиперболы. Точки $B_1(0,\,-b)$ и $B_2(0,\,b)$ называются мнимыми вершинами, а $b-$ мнимая полуось. Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y=\pm\frac{b}{a}x \tag{62}$$

являются асимптотами гиперболы, т.е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon=\frac{c}{a}>1. \tag{63}$$

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,. \tag{64}$$

Если $a=b$, гипербола называется равносторонней. В этом случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}\ - \tag{65}$$

директрисы гиперболы.

Если уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ , \tag{66}$$

то асимптоты гиперболы:

$$x=\pm\frac{b}{a}y, \tag{67}$$

фокусы $F_1(0,\,-c)$, $F_2(0,\,c)$.

$$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}\ - \tag{68}$$

уравнения директрис.

Парабола.

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \qquad (p > 0), \tag{69}$$

где $p -$ расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$, координаты фокуса $F\left(\dfrac{p}{2},\,0\right)$. Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

В ряде случаев рассматривают параболы:

а) $y^2 = -2px,\ \ F\left(-\dfrac{p}{2},\,0\right) -$фокус, $x = \dfrac{p}{2} -$уравнение директрисы; (70)

б) $x^2 = 2py,\ \ F\left(0,\,\dfrac{p}{2}\right) -$фокус, $y = -\dfrac{p}{2} -$ уравнение директрисы; (71)

в) $x^2 = -2py,\ \ F\left(0,-\dfrac{p}{2}\right) -$фокус, $y = \dfrac{p}{2} -$уравнение директрисы. (72)

Для всех случаев $p > 0$.

Задача 9. Среди прямых параллельных прямой $2x + y = 0$, выделить касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Уравнение всякой прямой, параллельной данной, можно записать в виде

$$2x + y + c = 0.$$

Касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку, поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно иметь только один ответ.

Из уравнения прямой $y = -2x - c$.

$$\begin{cases} y = -2x - c \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \quad x^2 + (-2x - c)^2 = 1, \quad 5x^2 + 4cx + c^2 - 1 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда дискриминант равен нулю: $(4c)^2 - 4\cdot 5\cdot\left(c^2 - 1\right) = 0$, откуда $c = \pm\sqrt{5}$.

Итак, искомые касательные имеют уравнения

$$2x + y + \sqrt{5} = 0, \qquad 2x + y - \sqrt{5} = 0.$$

Задача 10. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

Решение. Делим на 225, получаем

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отсюда следует по формуле (53), что $a = 5,\ b = 3$. Из формулы (54):

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, \quad c = \pm 4.$$

По формуле (55): $F_1(-4,\ 0), \quad F_2(4,\ 0).$

Эксцентриситет (56): $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}.$

Уравнения директрис согласно (58): $x = \pm \dfrac{5}{4/5} = \pm \dfrac{25}{4}.$

Ответ: $a = 5,\ b = 3$; $F_1(-4,\ 0), \quad F_2(4,\ 0)$; $\varepsilon = \dfrac{4}{5}$; $x = \pm \dfrac{25}{4}.$

Задача 11. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая полуось $2\sqrt{6}$, а расстояние между фокусами $F_1F_2 = 8$.

Решение. $b = 2\sqrt{6}, \quad F_1F_2 = 2c = 8, \quad c = 4.$

По формуле (54): $a^2 = b^2 + c^2, \ a^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 + 4^2 = 40, \ a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$

Уравнение эллипса согласно (53): $\dfrac{x^2}{40} + \dfrac{y^2}{24} = 1.$

Задача 12. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $4y \pm 3x = 0$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать ее каноническое уравнение.

Решение. Уравнения асимптот $y = \pm \dfrac{3}{4}x$, согласно формуле (62): $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4}$. Кроме того $F_1F_2 = 2c = 20, \ c = 10$. По формуле (61): $c^2 = a^2 + b^2$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4} \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $a = 8, \ b = 6$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1.$

Задача 13. Дана гипербола $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{1} = -1$. Найти координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

Решение. Фокусы данной гиперболы расположены на оси $Oy$.

$$a = 1, \ b = 3, \ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}. \qquad (61)$$

Значит фокусы имеют координаты $F_1\left(0, -\sqrt{10}\right), \quad F_2\left(0, \sqrt{10}\right)$. Вершины $A_1(0, -1), \ A_2(0, 1), \ B_1(-3, 0), \ B_2(3, 0)$. Эксцентриситет по формуле (64):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}, \quad \varepsilon = \sqrt{10}.$$

Уравнения асимптот: $x = \pm \frac{b}{a} y \;\; \Rightarrow \;\; x = \pm 3y.$

Уравнения директрис: $y = \pm \frac{b}{c} \;\; \Rightarrow \;\; y = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}.$

Задача 14. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(1, -2)$ и симметрична относительно оси $Oy$. Написать ее уравнение. Найти фокус и директрису.

Решение. Уравнение искомой параболы по формуле (72) имеет вид $x^2 = -2py$. Точка $A(1, -2)$ лежит на параболе. Подставляем координаты точки $A$ в уравнение: $1 = -2p \cdot (-2) \;\; \Rightarrow \;\; p = \frac{1}{4}$. Следовательно, искомое уравнение будет $x^2 = -\frac{1}{2} y$ или $y = -2x^2$.

Фоку параболы: $F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$. Уравнение директрисы согласно (72): $y = \frac{1}{8}$.

Задача 15. На параболе $y^2 = 4x$ найти точки, расстояния которых от директрисы равно 5.

Решение. Уравнение директрисы данной параболы $x = -\frac{p}{2}$, $2p = 4,\ p = 2,\ x = -1.$ Тогда расстояние от оси $Oy$ до искомой $\ell = 4 - \frac{p}{2} = 5 - 1 = 4$ точки и это расстояние определит координату $x$ данной точки, т.е. $x = 4$. Координату $y$ найдем из уравнения параболы:

$y^2 = 4x, \quad y^2 = 4 \cdot 4 = 16, \quad y = \pm 4.$

Итак, $M_1(4,4),\ M_2(4,-4)$.

## Введение в анализ
### 1. Пределы

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \ldots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число $u_n$. Тогда говорят, что определена последовательность чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots$ или, короче, последовательность $\{u_n\}$. Отдельные числа $u_n$ называются ее элементами.

Определение 1.1. Число $a$ называется пределом последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется зависящее от него натуральное число $N$ такое, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство: $|u_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Определение 1.2. Говорят, что функция $f(x)$ стремится к $A$ $(f(x) \to A)$ при стремлении к $a$ $(x \to a)$, где $A$ и $a$ – числа, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta(M)$, где $M$ – произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.

1. Если существуют конечные $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

$$а)\ \lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x)$$

$$б)\ \lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$в)\ \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \qquad \left(\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0\right).$$

2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0,\quad \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = 0$ ($A$ – конечно), то

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty,$$

если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A,\quad \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$ ($A$ – конечно), то

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взять соответственно две последовательности: $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения. Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; $0^0$; $1^\infty$; $\infty^0$.

Пример 1.1. При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно $x$ при $x\to\infty$ или $n$ при $n\to\infty$ для последовательностей (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$) оба члена соотношения полезно предварительно разделить на $x^m$ или, соответственно, $n^m$ где $m$ – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-1}{5x^4+3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}}=\frac{3+0+0}{5+0+0}=\frac{3}{5},\quad \text{старшая степень } m=4,$$

делится на $x^4$.

$$б)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{9n^4-2n^3+2}+4\sqrt[3]{8n^3+21}}{\sqrt[4]{n^4-3}+2\sqrt{4n^4+9n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{n^4\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+4\cdot\sqrt[3]{n^3\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^4\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{n^4\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2\cdot\sqrt{\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+4n\cdot\sqrt[3]{\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{n\cdot\sqrt[4]{\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2n^2\cdot\sqrt{\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\sqrt{\left(9-\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^4}\right)}+\dfrac{4}{n}\cdot\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{21}{n^3}\right)}}{\dfrac{1}{n}\cdot\sqrt[4]{\left(1-\dfrac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{\left(4+\dfrac{9}{n^3}\right)}} = \frac{3\cdot\sqrt{9-0+0}+0\cdot\sqrt[3]{8+0}}{0\cdot\sqrt[4]{1-0}+2\cdot\sqrt{4+0}} = \frac{9}{4}$$

(неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$, старшая степень $m=2,$ делится на $n^2$).

*в*) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x+7}\right]=\left[\infty\cdot(\infty-\infty)\right]=$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x-7}\right]\cdot\left[\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}\right]}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\left(x^2+4x+5-x^2-4x+7\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\cdot 12}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}}\left(\frac{:x}{:x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{12\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{x^2}}} = \frac{12\cdot 3}{1+1} = 18.$$

<u>Пример 1.2.</u> Если $P(x)$ и $Q(x)$ − целые многочлены $x,$ $P(a)\neq 0$ или $Q(a)\neq 0,$ то предел рациональной дроби $P/Q$ при $x\to a$ находится непосредственно. Если же $P(a)=Q(a)=0$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$), то дробь $P/Q$ рекомендуется сократить один или несколько раз на $(x-a)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)\left(x^3+x^2+x-3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1+2}{1+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Пример 1.3. Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность $\frac{0}{0}$).

$$a)\ \lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt[3]{5-x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{9-5-x}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{1}{3+\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{1-5+x}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{x-4}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}(1+1+1)=-\frac{1}{2}.$$

$$б)\ \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(x^2-7x-8\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\frac{1}{9\cdot 12}=\frac{1}{108}.$$

Пример 1.4. При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

следствием которого являются пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{arcsin\,x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{arxtgx}{x}=1.$$

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left[ctg^2 3x - ctg^2 5x\right]\cdot\frac{tg^2 4x\cdot arcsin^2 x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{cos^2 3x}{sin^2 3x}-\frac{cos^2 5x}{sin^2 5x}\right]\cdot\frac{\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2\cdot 16x^2\cdot\left(\frac{arcsin\,x}{x}\right)^2\cdot x^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}16x^2\cdot\left[\frac{cos^2 3x}{sin^2 3x}-\frac{cos^2 5x}{sin^2 5x}\right]\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{arcsin\,x}{x}\right)^2=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{cos^2 3x\cdot 16x^2}{\left(\frac{sin\,3x}{3x}\right)^2\cdot 9x^2}-\frac{cos^2 5x\cdot 16x^2}{\left(\frac{sin\,5x}{5x}\right)^2\cdot 25x^2}\right]\cdot 1^2\cdot 1^2=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{16}{9}cos\,3x-\frac{16}{25}cos^2 5x\right]=\frac{16}{9}\cdot 1-\frac{16}{25}\cdot 1=\frac{256}{225}.$$

$$б)\ \lim_{x\to 0}\frac{tg^2 2x\cdot\sqrt{1-cos\,4x}}{x^2\cdot arcsin\,3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2\cdot 4x^2\cdot\sqrt{2sin^2 2x}}{x^2\cdot\left(\frac{arcsin\,3x}{3x}\right)\cdot 3x}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin\,3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}\,sin\,2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}\left(\frac{sin\,2x}{2x}\right)\cdot 2x}{3x}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

<u>Пример 1.5.</u> При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда $x\to a$ и $a\neq 0,$ рекомендуется предварительно провести замену $x-a=y.$

$$\lim_{x\to 3}\frac{cos\frac{\pi\cdot x}{6}}{x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=(x-3=y,\ y\to 0 \text{ при } x\to 3)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{cos\frac{\pi\cdot(y+3)}{6}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot y}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\pi}{6}\cdot sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}}=$$

$$= -\frac{\pi}{6}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}} = -\frac{\pi}{6}\cdot 1 = -\frac{\pi}{6}.$$

<u>Пример 1.6.</u> При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = c$ необходимо иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$, то $c = A^B$ $(A > 0)$;

2) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty$, то вопрос о нахождении предела $c$ решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, то следует воспользоваться «вторым замечательным пределом»: $\lim\limits_{x\to a}\left(1+g(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}} = e$, где $g(x)\to 0$ при $x\to a$ и $e = 2{,}718\ldots$ .

$$а)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}} = 0, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1} = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

$$б)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{x+3} = 4^3 = 64, \text{ т.к. } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\cdot 4 = 4,$$

$$\lim_{x\to 0}(x+3) = 3.$$

$$в)\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}\cdot\frac{7}{3x-6}\cdot 2x} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x}{3x-6}} = e^{14/3}.$$

$$г)\quad \lim_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{3}{x-3}} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to 3}\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{3}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \left\{ \left[ 1 + (6 - 2x) \right]^{\frac{1}{6-2x}} \right\}^{\frac{(6-2x)\cdot 3}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x \to 3} \frac{18-6x}{x-3}} = e^{-6}.$$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

<u>Определение 2.1.</u> Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0,$ то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в окрестности точки $x = a$ (при $x \to a$).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть также бесконечно малая при $x \to a$.

<u>Определение 2.2.</u> Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$ и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c,$ где $c$ – некоторое число, отличное от нуля, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$, если $c = 0,$ то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$.

Бесконечно малая $f(x)$ называется бесконечно малой порядка $n$ по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g^n(x)} = c, \qquad 0 < |c| < +\infty.$$

<u>Пример 2.1.</u> При $x \to 0$ определить порядок малости функции $tgx - sinx$ относительно $x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx - sinx}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx\left(\frac{1}{cosx} - 1\right)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx(1 - cosx)}{x^n cosx} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 sinx \cdot sin^2 \frac{x}{2}}{x^n cosx} = \lim_{x \to 0} \frac{4 sin^3 \frac{x}{2} \cdot cos \frac{x}{2}}{x^n cosx} = 4 \lim_{x \to 0} \frac{sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{cos \frac{x}{2}}{cosx} =$$

$$= 4 \lim_{x \to 0} \frac{sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot 1 = 4 \lim_{x \to 0} \frac{sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot 2^n} = \frac{4}{2^n} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n}.$$

Этот предел будет равен константе $c \neq 0$ при $n = 3$, следовательно, функция $tgx - sinx$ имеет порядок малости $n = 3$ относительно $x$ при $x \to 0$.

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

<u>Пример 2.2.</u> Определить порядок малости относительно $x$ при $x \to 0$ суммы $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$ .

Слагаемое $\sqrt[3]{x^2}$ имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно $x$, а слагаемое $\sqrt{x^3}$ – порядок $\frac{3}{2}$, следовательно, сумма имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно $x$ при $x \to 0$.

<u>Определение 2.3.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$: $f(x) \sim g(x)$.

Например, при $x \to 0$ будем иметь:

$$sinx \sim x, \quad tgx \sim x, \quad arcsinx \sim x, arctgx \sim x,$$

$$ln(1+x) \sim x, \quad cosx \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot ln\, a \; (a \neq 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

<u>Пример 2.3.</u>

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{3^{4tg^2x} - 5^{3arcsin^2 3x}}{3sin^2 4x + 7arctg^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3^{4tg^2x} - 1\right) - \left(5^{3arcsin^2 x} - 1\right)}{3\cdot(4x)^2 + 7\cdot(x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4tg^2x \cdot ln3 - 3arcsin^2 3x \cdot ln5}{55x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4\,ln3\cdot x^2 - 3\,ln5\cdot(3x)^2}{55x^2} =$$

$$= \frac{4\,ln3 - 27\,ln5}{55}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4arcsin2x}{3tg8x}\right)^{\frac{ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot 2x}{3\cdot 8x}\right)^{\frac{3x}{x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

*в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(3-5x)-ln(3+7x)}{2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left[3\left(1-\dfrac{5}{3}x\right)\right]-ln\left[3\left(1+\dfrac{7}{3}x\right)\right]}{2x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ln\,3+ln\left(1-\dfrac{5}{3}x\right)-ln\,3-ln\left(1+\dfrac{7}{3}x\right)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{5}{3}x-\dfrac{7}{3}x}{2x}=-2.$$

Определение 2.4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$.

Подобно тому, как .то сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

Пример 2.4. Пусть $x\to\infty$. Определить порядок бесконечно большой $f(x)=\dfrac{x^5}{x+2}$ по сравнению с $x$.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^5}{x+2}:x^n\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^n(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}+x^n\cdot 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}}=1$$

при $n=4$.

Определение 2.5.

1) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x\to\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{c\cdot x^{\alpha}}=1$, где $c$ и $\alpha$ – константы, тогда функция $y=cx^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x\to\infty$.

2) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x\to a$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{c\cdot(x-a)^{\alpha}}=1$, где $c$ и $\alpha$ – константы, тогда функция $y=c(x-a)^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x\to a$.

Пример 2.5.

*а*) Найти асимптотику (асимптотическое представление) функции $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to\infty$.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\sim\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot x^{1/2}},$$

следовательно, асимптотикой функции $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to\infty$ является функция $\frac{1}{2}x^{-1/2}$; $c=\frac{1}{2}$; $\alpha=-\frac{1}{2}$.

*б*) Найти асимптотику функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x\to 1$.

При $x\to 1$ функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ является бесконечно большой: $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{3(1-x)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}(1-x)^{1/3}}$.

Асимптотикой в данном случае является функция $y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(1-x)^{-1/3}$.

*в*) Найти асимптотику функции $f(x)=x^3-3x+2$ при $x\to 1$.

В данном случае при $x\to 1$ функция $f(x)$ является бесконечно малой; $f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\sim 3(x-1)^2$.

Получаем асимптотику $y=3(x-1)^2$; $c=3$; $\alpha=2$.

3. Непрерывность функции.

<u>Определение 3.1.</u> Если $x<a$ и $x\to a,$ то условно пишут $x\to a-0,$ аналогично, если $x>a$ $x\to a,$ то $x\to a+0.$ Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ называют соответственно пределом слева функции $f(x)$ в точке $a$ и пределом справа функции $f(x)$ в точке $a$ (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство: $f(a-0)=f(a+0)$.

<u>Определение 3.2.</u> Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $a$, если

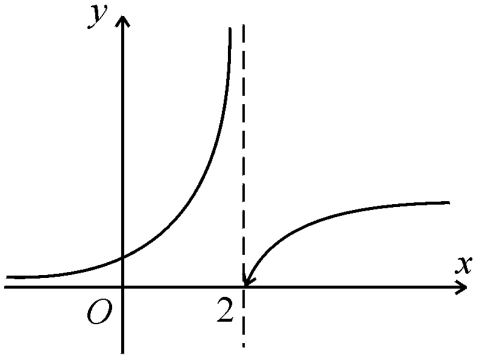
1) она определена в этой точке;
2) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются точками разрыва.

Пример 3.1.

*а*) Найти точки разрыва функции $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$, пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.

Функция $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ имеет разрыв в точке $x = 2$, т.к. она в этой точке не определена. При этом:




$$\lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

*б*) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y = \frac{2^{\frac{1}{x+3}} + 4x - 8}{2^{\frac{1}{x+3}} + 4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка $x = -3$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to -3-0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = \frac{2^{-\infty} - 12 - 8}{2^{-\infty} + 4} = \frac{0 - 20}{0 + 4} = -5;$$

$$\lim_{x\to -3+0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = 1,$$ т.к. при $x \to -3 + 0$ имеем:

$$2^{1/(x+3)} + 4x - 8 \sim 2^{1/(x+3)}; \qquad 2^{1/(x+3)} + 4 \sim 2^{1/(x+3)}.$$

Величина скачка $\Delta = 1 - (-5) = 6.$

*в*) Найти точки разрыва, величину скачка $\Delta$ и построить график функции $y = \begin{cases} -3x, & x \le 0 \\ 4\sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \dfrac{\pi}{2} < x. \end{cases}$

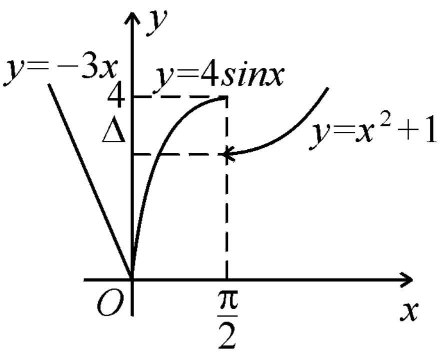
Данная функция непрерывна для $x \in (-\infty;\ 0) \cup \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ +\infty\right)$.

Исследуем только точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$, т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}(-3x) = 0; \qquad \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}(4\sin x) = 0;$$

$f(0) = -3x\Big|_{x=0} = 0,$ следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(4\sin x) = 4; \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sin\frac{\pi}{2} = 4;$$




$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\left(x^2+1\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1 = 3{,}467,$$

следовательно, точка $x = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва. Величина скачка

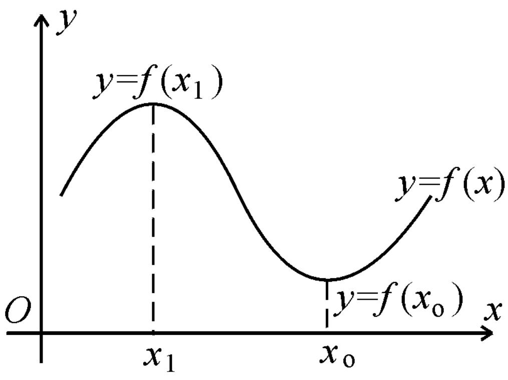
$$\Delta = 4 - \left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right) = 3 - \frac{\pi^2}{4} \approx 0{,}533.$$

## Дифференциальное исчисление функции одной переменной

## 1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек $x_1,\ x_2$, принадлежащих данному интервале (отрезку), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ при $a < x < b,$ то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a;\ b]$.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками $x$ (где $f'(x)=0$ или же $f'(x)$ не существует).



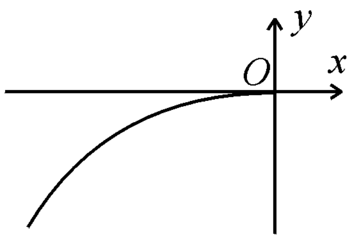

Если существует такая двусторонняя окрестность точки $x_o$, что для всякой точки $x \neq x_o$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_o)$, то точка $x_o$ называется точкой минимума функции $y=f(x)$, а число $f(x_o)$ – минимумом функции $y=f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_1$ некоторой окрестности точки $x_1$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то $x_1$ называется точкой максимума функции $y=f(x)$, а $f(x_1)$ – максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции – экстремумом функции. Если $x_o$ – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_o)=0$ или же $f'(x_o)$ не существует (*необходимое условие существования экстремума*). Обратное утверждение не верно: точки, в которых $f'(x_o)=0$ или $f'(x_o)$ не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$.

*Достаточный признак существования* и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ следующий: если существует такая окрестность $(x_o-\delta, x_o+\delta)$ критической точки $x_o$, что $f'(x)>0$ при $x_o-\delta < x < x_o$ и $f'(x)<0$ при $x_o < x < x_o+\delta$, то $x_o$ – точка максимума функции $f(x)$; если же $f'(x)<0$ при $x_o-\delta < x < x_o$ и $f'(x)>0$ при $x_o < x < x_o+\delta$, то $x_o$ – точка минимума функции $f(x)$. Если, наконец, найдется такое положительное число $\delta$, что $f'(x)$ сохраняет неизменный знак при $x_o-\delta < x < x_o+\delta$, то точка $x_o$ не является точкой экстремума функции $f(x)$.

*Наименьшее* (*наибольшее*) *значение* непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a; b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a; b]$.

<u>Пример 1.1.</u> Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$y = x \cdot \sqrt{-5x}$.




Область существования: $-5x \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x \le 0$.

Находим критические точки:

$$y' = \sqrt{-5x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{-5x}} \cdot (-5) = \sqrt{-5x} - \frac{5x}{2\sqrt{-5x}} =$$

$$= \frac{-10x - 5x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{-15x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3 \cdot (-5x)}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{-5x} \ge 0.$$

При $x \le 0$ функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке $x = 0$: $y(0) = 0$.

<u>Пример 1.2.</u> Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = \sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}.$$

Область существования: $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Находим критические точки:

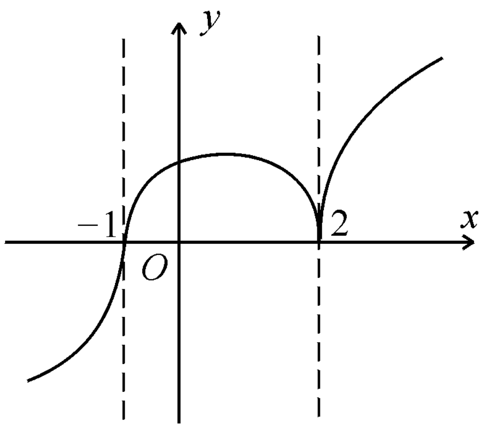
$$y' = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)(x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}},$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$,

$y'$ не существует $\Rightarrow x_2 = -1;\ x_3 = 2$. Получили три критические точки.

| $x$ | $(-\infty;\ -1)$ | $-1$ | $(-1;\ 0)$ | $0$ | $(0;\ 2)$ | $2$ | $(2;\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | не сущ. | + | 0 | – | не сущ. | + |
| $y$ | ↗ | | ↗ | max | ↘ | min | ↗ |

$$\lim_{x\to 2+0} y'(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = +\infty; \quad \lim_{x\to 2-0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = -\infty.$$




$$\lim_{x\to 1-0} y'(x) = \lim_{x\to 1+0} y'(x) = +\infty.$$

Так как $y'(x) = k,$ где $k -$ угловой коэффициент касательной, то при $x = -1$ и $x = 2$ касательная к графику функции перпендикулярна оси $Ox$.

$$y(-1) = 0; \quad y(0) = \sqrt[3]{4}; \quad y(2) = 0.$$

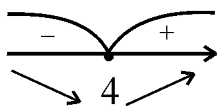
Пример 1.3. Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом $256$ м$^3$ такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть $a -$ сторона квадрата основания, $h -$ глубина бассейна;

$$a^2 h = 256 \;\Rightarrow\; a^2 = \frac{256}{h}, \quad a = \frac{16}{\sqrt{h}}, \quad h > 0;$$

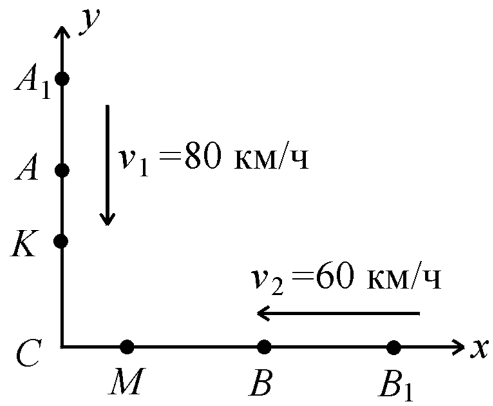
$$S = S_{бок} + S_{дна} = 4ah + a^2 = 4\cdot\frac{16}{\sqrt{h}}\cdot h + \frac{256}{h} = 64\sqrt{h} + \frac{256}{\sqrt{h}} = F(h);$$

$$F'(h) = \frac{64}{2\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32}{\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32h^{3/2} - 256}{h^2} = \frac{32}{h^2}\left(h^{3/2} - 8\right);$$




$F'(h) = 0 \;\Rightarrow\; h^{3/2} = 8; \quad h = 4.$ При $h = 4$ величина $F(h) = S$ будет наименьшей.

Пример 1.4. Две прямые железные дороги $AA_1$ и $BB_1$ перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте $C,$ причем $AC = 800$ км и $BC = 700$ км. Из пунктов $A$ и $B$ по направлению к $C$ одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно $80$ км/ч и $60$ км/ч. Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим ?




Отметим положение поездов в момент $t > 0$ точками $K$ и $M$.

$AK = 80t; \quad BM = 60t;$

$CK = AC - AK = 800 - 80t;$

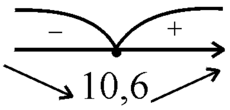
$CM = CB - BM = 700 - 60t;$

$(KM)^2 = (CK)^2 + (CM)^2 =$

$= (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2;$ $KM$ минимально, если минимальна величина

$$(KM)^2 = F(t) = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2;$$

$$F(t) = 2(800 - 80t)\cdot(-80) + 2(700 - 60t)\cdot(-60) =$$
$$= -128000 + 12800t - 84000t + 7200t = 20000t - 212000 = 0; \quad t = 10{,}6;$$




$t = 10{,}6$ – точка минимума функции $F(t)$. Через 10,6 часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.

## 2. АСИМПТОТЫ

Если точка $(x;\ y)$ непрерывно перемещается по кривой $y = f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

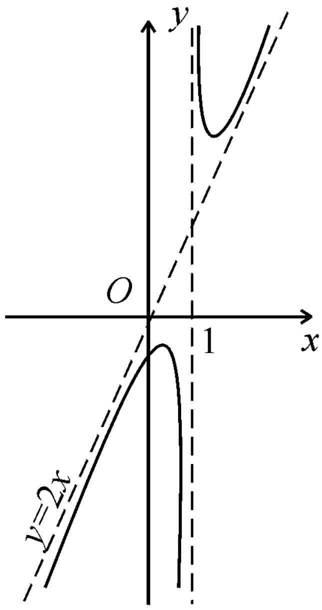
Если существует число $a$ такое, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - k_1 x\right] = b_1$, то прямая $y = k_1 x + b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_2$ и $\lim\limits_{x\to-2} \left[f(x) - k_2 x\right] = b_1$, то прямая $y = k_2 x + b_2$ будет асимптотой (*левая наклонная асимптота*).

График функции $y = f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

Пример 2.1. Найти асимптоты и построить график функции
$$y = 2x + \frac{3cos(x-1)}{x-1}.$$
Область существования: $x \neq 1$.
Ищем вертикальные асимптоты.
Функция имеет разрыв в точке $x = 1$, т.к. в ней функция не определена.
$$\lim_{x\to1-0}\left(2x + \frac{3cos(x-1)}{x-1}\right) = 2 + \frac{3\cdot1}{-0} = 2 - \infty = -\infty;$$
$$\lim_{x\to1+0}\left(2x + \frac{3cos(x-1)}{x-1}\right) = 2 + \frac{3\cdot1}{+0} = 2 + \infty = +\infty;$$
следовательно, $x = 1$ – вертикальная асимптота.
Ищем наклонные асимптоты в виде $y = kx + b.$




$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\left(2x+\frac{3cos(x-1)}{x-1}\right) =$$

$$= 2+0=2; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[2x+\frac{3cos(x-1)}{x-1}-2x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3cos(x-1)}{x-1} = 0.$$

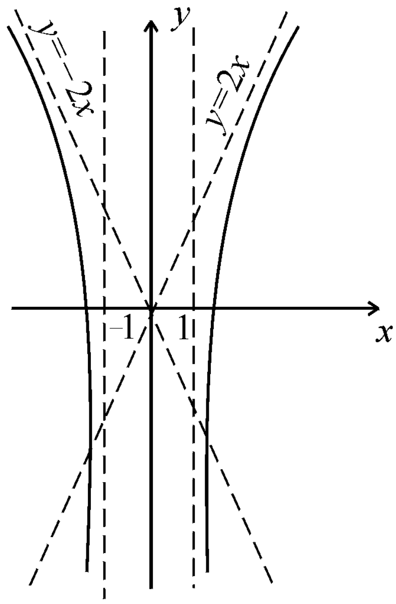
Следовательно, при $x\to\pm\infty$ существует асимптота $y=2x$.

<u>Пример 2.2.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$.

Область существования: $x^2-1>0; \quad x^2>1; \quad x>1$ и $x<-1$.

$$y=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}; \quad y(-x)=\frac{2(-x)^2-9}{\sqrt{(-x)^2-1}}=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}} \quad\Rightarrow\quad y(x)=y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при $x>1$, а затем отразить его симметрично относительно оси $Oy$.




$$\lim_{x\to1+0}\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2-9}{+0}=-\infty \quad\Rightarrow\quad x=1-$$

вертикальная асимптота при $x\to1+0$.
Пусть $x\to1+\infty$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x^2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{9}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=2.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9-2x\cdot\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2-9\right)^2-4x^2\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(2x^2-9+2x\cdot\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-32x^2+81}{x^3\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(2-\frac{9}{x^2}+2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = 0.$$

При $x \to +\infty$ получаем асимптоту $y = 2x$. График данной функции пересекает ось $Ox$ при $2x^2 - 9 = 0$, т.е. в точках $x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Пример 2.3. Найти асимптоты и построить график функции

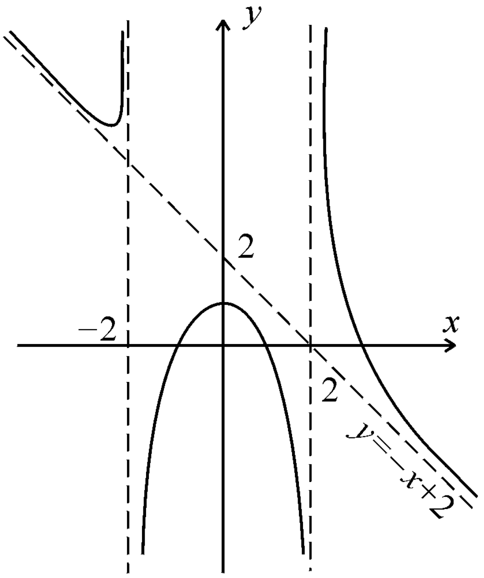
$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}.$$

Область существования: $4 - x^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2$ и $x \neq -2$.

В точках $x_1 = -2$ и $x_2 = +2$ функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x\to-2-0} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{-8-8+6+2}{-0} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-2+0} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{-8-8+6+2}{+0} = -\infty;$$




$x = -2$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to2-0} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{8-8-6+2}{+0} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to2-0} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2} = \frac{8-8-6+2}{-0} = +\infty;$$

$x = 2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-2x^2-3x+2}{x\left(4-x^2\right)} =$$

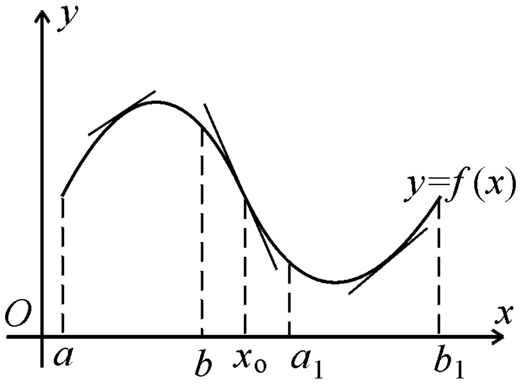
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2}-1} = \frac{1}{-1} = -1; \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2+x+2}{4-x^2} = 2.$$

При $x \to \pm\infty$ получаем асимптоту $y = -x + 2$.

## 3. НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ *вогнут вниз* на интервале $(a;\ b)$ (*вогнут вверх* на интервале $(a_1;\ b_1)$), если при $a < x < b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при $a_1 < x < b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала $(a;\ b)$ (или интервала $(a_1;\ b_1)$). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y = f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства $f'(x) < 0 \quad (f'(x) > 0)$.




Точка $(x_o, f(x_o))$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба.* Для абсциссы точки перегиба $x_o$ графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_o) = 0$ или $f''(x_o)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками 2-го рода.* Критическая точка 2-го рода $x_o$ является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_o - \delta < x < x_o$ и $x_o < x < x_o + \delta$, где $\delta -$ некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

<u>Пример.</u> Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

Имеем: $y' = -2xe^{-x^2}$; $\quad y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают всю область существования функции $(-\infty;\ +\infty)$ на три интервала.

| $x$ | $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | + | 0 | – | 0 | – |
| $y$ | $\cup$ | перегиб | $\cap$ | перегиб | $\cup$ |

Получили: кривая вогнута вверх при $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$ и вогнута вверх при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба.

## 4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область существования этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области существования. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются): четность, периодичность и т.д.

Далее нужно найти точки разрыва, асимптоты, точки экстремума функции, точки перегиба и т.д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции.

Пример 4.1. Провести полное исследование и построить график функции $y = x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Область существования: $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

Так как функция определена при всех $x$, и у нее нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} = +\infty,$ следовательно, наклонных асимптот также нет.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left[x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}\right] = (x+2)^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{-1/3} = \frac{3(x+2)+2x}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

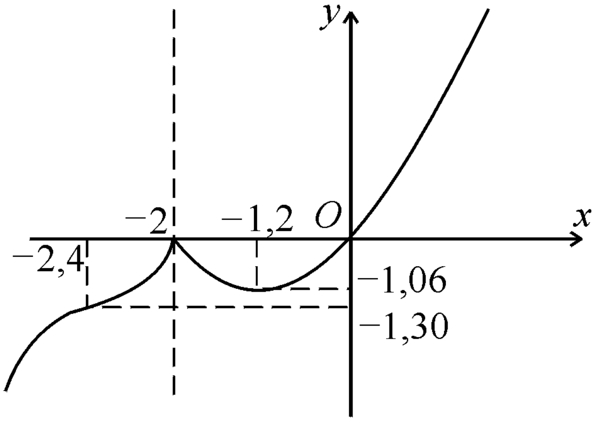
$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 6 = 0, \quad x = -1{,}2;$

$y'$ не существует $\quad \Rightarrow \quad x + 2 = 0, \quad x = -2.$

| $x$ | $(-\infty;\ -2)$ | $-2$ | $(-2;\ -1{,}2)$ | $-1{,}2$ | $(-1{,}2;\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | не сущ. | – | 0 | + |
| | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | max | | min | |

$y_{max} = y(-2) = 0$ (касательная в этой точке перпендикулярна оси $Ox$).




$y_{min} = y(-1{,}2) = -1{,}2 \cdot \sqrt[3]{0{,}64} \approx -1{,}06$ (касательная в этой точке параллельна оси $Ox$).

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = \left[ \frac{5x+6}{(x+2)^{2/3}} \right]' =$$

$$= \frac{5 \cdot \sqrt[3]{x+2} - (5x+6) \cdot \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{15(x+2) - (5x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{10x+24}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

$y'' = 0$ при $x = -2{,}4$; $y''$ не существует при $x = -2$.

| $x$ | $(-\infty;\ -2{,}4)$ | $-2{,}4$ | $(-2{,}4;\ -2)$ | $-2$ | $(-2;\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | 0 | $+$ | не сущест. | $+$ |
| $y$ | $\cap$ | перегиб | $\cup$ | | $\cup$ |

$y_{перегиба} = y(-2{,}4) = -2{,}4 \cdot \sqrt[3]{(-2{,}4)^2} \approx -1{,}30$; $y(0) = 0$.

Пример 4.2. Провести полное исследование и построить график функции $y = \left( \dfrac{2x+1}{x+2} \right)^2$.

Область существования: $x \neq -2$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

$x = -2$ – точка разрыва, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \to 2-0} \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left( \frac{4+1}{-0} \right)^2 = +\infty; \qquad \lim_{x \to 2+0} \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left( \frac{4+1}{+0} \right)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x = 2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = 0;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[ f(x) - kx \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = 4.$$

При $x \to \pm\infty$ получаем асимптоту $y = 4$.

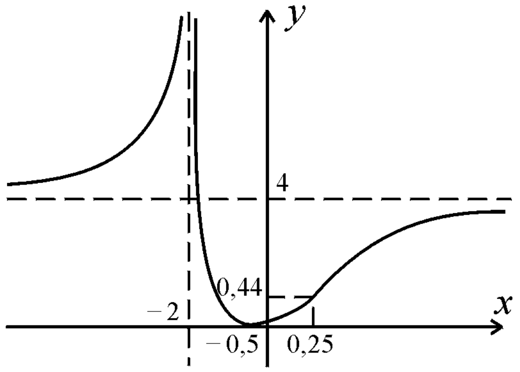
Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = 2 \cdot \left( \frac{2x+1}{x+2} \right) \cdot \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{6(2x+1)}{(x+2)^2};$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 1 = 0, \quad x = -0{,}5;$

$y'$ не существует $\quad \Rightarrow \quad x = -2.$

| $x$ | $(-\infty;\ -2)$ | $(-2;\ -0{,}5)$ | $-0{,}5$ | $(-0{,}5;\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | – | 0 | + |
| | ↗ | ↘ | | ↗ |
| $y$ | | | min | |




$y_{min} = y(-0{,}5) = 0.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = 6 \cdot \frac{2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 \cdot (2x+1)}{(x+2)^6} =$$

$$= 6 \cdot \frac{2(x+2) - 3(2x+1)}{(x+2)^4} = \frac{6(1-4x)}{(x+2)^4};$$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 4x = 0; \quad x = 0{,}25;$

$y''$ не существует $\quad \Rightarrow \quad x = -2.$

| $x$ | | | 0,25 | |
|---|---|---|---|---|

| | $(-\infty;\ -2)$ | $(-2;\ \ 0{,}25)$ | | $(0{,}25;\ \ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y$ | $\cup$ | $\cup$ | перегиб | $\cap$ |

$$y_{перегиба} = y(0{,}25) = \left(\frac{1{,}5}{2{,}25}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

<u>Пример 4.3.</u> Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{e^{x-3}}{x-3}$.

Область существования: $x - 3 \neq 0; \quad x \neq 3.$

$y(x) \neq y(-x)$ $-$ функция общего вида.

В точке $x = 3$ функция терпит разрыв, т.к. в ней она не определена.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 3-0} \frac{e^{x-3}}{x-3} = -\infty, \\ &\lim_{x\to 3+0} \frac{e^{x-3}}{x-3} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x = 3 \ - \text{ вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

1) $x \to +\infty,$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{\left(x^2-3x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{2x-3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{(2x-3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{2} = +\infty, \text{ следовательно, при } x \to +\infty$$

наклонных асимптот нет.

2) $x \to -\infty,$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2-3x} = \frac{0}{+\infty} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x-3} = 0,$$

при $x \to -\infty$ получаем асимптоту $y = 0.$

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left(\frac{e^{x-3}}{x-3}\right)' = \frac{e^{x-3}\cdot(x-3) - e^{x-3}}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-3-1}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2},$$

$y' = 0 \quad\Rightarrow\quad x-4=0,\; x=4;$ $\qquad y'$ не существует $\quad\Rightarrow\quad x=3.$

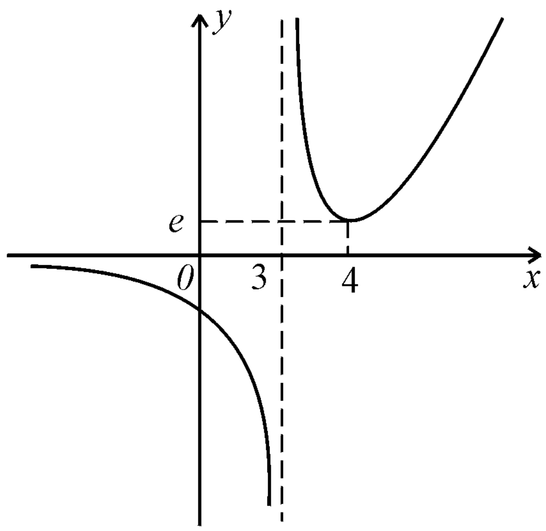
| $x$ | $(-\infty;\ 3)$ | $(3;\ \ 4)$ | $4$ | $(4;\ \ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\searrow$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

$y_{min} = y(4) = e \approx 2{,}72.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = e^{x-3}\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2} + e^{x-3}\cdot\frac{(x-3)^2 - (x-4)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{e^{x-3}}{(x-3)^2}\cdot\frac{x^2-7x+12-x+5}{x-3} = \frac{e^{x-3}\cdot\left(x^2-8x+17\right)}{(x-3)^3}; \qquad y'' \neq 0;$$




$y''$ не существует $\quad\Rightarrow\quad x=3.$

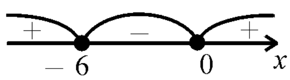
| $x$ | $(-\infty;\ 3)$ | $(3;\ \ +\infty)$ |
|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | $\cap$ | $\cup$ |

$$y(0) = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \approx -\!-{,}02.$$

Пример 4.4. Провести полное исследование и построить график функции $y = ln\dfrac{x+6}{x} - 1.$

Область существования: $\dfrac{x+6}{x} > 0.$

$x > 0,\;\; x < -6.$




Функция общего вида.

$$\lim_{x\to -6-0}\left[\ln\frac{x+6}{x}-1\right]=-\infty \quad\Rightarrow\quad x=-6 \text{ – вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x\to -+0}\left[\ln\frac{x+6}{x}-1\right]=+\infty \quad\Rightarrow\quad x=-0 \text{ – вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y=kx+b.$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\frac{x+6}{x}-1}{x}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\ln\frac{x+6}{x}-1\right]=-1.$$

При $x\to\pm\infty$ получаем асимптоту $y=-1.$

Исследуем функцию по первой производной.

| $x$ | $(-\infty;\ -6)$ | $(0;\ +\infty)$ |
|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ |
| $y$ | $\searrow$ | $\searrow$ |

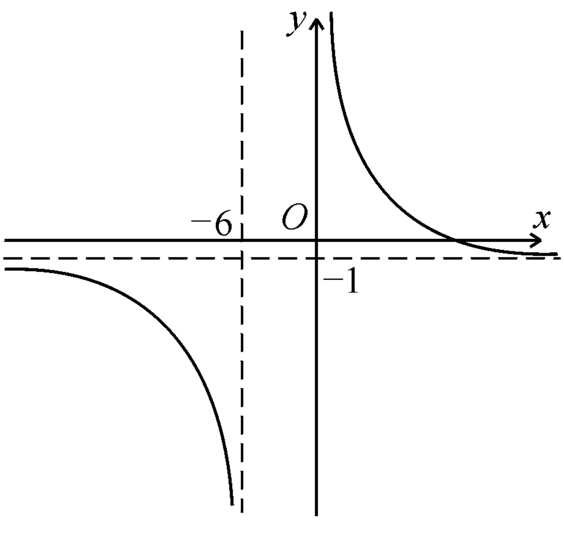
$$y'=\frac{x}{x+6}\cdot\frac{x-x-6}{x^2}=\frac{-6}{x(x+6)}\neq 0.$$

Экстремумов у функции нет.

Исследуем функцию по второй производной.

$$y''=-6\cdot\frac{-(x+6+x)}{x^2(x+6)^2}=\frac{6(2x+6)}{x^2(x+6)^2}=\frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2};$$

$y''=0 \quad\Rightarrow\quad x+3=0; \qquad x=-3$ – не входит в область существования.




| $x$ | $(-\infty;\ -6)$ | $(0;\ +\infty)$ |
|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | $\cap$ | $\cup$ |

Точек перегиба нет.

$$\ln\frac{x+6}{x}-1=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{6}{e-1};$$

$$y\left(\frac{6}{e-1}\right)=0.$$

**Интегральное исчисление функции одной переменной**

## 1. Неопределенный интеграл

*Первообразной функцией* для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

*Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ .$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $F(x)$ − результат интегрирования, $C$ − произвольная постоянная.

*Свойства неопределенного интеграла*:

1. $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$.
2. $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$, где $A$ − постоянная.
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

*Таблица простейших интегралов:*

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$ .
11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0)$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C, (A \neq 0)$.

*Основные методы интегрирования*:

1. Подведение под знак дифференциала:

а) к функции, стоящей под знаком дифференциала, можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) \pm A)$;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель: $df(x) = \frac{1}{A} d(A \cdot f(x))$;

в) под знак дифференциала подводится функция по правилу: $f'(x)dx = df(x)$.

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$\int u dv = uv - \int v du$, где $u = u(x), v = v(x)$.

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а) $\int a^x \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = a^x dx$.

б) $\int \sin ax \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \sin ax dx$.

в) $\int \cos ax \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \cos ax dx$,

г) $\int \ln ax \cdot P_n(x)dx$, $u = \ln ax$, $dv = P_n(x)dx$,

д) $\int \arcsin ax \cdot P_n(x)dx$, $u = \arcsin ax$, $dv = P_n(x)dx$,

е) $\int \mathrm{arctg} ax \cdot P_n(x)dx$, $u = \mathrm{arctg} ax$, $dv = P_n(x)dx$,

где $P_n(x)$ − многочлен $n$-ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, где $x = \varphi(t)$.

***Пример выполнения задания***.

| Найти неопределенные интегралы: |
|---|

| |
|---|
| а) $\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;  б) $\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3}dx$;  в) $\int (3x+4)e^{3x}dx$. |

*Решение.*

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(\frac{x^2}{2}) =$$

$$= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \left(-\frac{1}{2}\right)\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3(\arcsin x)^2 \cdot (\arcsin x)' - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' + C' =$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-17 & \underline{x^2-4x+3} \\
\underline{x^3-4x^2+3x} & x+4 \\
4x^2-3x-17 & \\
\underline{4x^2-16x+12} & \\
13x-29 &
\end{array}
$$

Тогда

$$\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx=\int\left(x+4+\frac{13x-29}{x^2-4x+3}\right)dx=\int xdx+\int 4dx+\int\frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx.$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)},$$

значит $\quad 13x-29=A(x-3)+B(x-1).$

При $x=3$ имеем $13\cdot 3-29=B(3-1)$, откуда $B=5$;

при $x=1$ имеем $13\cdot 1-29=A(1-3)$, откуда $A=8$.

Получаем $\dfrac{13x-29}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{5}{x-3}$ и интегрируем

$$\int\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}dx=\int\frac{8}{x-1}dx+\int\frac{5}{x-3}dx=8\int\frac{d(x-1)}{x-1}+5\int\frac{d(x-3)}{x-3}=$$

$$=8\ln|x-1|+5\ln|x-3|+C$$

и окончательно получаем

$$\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx=\frac{x^2}{2}+4x+8\ln|x-1|+\ln|x-3|+C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{x^2}{2}+4x+8\ln|x-1|+\ln|x-3|+C\right)'=\frac{2x}{2}+4+\frac{8}{x-1}+\frac{5}{x-3}=$$

$$=\frac{(x+4)(x-1)(x-3)+8(x-3)+5(x-1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{x^3-17}{x^2-4x+3},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

*Замечание.*

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$; $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{(-k+1)}(x-a)^{-k+1}+C$,

($k=2,3,\ldots$).

в) применим методом интегрирования по частям.

Примем $u=3x+4$, $dv=e^{3x}dx$, тогда $du=3dx$, $v=\frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int(3x+4)e^{3x}dx=(3x+4)\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}\cdot 3dx=\frac{3x+4}{3}e^{3x}-\int e^{3x}dx=$$

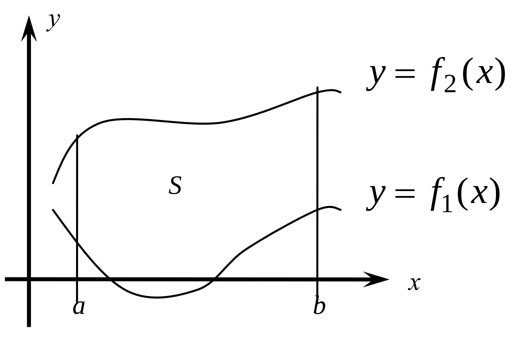
$$=\frac{3x+4}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}e^{3x}+C=\frac{3x+4-1}{3}e^{3x}+C=e^{3x}(x+1)+C.$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1)+C)'=3e^{3x}(x+1)+e^{3x}=e^{3x}\big(3(x+1)+1\big)=e^{3x}(3x+4),$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

## 2. **Определенный интеграл**



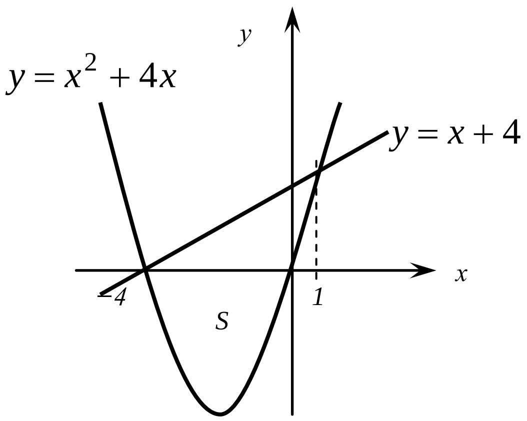

Если на плоскости $Oxy$ задана фигура, ограниченная двумя непрерывными линиями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь $S$ такой фигуры может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b \left( f_2(x) - f_1(x) \right) dx, \text{ где } f_2(x) \ge f_1(x) \text{ на отрезке } [a,b].$$

| |
|---|
| ***Пример 2.1*** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. |

*Решение.*

Заданные линии ограничивают на плоскости Оху криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.




Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \ x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x) dx = \int (4 - 3x - x^2) dx = \left( 4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (}\textit{кв. ед.}\text{)}.$$

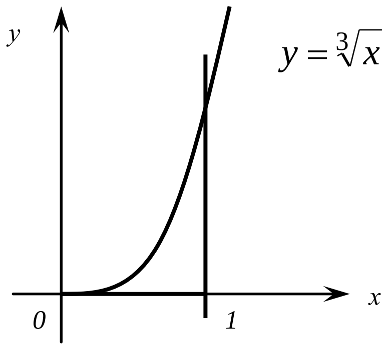
Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \ge 0$, осью $Ox$ и прямыми $x = a$, $x = b$,

1) вокруг оси $Ox$, вычисляются по формуле $V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$;

2) вокруг оси $Oy$, вычисляются по формуле $V_y = 2\pi \int\limits_a^b x f(x)dx$.

| |
|---|
| ***Пример**.2.2* Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей $Ox$ и $Oy$ криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y = \sqrt[3]{x}$, осью $Ox$ и прямой $x = 1$. |

*Решение.*




1) объем тела, полученного вращением вокруг оси $Ox$, равен

$$V_x = \pi \int\limits_0^1 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \pi \left.\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \text{ (\textit{куб. ед.})}$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$, равен

$$V_y = 2\pi \int\limits_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x} dx = 2\pi \left.\frac{x^{7/3}}{7/3}\right|_0^1 = \frac{6\pi}{7} \text{ (\textit{куб. ед.})}.$$

## Функции нескольких переменных

Переменная величина $z$ называется *функцией двух переменных* $x$ и $y$, если каждой паре значений $(x,y)$ из данной области соответствует единственное определенное значение $z = f(x, y)$.

Для функции $z = f(x, y)$ вводятся понятия *частных производных* первого порядка, которые определяются выражениями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

и *частных производных* второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ *максимум* (*минимум*), если значение этой функции в точке $M_0$ больше (меньше), чем значения функции в любой точке из окрестности точки $M_0$.

Необходимыми условиями существования *экстремума* (максимума или минимума) дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ является равенство нулю ее частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Точки, в которых частные производные обращаются в ноль, называются *стационарными точками* функции $z = f(x, y)$. Для того чтобы стационарная точка являлась экстремумом, в ней должны выполняться *достаточные условия*. Обозначим $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}$, $B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}$, $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$, $\Delta = AC - B^2$.

Если в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$

$\Delta > 0, A > 0$, то $M_0$ есть точка минимума;

$\Delta > 0, A < 0$, то $M_0$ есть точка максимума;

$\Delta < 0$, то в точке $M_0$ нет экстремума;

$\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

***Пример***. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 + 6$.

*Решение.*

1. Найдем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2y.$$

2. Запишем необходимые условия существования экстремума

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 4 - 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

значит точка $M(1;2)$ является стационарной точкой функции.

3. Проверим выполнение в точке $M$ достаточного условия. Для этого найдем вторые частные производные функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

В точке $M(1;2)$ $A = -2, B = 0, C = -2$ и $\Delta = (-2)\cdot(-2) - 0 = 4$. Поскольку $\Delta = 4 > 0, A = -2 < 0$, точка $M(1;2)$ является точкой максимума. Значение функции в этой точке $z\big|_M = 2\cdot 1 + 4\cdot 2 - 1^2 - 2^2 + 6 = 11$.

Функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$ принимает наибольшее и наименьшее значения в области *D*, ограниченной линией $\varphi(x, y) = 0$, либо в стационарных точках, расположенных внутри области *D*, либо на границе этой области.

Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ в заданной области $D$ решается по следующему плану:

1. Определяем стационарные точки функции, расположенные внутри области *D*, и вычисляем значения функции в этих точках.

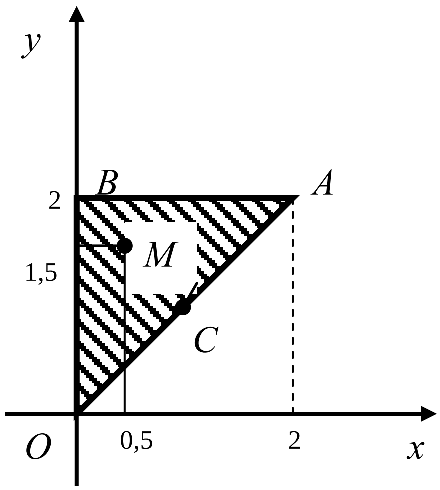
2. Находим стационарные точки функции на границе $\varphi(x,y)=0$ области или на отдельных ее участках, заданных различными уравнениями, и вычисляем значения функции в этих точках.

3. Из всех вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

**_Пример_**. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+2xy-4x-y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=0$, $y=2$, $y=x$.

*Решение.*

1. Найдем стационарные точки функции из условий равенства нулю частных производных функции




$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+2y-4=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0{,}5 \\ y=1{,}5 \end{cases}$$

Стационарная точка $M(0{,}5;1{,}5)$ лежит внутри заданной области $OAB$.

Значение функции в точке $M$ равно

$$z|_M=0{,}5^2+2\cdot0{,}5\cdot1{,}5-4\cdot0{,}5-1{,}5=-1{,}75.$$

2. Исследуем поведение функции на границах области:

а) на границе $OA$ $y=x$, $0\le x\le 2$, $z=x^2+2x\cdot x-4\cdot x-x$ или $z=3x^2-5x$;

$z'=6x-5$, $z'=0$ при $x=\dfrac{5}{6}$, тогда $y=\dfrac{5}{6}$ (так как $y$=$x$).

В точке $C\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6}\right)$ значение функции равно $z|_C=3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2-5\cdot\dfrac{5}{6}=-\dfrac{25}{12}$.

Вычислим значения функции в крайних точках отрезка $OA$.

В точке $O(0;0)$ $z|_O = 0$, в точке $A(2;2)$ значение функции равно

$z|_A = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 = 2$.

б) на границе *BA* $y = 2$, $0 \le x \le 2$, $z = x^2 + 2x \cdot 2 - 4x - 2$ или $z = x^2 - 2$;

$z' = 2x$, $z' = 0$ при $x = 0$, а $y = 2$ согласно уравнению прямой *BA*.

В точке $B(0;2)$ значение функции равно $z|_B = 3 \cdot 0^2 - 2 = -2$.

в) на границе *OB* $x = 0$, $0 \le y \le 2$, $z = -y$;

$z' = -1 \ne 0$ при всех $y \in [0;2]$, следовательно, стационарных точек на линии *OB* нет.

3. Из всех вычисленных значений заданной функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$z|_A = 2$ – наибольшее значение функции в области *OAB*

$z|_C = -\dfrac{25}{12}$ – наименьшее значение функции в области *OAB*

## Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называют дифференциальными уравнениями *с разделяющимися переменными*:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x)}{f_1(y)} \to f_1(y)dy = f_2(x)dx, \tag{1}$$

или в дифференциальной форме

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + f_3(x)\, f_4(y)dy = 0. \tag{2}$$

Разделим обе части уравнения (2) на произведение функций $f_2(y)\, f_3(x)$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0 \tag{2'}$$

и, после интегрирования, получим общий интеграл (общее решение) уравнения:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

При делении на $f_2(y)\,f_3(x)$ может произойти потеря некоторых частных решений. Пусть, например, при $y = y_0$ имеем $f_2(y_0) = 0$, тогда функция $y = y_0$ является решением уравнения (2′), т.к. $dy = dy_0 = 0$. Решением может также быть функция $x = x_0$, если $f_3(x_0) = 0$.

| |
|---|
| ***Пример***. Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка $x(y+1)dx - (x^2+1)ydy = 0$. |

*Решение:*

Данное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, причем $f_1(x) = x;\quad f_2(y) = y+1;$ $f_3(x) = x^2+1;\quad f_4(y) = -y$. Разделим обе части уравнения на произведение

$$f_2(y)\,f_3(x) = (y+1)(x^2+1)$$

и получим

$$\frac{xdx}{x^2+1} - \frac{ydy}{y+1} = 0.$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} - \int\left(1 - \frac{1}{y+1}\right)dy = C,$$

используя подведение под знак дифференциала

$$\int \frac{\frac{1}{2}d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} - \int dy + \int \frac{d\left(y+1\right)}{y+1} = C,$$

получим общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| - y + \ln\left|y+1\right| = C.$$

При делении на $f_2\left(y\right) = y+1$ потеряно частное решение: $y=-1$.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p\left(x\right)y = q\left(x\right), \tag{3}$$

линейное относительно искомой функции и её производной, называется *линейным*.

Уравнение (3) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными следующим образом. Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций: $y = u\left(x\right)\cdot v\left(x\right)$. Одна из этих функций может быть абсолютно произвольной, а вторая определяется в зависимости от первой так, чтобы их произведение удовлетворяло уравнению (3).

Из равенства $y = u\cdot v$ находим $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$. Тогда в соответствие с (3) имеем $u'v + uv' + p\left(x\right)uv = q\left(x\right)$ или $u'v + u\left(v' + p\left(x\right)v\right) = q\left(x\right)$. Выберем в качестве $v(x)$ какое-нибудь частное решение уравнения

$$v' + p\left(x\right)v = 0, \tag{4}$$

тогда для отыскания $u(x)$ получим уравнение

$$u'v = q\left(x\right). \tag{5}$$

Найдем $v(x)$, разделяя переменные в (4):

$$\frac{dv}{v} = -p\left(x\right)dx, \text{ откуда } \ln v = -\int p\left(x\right)dx \text{ и } v = e^{-\int p(x)}dx.$$

Зная $v(x)$, найдем $u(x)$ из уравнения (5):

$$\frac{du}{dx}v=q(x) \;\Rightarrow\; du=e^{\int p(x)dx}q(x)dx, \text{ тогда } u=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

Общее решение линейного уравнения (3) имеет вид

$$y=uv=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right].$$

| |
|---|
| ***Пример.*** Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y'-2y=1$. |

*Решение.*

Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций:

$$y=u(x)\cdot v(x), \text{ тогда } y'=u'\cdot v+u\cdot v',$$

и подставим полученные выражения в заданное уравнение

$$u'v+uv'-2uv=1.$$

Вынесем за скобки $u(x)$

$$u'v+u(v'-2v)=1$$

и, приравнивая к нулю выражение в скобках, получим и решим два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными:

$$\begin{array}{ll}
v'-2v=0 & u'v=1 \\
\dfrac{dv}{v}=2dx & \dfrac{du}{dx}e^{2x}=1 \\
\ln v=2x & du=e^{-2x}dx \\
v=e^{2x} & u=\int e^{-2x}dx, \\
 & u=-\dfrac{1}{2}\int e^{-2x}d(-2x)=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C
\end{array}$$

Запишем общее решение заданного дифференциального уравнения в виде

$$y=uv=\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}+C\right)\cdot e^{2x}, \text{ или } y=-\frac{1}{2}+Ce^{2x}.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{6}$$

называется неоднородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами $a_1$ и $a_2$.

Общее решение этого уравнения $y = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения; $y^*$ – частное решение уравнения (6). Дифференциальное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{7}$$

является однородным и называется соответствующим неоднородному уравнению (6). Общее решение однородного уравнения (7) находят по корням характеристического уравнения

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение может иметь три случая для корней $r_1$ и $r_2$:

1) *корни характеристического уравнения действительные и различные*: $r_1 \neq r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\overline{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные;
2) *корни характеристического уравнения действительные и равные*: $r_1 = r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\overline{y} = e^{r_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные;
3) *корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа* $r_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i,\ \beta \neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\overline{y} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные.

Частное решение $y^*$ неоднородного уравнения (6) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в зависимости от вида правой части уравнения $f(x)$.

*Первый случай*. Правая часть уравнения (6) имеет вид $f(x) = P(x)e^{mx}$, где $P(x)$ – многочлен. Тогда уравнение (6) имеет частное решение вида

$$y^* = x^k Q(x) e^{mx}, \tag{8}$$

где $Q(x)$ – полный многочлен той же степени от $x$, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами;

$k$ = 0, если число $m$ не является корнем характеристического уравнения;

$k$ = 1, если число $m$ является простым корнем характеристического уравнения;

$k$ = 2, если число $m$ является двукратным корнем характеристического уравнения.

Правило сохраняет свою силу и при $m$ = 0, когда $f(x)=P(x)$ – многочлен.

Неопределенные коэффициенты в многочлене $Q(x)$ определяют подстановкой функции (8) и ее производных в уравнение (6) с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $x$ в обеих частях уравнения.

***Пример***.Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:
$y'' - 3y' - 4y = 4x - 1, \quad y\big|_{x=0} = 2, \quad y'\big|_{x=0} = 3.$

*Решение.* Характеристическое уравнение $r^2 - 3r - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня $r_1 = -1,\ r_2 = 4$, следовательно, $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$. Правая часть уравнения имеет вид

$f(x)=4x-1=(4x-1)\cdot e^{0\cdot x}$, где $m=0$ и не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение при $k=0$ ищем в виде $y^*=x^0\cdot(Ax+B)\cdot e^{0\cdot x}=Ax+B,\ (y^*)'=A,\ (y^*)''=0.$ После подстановки в дифференциальное уравнение получаем

$$0-3A-4(Ax+B)=4x-1;$$
$$-3A-4Ax-4B=4x-1;$$
$$-4A\cdot x+(-3A-4B)=4\cdot x+(-1);$$
$$x^1:\ -4A=4;\qquad A=-1$$
$$x^0:\ -3A-4B=-1,\quad -4B=-1+3A=-4,\quad B=1$$

Частным решением является функция $y^*=Ax+B=-1\cdot x+1=1-x.$ Общим решением является функция $y=\bar{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}-x+1.$

Найдем значение констант $C_1,C_2$ из начальных условий. Для этого определим $y'=-C_1e^{-x}+4C_2e^{4x}-1.$

Тогда $$\begin{aligned} y|_{x=0}&=C_1+C_2+1=2,\\ y'|_{x=0}&=-C_1+4C_2-1=3, \end{aligned}\qquad \begin{cases} C_1=0,\\ C_2=1. \end{cases}$$

Искомым частным решением является функция $y=e^{4x}-x+1.$

***Пример***.Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:
$y''-4y'+4y=e^{2x},\quad y|_{x=0}=2,\quad y'|_{x=0}=3.$

*Решение.* Характеристическое уравнение $r^2-4r+4=0$ имеет двукратный корень $r_1=2$, следовательно, $\bar{y}=e^{2x}(C_1+C_2x)$. Правая часть уравнения имеет вид $f(x)=e^{2x},\ \ m=2$ является двукратным ($k=2$) корнем характеристического уравнения, тогда частное решение ищем в виде

$$y^* = x^2 \cdot Ae^{2x}, \quad \left(y^*\right)' = x^2 \cdot 2Ae^{2x} + 2x \cdot Ae^{2x} = 2Ae^{2x}\left(x^2 + x\right),$$

$$\left(y^*\right)'' = 4Ae^{2x}\left(x^2 + x\right) + 2Ae^{2x}\left(2x+1\right) = Ae^{2x}\left(4x^2 + 8x + 2\right).$$

После подстановки $y^*$ и ее производных в исходное дифференциальное уравнение получаем

$$Ae^{2x}\left(4x^2 + 8x + 2\right) - 4 \cdot 2Ae^{2x}\left(x^2 + x\right) + 4Ae^{2x} \cdot x^2 = e^{2x},$$

$$Ae^{2x}\left(\cancel{4x^2} + \cancel{8x} + 2 \cancel{-8x^2} \cancel{-8x} + \cancel{4x^2}\right) = e^{2x},$$

$$2Ae^{2x} = e^{2x},$$

$$2A = 1, \quad A = \frac{1}{2}.$$

Частным решением является функция $y^* = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2.$

Общим решением является функция $y = \overline{y} + y^* = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x\right) + \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2.$

Найдем значение констант $C_1, C_2$ из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = e^{2x}\left(2C_1 + 2C_2 x + C_2\right) + e^{2x}\left(x^2 + x\right),$$

и получим систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y\big|_{x=0} = e^0 \cdot C_1 = 2, \quad C_1 = 2$$

$$y'\big|_{x=0} = e^0\left(2C_1 + C_2\right) = 3, \quad C_2 = -1$$

Искомым решением является функция $y = \overline{y} + y^* = e^{2x}\left(2 - x\right) + \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2.$

*Второй случай*. Правая часть уравнения (6) имеет вид $f(x) = a\cos nx + b\sin nx$.

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то

$$y^* = A\cos nx + B\sin nx.$$

Если числа $\pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y^* = \left(A\cos nx + B\sin nx\right)\cdot x.$$

В частных случаях, когда $a$ или $b$ равно нулю, решение всё равно надо искать в указанном общем виде.

***Пример.*** Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' + 4y' + 13y = 5\sin 3x,\ \ y\big|_{x=0} = \frac{1}{8},\quad y'\big|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

*Решение.* Характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 13 = 0$ имеет корни

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 13}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i\,,$$

тогда $\overline{y} = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$.

Числа $\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому

$$y^* = A\sin 3x + B\cos 3x,$$

$$\left(y^*\right)' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x,$$

$$\left(y^*\right)'' = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x.$$

Подставляем $y^*$ и ее производные в исходное уравнение и получаем

$$-9A\sin 3x - 9B\cos 3x + 4\left(3A\cos 3x - 3B\sin 3x\right) + 13\left(A\sin 3x + B\cos 3x\right) = C,$$

$$(4A - 12B)\sin 3x + (4B + 12A)\cos 3x = 5\cdot\sin 3x + 0\cdot\cos 3x;$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 3x:&\ \ 4A - 12B = 5\\ \cos 3x:&\ \ 4B + 12A = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}A &= \frac{1}{8}\\ B &= -\frac{3}{8}\end{aligned}\right\}.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + \frac{1}{8}\sin 3x - \frac{3}{8}\cos 3x.$$

Найдем значение констант $C_1, C_2$ из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = -2e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + e^{-2x}\left(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x\right) +$$
$$+\frac{3}{8}\cos 3x + \frac{9}{8}\sin 3x$$

и запишем систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y\big|_{x=0} = e^0\left(C_1 + C_2\cdot 0\right) - \frac{3}{8} = \frac{1}{8},$$
$$y'\big|_{x=0} = -2e^0\left(C_1 + C_2\cdot 0\right) + e^0\left(C_1\cdot 0 + 3C_2\right) + \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2}, \\ C_2 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

Искомым решением является функция

$$y = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{3}{8}\sin 3x\right) + \frac{1}{8}\sin 3x - \frac{3}{8}\cos 3x.$$

## Ряды

*Степенным рядом* называют ряд вида

$$a_0 + a_1\left(x-a\right) + a_2\left(x-a\right)^2 + \ldots + a_n\left(x-a\right)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-a\right)^n, \tag{9}$$

расположенный по степеням двучлена $(x-a)$.

В соответствии с теоремой Абеля ряд (9) сходится на интервале $x \in \left(a-R, a+R\right)$, а для всех $x$, лежащих вне этого интервала, ряд расходится. Число $R$ называют *радиусом сходимости* степенного ряда. На концах интервала (при $x=a-R$ и при $x=a+R$) вопрос о сходимости и расходимости данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда. У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ($R=0$), у других охватывает всю ось $Ox$ ($R=\infty$).

Согласно признаку Даламбера радиус сходимости определяют по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{10}$$

Если воспользоваться признаком Коши, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

| |
|---|
| ***Пример.*** Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на краях интервала $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}$ |

*Решение.*

Радиус сходимости определим по формуле (10):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^{n-1}}\right|=10\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=10\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=10.$$

На концах интервала: при $x=-10$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n\cdot 10^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, который является знакочередующимся и сходится по теореме Лейбница, так как его члены убывают по абсолютной величине $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. При $x=10$ получим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Таким образом, данный степенной ряд сходится при $x\in[-10;10)$.

Основные элементарные функции имеют простые разложения по степеням *x,* которые представлены ниже:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{21} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \; \forall x \in (-1,1)$$

,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots \quad \forall x \in (-1,1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \quad \forall x \in (-1,1].$$

При приближенных вычислениях определенных интегралов требуется разложить подынтегральную функцию в степенной ряд, который в пределах интервала сходимости может быть почленно проинтегрирован. Используя формулу Ньютона – Лейбница, определенный интеграл вычисляют как частичную сумму получающегося числового ряда. Если ряд знакочередующийся, то точность приближенных вычислений не превосходит первого из отброшенных членов.

***Пример***. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда: $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$.

*Решение.*

Используем разложение в ряд для функции $\sin x$ и подставим его в подынтегральное выражение

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{0,5}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\int_0^{0,5}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,5}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3 3!3}+\frac{1}{2^5 5!5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)!(2n-1)}+\ldots\approx$$

$$\approx 0,5-0,0069+0,00005\approx 0,5-0,0069\approx 0,4931\approx 0,493.$$

В вычислениях приведены первые три члена ряда с сохранением четырех знаков после запятой, так как заданная точность составляет 0,001. Третий член ряда отброшен, так как он по величине меньше заданной точности $(0,00005)<0,001$. В окончательном результате проведено округление до трех знаков после запятой.

**Функция одной переменной** $y=f(x)$ – это правило, по которому каждому значению независимой переменной $x$ (из области определения) соответствует одно и только одно значение функции $y$. Естественно, «икс» и «игрек» – действительные числа.

В комплексном случае функциональная зависимость задается аналогично:

**Однозначная функция комплексной переменной** $w=f(z)$ – это правило, по которому каждому *комплексному* значению независимой переменной $z$ (из области определения) соответствует одно и только одно *комплексное* значение функции $w$. В теории рассматриваются также многозначные и некоторые другие типы функций, но для простоты я остановлюсь на одном определении.

Чем отличается функция комплексной переменной?

Главное отличие: числа комплексные. Я не иронизирую. От таких вопросов нередко впадают в ступор, в конце статьи историю прикольную расскажу. мы рассматривали комплексное число в виде $z=a+bi$. Поскольку сейчас буква «зет» стала переменной, то её мы будем обозначать следующим образом: $z=x+yi$, при этом «икс» и «игрек» могут принимать различные *действительные* значения. Грубо говоря, функция комплексной переменной $w=f(z)=f(x+yi)$ зависит от переменных $x$ и $y$, которые принимают «обычные» значения. Из данного факта логично вытекает следующий пункт:

**Действительная и мнимая часть функции комплексной переменной**

Функцию комплексной переменной можно записать в виде:
$w = u(x;\,y) + v(x;\,y)\cdot i$, где $u(x;\,y)$ и $v(x;\,y)$ – две функции двух *действительных* переменных.

Функция $u(x;\,y)$ называется **действительной частью** функции $w$.
Функция $v(x;\,y)$ называется **мнимой частью** функции $w$.

То есть, функция комплексной переменной $w = f(z)$ зависит от двух действительных функций $u = u(x;\,y)$ и $v = v(x;\,y)$. Чтобы окончательно всё прояснить рассмотрим практические примеры:

Пример 1

Найти действительную и мнимую часть функции $w = z^2 + 2z$

**Решение:** Независимая переменная «зет», как вы помните, записывается в виде $z = x + yi$, поэтому:

$$w = (x+yi)^2 + 2(x+yi) \overset{(1)}{=} x^2 + 2xyi + (yi)^2 + 2x + 2yi \overset{(2)}{=} x^2 + 2xyi - y^2 + 2x + 2yi \overset{(3)}{=} \overset{(4)}{=}$$

$$= x^2 - y^2 + 2x + 2xyi + 2yi \overset{(5)}{=} x^2 - y^2 + 2x + (2xy + 2y)i$$

(1) В исходную функцию $w = z^2 + 2z$ подставили $z = x + yi$.

(2) Для первого слагаемого использовали формулу сокращенного умножения $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. В слагаемом $2(x+yi)$ – раскрыли скобки.

(3) Аккуратно возвели в квадрат $(yi)^2$, не забывая, что $i^2 = -1$

(4) Перегруппировка слагаемых: сначала переписываем слагаемые**, в которых нет мнимой единицы** (первая группа), затем слагаемые, где есть $i$ (вторая группа). Следует отметить, что перетасовывать слагаемые не обязательно, и данный этап можно пропустить (фактически выполнив его устно).

(5) У второй группы выносим $i$ за скобки.

В результате наша функция оказалась представлена в виде $w = u(x;\,y) + v(x;\,y)\cdot i$

**Ответ:**
$u = x^2 - y^2 + 2x$ – действительная часть функции $w$.
$v = 2xy + 2y$ – мнимая часть функции $w$.

получились функции двух переменных, от которых можно найти такие популярные <u>**частные производные**</u>. Без пощады – находить будем. Но чуть позже.

Пример 2

Найти действительную и мнимую часть функции $w = 3iz - z^2$

Это пример для самостоятельного решения. Перед тем как с шашками наголо броситься в бой на комплексной плоскости, позвольте дать самый важный совет по теме:

В Примере 1 было выяснено, что $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$.

Теперь куб. Используя формулу сокращенного умножения $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, выведем:
$z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$.

Рекомендую переписать в тетрадь две рабочие формулы:
$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$
$z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$

Формулы очень удобно использовать на практике, поскольку они значительно ускоряют процесс решения.

**Дифференцирование функций комплексной переменной.**
**Условия Коши-Римана**

Для функции комплексной переменной $w = f(z)$ справедливы правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций. Таким образом, производная берётся точно так же, как и в случае функции действительной переменной $y = f(x)$.

для многих функций комплексной переменной производной не существует вообще, и приходится выяснять, *дифференцируема ли* та или иная функция.

Рассмотрим функцию комплексной переменной $w = u(x;\, y) + v(x;\, y) \cdot i$. Для того, чтобы данная функция была дифференцируема необходимо и достаточно:

1) Чтобы существовали частные производные первого порядка $u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$. Об этих обозначениях сразу забудьте, поскольку в теории функции комплексного переменного традиционно используется другой вариант записи: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

2) Чтобы выполнялись так называемые **условия Коши-Римана**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Только в этом случае будет существовать производная!

Пример 3

Определить действительную $u(x, y)$ и мую $v(x, y)$ часть функции $w = f(z) = 3z - iz^2$. Проверить выполнение условий Коши-Римана. В случае выполнения условий Коши-Римана, найти производную функции.

**Решение** раскладывается на три последовательных этапа:

1) Найдём действительную и мнимую часть функции. Данное задание было разобрано в предыдущих примерах, поэтому запишу без комментариев:

Так как $z = x + yi$, то:

$$f(z) = 3(x + yi) - i(x + yi)^2 = 3x + 3yi - i(x^2 + 2xyi - y^2) =$$

$$= 3x + 3yi - ix^2 + 2xy + y^2 i = 3x + 2xy + (3y - x^2 + y^2)i$$

Таким образом:

$u(x, y) = 3x + 2xy$ – действительная часть функции $f(z)$;

$v(x, y) = 3y - x^2 + y^2$ – мнимая часть функции $f(z)$.

Остановлюсь еще на одном техническом моменте: *в каком порядке* записывать слагаемые в действительной и мнимой частях? Да, в принципе, без разницы. Например, действительную часть можно записать так: $u(x, y) = 2xy + 3x$, а мнимую – так: $v(x, y) = -x^2 + y^2 + 3y$.

2) Проверим выполнение условий Коши-Римана. Их два.

Начнем с проверки условия $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Находим **частные производные**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (3x + 2xy)'_x = 3 + 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (3y - x^2 + y^2)'_y = 3 - 0 + 2y = 3 + 2y$$

Таким образом, условие $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ выполнено.

Несомненно, приятная новость – частные производные почти всегда очень простые.

Проверяем выполнение второго условия $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$:

$\frac{\partial u}{\partial y} = (3x + 2xy)'_y = 0 + 2x = 2x$

$\frac{\partial v}{\partial x} = (3y - x^2 + y^2)'_x = 0 - 2x + 0 = -2x$

Получилось одно и то же, но с противоположными знаками, то есть, условие $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ также выполнено.

Условия Коши-Римана выполнены, следовательно, функция дифференцируема.

3) Найдём производную функции. Производная тоже очень простая и находится по обычным правилам:
$f'(z) = (3z - iz^2)' = 3 - 2iz$

Мнимая единица при дифференцировании считается константой.

**Ответ:** $u(x, y) = 3x + 2xy$ – действительная часть, $v(x, y) = 3y - x^2 + y^2$ – мнимая часть.
Условия Коши-Римана выполнены, $f'(z) = 3 - 2iz$.

Существуют еще два способа нахождения производной, они, конечно, применяются реже, но информация будет полезна для понимания второго урока – **<u>Как найти функцию комплексной переменной?</u>**

Производную можно найти по формуле:
$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot i$

В данном случае: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3 + 2y, \frac{\partial v}{\partial x} = -2x$

Таким образом $f'(z) = 3 + 2y - 2xi$

Предстоит решить обратную задачу – в полученном выражении нужно вычленить $x + yi = z$. Для того, чтобы это сделать, необходимо в мых $-2xi$ и $2y$ вынести $-2i$ за скобку:
$f'(z) = 3 + 2y - 2xi = 3 - 2i(x + yi) = 3 - 2iz$

Обратное действие, как многие заметили, выполнять несколько труднее, для проверки всегда лучше взять выражение $3 - 2i(x + yi)$ и на черновике либо устно раскрыть обратно скобки, убедившись, что получится именно $3 + 2y - 2xi$

Зеркальная формула для нахождения производной:

$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot i$

В данном случае: $\frac{\partial v}{\partial y}=3+2y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2x$, поэтому:

$f'(z)=3+2y-2xi=3-2i(x+yi)=3-2iz$

Пример 4

Определить действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ часть функции $w=f(z)=\frac{z^2}{2}-5i$. Проверить выполнение условий Коши-Римана. В случае выполнения условий Коши-Римана, найти производную функции.

Пример 5

Определить действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ часть функции $w=f(z)=3z^2-iz^3$. Проверить выполнение условий Коши-Римана. Вычислить $f'(i)$

**Решение:** Алгоритм решения полностью сохраняется, но в конце добавится новый пунктик: нахождение производной в точке. Для куба нужная формула уже выведена: $z^3=(x+yi)^3=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i$

Определим действительную и мнимую часть данной функции:

Так как $z=x+yi$, то:

$f(z)=3(x+yi)^2-i(x+yi)^3=3(x^2+2xyi-y^2)-i(x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i)=$

$=3x^2+6xyi-3y^2-ix^3+3x^2y+3xy^2i-y^3=3x^2-3y^2+3x^2y-y^3+(6xy-x^3+3xy^2)i$

Таким образом:

$u(x,y)=3x^2-3y^2+3x^2y-y^3$ – действительная часть функции $f(z)$;

$v(x,y)=6xy-x^3+3xy^2$ – мнимая часть функции $f(z)$.

Проверим выполнение условий Коши-Римана:

$\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2-3y^2+3x^2y-y^3)'_x=3\cdot 2x-0+3\cdot 2xy-0=6x+6xy,$

$\frac{\partial v}{\partial y}=(6xy-x^3+3xy^2)'_y=6x-0+3x\cdot 2y=6x+6xy$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$

Проверка второго условия:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (3x^2 - 3y^2 + 3x^2y - y^3)'_y = 0 - 3 \cdot 2y + 3x^2 - 3y^2 = -6y + 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (6xy - x^3 + 3xy^2)'_x = 6y - 3x^2 + 3y^2$$

Получилось одно и то же, но с противоположными знаками, то есть условие $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ также выполнено.

Условия Коши-Римана выполнены, следовательно, функция является дифференцируемой:

$$f'(z) = (3z^2 - iz^3)' = 6z - 3iz^2$$

Вычислим значение производной в требуемой точке:

$$f'(i) = 6i - 3i \cdot i^2 = 6i + 3i = 9i$$

**Ответ:** $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 3x^2y - y^3$, $v(x,y) = 6xy - x^3 + 3xy^2$, условия Коши-Римана выполнены, $f'(i) = 9i$

**Пример 5.1.** Вычислить $\int\limits_C (1 + i - 2\bar{z})dz$ по параболе $y=x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$.

■ Найдем действительную и мнимую части подынтегральной функции. Для этого подставим в выражение для $f(z)$ $z=x+iy$:

$$f(z) = 1 + i - 2\bar{z} = 1 + i - (x - iy) = (1 - 2x) + i(1 + 2y).$$

Тогда $u = 1 - 2x,\ v = 1 + 2y.$

$$\int\limits_C (1 + i - 2\bar{z})dz = \int\limits_C (1 - 2x)dx - (1 + 2y)dy + i\int\limits_C (1 + 2y)dx + (1 - 2x)dy.$$

Так как $y=x^2$, то $dy=2x$, $x \in [0;1]$. Поэтому

$$\int_C (1+i-2\bar{z})dz = \int_0^1 \Big((1-2x)-(1+2x^2)2x\Big)dx + i\int_0^1 \Big((1+2x^2)+(1-2x)2x\Big)dx =$$

$$= \int_0^1 (-4x^3-4x+1)dx + i\int_0^1 (-2x^2+2x+1)dx =$$

$$\left(-x^4-2x^2+x\right)\Big|_0^1 + i\left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -2+\frac{4}{3}i$$ . ■

## Литература


1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. — 18-е изд., перераб. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-4916-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/152643. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии : учебное пособие / Д. В. Клетеник ; под редакцией Н. В. Ефимова. — 17-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 224 с. — ISBN 978-5-8114-1051-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/130489. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты : учебное пособие / Л. А. Кузнецов. — 13-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 240 с. — ISBN 978-5-8114-0574-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/168472. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 1 — 2021. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-7061-7. — Текст : электронный // Лань :

электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/154399. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 2 : Курс дифференциального и интегрального исчисления — 2021. — 800 с. — ISBN 978-5-8114-7377-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/159505. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
6. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020 — Том 3 — 2020. — 656 с. — ISBN 978-5-8114-6652-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/149365. — Режим доступа: для авториз. пользователей.
7. Рябушко, А. П. Высшая математика: теория и задачи : учебное пособие : в 5 частях / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — Минск : Вышэйшая школа, [б. г.]. — Часть 4 : Криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Функции комплексной переменной — 2017. — 255 с. — ISBN 978-985-06-2814-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/111312 (дата обращения: 16.06.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
8. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. :https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214370663049600009433, Режим доступа: для авторизованных пользователей.
9. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5 :https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/20141002144129431551000008498, Режим доступа: для авторизованных пользователей.
10. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- https://tsutula.bibliotech.ru/ Режим доступа: для авториз. пользователей.
11. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.- http://www.iprbookshop.ru/ Режим доступа: для авториз. пользователей.

12. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: http://elibrary.ru/ Режим доступа: для авториз. пользователей.