

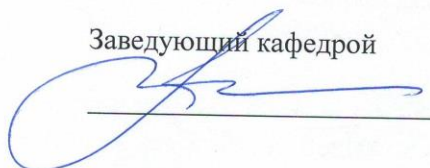
МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева  
Кафедра систем автоматического управления

Утверждено на заседании кафедры  
«Системы автоматического управления»  
«28» апреля 2017 г., протокол № 12

Заведующий кафедрой



О.В.Горячев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по проведению практических (семинарских) занятий**  
**по дисциплине (модулю)**

**«Интеллектуальные системы управления»**

**основной профессиональной образовательной программы**  
**высшего образования – программы специалитета**

по специальности

**24.05.06 Системы управления летательными аппаратами**

со специализацией

**Системы управления движением летательных аппаратов**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 240506-01-17

Тула 2017 год

**Разработчик(и) методических указаний**

Горячев О.В., зав.каф.САУ, д.т.н., профессор  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

## Практическое занятие № 1

### Основные положения теории нечетких множеств

В основе нечеткой логики лежит теория нечетких множеств. Сам термин "нечеткое множество" (fuzzy set) был впервые введен в 1963г. Лотфи Заде (Lotfi Zadeh).

Теорию нечетких множеств можно рассматривать как расширение классической теории множеств.

Множества является некоторым фундаментальным понятием.

**Множество – представляет собой набор элементов, обладающих некоторым свойством, общим для всех элементов множества.**

Напомним основные определения теории множеств.

#### Равенство множеств.

**Два множества равны между собой, если они содержат одинаковые наборы элементов.**

Для понятия равенства множеств справедливы следующие свойства:

- рефлексивность  $A = A$ ;
- симметричность: если  $A=B$  то  $B=A$ ;
- транзитивность: если  $A=B$  и  $B=C$ , то  $A=C$ .

Множество  $B$  является подмножеством  $A$ , если все его элементы являются одновременно и элементами  $A$ :

$$B \subset A.$$

В теории множеств вводят понятие базового (универсального) множества.

Если в некоторой задаче рассматриваются множества, являющиеся подмножествами некоторого фиксированного множества  $X$ , то такое множество называется **базовым (универсальным) множеством  $X$** .

Существуют различные способы задания множеств. К основным способам задания множеств относятся, например: **перечисление и описание**.

Перечисление используется, если множество имеет небольшое число элементов, или ясно, что понимать под многоточием, когда множество бесконечно:  $A = \{2, 4, 8, \dots\}$ .

**Описательный** способ задания множества  $A$ , состоящего из элементов  $x$  некоторого базового множества  $X$ :

$$A = \{x / \text{свойство}; x \in X\},$$

4

Свойство, определяющее принадлежность, можно характеризовать некоторым показателем, называемым **функцией принадлежности** (membership function) -  $\mu_A(x)$ .

Показатель принадлежности для классических множеств может принимать только два значения: 0 и 1, отражающими смысл – “не принадлежит” и “принадлежит”, т.е. -  $\mu_A(x) \in \{0, 1\}$ .

Примером четкого множества является множество «высокий человек», определенное на числовой оси – рост человека –  $x$  (рис.1.1).

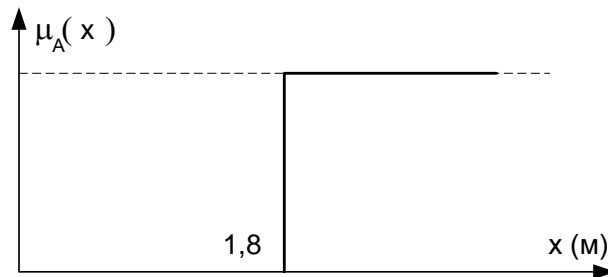


Рис.1.1.

К множеству "высоких людей" формально можно отнести всех людей, рост которых превышает 1,8м. Если обозначить через переменную  $x$  "рост человека", а функцию  $\mu_A(x)$  задать следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 1,8, \\ 0, & \text{если } x < 1,8. \end{cases} \quad (1.1)$$

то множество "высоких людей"  $A$  может быть задано с помощью выражения

$$A = \{x / \mu_A(x) = 1; x \in X\}. \quad (1.2)$$

При этом множество  $X$  – называется базовым множеством  $X$  множества  $A$  ( $X$  - множество всех возможных значений  $x$ ).

Другими словами, множество  $A$  образуют такие "объекты" ("элементы"), для которых указанная выше функция  $\mu_A(x) = 1$ .

Напротив, те значения  $x \in X$ , для которых  $\mu_A(x) = 0$ , не принадлежат множеству  $A$ .

### *Некоторые количественные характеристики множеств.*

**Множество может быть конечным и бесконечным.**

Основной характеристикой конечного множества является его мощность, т.е. число его элементов. Мощность множества обозначается  $\text{card}\{A\}$  - кардинальное число.

Бесконечное множество может быть **счетным и несчетным**. Множество является счетным, если его можно привести во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел. В противном случае – несчетное.

**Определение наибольшего и наименьшего элемента множества.**

Для конечных множеств задача нахождения наибольшего и наименьшего элемента тривиальна.

Для бесконечных множеств, заданных описанием вводят **понятие верхней и нижней границы**.

Допустим  $D$  - множество вещественных чисел. Верхней границей  $D$  является число  $d_s$  такое, что для любого  $d \in D$  имеет место  $d \leq d_s$ . Верхняя граница множества обозначается  $\sup\{D\}$  (**супремум**). Аналогичным образом вводится определение и для нижней границы множества:  $\inf\{D\}$  (**инфенум**).

**Основные операции над множествами.**

	Наименование	Обозначение	Описание
	Объединение	$A \cup B$	$\{x; x \in A \text{ или } x \in B\}$
	Пересечение	$A \cap B$	$\{x; x \in A \text{ и } x \in B\}$
	Разность	$A - B$	$\{x; x \in A \text{ и } x \notin B\}$
	Дополнение	$\overline{X}$	$\overline{X} = U - X$
	Декартово произведение	$X \times Y$	$\{(x, y); x \in X, y \in Y\}$

	Отношения множеств	$R \subset X \times Y$	$\{(x, y) / \text{свойство}; x \in X, y \in Y\}$
--	-----------------------	------------------------	--

**Декартовым произведением** множеств  $X$  и  $Y$  называют множество, состоящее из упорядоченных пар, первая компонента которых принадлежит множеству  $X$ , а вторая – множеству  $Y$ . Такие упорядоченные пары элементов называют **кортежами**.

Таким образом, элементами декартова произведения двух множеств  $X$  и  $Y$  являются двухэлементные кортежи вида  $(x, y)$ :

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}.$$

Очевидно, что  $\text{card}\{X \times Y\} = \text{card}\{X\} \cdot \text{card}\{Y\}$ .

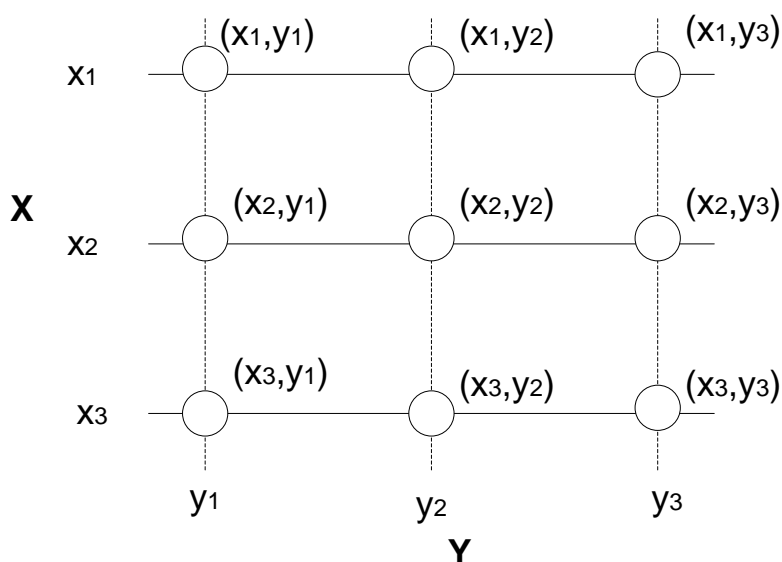


Рис.1.2.

Операция декартова (прямого) произведения справедлива и для большего числа множеств.

**Степень множества**  $n$  множества  $X$  представляет собой  $n$ -кратное произведение данного множества самого на себя:

$$X^n = \prod_{(n)} X.$$

Отношением между  $n$  множествами  $X_1, X_2, \dots, X_n$  называется подмножество прямого произведения  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ , для которого выполняется заданное свойство.

Наиболее часто рассматривают бинарные отношения, например:

$$R \subset X \times Y = \{(x, y) / \text{свойство}; x \in X, y \in Y\}$$

Функция является частным случаем отношения.  $R \subset X \times Y = \{(x, y) / x = y; x \in X, y \in Y\}$

Поскольку отношение является множеством, то его можно задать с помощью функции принадлежности каждого кортежа декартова произведения  $\mu_R(x, y)$  этому отношению (свойству):

$$R = \{(x, y), \mu_R(x, y); x \in X, y \in Y\}.$$

Пример отношения для непрерывной области определения (круг):

$$x, y \in R; c = \text{const};$$

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq c^2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отношения играют важную роль при описании знаний.

Например, пусть имеется множество стран и множество городов:

$$A = \{\text{Россия, Франция, Беларусь}\}.$$

$$B = \{\text{Москва, Тула, Минск, Токио, Париж}\}.$$

С помощью понятия отношения двух множеств, можно определить на множестве  $X \times Y$  отношение «столица государства» (рис.1.3).

Россия	1	0	0	0	0
X Франция	0	0	0	0	1
Беларусь	0	0	1	0	0
	Москва	Тула	Минск	Токио	Париж
	Y				

Рис.1.3.

**Понятие разбиения множества.** Допустим, на некотором универсальном множестве  $U$  заданы некоторые множества  $A_i$ , являющиеся подмножествами  $U$ . Подмножества  $A_i$  образуют разбиение  $U$ , если выполняются два условия:

$$1. A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j.$$

$$2. \bigcup_{i=1}^n A_i = U.$$

### Понятие нечеткого множества

Таким образом, в классической теории множеств, свойства принадлежности элементов множеству могут принимать только два значения: ноль или единица.

Вернемся к примеру о множестве «высокий человек». Ранее мы поставили границу - 180см. Очевидно, что в этом случае двузначная логика (типа "да" - "нет"), определяемая функцией принадлежности  $\mu_A(x): X \rightarrow \{0,1\}$ , не учитывает возможного разброса мнений различных людей относительно границ исследуемого множества  $A$ , влияния чисто биологических факторов, национальных особенностей и т. д.

Кроме того, если у человека рост 179 см, его наверное более целесообразно охарактеризовать как "высокий человек", нежели "низкий". Поэтому более естественным является задание функции принадлежности в



виде некоторой непрерывной зависимости (пунктирная кривая на рис.3.1), определяющей плавный переход из одного крайнего состояния («0») в другое ("1") (т.е. от **полной непринадлежности** элементов рассматриваемому множеству до **полной принадлежности** ему).

Таким образом, функция принадлежности в данном случае принимает непрерывные значения и ставит в соответствие каждому элементу  $x \in X$  число  $\mu_A(x)$  из интервала  $[0;1]$ , характеризующее **степень принадлежности** элемента  $x$  множеству  $A$ .

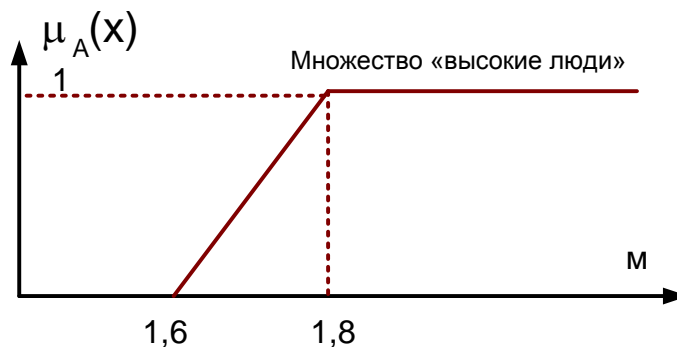


Рис.1.3. Графическое представление множества "высоких людей"

Заданное таким образом множество пар:

$$A = \{ x / \mu_A(x) ; x \in X \} \quad (1.3)$$

называется **нечетким** (или размытым) **множеством**.

Функция принадлежности  $\mu_A(x)$  принимает значения в интервале  $[0,1]$ , при этом можно выделить три случая:

- 1)  $\mu_A(x)=1$  означает полную принадлежность элемента  $x$  к нечеткому множеству  $A$ , т.е.  $x \in A$ ;
- 2)  $\mu_A(x)=0$  означает отсутствие принадлежности элемента  $x$  к нечеткому множеству  $A$ , т.е.  $x \notin A$ ;
- 3)  $0 < \mu_A(x) < 1$  означает частичную принадлежность элемента  $x$  к нечеткому множеству  $A$ .

Особенностью нечетких множеств является возможность принадлежности одного и того же элемента одновременно к различным множествам с различными степенями принадлежности.

## Способы задания нечетких множеств

- Если нечеткое множество  $A$  состоит из конечного числа элементов, то для записи такого дискретного множества используется выражение

$$A = \mu_A(x_1) / x_1 + \mu_A(x_2) / x_2 + \dots + \mu_A(x_n) / x_n,$$

$$\text{или } A = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) / x_i \quad (1.4)$$

где числа  $\mu_A(x_i)$  - степени принадлежности элементов  $x_i$  множеству  $A$ . Заметим, что знак "плюс" в (1.4) обозначает объединение, а не арифметическое суммирование. Обычное (четкое) дискретное множество при такой форме записи можно представить в виде

$$A = 1 / x_1 + 1 / x_2 + \dots + 1 / x_n \quad (1.5)$$

$$\text{или } A = \sum_{i=1}^n 1 / x_i$$

- Возможен и табличный способ задания нечеткого множества  $A$ . Например, таблица

$\mu_A(x_i)$	0,1	0,3	0,5	0,8	1,0
$x_i$	13	16	18	20	22

обозначает, что носитель  $A$  состоит из 5 элементов:  $x_1 = 14$ ,  $x_2 = 16$ ,  $x_3 = 18$ ,  $x_4 = 20$ ,  $x_5 = 22$ , степени принадлежности которых множеству  $A$  равны соответственно: 0,1; 0,3; 0,5; 0,8 и 1,0.

- На практике, если нечеткое множество  $A$  состоит из бесконечного числа точек, например, представляет собой некоторый интервал  $(a, b)$  на числовой оси  $x$ , то функция принадлежности  $\mu(x)$  обычно задается графически или в виде аналитической зависимости.

Если  $X$  – это пространство с бесконечным количеством элементов, то нечеткое множество  $A \subseteq X$  символически записывается в виде

$$A = \int_x \frac{\mu_A(x)}{x} dx. \quad (1.6)$$

Рассмотрим следующий пример. Допустим для измерения скорости вращения вала нагруженного электропривода используется выходное напряжение тахогенератора постоянного тока. Известно значение этого напряжения  $x=5B$ . Кроме того, известно, что ошибка такого измерения составляет  $\pm 1$  В. Тогда переход от четкого значения  $x=5$  (рис.1.5.а) к нечеткому множеству " $x$  приблизительно равно 5" может осуществляться различным образом (рис.1.5, (б и в)).

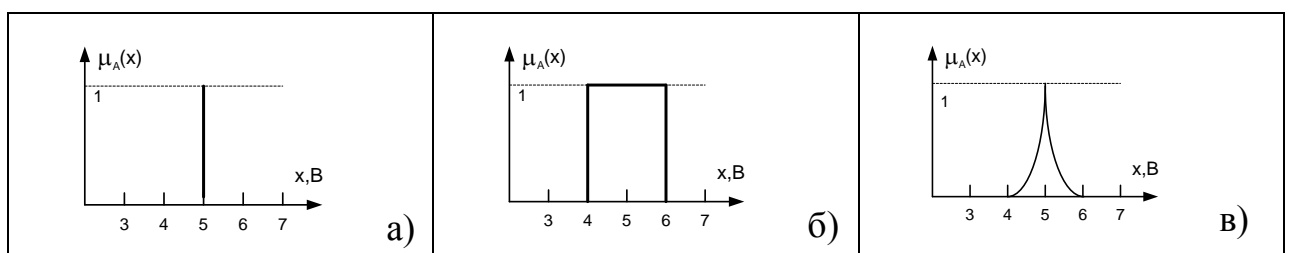


Рис.1.5. Построение функции принадлежности.

Функция принадлежности  $\mu(x)$ , приведенная на рис.3.2,в, описывается выражением

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{|x-5|}, & \text{если } x \geq 4 \text{ или } x \leq 6, \\ 0, & \text{если } x < 4 \text{ или } x > 6. \end{cases}$$

### Нечеткость и другие виды неопределенности

Человек постоянно сталкивается с двумя видами неопределенности – физическая и лингвистическая (рис.1.6).

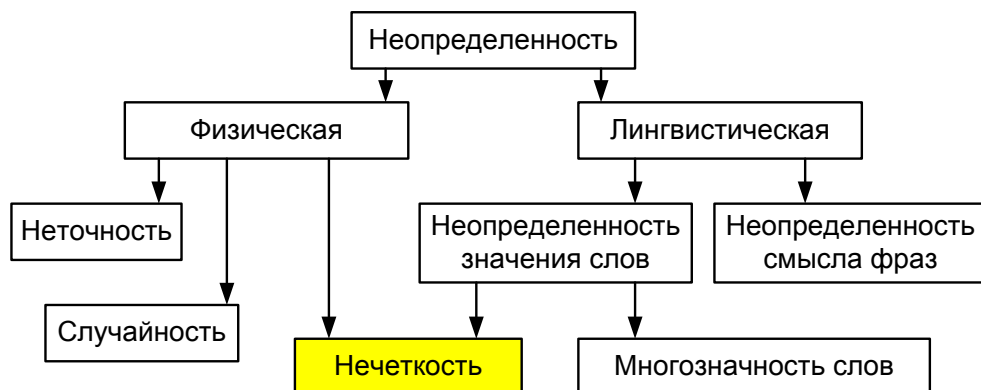


Рис.1.6

Физическая неопределенность (неточность) изучается в теории измерений. Неопределенность смысла фраз и значения слов изучается теорией формальных грамматик.

Физическая неопределенность процесса (величины) может быть обусловлена как случайным характером его протекания (изменения), так и нечеткостью его описания.

Понятия вероятности и нечеткости имеют некоторые общие черты, например вероятность, также изменяется в диапазоне от 0 до 1, однако применение теории вероятности требует выполнения ряда условий, таких как:

- повторяемость событий;
- независимость событий;
- общность наблюдаемых событий для всех явлений подобного рода.

### Основные типы функций принадлежности

При решении задач проектирования систем с нечеткими регуляторами, для представления функций принадлежности, как правило, используют стандартные формы функций принадлежности. Рассмотрим наиболее часто используемые формы для задания функций принадлежности.

1. Функция принадлежности S-класса (рис.1.7) (правая граница) определяется как

$$s(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2, & \text{если } b \leq x \leq c, \\ 1, & \text{если } x \geq c, \end{cases} \quad (1.7)$$

где  $b=(a+c)/2$ . Функция принадлежности, относящаяся к этому классу, имеет графическое представление (рис.1.7), напоминающее букву «S»,

причем ее форма зависит от подбора параметров  $a, b, c$ . В точке  $x=b=(a+c)/2$  функция принадлежности класса  $S$  принимает значение равное 0,5.

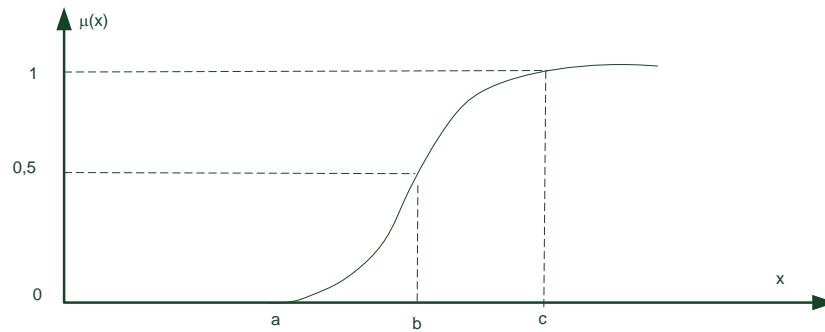


Рис.1.7.

2. Функция принадлежности  $\pi$ -класса (рис.1.8) определяется через функцию класса  $S$ , как:

$$\pi(x, b, c) = \begin{cases} s(x, c-b, c-b/2, c) & \text{если } x \leq c, \\ 1 - s(x, c, c+b/2, c+b) & \text{если } x \geq c, \end{cases} \quad (1.8)$$

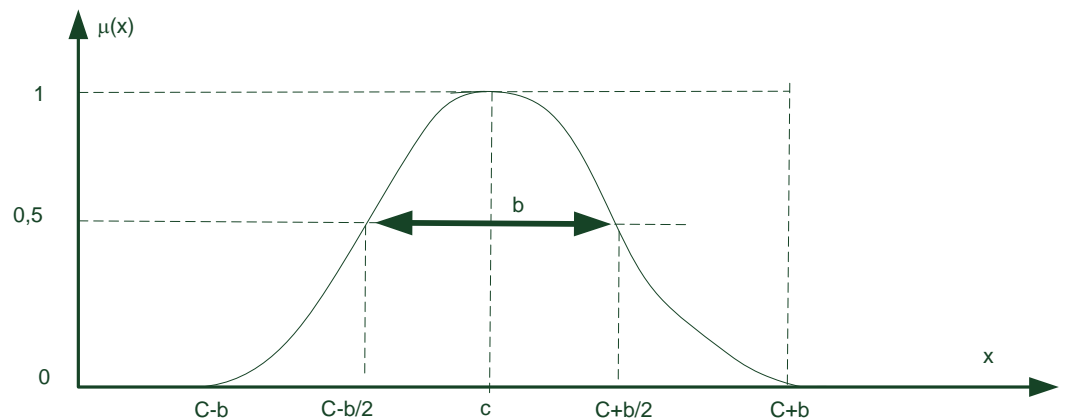


Рис.1.8.

Функция принадлежности класса  $\pi$  принимает нулевые значения для  $x \geq c+b$  и  $x \leq c-b$ . В точках  $x=c \pm b/2$  ее значение равно 0,5.

3. Функция принадлежности класса  $\gamma$

$$\gamma(x, a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{если } x \geq b, \end{cases} \quad (1.9)$$

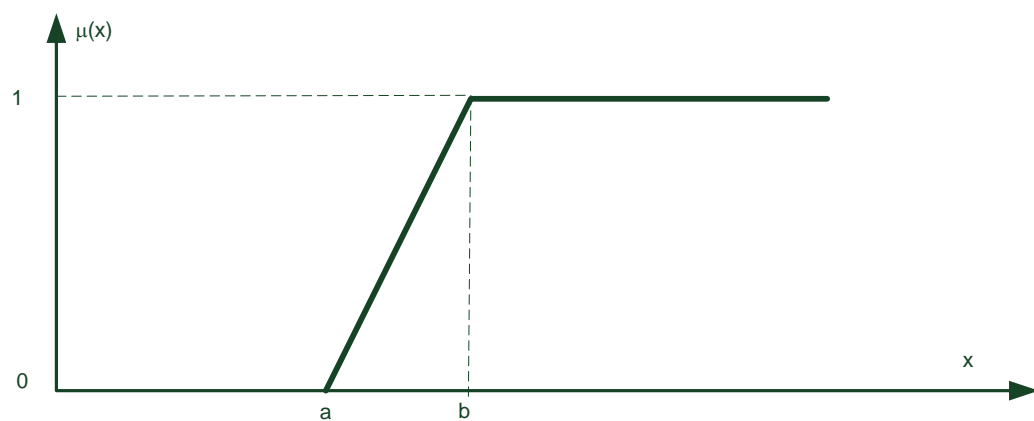


Рис.1.9.

3. Функция принадлежности класса L

$$L(x; a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{b-x}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{если } x \geq b, \end{cases} \quad (1.10)$$

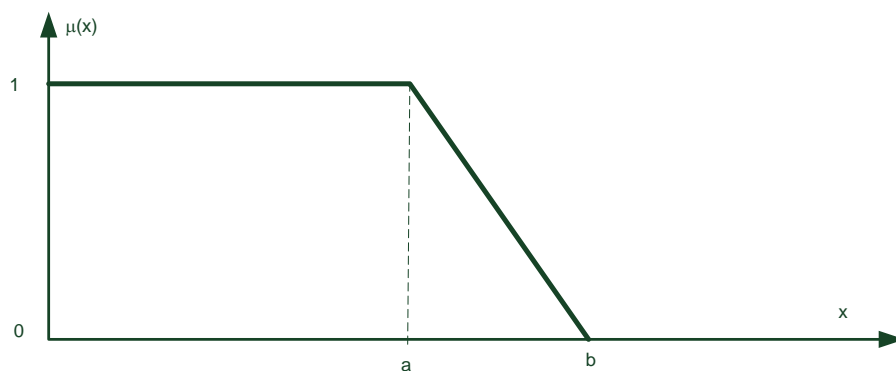


Рис.1.10.

3. Функция принадлежности класса t

$$t(x; a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{если } b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{если } x \geq c, \end{cases} \quad (1.11)$$

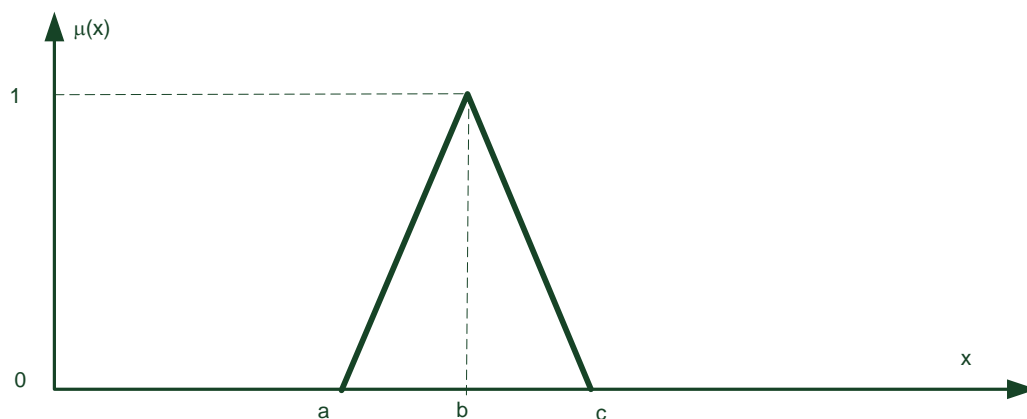


Рис.1.12.

### Основные свойства нечетких множеств.

Рассмотрим вначале некоторые определения.

**Универсум** – специальное универсальное множество, например,  $X$ , содержащего в рамках рассматриваемой задачи (процесса) все возможные элементы. Формально удобно считать, что все без исключения элементы универсума, как нечеткого множества, имеют функции принадлежности универсуму равные единице.

**Носителем** нечеткого множества  $A$ , называется обычное множество  $A_S$ , которое содержит те и только те элементы универсума, для которых значения функции принадлежности соответствующего нечеткого множества отлично от нуля. Математически носитель нечеткого множества определяется следующим выражением:

$$A_S = \{ x / \mu_A(x) > 0 ; x \in X \}. \quad (1.12)$$

Носитель обозначают **supp A** ( support).

**Эквивалентность.** Два нечетких множества  $A$  и  $B$  эквивалентны (это обозначается как  $A \equiv B$  тогда и только тогда, когда для всех  $x \in X$  имеет место  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ).

**Высота нечеткого множества A** sup (supremum –грань) находится как точная верхняя грань (максимум) его функции принадлежности:

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \quad . \quad (1.13)$$

Если высота нечеткого множества равна 1, то такое множество называется нормализованным. В том случае, когда высота нечеткого множества  $A$  меньше 1 (такое множество называется субнормальным), можно осуществить переход к нормализованному множеству путем деления его функции принадлежности  $\mu_A(x)$  на высоту  $\sup_{x \in X} \mu_A(x)$  (или  $h(A)$ ).

Если носитель нечеткого множества  $A$  состоит из единственной точки  $x$ , то такое множество называется **одноточечным** (singleton). Данное одноточечное множество обычно записывают в виде

$$A = \mu_A / x, \quad (1.14)$$

где  $\mu_A$  - степень принадлежности  $x$  множеству  $A$ .

### Пример 1.1.

Если  $X = \{1, 2, 3, 3, 5\}$  и

$$A = \frac{0,2}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,7}{4},$$

то  $\text{supp } A = \{1, 2, 3\}$ .

Если  $X = \{1, 2, 3, 3\}$  и

$$A = \frac{0,3}{2} + \frac{0,8}{3} + \frac{0,5}{4},$$

то  $h(A) = 0,8$ .

### Пример 1.2.

Нечеткое множество:

$$A = \frac{0,1}{2} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,3}{6},$$

после нормализации принимаем вид:



$$A_N = \frac{0,2}{2} + \frac{1,0}{4} + \frac{0,6}{6} ,$$

Нечеткое множество  $A$  называется **пустым** и обозначается  $A = \emptyset$ , тогда и только тогда, когда  $\mu_A(x) = 0$  для каждого  $x \in X$ . 4

Нечеткое множество  $A$  **содержится** в нечетком множестве  $B$ , что записывается как  $A \subset B$ , тогда и только тогда, когда:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad (1.15)$$

для каждого  $x \in X$ .

Пример включения (содержания) нечеткого множества  $A$  в нечетком множестве  $B$  иллюстрируется на рис. 1.13.

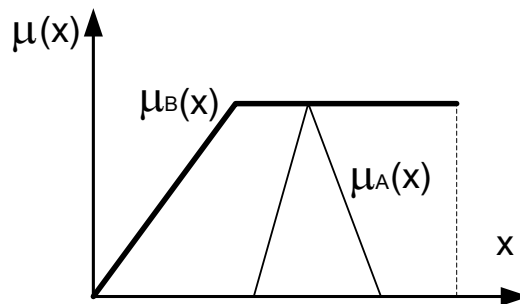


Рис. 1.13. Включение нечеткого множества  $A$  в нечеткое множество  $B$

В литературе встречается также понятие **степени включения** нечетких множеств. Степень включения нечеткого множества  $A$  в нечеткое множество  $B$  на рис. 1.13 равна 1 (полное включение). Нечеткие множества, представленные на рис. 1.14, не удовлетворяют зависимости (1.15), следовательно, включение в смысле определения (1.15) отсутствует.

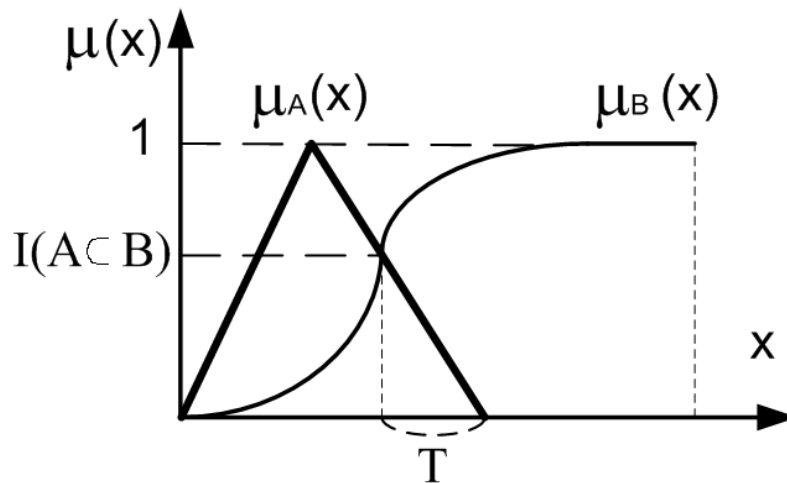


Рис.1.14. Содержание нечеткого множества  $A$  в нечетком множестве  $B$  в степени  $I(A \subset B)$ .

Однако нечеткое множество  $A$ , хотя бы и частично, но содержится в нечетком множестве  $B$ . Степень включения оценивается по зависимости:

$$I(A \subset B) = \min_{x \in T} \mu_B(x), \quad (1.16)$$

где  $T = \{ x / (\mu_A(x) > 0, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)); x \in X \}$  - четкое множество.

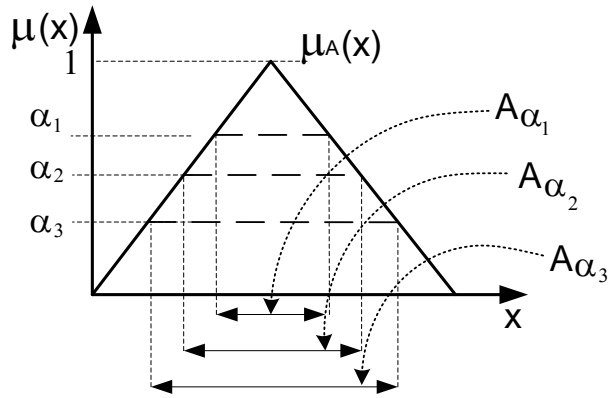
**Точка перехода нечеткого множества  $A$**  - это элемент  $x$  множества  $A$ , для которого  $\mu_A(x) = 0,5$ .

**$\alpha$  – разрезом** нечеткого множества  $A$ , обозначаемым как  $A_\alpha$ , называется следующее четкое множество:

$$A_\alpha = \{ x / \mu_A(x) > \alpha; x \in X \}, \quad (1.17)$$

Определение  **$\alpha$  – разреза нечеткого множества  $A$**  иллюстрирует рис.1.15. Легко заметить истинность импликации:

$$\alpha_2 < \alpha_1 \Rightarrow A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}, \quad (1.18)$$



4

Рис.1.15. Иллюстрация определения  $\alpha$  - разреза нечеткого множества  $A$

### Пример 1.3

Рассмотрим нечеткое множество  $A \subseteq X$  :

$$A = \frac{0,1}{2} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,7}{5} + \frac{0,8}{8} + \frac{1,0}{10},$$

причем  $X = \{1, \dots, 4\}$ .

В соответствии с определением конкретные  $\alpha$  – разрезy определяются в виде:

$$A_0 = X = \{1, \dots, 4\},$$

$$A_{0,1} = \{2, 3, 5, 8, 4\},$$

$$A_{0,3} = \{3, 5, 8, 4\},$$

$$A_{0,7} = \{5, 8, 4\},$$

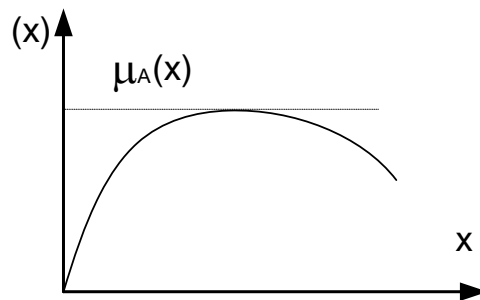
$$A_{0,8} = \{8, 4\},$$

$$A_{1,0} = \{4\}.$$

Нечеткое множество  $A \subseteq R$  является **выпуклым** тогда и только тогда, когда для произвольных  $x_1, x_2 \in R$  и  $\lambda \in [0, 1]$  выполняется условие:

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \quad (1.19)$$

На рис. 1.16. представлен пример нечеткого выпуклого множества:



4

Рис.1.16. Нечеткое выпуклое множество.

### Определение

Нечеткое множество  $A \subseteq R$  является **вогнутым** тогда и только тогда, когда можно подобрать такие  $x_1, x_2 \in R$  и  $\lambda \in [0,1]$  для которых будет выполняться условие:

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \quad (1.20)$$

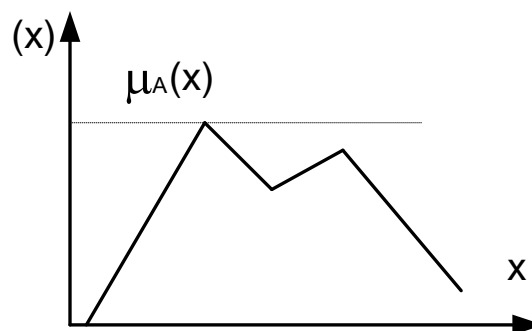


Рис. 1.17. Нечеткое вогнутое множество.

Рассматривая определения нечетких множеств и виды функций принадлежности необходимо отметить, что вопрос о том, как выбирается (или задается) в каждом конкретном случае функция принадлежности  $\mu(x)$  и какой она имеет смысл, остается в значительной степени спорным и мало изученным.

Наиболее распространенным является мнение, что  $\mu(x)$  может рассматриваться как "коэффициент уверенности" эксперта в том, что элемент  $x$  принадлежит множеству  $A$ .

## Определение лингвистической переменной

Для принятия решения человек в подавляющем большинстве случаев оперирует не с числовыми значениями, а с некоторой качественной оценкой событий, например, для принятия решения об изменении скорости движения автомобиля, она может быть оценена как: «слишком высокая», «средняя», «малая». Температура в рабочем помещении: «жарко- очень высокая температура», «средняя», «нормальная», «небольшая», «низкая» и т.д.

Причем принадлежность реальных значений скорости и температуры, принадлежащих той или иной качественной оценке носят порой субъективный характер и определяются зачастую опытным путем.

### Определение

**Переменные, значениями которых являются слова, фразы, предложения, выраженные на естественном языке, называют лингвистическими переменными (linguistic variables).**

**При этом сами значения переменных носят название – термы.**

Так, переменная "Рост (высота) человека" может характеризоваться одним из следующих значений - **термов** (terms), т.е. сжатых словесных описаний: "маленький", "невысокий", "среднего роста", "высокий".

Каждый терм в свою очередь определяется соответствующим нечетким множеством. Это значит, что каждый из приведенных выше примеров термов лингвистических переменных «Рост человека» или «Скорость движения автомобиля» может рассматриваться как имя (символ) некоторого нечеткого подмножества в составе полного множества значений  $X$ .

Задать нечеткое подмножество  $A_i$ , соответствующее определенному ( $i$ -му) терму (значению) лингвистической переменной, - это значит задать область определения числовой переменной  $x$  и функцию принадлежности элемента  $x$  подмножеству  $A_i$ .

Рассмотрим в качестве примера лингвистическую переменную "Скорость автомобиля". Будем полагать, что различные значения физической переменной  $x$  (скорости, в км/ч) могут быть охарактеризованы набором из 5 нечетких подмножеств (значений лингвистической переменной): {"Очень низкая", "Малая", "Средняя", "Большая", "Очень большая"}.

Конечно, вид функции принадлежности для каждого термина во многом зависит от выбранного транспортного средства (автомобиль грузовой, легковой, спортивный; времени суток; типа дорожного покрытия и т.д.). в качестве примера приведены функции принадлежности для каждого из указанных выше значений лингвистической переменной «Скорость автомобиля».

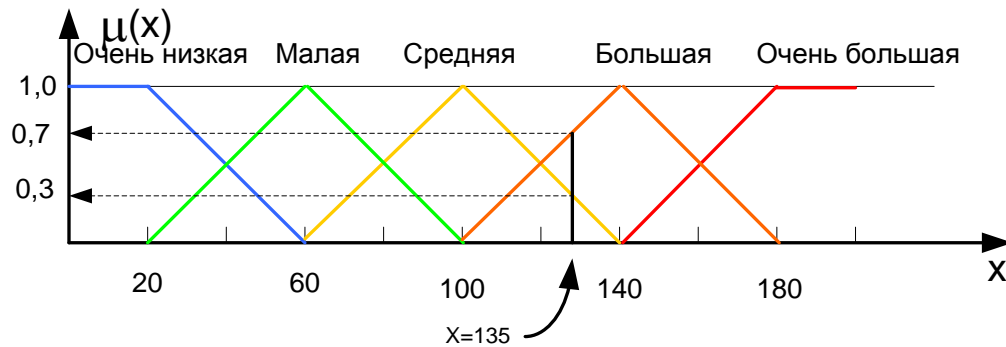


Рис.1.18. Лингвистическая переменная "Скорость автомобиля"

Допустим, что фактическое значение скорости равно 135 км/ч. Тогда, в соответствии с рис.1.17, это значение относится одновременно к двум термам (подмножествам) - "Средняя" и "Большая" - со степенями принадлежности  $\mu_{\text{СРЕДНЯЯ}}(135) = 0,7$  и  $\mu_{\text{БОЛЬШАЯ}}(135) = 0,3$  соответственно.

Совокупность N нечетких множеств образует нечеткое разбиение базового множества, если выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^N \mu_{A_i}(x) = 1; \quad \forall x \in X.$$

## Основные типы функций принадлежности

4

При решении задач проектирования систем с нечеткими регуляторами, для представления функций принадлежности, как правило, используют стандартные формы функций принадлежности. Рассмотрим наиболее часто используемые формы для задания функций принадлежности.

1. Функция принадлежности S-класса (рис.2.1) (правая граница) определяется как

$$s(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2, & \text{если } b \leq x \leq c, \\ 1, & \text{если } x \geq c, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $b=(a+c)/2$ . Функция принадлежности, относящаяся к этому классу, имеет графическое представление (рис.2.1), напоминающее букву «S», причем ее форма зависит от подбора параметров  $a, b, c$ . В точке  $x=b=(a+c)/2$  функция принадлежности класса S принимает значение равное 0,5.

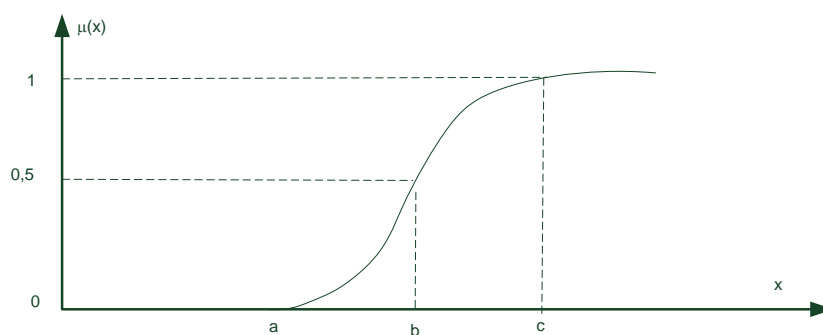


Рис.2.1.

2. Функция принадлежности π-класса (рис.2.2) определяется через функцию класса S, как:

$$\pi(x, b, c) = \begin{cases} s(x, c-b, c-b/2, c) & \text{если } x \leq c, \\ 1 - s(x, c, c+b/2, c+b) & \text{если } x \geq c, \end{cases} \quad (2.2)$$

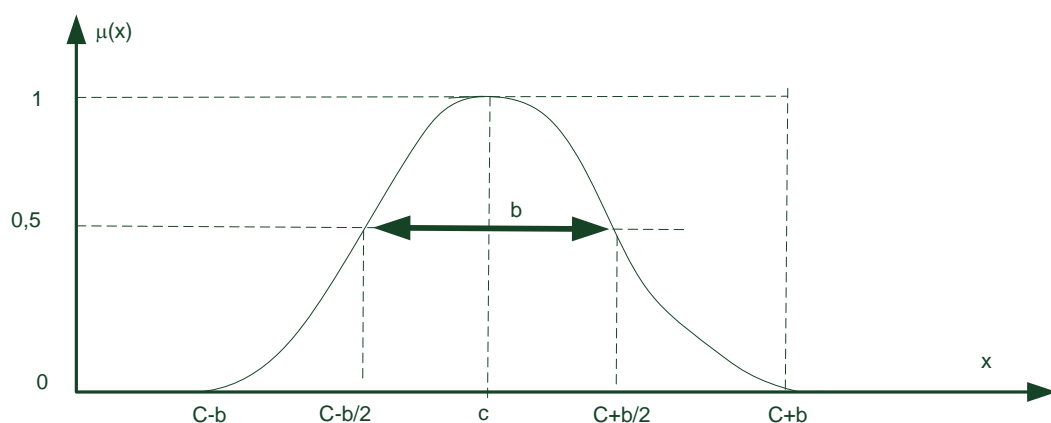


Рис.2.2.

Функция принадлежности класса  $\pi$  принимает нулевые значения для  $x \geq c+b$  и  $x \leq c-b$ . В точках  $x = c \pm b/2$  ее значение равно 0,5.

### 3. Функция принадлежности класса $\gamma$

$$\gamma(x, a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{если } x \geq b, \end{cases} \quad (2.3)$$

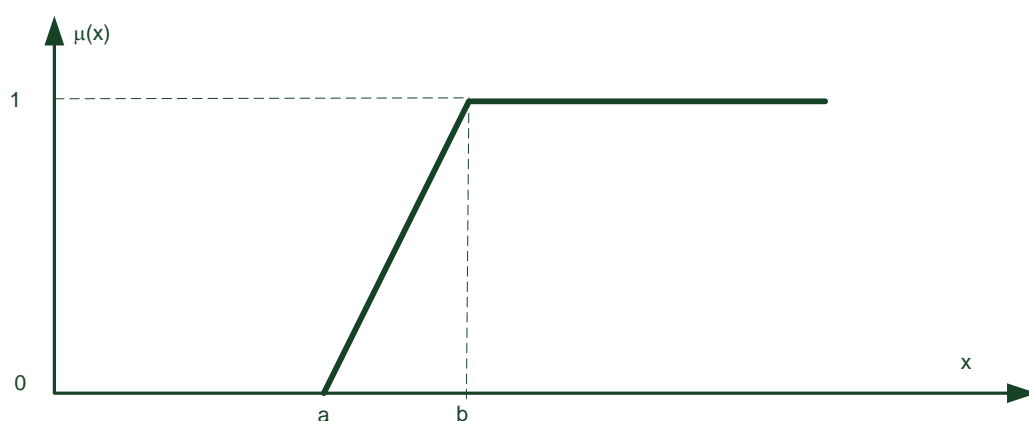


Рис.2.3.

### 3. Функция принадлежности класса L

$$L(x; a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{b-x}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{если } x \geq b, \end{cases} \quad (2.4)$$



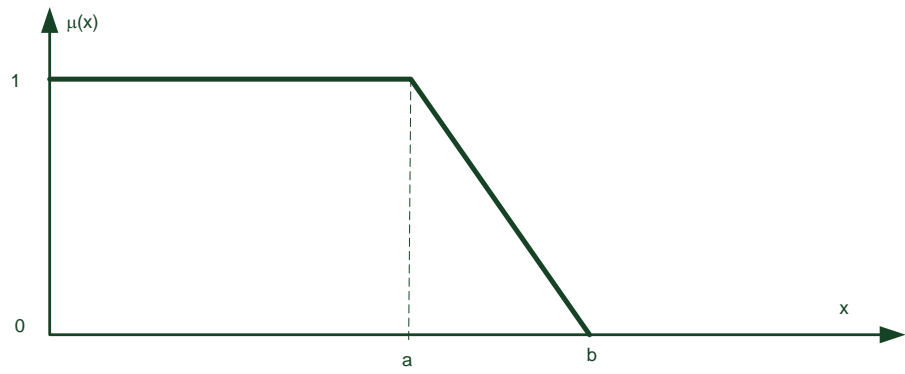


Рис.2.4.

### 3. Функция принадлежности класса $t$

$$t(x; a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{если } b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{если } x \geq c, \end{cases} \quad (2.5)$$

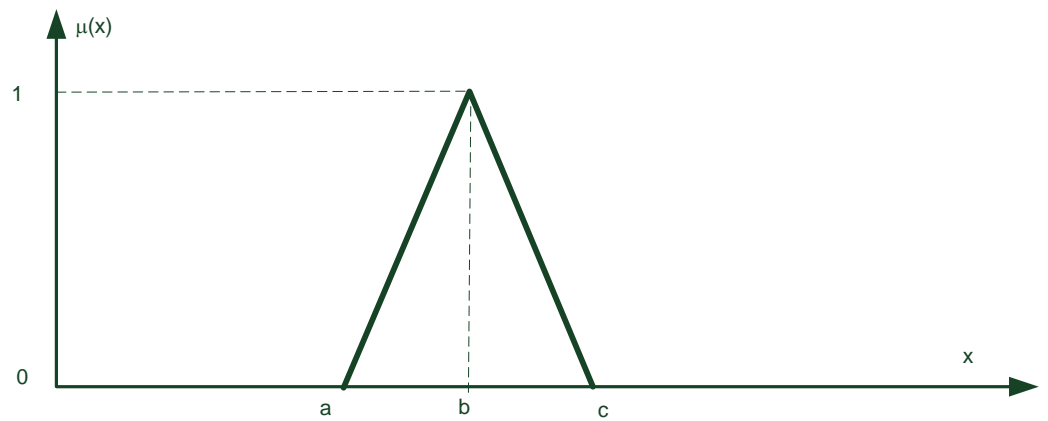


Рис.2.5.

## Основные свойства нечетких множеств.

Рассмотрим вначале некоторые определения.

4

**Универсум** – специальное универсальное множество, например,  $X$ , содержащего в рамках рассматриваемой задачи (процесса) все возможные элементы. Формально удобно считать, что все без исключения элементы универсума, как нечеткого множества, имеют функции принадлежности универсуму равные единице.

**Носителем** нечеткого множества  $A$ , называется обычное множество  $A_S$ , которое содержит те и только те элементы универсума, для которых значения функции принадлежности соответствующего нечеткого множества отлично от нуля. Математически носитель нечеткого множества определяется следующим выражением:

$$A_S = \{ x / \mu_A(x) > 0 ; x \in X \}. \quad (2.6)$$

Носитель обозначают **supp A** ( support).

**Эквивалентность.** Два нечетких множества  $A$  и  $B$  эквивалентны (это обозначается как  $A \equiv B$  тогда и только тогда, когда для всех  $x \in X$  имеет место  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ).

**Высота нечеткого множества**  $A$   $\sup$  (supremum –грань) находится как точная верхняя грань (максимум) его функции принадлежности:

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \quad . \quad (2.7)$$

Если высота нечеткого множества равна 1, то такое множество называется нормализованным. В том случае, когда высота нечеткого множества  $A$  меньше 1 (такое множество называется субнормальным), можно осуществить переход к нормализованному множеству путем деления его функции принадлежности  $\mu_A(x)$  на высоту  $\sup_{x \in X} \mu_A(x)$  (или  $h(A)$ ).

Если носитель нечеткого множества  $A$  состоит из единственной точки  $x$ , то такое **множество называется однотоочечным** (singleton). Данное однотоочечное множество обычно записывают в виде

$$A = \mu_A / x, \quad (2.8)$$

где  $\mu_A$  - степень принадлежности  $x$  множеству  $A$ .

4

### Пример 2.1.

Если  $X = \{1, 2, 3, 3, 5\}$  и

$$A = \frac{0,2}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,7}{4},$$

то  $\text{supp } A = \{1, 2, 3\}$ .

Если  $X = \{1, 2, 3, 3\}$  и

$$A = \frac{0,3}{2} + \frac{0,8}{3} + \frac{0,5}{4},$$

то  $h(A) = 0,8$ .

### Пример 2.2.

Нечеткое множество:

$$A = \frac{0,1}{2} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,3}{6},$$

после нормализации принимаем вид:

$$A_N = \frac{0,2}{2} + \frac{1,0}{4} + \frac{0,6}{6},$$

Нечеткое множество  $A$  называется **пустым** и обозначается  $A = \emptyset$ , тогда и только тогда, когда  $\mu_A(x) = 0$  для каждого  $x \in X$ .

Нечеткое множество  $A$  **содержится** в нечетком множестве  $B$ , что записывается как  $A \subset B$ , тогда и только тогда, когда:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad (2.9)$$

для каждого  $x \in X$ .

Пример включения (содержания) нечеткого множества  $A$  в нечетком множестве  $B$  иллюстрируется на рис. 2.6.

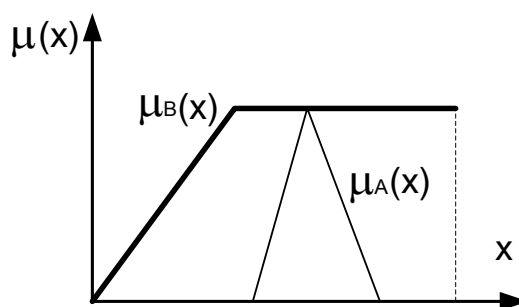


Рис. 2.6. Включение нечеткого множества  $A$  в нечеткое множество  $B$

В литературе встречается также понятие **степени включения** нечетких множеств. Степень включения нечеткого множества  $A$  в нечеткое множество  $B$  на рис. 2.6 равна 1 (полное включение). Нечеткие множества, представленные на рис. 2.7, не удовлетворяют зависимости (2.9), следовательно, включение в смысле определения (2.9) отсутствует.

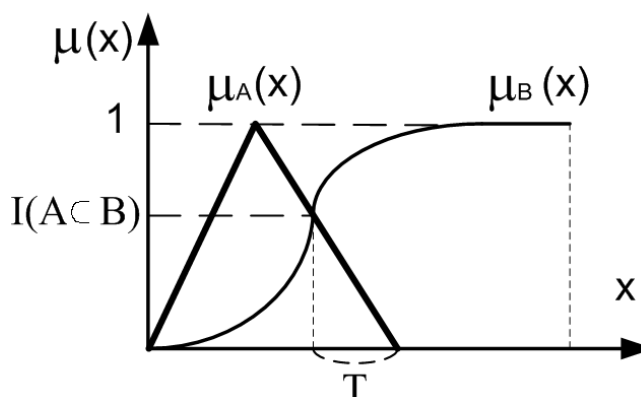


Рис.2.7. Содержание нечеткого множества  $A$  в нечетком множестве  $B$  в степени  $I(A \subset B)$ .

Однако нечеткое множество  $A$ , хотя бы и частично, но содержится в нечетком множестве  $B$ . Степень включения оценивается по зависимости:

$$I(A \subset B) = \min_{x \in T} \mu_B(x), \quad (2.10)$$

где  $T = \{ x / (\mu_A(x) > 0, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)) ; x \in X \}$  - четкое множество.

**Точка перехода нечеткого множества  $A$**  - это элемент  $x$  множества  $A$ , для которого  $\mu_A(x) = 0,5$ .

$\alpha$  – **разрезом** нечеткого множества  $A$ , обозначаемым как  $A_\alpha$ , называется следующее четкое множество:

$$A_\alpha = \{ x / \mu_A(x) > \alpha; x \in X \}, \quad 4 \quad (2.11)$$

Определение  $\alpha$  – **разреза нечеткого множества**  $A$  иллюстрирует рис.2.4. Легко заметить истинность импликации:

$$\alpha_2 < \alpha_1 \Rightarrow A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2}, \quad (2.12)$$

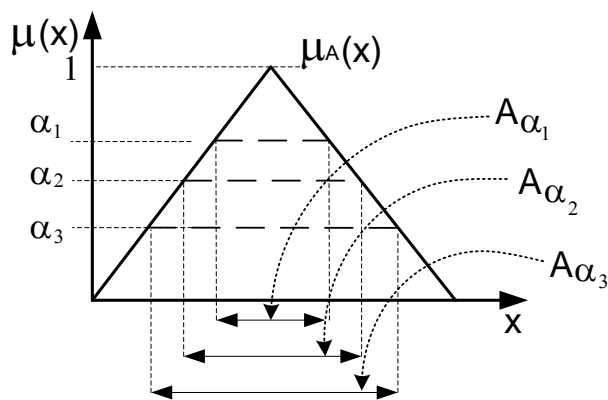


Рис.2.8. Иллюстрация определения  $\alpha$  - разреза нечеткого множества  $A$

### Пример 2.3

Рассмотрим нечеткое множество  $A \subseteq X$  :

$$A = \frac{0,1}{2} + \frac{0,3}{4} + \frac{0,7}{5} + \frac{0,8}{8} + \frac{1,0}{10},$$

причем  $X = \{1, \dots, 4\}$ .

В соответствии с определением конкретные  $\alpha$  – разрезy определяются в виде:

$$A_0 = X = \{1, \dots, 4\},$$

$$A_{0,1}=\{2,3,5,8,4\},$$

$$A_{0,3}=\{3,5,8,4\},$$

$$A_{0,7}=\{5,8,4\},$$

$$A_{0,8}=\{8,4\},$$

$$A_{1,0}=\{4\}.$$

4

Нечеткое множество  $A \subseteq R$  является **выпуклым** тогда и только тогда, когда для произвольных  $x_1, x_2 \in R$  и  $\lambda \in [0,1]$  выполняется условие:

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \quad (2.13)$$

На рис. 2.9. представлен пример нечеткого выпуклого множества:

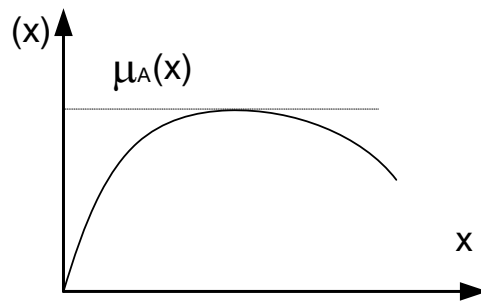
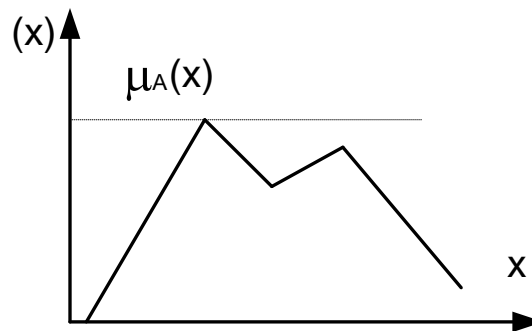


Рис.2.9. Нечеткое выпуклое множество.

### Определение

Нечеткое множество  $A \subseteq R$  является **вогнутым** тогда и только тогда, когда можно подобрать такие  $x_1, x_2 \in R$  и  $\lambda \in [0,1]$  для которых будет выполняться условие:

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \quad (2.14)$$



4

Рис. 2.10. Нечеткое вогнутое множество.

Рассматривая определения нечетких множеств и виды функций принадлежности необходимо отметить, что вопрос о том, как выбирается (или задается) в каждом конкретном случае функция принадлежности  $\mu(x)$  и какой она имеет смысл, остается в значительной степени спорным и мало изученным.

Наиболее распространенным является мнение, что  $\mu(x)$  может рассматриваться как "коэффициент уверенности" эксперта в том, что элемент  $x$  принадлежит множеству  $A$ .

### Операции с нечеткими множествами

Определение операций, выполняемых с нечеткими множествами, во многом аналогично операциям с обычными (четкими) множествами, однако необходимо отметить, что поскольку нечеткое множество является расширением обычного четкого множества то и **набор операций для НМ значительно более широкий и разнообразный**.

Рассмотрим основные операции, наиболее часто используемые при проектировании систем управления с нечеткими регуляторами. Пусть  $A$  и  $B$  – произвольные нечеткие множества, заданные на одном и том же универсуме  $X$ . Начнем с рассмотрения операций, с которыми уже хорошо знакомы из теории множеств, а именно, **пересечение, объединение, дополнение**.

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$1) a \wedge b = \min(a, b),$$

$$2) a \vee b = \max(a, b).$$

#### Пересечение (конъюнкция)

Операция пересечения нечетких множеств по аналогии с обычными множествами обозначаются знаком « $\cap$ ». В этом случае результат операции пересечения двух нечетких множеств записывается в виде  $C = A \cap B$ .

**Пересечением** двух нечетких множеств  $A$  и  $B \subseteq X$  называется нечеткое множество  $C$  с функцией принадлежности:

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad (3.1)$$

для каждого  $x \in X$ .

Графическая интерпретация этой операции представлена на рис. 3.1.

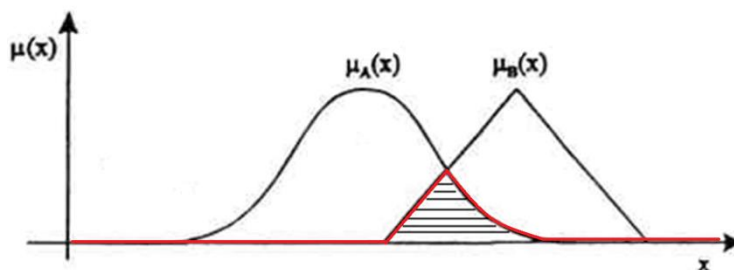


Рис. 3.1. Графическое представление операции пересечения нечетких множеств.



Как нетрудно заметить, результат пересечения  $A \cap B$  есть наибольшее нечеткое множество  $C$ , которое содержится одновременно в нечетких множества  $A$  и  $B$ .

Пересечение нечетких множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  определяется функцией принадлежности:

$$\mu_C(x) = \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)), \quad (3.2)$$

для каждого  $x \in X$ .

Операцию пересечения нечетких множеств иногда называют  **$\min(\circ)$**  – **пересечением**.

Для выпуклых нечетких множеств имеет место следующее свойство:

*Если нечеткие множества  $A$  и  $B$  – выпуклые, то и их пересечение  $C = A \cap B$  также является выпуклым нечетким множеством.*

### Объединение (дизъюнкция)

Операция объединения нечетких множеств с обычными множествами обозначается знаком " $\cup$ ", а результат:  $C = A \cup B$ .

Объединением двух нечетких множеств  $A$  и  $B$  называется некоторое третье множество  $C$ , заданное на этом универсуме  $X$ , функция принадлежности которого определяется по следующей формуле:

$$\mu_C(x) = \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad (3.3)$$

для каждого  $x \in X$ .

Графическая интерпретация этой операции представлена на рис. 3.2.

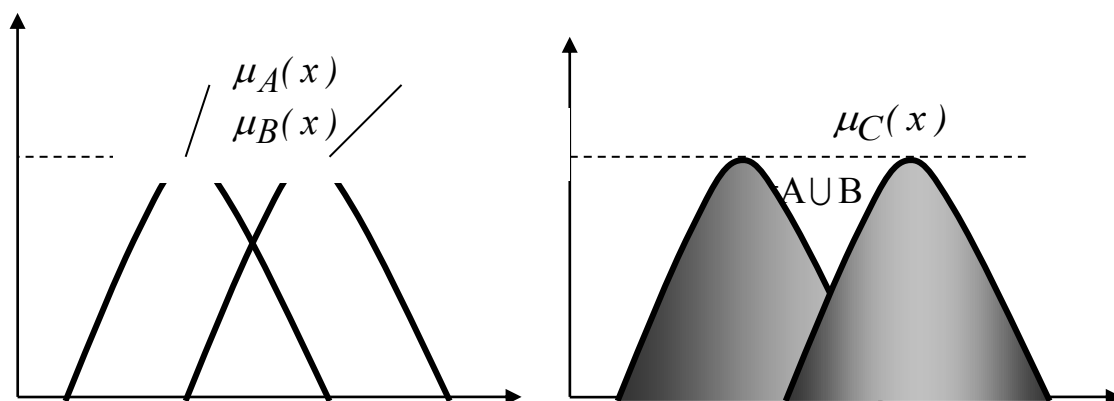


Рис.3.2.

Как нетрудно заметить, объединение  $C = A \cup B$  есть наименьшее нечеткое множество С, которое включает оба множества А и В.

Операцию объединения нечетких множеств иногда называют **max (o) – объединением**.

Функции принадлежности объединения нескольких множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  выражаются зависимостью:

$$\mu_D(x) = \max(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)), \quad (3.3)$$

для каждого  $x \in X$ .

### ***Рассмотрим примеры операций объединения и пересечения***

Допустим, заданы два нечетких множества на одном универсуме Х:

А- «небольшое натуральное число»:

$$A = \frac{1.0}{1} + \frac{1.0}{2} + \frac{0.9}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.6}{5} + \frac{0.5}{6} + \frac{0.4}{7} + \frac{0.2}{8} + \frac{0.1}{9}.$$

В- «число приблизительно равное 2»:

$$B = \frac{0.6}{1} + \frac{1.0}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.2}{5} + \frac{0}{6} + \frac{0}{7} + \frac{0}{8} + \frac{0}{9}.$$

Тогда нечеткие множества А и В, а также результаты операций объединения и пересечения представлены в таблице:

Х	1	2	3	3	5	6	7	8	9
$\mu_A(A)$	1.0	1.0	0.9	0.8	0.6	0.5	0.3	0.2	0.1
$\mu_B(B)$	0.6	1.0	0.6	0.3	0.2	0	0	0	0
$A \cup B$	1.0	1.0	0.9	0.8	0.6	0.5	0.3	0.2	0.1
$A \cap B$	0.6	1.0	0.6	0.3	0.2	0	0	0	0

### **Дополнение**

Дополнение нечеткого множества А обозначается через  $\bar{A}$  и определяется как нечеткое множество  $\bar{A} = \{x / \mu_{\bar{A}}(x); \forall x \in X\}$ , функции принадлежности которого  $\mu_{\bar{A}}(x)$  определяется по следующей формуле:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X. \quad (3.4)$$

Графически данная функция иллюстрируется рис.3.3.

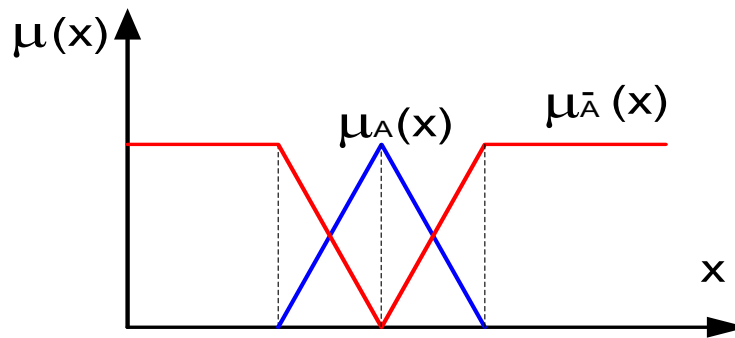


Рис.3.3

Для рассмотренных операций над нечеткими множествами имеют место следующие **фундаментальные свойства**.

Пусть  $A, B, C$  – произвольные нечеткие множества, заданные на одном и том же универсуме.

Справедливы следующие утверждения:

-**коммутативность** операций объединения и пересечения нечетких множеств:

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A \quad (3.5)$$

-**ассоциативность** операции объединения и пересечения нечетких множеств:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad (3.6)$$

-**дистрибутивность** операций  $\cap$  и  $\cup$  относительно друг друга

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (3.7)$$

-**идемпотентность** операций  $\cup$  и  $\cap$ :

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A \quad (3.8)$$

-**поглощение** одного из нечетких множеств при операции объединения и пересечения нечетких множеств:

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A \quad (3.9)$$

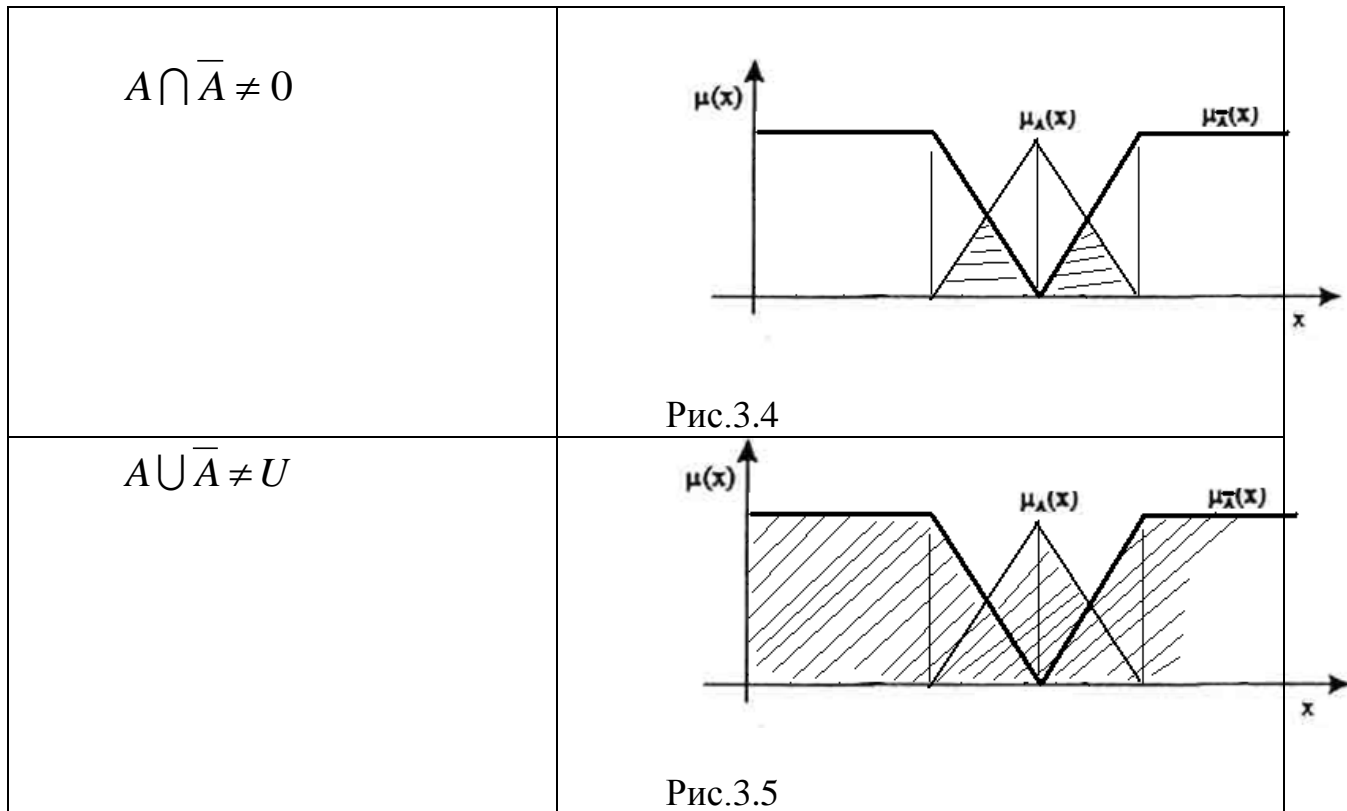
-**инволюция**

$$\overline{\overline{A}} = A \quad (3.10)$$

- **законы Моргана**

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B} \qquad (3.11)$$

**Особенностью рассматриваемых операций** над четкими множествами является то, что для них не выполняются законы исключенного третьего и тождества (рис.3.4,3.5).



### Нечеткие операторы. Альтернативные операции пересечения и объединения нечетких множеств

Рассмотренные операции  $\min(\circ)$  – пересечения и  $\max(\circ)$  – объединения являются не единственными для определения пересечения и объединения нечетких множеств, поскольку они (в отличие от классической теории множеств) не исчерпывают все потенциально возможные в общей теории нечетких множеств способы их задания.

При этом целесообразность применения альтернативных операций может быть обусловлена специфическими особенностями конкретных практических задач и стремлением повысить адекватность интерпретации используемых нечетких моделей на основе учета нюансов решаемой задачи.

### Алгебраическое пересечение (произведение)

Одной из таких операций является операция «алгебраическое пересечение (произведение)» (algebraic product).

Алгебраическим пересечением (или алгебраическим произведением) двух нечетких множеств  $A$  и  $B$  называется некоторое третье нечеткое множество  $C=A \cdot B$ , заданное на этом же универсуме  $X$ , функция принадлежности которого определяется по формуле:

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in X \quad (3.12)$$

т.е. как результат обычного алгебраического произведения соответствующих значений функций принадлежности обозначается:

$$C = A \cdot B \quad (3.13)$$

Таким образом, алгебраическое произведение нечетких множеств  $A$  и  $B$  – это нечеткое множество  $C=A \cdot B$ , определенное как:

$$C = \{x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x); \quad x \in X\}. \quad (3.14)$$

Графическая интерпретация этой операции представлена на рис. 3.6.

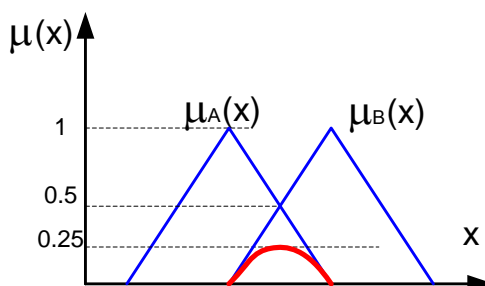


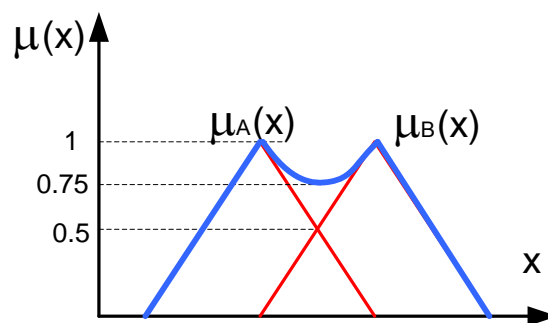
Рис. 3.6. Графическое представление операции алгебраического произведения.

### Алгебраическое объединение (алгебраическая сумма)

Алгебраическим объединением (или алгебраической суммой) двух нечетких множеств  $A$  и  $B$  называется нечеткое множество  $D=A \oplus B$ , заданное на этом же универсуме  $X$ , функция принадлежности которого определяется по следующей формуле:

$$\mu_D(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \forall x \in X \quad (3.15)$$

где справа от знака равенства использованы обычные арифметические операции (рис.3.7).



4

Рис.3.7.

Поскольку областью определения и областью значений операций пересечения и объединения является интервал  $[0,1]$ , то все операции с нечеткими множествами могут быть рассмотрены графически с применением трехмерного куба.

Графическое представление  $\cap$  - пересечения и алгебраического произведения в трехмерном пространстве приведено на рис.3.8.

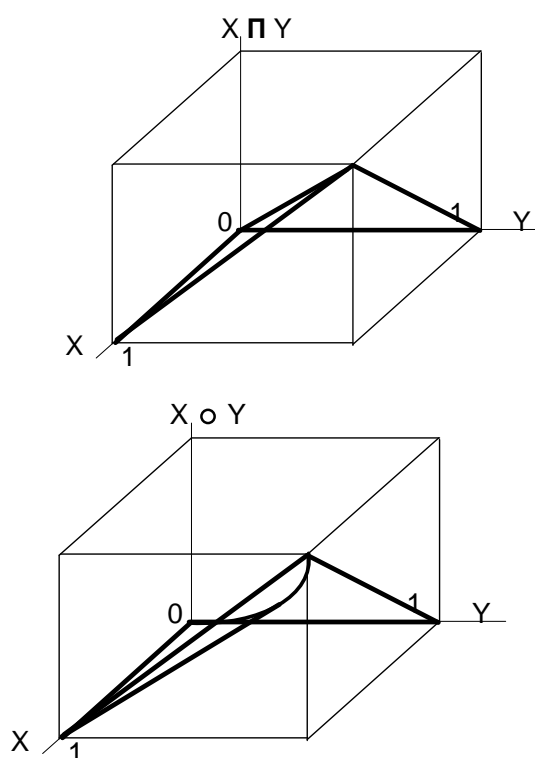


Рис.3.8.

Графическое представление операций  $\cup$ -объединения и алгебраического объединения (рис.3.9).

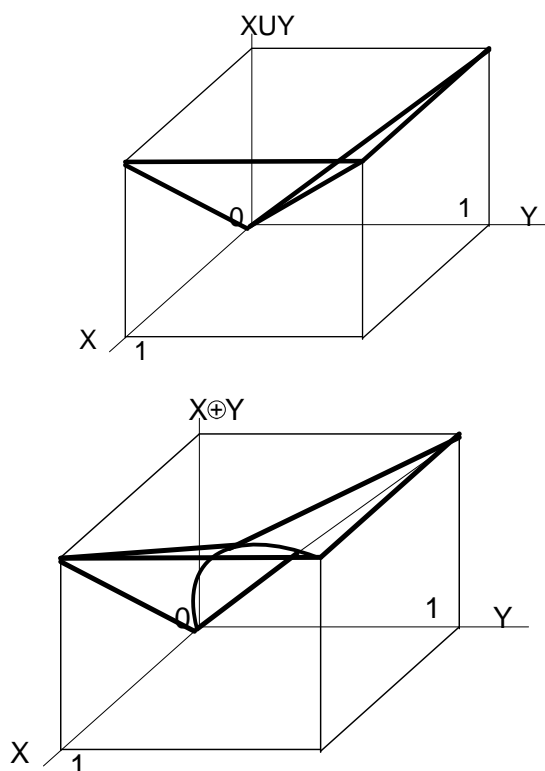


Рис.3.9.

Таким образом, мы рассмотрели по два варианта для операций объединения и пересечения нечетких множеств. На практике это разнообразие намного богаче (более десятка вариантов).

### **Треугольная норма (Т-норма)**

Обобщением нечетких операций пересечения и объединения являются нечеткие операторы:

- **треугольная норма** (Т-норма);
- **треугольная конорма** (S-норма или Т-конорма).

Нечеткие операторы  $T$  и  $S$  обозначают функции со специальными свойствами. Подробно эти свойства будут рассмотрены ниже. Здесь же отметим два общих важных свойства: Т-норма и S-норма это функции двух действительных переменных  $x$  и  $y$ , определенных на интервалах  $0 \leq x \leq 1$  и  $0 \leq y \leq 1$ . Значения функций  $T(x,y)$  и  $S(x,y)$  также находятся в интервале от 0 до 1.

Произвольная действительная функция от двух переменных

$$T:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \quad (3.16)$$

называется *треугольной нормой*, если она удовлетворяет следующим свойствам, называемым аксиомами треугольной нормы:

1. функция  $T$  является монотонной относительно обоих аргументов

$$T(a,c) \leq T(b,d), \quad \text{если } a \leq b, c \leq d$$

2. функция  $T$  удовлетворяет условию коммутативности

$$T(x,y) = T(y,x)$$

3. функция  $T$  удовлетворяет граничным условиям

$$T(x,0) = 0, \quad T(x,1) = x$$

4. функция  $T$  удовлетворяет условию связности (ассоциативность)

$$T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c)).$$

### 3.3.2. Треугольная конорма (S -норма)

Произвольная действительная функция от 2-х переменных

$$S:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \quad (3.17)$$

называется *треугольной S -нормой*, если она удовлетворяет следующим свойствам:

1. функция  $S$  является монотонной относительно обоих аргументов

$$S(a,c) \leq S(b,d), \quad \text{если } a \leq b, c \leq d$$

2. функция  $S$  удовлетворяет условию коммутативности

$$S(x,y) = S(y,x)$$

3. функция  $S$  удовлетворяет граничным условиям

$$S(x,0) = x, \quad S(x,1) = 1$$

4. функция  $T$  удовлетворяет условию связности (ассоциативность)

$$S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c))$$

В таблице 3.1.а и 3.1.б — показаны наиболее часто встречающиеся частные случаи  $T$ - и  $S$ - норм.



Т-норма (таблица 3.1.а)

	$T(a,b)$	наименование
	$\min(x, y)$	пересечение (мин- пересечение)
	$x \cdot y$	алгебраическое произведение
	$\begin{cases} 0, & \text{если } \max(x, y) < 1 \\ \min(x, y), & \text{если } \max(x, y) = 1 \end{cases}$	ограниченное произведение
	$\max(0, x + y - 1)$	усиленная сумма

S-конорма (таблица 3.1.б)

	$S(a,b)$	наименование
	$\max(x, y)$	объединение (макс-объединение)
	$1 - (1 - x) \cdot (1 - y)$	алгебраическая сумма
	$\begin{cases} 1, & \text{если } \min(x, y) > 0 \\ \max(x, y), & \text{если } \min(x, y) = 0 \end{cases}$	ограниченная сумма
	$\min(1, x + y)$	усиленная разность

Рассмотренные функции Т- и S- норм называются триангулярными. Названы они так потому, что они определяются только в треугольнике:

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

### **Дополнительные операции над нечеткими множествами**

Среди дополнительных операций, которые находят применение при построении нечетких моделей сложных систем, следует отметить операции разности нечетких множеств, умножения нечеткого множества на число и возведение нечеткого множества в степень.

### **Разность нечетких множеств**

Разностью двух нечетких множеств А и В называется некоторое третье нечеткое множество Е, заданное на том же универсуме Х, функция принадлежности которого определяется по формуле:

$$\mu_E(x) = \max(\mu_A(x) - \mu_B(x), 0), \quad \forall x \in X. \quad (3.18)$$

где под знаком максимума используется обычная операция арифметической разности двух чисел. Операция разности двух чисел нечетких множеств по аналогии с обычными множествами обозначается знаком «\», т.е. :

$$E = A \setminus B.$$

Графически данную операцию иллюстрирует рис.3.4.

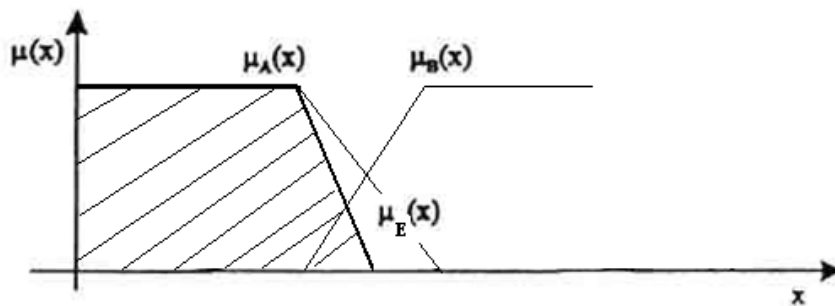


Рис.3.10

Как видно из формулы 3.18, функция принадлежности является неотрицательной (если разность функций принадлежности меньше нуля, то она обнуляется).

### Симметричная разность нечетких множеств

Следует заметить, что операции разности двух нечетких множеств в отличие от операций  $\wedge$  и  $\vee$  не является коммутативной, т.е. в общем случае

$$A \setminus B \neq B \setminus A. \quad (3.19)$$

Симметрическая разность двух нечетких множеств А и В (обозначается  $A \ominus B$ ):

$$\mu_{A \ominus B}(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, \quad \forall x \in X. \quad (3.20)$$

где в правой части выражения применяется операция модуля (абсолютного значения) числа.

Графически данную операцию иллюстрирует рис.3.11.

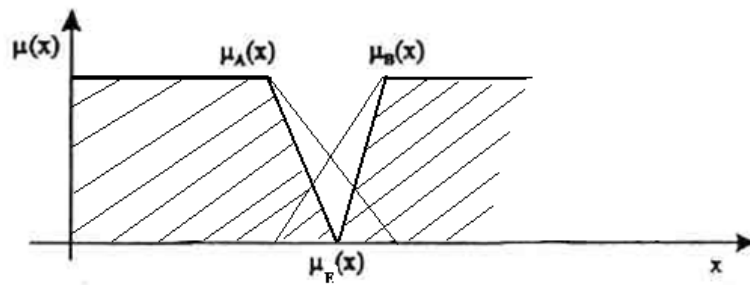


Рис.3.11.

При этом оказываются справедливым следующее утверждение:

$$A \ominus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \quad (3.22)$$

Т.е. симметрическая разность двух нечетких множеств представляет собой объединение двух разностей нечетких множеств A и B.

### Умножение нечеткого множества на число

Пусть  $A = \{x / \mu_A(x); \forall x \in X\}$  – произвольное нечеткое множество, заданное на универсуме  $X$ ;  $\alpha$  – положительное действительное число, такое, что:

$$\alpha \cdot h_A \leq 1. \quad (3.23)$$

Результат операции умножения A на  $\alpha$  определяется как нечеткое множество  $B = \{x / \mu_B(x); \forall x \in X\}$  заданное на том же универсуме  $X$ , функция принадлежности которого определяется по формуле:

$$\mu_B(x) = \alpha \cdot \mu_A(x) \quad (3.24)$$

Кроме перечисленных, имеются и другие операции, которые оказываются полезными при работе с лингвистическими переменными.

### Операция концентрации

Операция **концентрации** (concentration)  $CON(A)$  определяется как алгебраическое произведение нечеткого множества A на самого себя:  $CON(A) = A^2$  т.е.

$$\mu_{CON(A)}(x) = \mu_A^2(x), \quad \forall x \in X \quad (3.25)$$

В результате применения этой операции к множеству A уменьшаются степени принадлежности элементов x этому множеству, причем если

$\mu_A(x) \approx 1$ , то это уменьшение относительно мало, а для элементов с малой степенью принадлежности - относительно велико. В естественном языке применение этой операции к тому или иному значению лингвистической переменной А соответствует использованию усиливающего термина "очень"<sup>4</sup> (например, "очень высокий", "очень старый" и т.д.).

### Операция растяжения

Операция **растяжения** (dilation)  $DIL(A)$  определяется как  $DIL(A) = A^{0.5}$ , где

$$\mu_{DIL(A)}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}, \quad \forall x \in X \quad (3.26)$$

Действие этой операции противоположно действию операции концентрации и соответствует неопределенному терму "довольно", выполняющему функцию ослабления следующего за ним (основного) термина А: "довольно высокий", "довольно старый" и т.п. (рис.3.12).

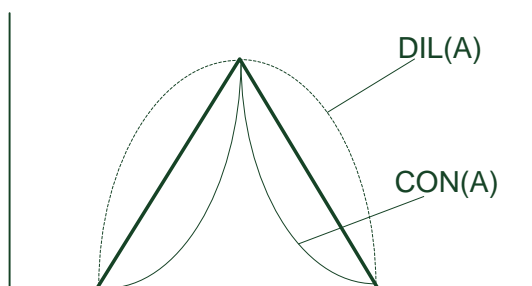


Рис.3.12.

Можно ввести и другие аналогичные по смыслу операции, позволяющие модифицировать значения лингвистической переменной, увеличивая таким образом их количество.

Так, терм "более чем" можно определить следующим образом:

$$\text{"более чем"} = \{x / \mu_A(x)^{1,25}; \forall x \in X\}, \quad (3.27)$$

составной терм "очень-очень":

$$\text{"очень - очень A"} = CON(CON(A)) = \{x / \mu_A^4(x); \forall x \in X\} \quad (3.28)$$

и т.д.

Рассмотрим применение указанных операций на следующем наглядном примере. Пусть переменная  $x$  характеризует "рост человека",  $X$  - интервал  $[0,200]$  (см). Тогда нечеткие подмножества, описываемые терминами "высокий"

и "низкий", можно представить с помощью функции принадлежности класса S (рис. 3.13):

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{если } x \geq c, \end{cases} \quad (3.29)$$

где  $b=(a+c)/2$ . В точке  $x=b=(a+c)/2$  функция принадлежности класса S принимает значение равное 0,5.

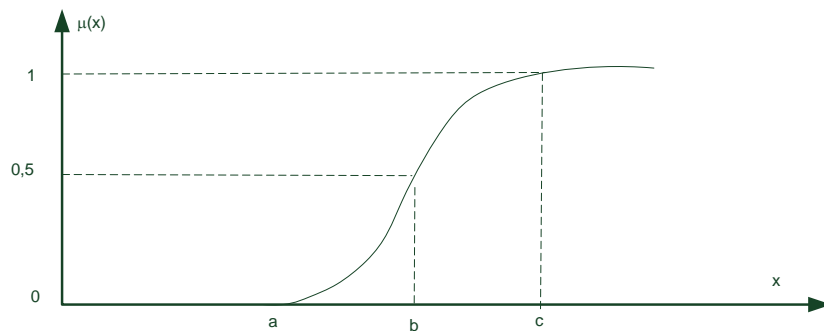


Рис.3.13.

Различают функции S – класса – левые и правые.

Правая функция S – класса обозначается как  $S_R$  и определяется зависимостью  $S_R := S$ .

Левая функция S – класса обозначается как  $S_L$  и определяется зависимостью:

$$S_L = 1 - S.$$

Нечеткие множества, описываемые термами «низкий» и «высокий» можно представить с помощью S-функций на интервале от 160 до 180 см.

1. Терм «высокий»

$a=160\text{см}$ ,  $b=170\text{см}$ ,  $c=180\text{ см}$ .

$$S(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq 160 \\ 2\left(\frac{x-160}{20}\right)^2, & 160 \leq x \leq 170 \\ 1 - 2\left(\frac{x-160}{20}\right)^2, & 170 \leq x \leq 180 \\ 0, & x > 180 \end{cases} ; \quad S_R = S(x, a, b, c)$$

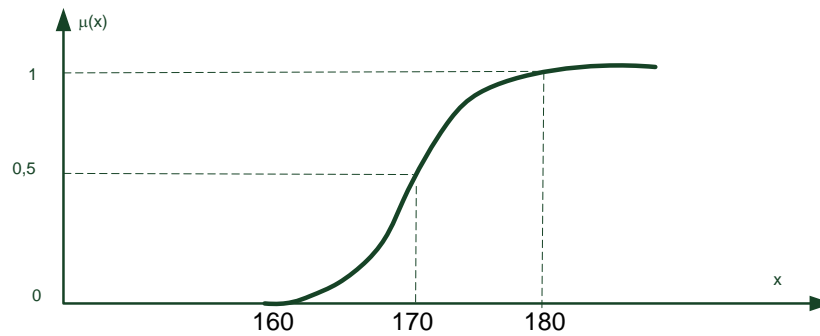


Рис.3.14.

2. Терм «низкий»

$$S_L = 1 - S(x, a, b, c)$$

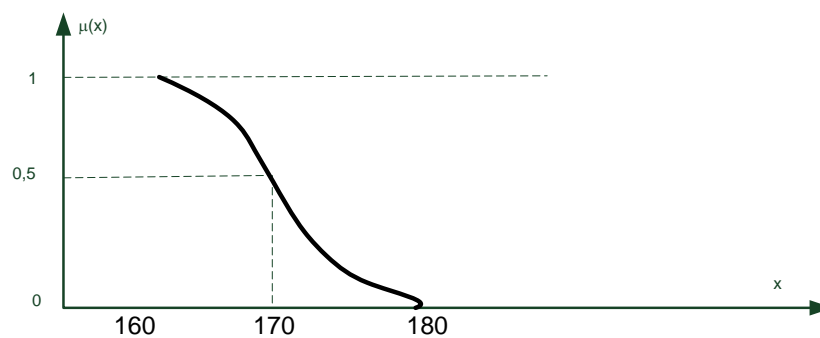


Рис.3.15.

Концентрация:

$$\mu_{\text{очень низкий}} = S_L^2(x) ;$$

$$\mu_{\text{довольно низкий}} = \sqrt{S_L(x)} ;$$

$$\mu_{\text{очень высокий}} = S_R^2(x)$$

$$\mu_{\text{довольно высокий}} = \sqrt{S_R(x)} .$$

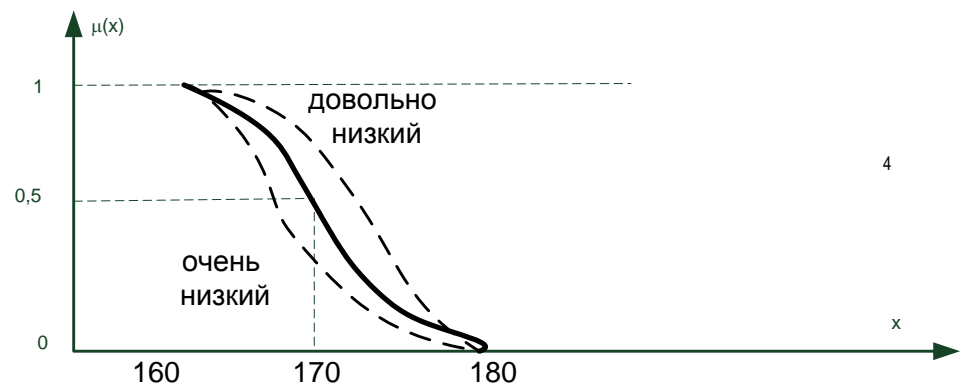


Рис.3.16.

Например, если конкретный человек имеет рост 175см, т.е.  $x=175$ , то в соответствии с данными функциями принадлежности. Имеем:

$\mu_{\text{очень низкий}}$	$\mu_{\text{низкий}}$	$\mu_{\text{довольно низкий}}$	$\mu_{\text{довольно высокий}}$	$\mu_{\text{высокий}}$	$\mu_{\text{очень высокий}}$
0,08	0,09	0,3	0,82	0,91	0,83

## Проектирование нечеткого регулятора для ЭСП с исполнительным двигателем постоянного тока

4

В качестве примера рассмотрим формирование нечеткого регулятора для электрического следящего привода постоянного тока.

Структурная схема следящего электропривода с нечетким регулятором представлена на рис.4.1.

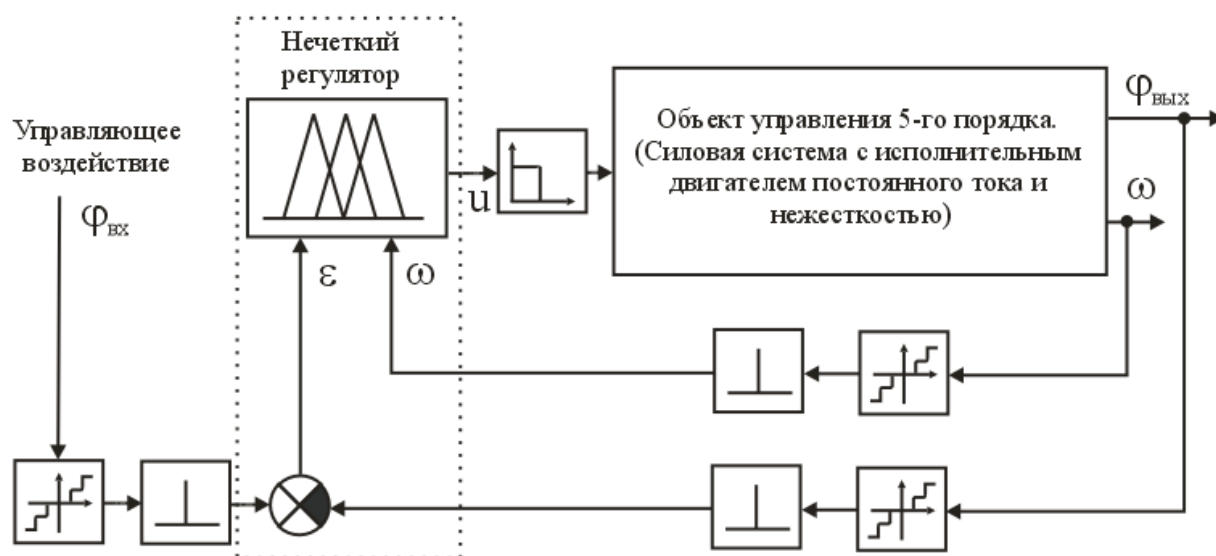


Рис.4.1.

Как видно из приведенной структурной схемы, выработка управляющего воздействия нечетким регулятором осуществляется на основании информации о величине ошибки и скорости выходного вала привода.

В свою очередь в нечетком регуляторе можно выделить следующие функциональные блоки: фаззификатор, блок правил и дефаззификатор (рис.4.2).



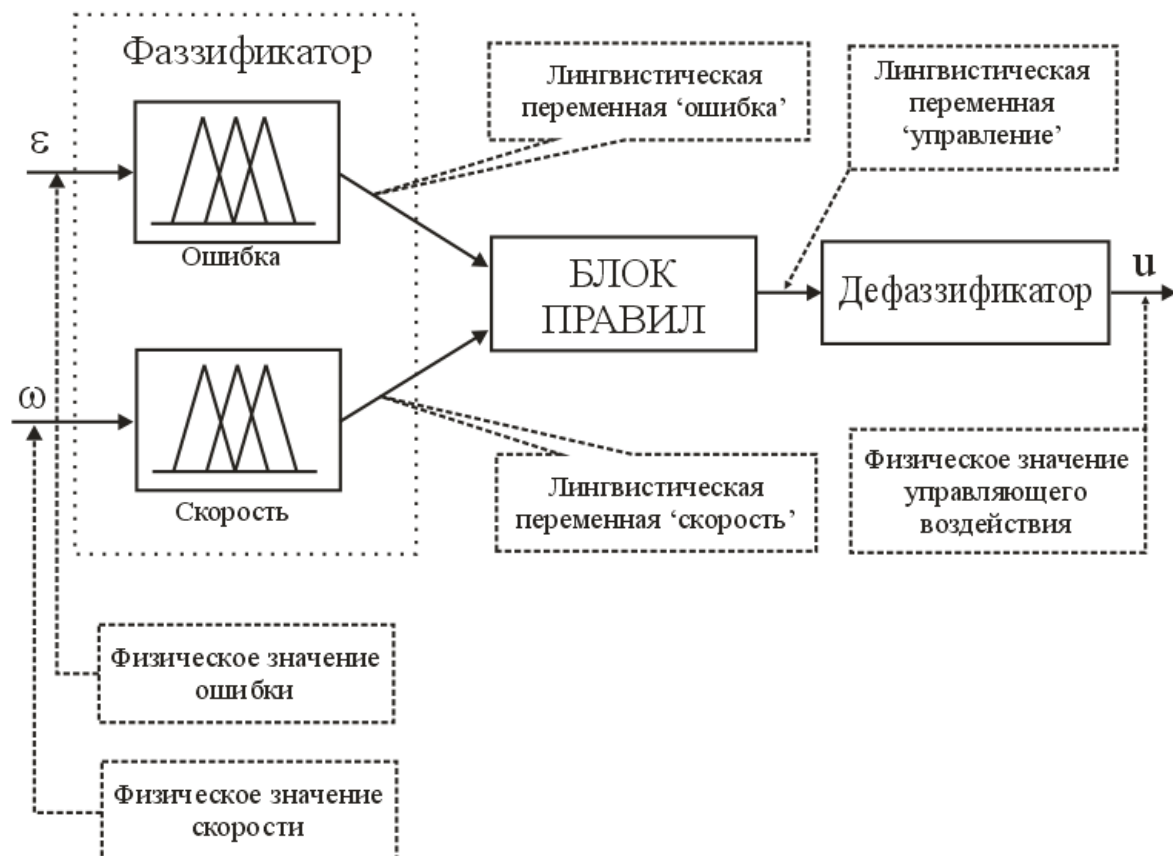


Рис.4.2.

Фаззификатор предназначен для перехода от измеряемых физических переменных к лингвистическим переменным, представленным нечеткими терм-множествами.

Для управления следящим электроприводом, вводятся три лингвистические переменные:

- 'ошибка' (по положению);
- 'скорость' – скорость изменения выходного угла;
- 'управляющее воздействие'.

Первые две из них являются входными, третья – выходная.

Для лингвистическую переменную "ошибка" определим базовое терм-множество вида:

$$T_{\varepsilon} = \{ \text{"отрицательная большая (NB)"}, \\ \text{"отрицательная малая (NS)"},$$

“нулевая ошибка( $Z$ )”,

”положительная малая( $PS$ )”,

”положительная большая( $PB$ )”}.

4

Пусть  $\omega$  - значение скорости. Базовое терм-множество  $T_\omega$  определим в виде:

$T_\omega = \{ \text{”отрицательная большая (NB)”},$

$\text{”отрицательная малая (NS)”},$

$\text{”нулевая (Z)”},$

$\text{”положительная малая (PS)”},$

$\text{”положительная большая (PB)”} \}$ .

Ориентировочное расположение функций принадлежности для всех лингвистических переменных показано на рисунке 4.3, 4.4. Оно должно быть симметрично относительно нулевой точки. В противном случае устойчивое положение не будет достигаться, и переходный процесс будет представлять собой незатухающие колебания около нулевой точки.

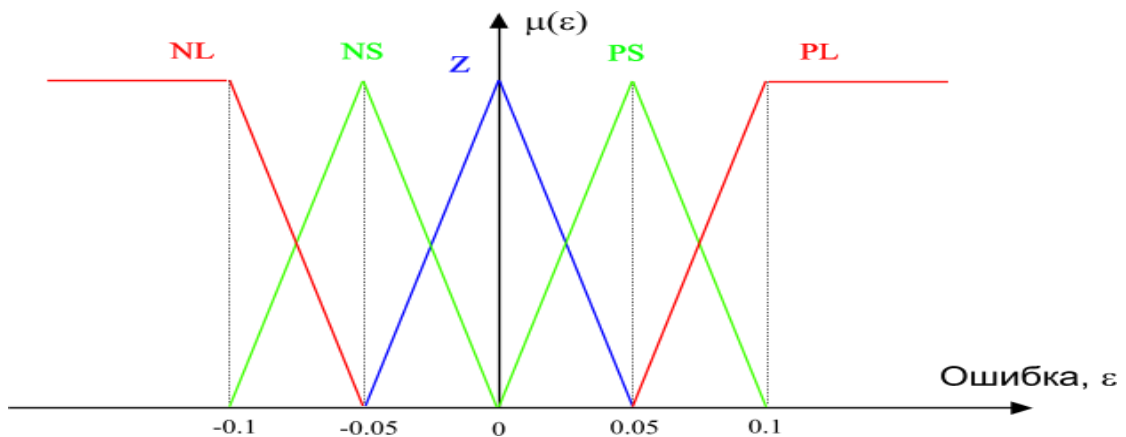


Рис.4.3.

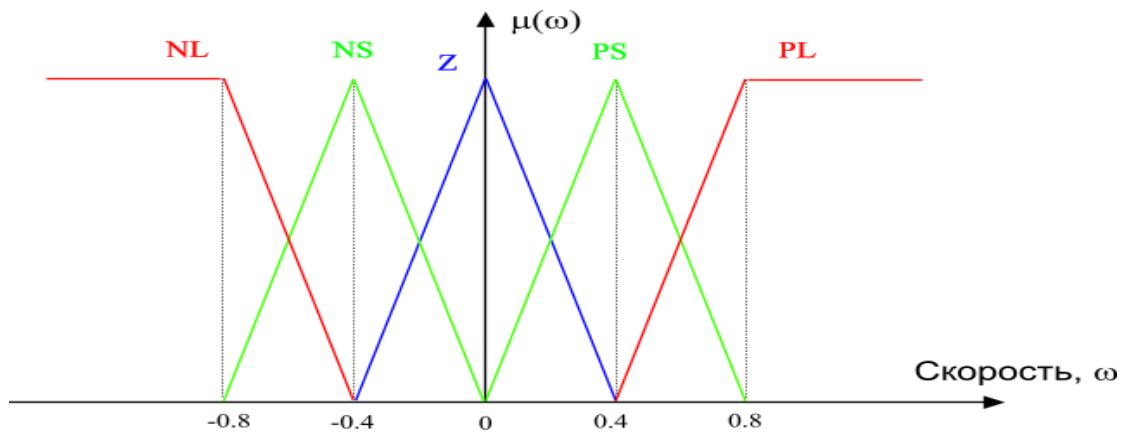


Рис.4.4. Функции принадлежности лингвистических переменных.

Для определения границ указанных терм множеств необходимо провести анализ характеристик силовой системы привода. Для решения этой задачи используем модель силовой системы привода, представленной на рис.4.5 (а) и (б).

Параметры исполнительного двигателя:  $C_e = C_m = 0.732$ ,  $J = 0.05$ ,  $T_e = 0.00234$ с,  $R = 0,96$  Ом, коэффициент передачи редуктора:  $K_p = 4$ .

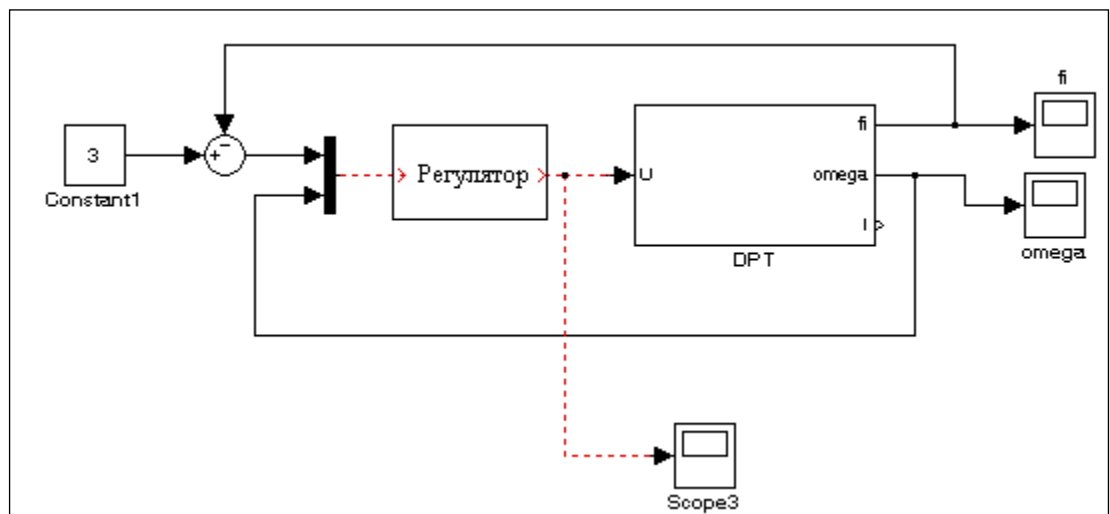


Рис.4.5 (а)

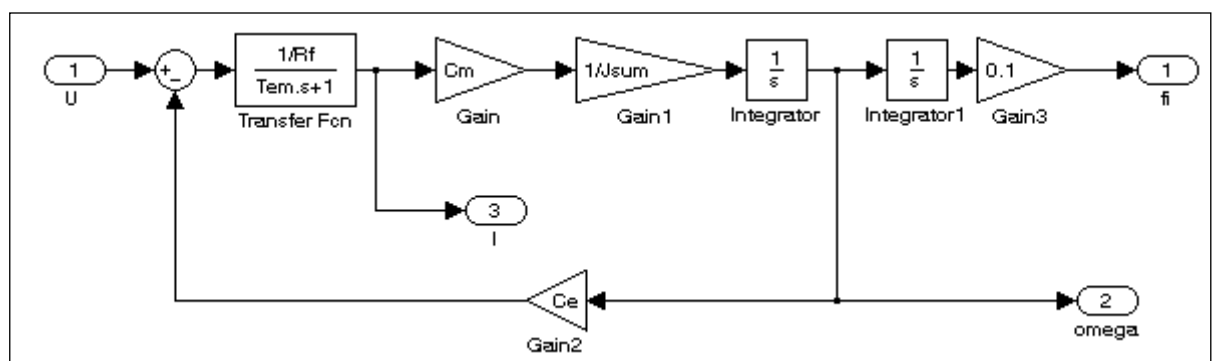


Рис.4.5 (б)

Допустим требуется построить нечеткий регулятор для управления приводом в диапазоне изменения угла поворота выходного вала  $\pm 1$  рад. с использованием в качестве входных сигналов – ошибки отработки входного воздействия и скорости вращения вала исполнительного двигателя.<sup>4</sup>

С целью формирования блока правил (накопления знаний об объекте управления), рассмотрим переходный процесс по скорости вращения вала и углу поворота вала двигателя, при подаче максимального управляющего напряжения  $\pm 27$  В (рис.4.6).

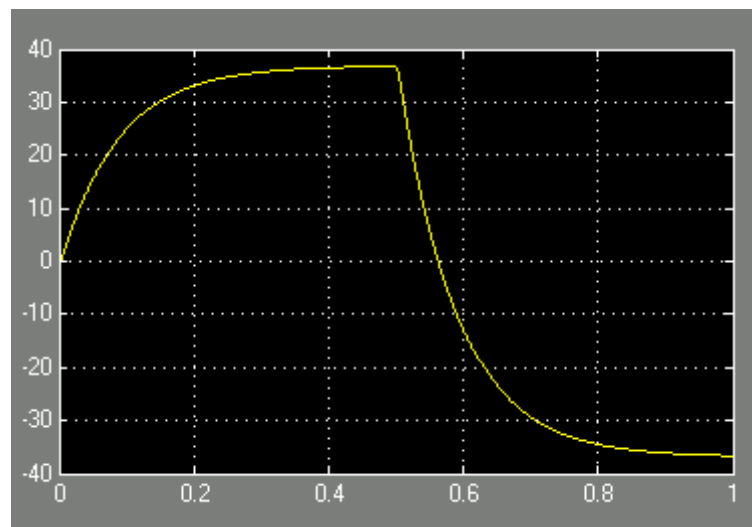


Рис.4.6(а) Диаграммы изменения скорости вращения вала нагрузки (рад/с).

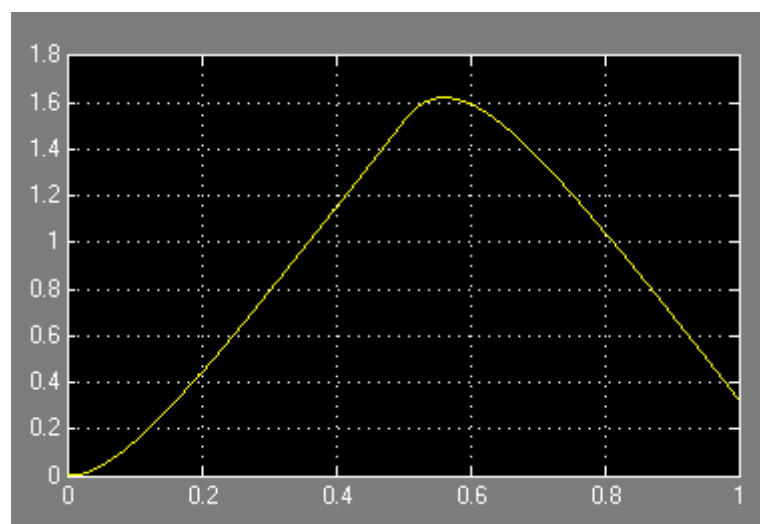


Рис.4.6(б) Диаграммы изменения угла поворота вала нагрузки (рад).

Из приведенных диаграмм видно, что при максимальном напряжении до 1 рад привод разгоняется за ~0,35 сек. Скорость двигателя при этом почти

равна максимальной (для данного напряжения  $\sim 35$  рад/с). Возьмем эти данные за основу для синтеза регулятора.

Для каждого терма из терм множеств лингвистических переменных «ошибка» и «скорость» необходимо задать функцию принадлежности  $\mu(x)$ . Выберем функции принадлежности треугольного вида для термов NS, PS и Z, и трапециидального вида для термов NL и PL.

Границы определения для функций принадлежности переменных:

«ошибка» -  $[-3.14 \dots 3.14]$  рад;

«скорость» -  $[-40 \dots 40]$  рад/с.

В качестве системы нечеткого вывода выберем нечеткий вывод Сугено 0-го порядка, где для каждого сработавшего правила задается выход нечеткого регулятора (уровень управляющего воздействия) в виде константы.

Определим несколько таких уровней:

$NL = -27B$ ,  $NS = -13B$ ,  $Z = 0B$ ,  $PS = 13B$ ,  $PL = 27B$ .

При этом в зависимости от сочетания входных переменных (ошибки и скорости) возможно формирование как положительных уровней выходного сигнала, так и отрицательных.

Теперь необходимо построить блок правил функционирования нечеткого регулятора в виде матрицы  $5 \times 5$ .

**Рассмотрим последовательность определения нескольких правил, которые описывают некоторые ситуации:**

Предположим, например, что выходной угол равен входному сигналу (т.е. ошибка - нуль) и не изменяется (скорость - нуль). Очевидно, что это желаемая ситуация, и следовательно мы не должны ничего делать (управляющее воздействие - нуль).

Теперь рассмотрим другой случай: ошибка по положению равна нулю, как и прежде, но вал электродвигателя находится в движении с низкой угловой скоростью в положительном направлении (т.е. скорость

положительная малая). Естественно мы должны компенсировать движение вала, формируя отрицательный малый сигнал управления.

Т.о. составлены два правила, которые могут быть формально определены так:

**если** ошибка = нуль, **и** скорость = нуль, **то** управляющее воздействие = нуль.

**если** ошибка = нуль, **и** скорость = положительная малая, **то** управляющее воздействие = отрицательное малое.

Правила, соответствующие всем наиболее вероятным ситуациям определены в таблице.4.1.

Таблица 4.1.

Нечеткий сигнал Управлен ия		Ошибка по положению				
		NL	NS	Z	PS	PL
Скорость	PL			NL		
	PS		NL	NS	Z	
	Z	NL	NS	Z	PS	PL
	NS		Z	PS	PL	
	NL			PL		

Всего для нечеткого регулятора, имеющего  $n$  входов и 1 выход может быть определено  $I_1 * I_2 * \dots * I_n$  правил управления, где  $I_i$  – количество нечетких множеств для  $i$ -го входа, но для нормального функционирования регулятора не обязательно использовать все возможные правила, а можно обойтись и меньшим их числом. В нашем случае для формирования нечеткого сигнала управления используется 13 правил из 25 возможных.

Таким образом, определим 13 правил для наиболее вероятных значений лингвистических переменных «ошибка» и «скорость» (таблица 4.2):

4

## Ошибки

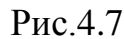


Рис.4.7

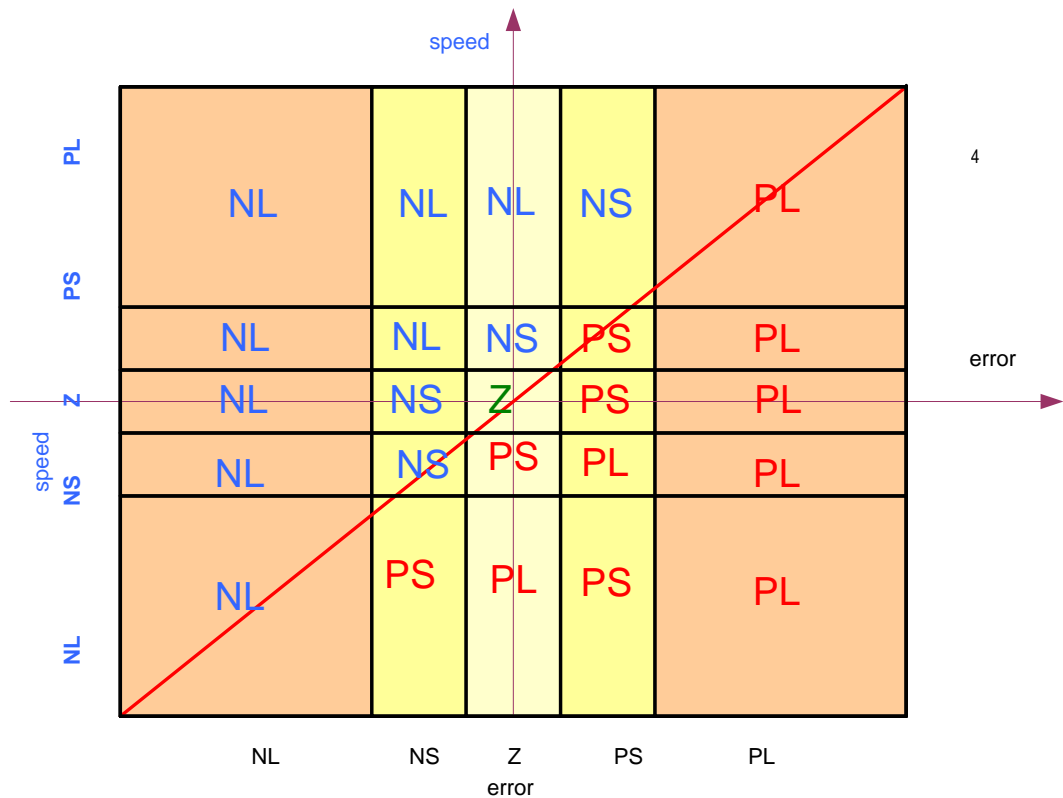


Рис.4.8.

### Дефаззификатор.

Поскольку для реализации нечеткого вывода используется алгоритм Сугено, то результирующее воздействие  $U$  будет определяться по следующей зависимости, где  $n$ -число сработавших правил (дефаззификация методом центра области).

$$U = \frac{\sum_{n=1}^N u_n \mu_{un}(u_n)}{\sum_{n=1}^N \mu_{un}(u_n)}$$

Где  $u_n$  – физическое значение управляющего сигнала, соответствующего каждому из нечетких множеств  $U_{NL}$ ,  $U_{NS}$ ,  $U_Z$ ,  $U_{PS}$ ,  $U_{PL}$ . В нашем случае это будет точка ‘b’ соответствующей функции принадлежности треугольного вида.

$\mu_{un}(u)$  – степень принадлежности управляющего сигнала  $u$  к соответствующему нечеткому множеству  $Un=\{U_{NL}, U_{NS}, U_Z, U_{PS}, U_{PL}\}$ .



Для создания нечеткого регулятора в системе Matlab необходимо открыть соответствующий редактор (FIS editor), введя в командной строке команду:

```
>> fuzzy
```

4

В результате выполнения данной команды на экране открывается окно FIS-редактора (рис.4.9):

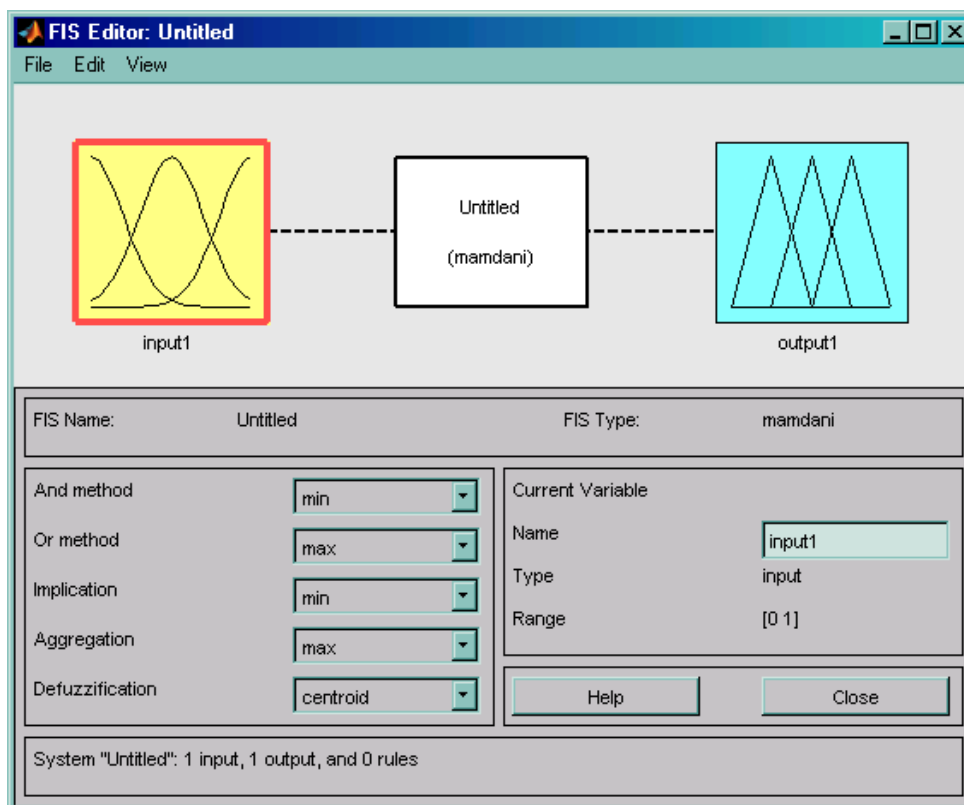


Рис.4.9.

При формировании нечеткого регулятора необходимо в первую очередь определить его тип, в нашем случае - Сугено нулевого порядка. Создаем новый регулятор типа Сугено командой меню:

File -> New FIS -> Sugeno

Учитывая, что в исходных данных определены две входные переменные, добавляем еще одну входную переменную в формируемый нечеткий регулятор:

Edit -> Add Variable -> Input

Далее следует установить имена для входных переменных, отображаемых на панели нечеткого регулятора (рис.4.10).

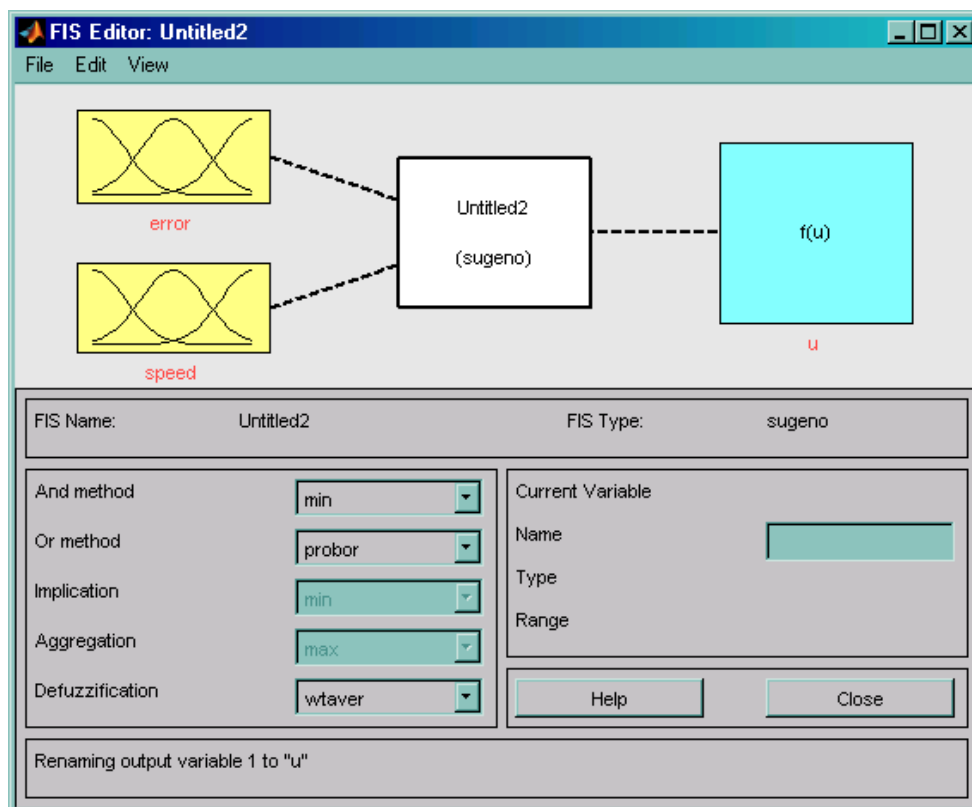


Рис.4.10.

Открываем редактор функций принадлежности:

Edit -> Membership Functions

С помощью редактора функций принадлежности определяем имена и параметры функций принадлежности, а также редактируем границы изменения входных переменных.

Для **переменной «ошибка»** сначала определяем границы термов «нулевая» и «положительная малая» и «положительная большая»:

$$Z = [-0.3 \ 0 \ 0.3]$$

$$PS = [0 \ 0.3 \ 0.6]$$

$$PL = [0.3 \ 0.6 \ 3.297 \ 4.553]$$

Аналогично определяем симметричные им отрицательные значения лингвистической переменной «ошибка» (рис.4.11).

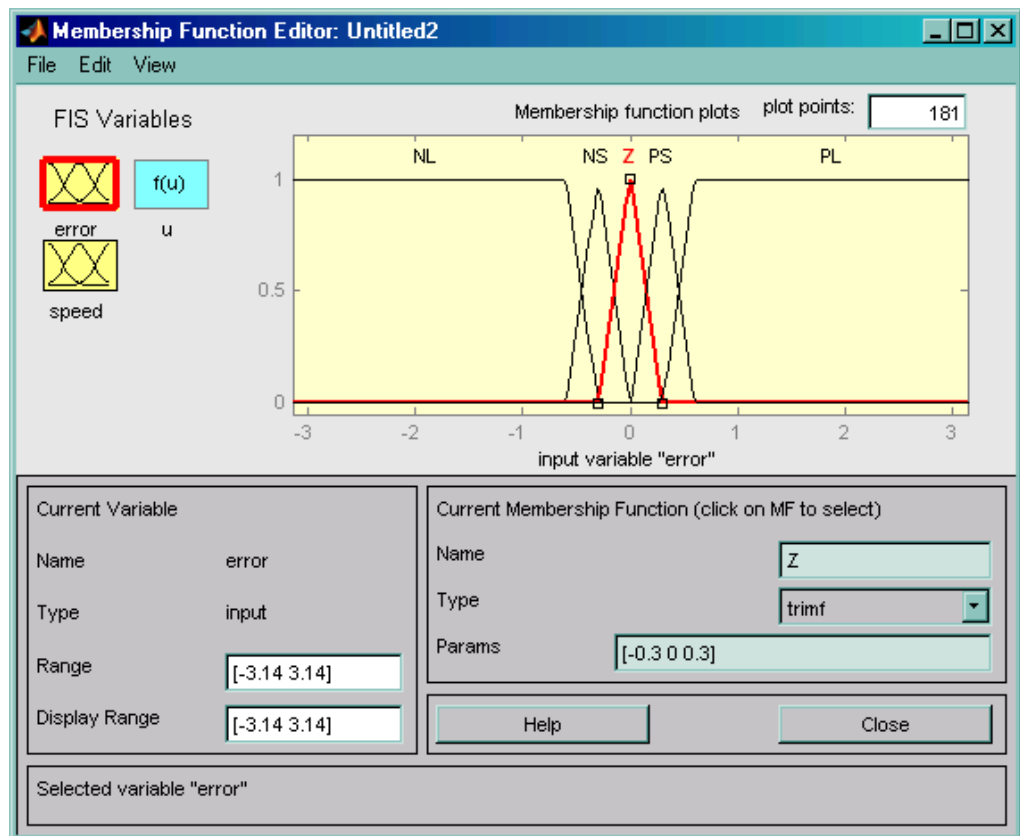


Рис.4.11.

Для **переменной «скорость»** аналогично определяем терм-множество значений:  $Z = [-4 \ 0 \ 4]$ ;  $PS = [0 \ 4 \ 20]$ ;  $PL = [4 \ 20 \ 42 \ 58]$  и симметричные им отрицательные значения (рис.4.12).

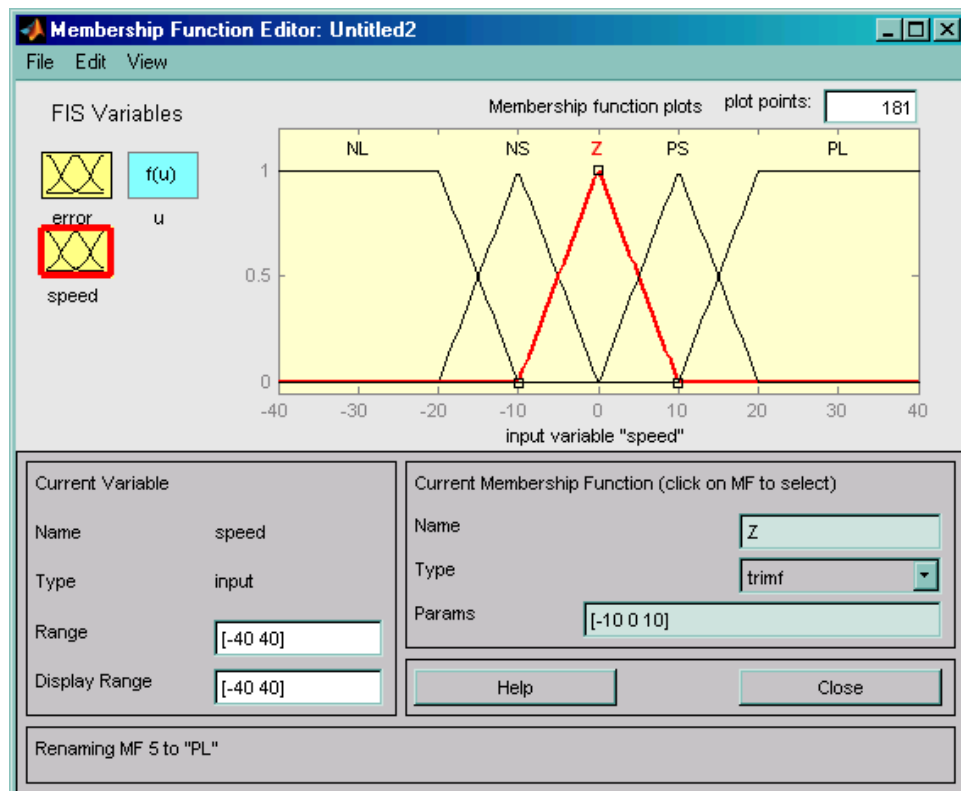


Рис.4.12.

Значения выходной переменной для регулятора Сугено определяем в виде пяти констант  $nUL$ ,  $nUS$ ,  $U0$ ,  $US$ ,  $UL$  ( $nUL = -27$ ,  $nUS = -13$ ) (рис.4.13).

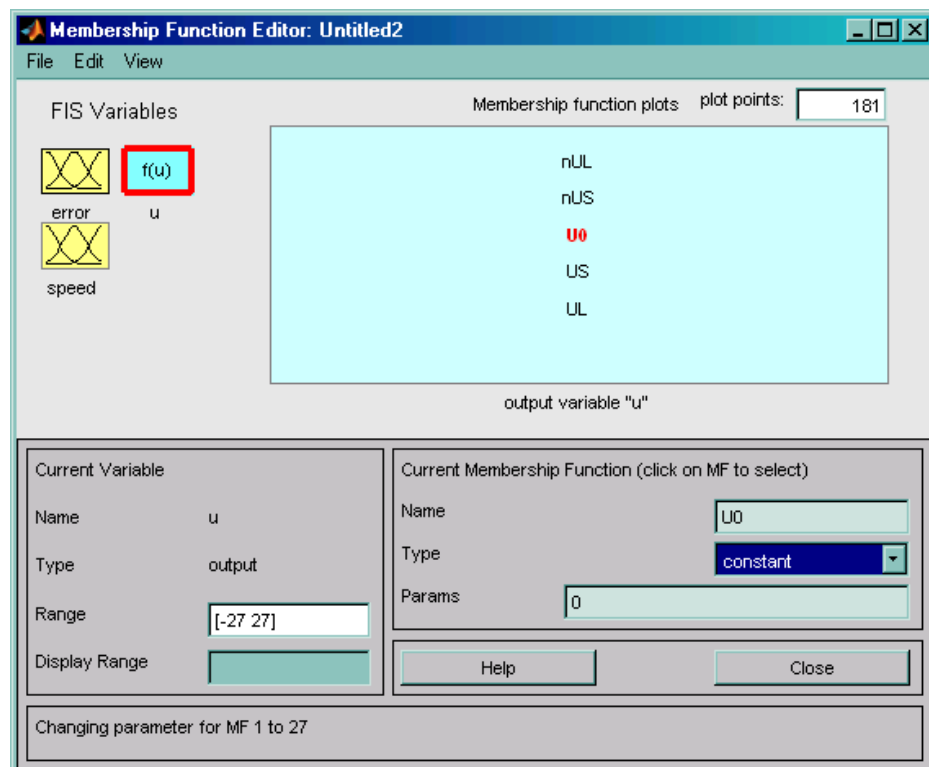


Рис.4.13.

Далее необходимо сформировать базу знаний, представляющую собой правила вывода. С этой целью открываем редактор правил:

Edit -> Rules

и задаем 13 правил определенных в таблице ранее (рис.4.14).<sup>4</sup>

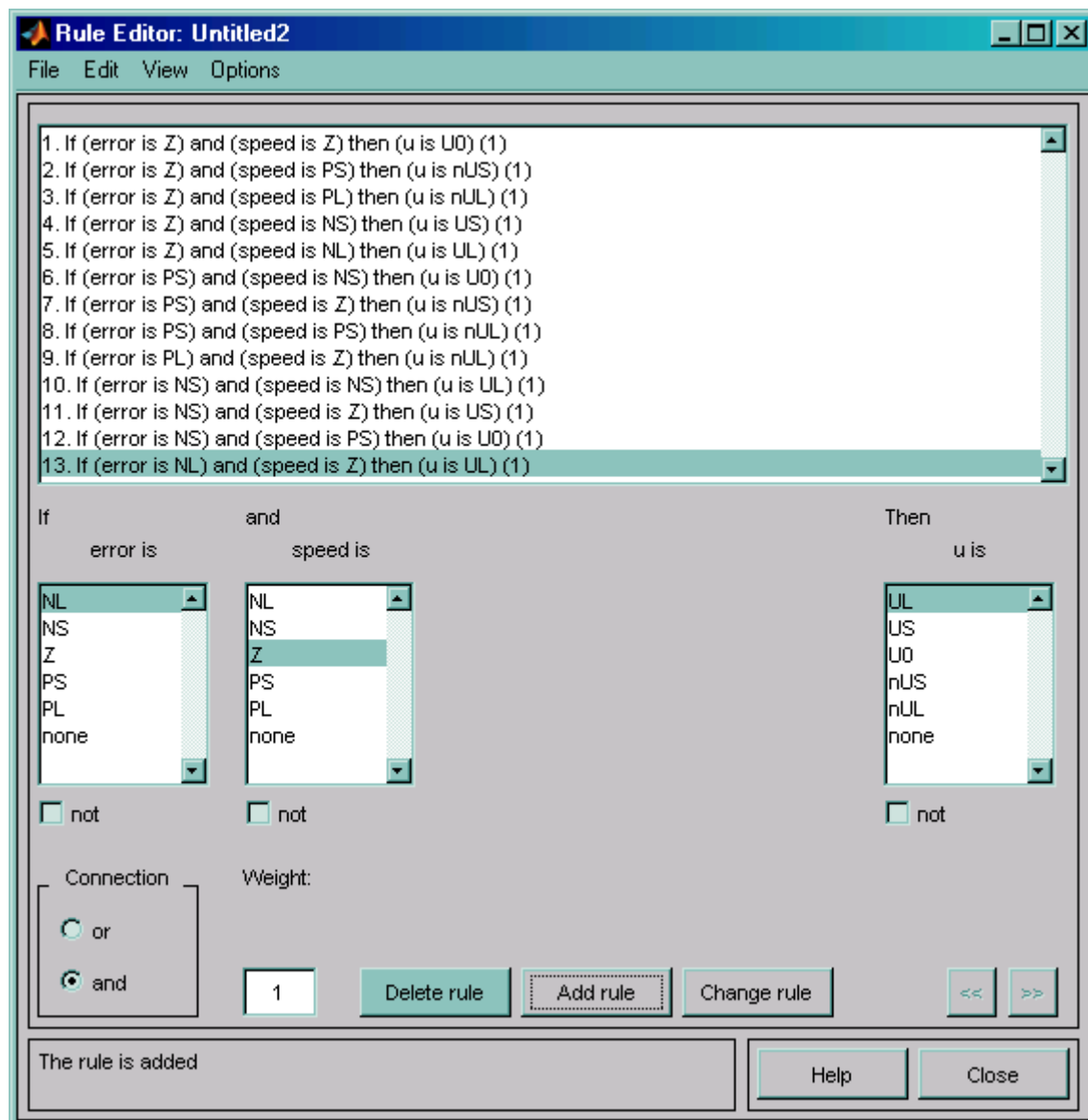


Рис.4.14.

Сформированный таким образом нечеткий регулятор необходимо сохранить в файле текущего раздела. С этой целью выполняем в командном окне следующую последовательность команд:

File -> Export -> To File

После сохранения нечеткого регулятора в файле его необходимо экспортировать (перенести) в рабочее пространство - Workspace:

File -> Export -> To Workspace

Таким образом нечеткий регулятор сформирован и готов к использованию в рабочей модели следящего привода. Для включения нечеткого регулятора в модель ЭСП, необходимо перенести из библиотеки Fuzzy Logic Toolbox соответствующую пиктограмму «Fuzzy Logic Controller»<sup>4</sup> в область модели, выполнив при этом необходимые коммутации (рис.4.15 и рис.4.16).

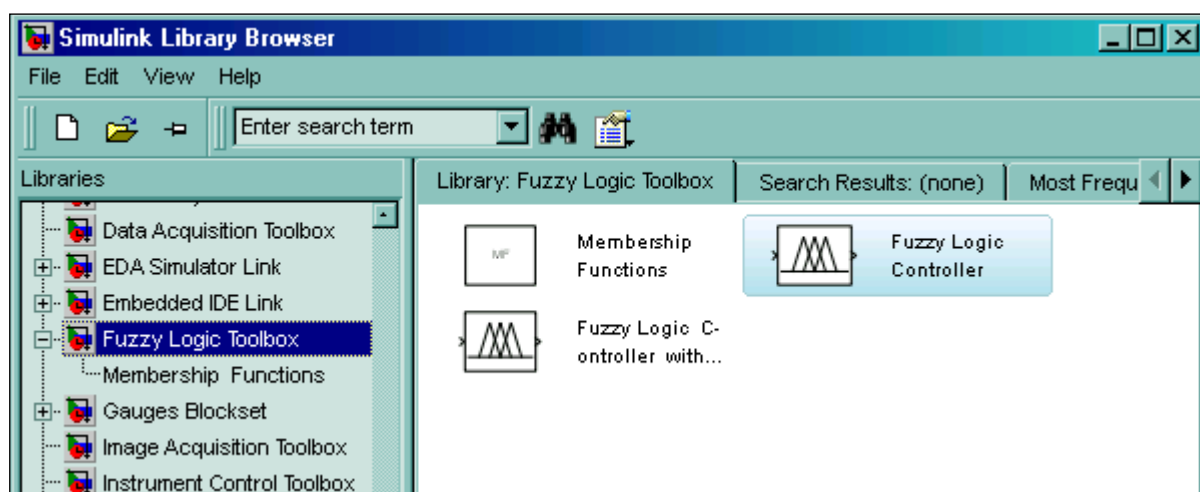


Рис.4.15.

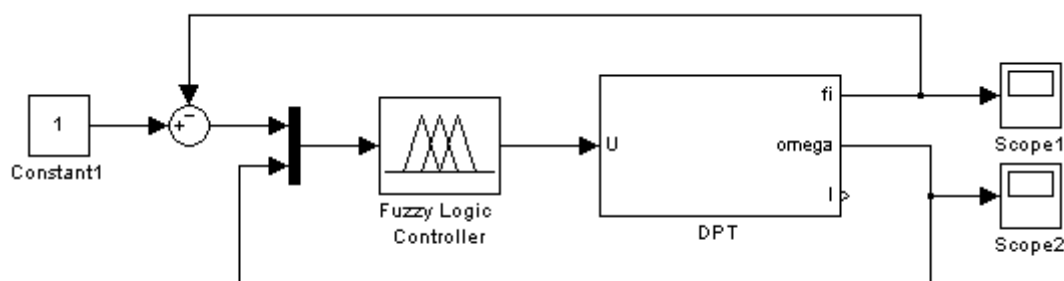


Рис.4.16.

Для включения разработанного нечеткого регулятора необходимо в параметрах модуля «Fuzzy Logic Controller» указать имя, которое было присвоено регулятору при экспортировании его в Workspace (рис.4.17).

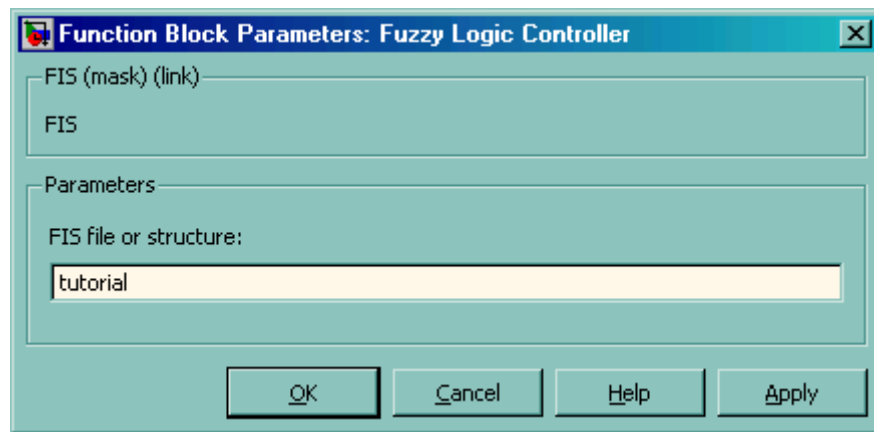


Рис.4.17.

Для оценки характеристик привода с нечетким регулятором, проведем расчет переходных процессов при отработке входного сигнала (ступеньки) в 1 рад. Переходные характеристики ЭСП с синтезированным регулятором показаны на рис.4.18 (а) и (б).

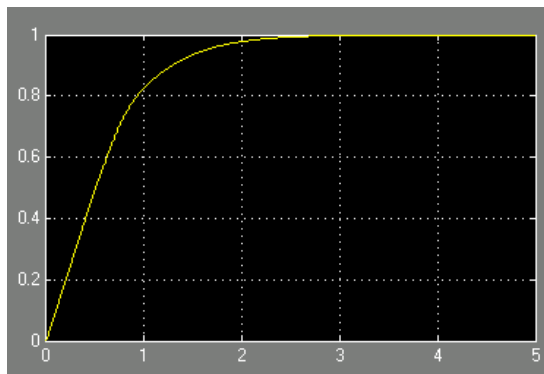


Рис.4.18 а,

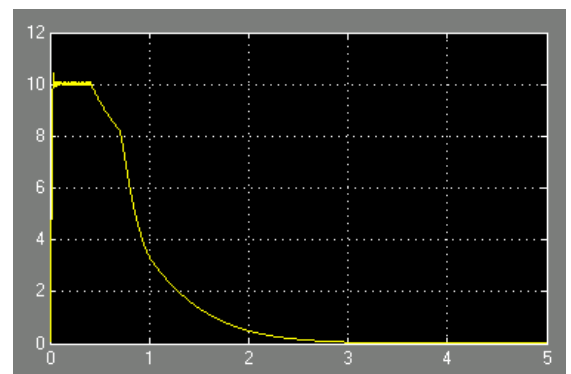


Рис.4.18 б

Анализ переходных процессов в ЭСП с синтезированным нечетким регулятором позволяет сделать вывод о том, что переходный процесс значительно затянут, причем очевидно, что причиной этого является пульсация управляющего напряжения от +27В до 0 на начальном этапе управления (рис.4.19).

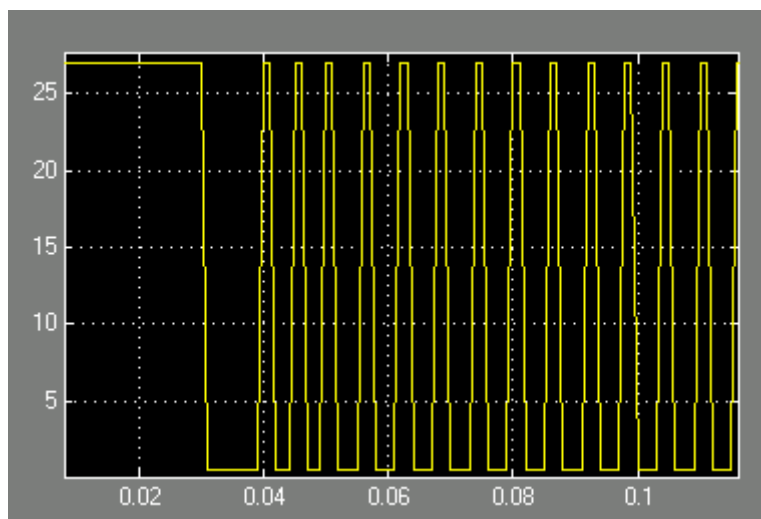


Рис.4.19.

Причиной возникновения пульсаций управляющего напряжения на начальном участке отработки входного воздействия является недостаточное количество правил, определяющих выходное напряжение в зависимости от значений входных сигналов.

Пульсации начинаются при достижении двигателем скорости 4рад/с при еще большой ошибке, поскольку для указанных значений переменных «ошибка» и «скорость» не заданы правила, выход регулятора в этом случае принимает нулевое значение.

Для устранения этого недостатка добавим в блок правил следующие правила:

- если «ошибка» положительная большая, то управление положительное большое при любом значении скорости.
- если «ошибка» отрицательная большая, то управление отрицательное большое при любом значении скорости.

Дополненный блок правил будет иметь вид, представленный в таблице (таблица 4.3).



Таблица 4.3

	ошибка					
		NL	NS	Z	PS	PL
скорость	NL	-UL		UL		UL
	NS	-UL	U0	US	UL	UL
	Z	-UL	-US	U0	US	UL
	PS	-UL	-UL	-US	U0	UL
	PL	-UL		-UL		UL

Расчетные характеристики ЭСП с модифицированным нечетким регулятором представлены на рис.4.20.

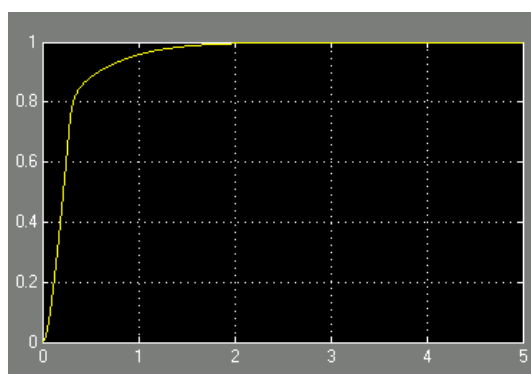


Рис.4.20.а.

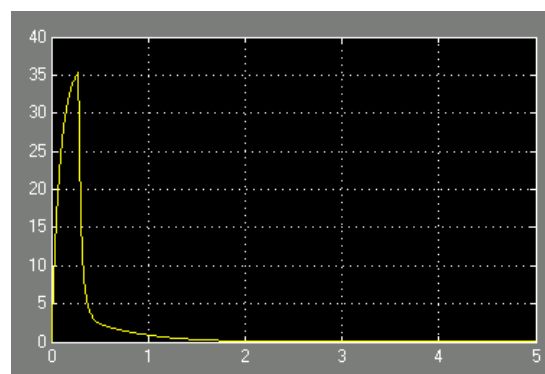


Рис.4.20.б

Диаграмма изменения управляющего воздействия приведена на рис.4.21.

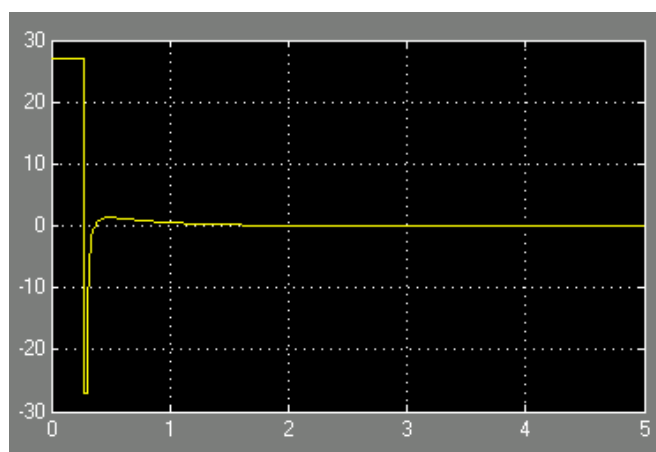


Рис.4.21.

Сравнительный анализ переходных процессов свидетельствует о том, что получены значительно лучшие характеристики, однако видно, что при уменьшении ошибки, скорость сбрасывается слишком быстро, из-за этого переходный процесс по-прежнему остается затянутым.

4

Для коррекции этого исправим в блоке правил два правила, соответствующие указанной ситуации в сторону увеличения уровня управляющего напряжения (таблица 4.4):

Таблица 4.4

	ошибка					
		NL	NS	Z	PS	PL
скорость	NL	-UL		UL		UL
	NS	-UL	-US	US	UL	UL
	Z	-UL	-US	U0	US	UL
	PS	-UL	-UL	-US	US	UL
	PL	-UL		-UL		UL

Итоговые переходные процессы имеют вид, представленный на рис.4.22.

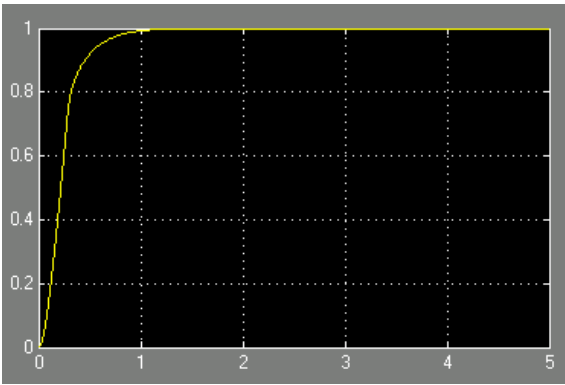


Рис.4.22 (а)

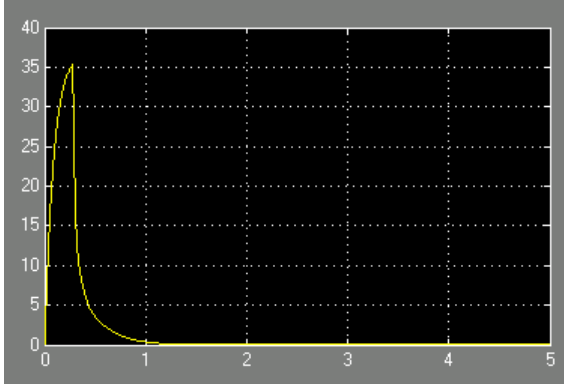
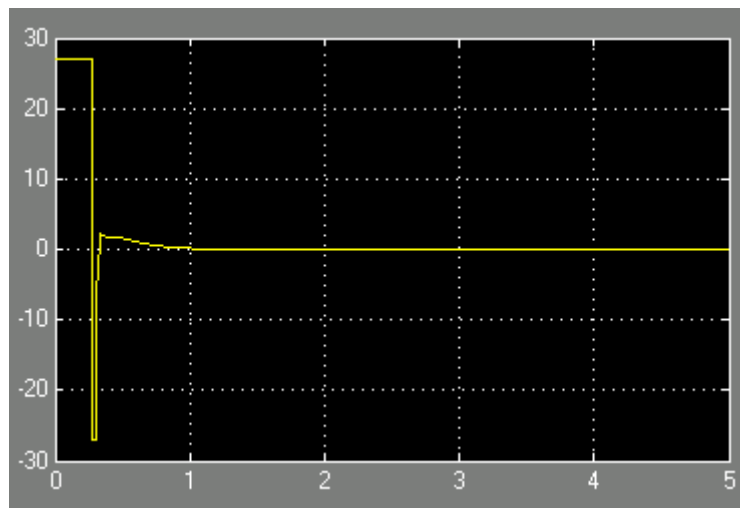


Рис.4.22 (б)

Диаграмма изменения управляющего сигнала представлена на рис.4.23.



4

Рис.4.23.

Анализ переходных процессов позволяет сделать вывод о том, что сформированная система управления с нечетким регулятором обеспечивает переходные процессы при отработке больших углов рассогласования, близкие к оптимальным по быстродействию. Вид итоговой поверхности, формирующей управляющее воздействие в зависимости от состояния объекта управления представлен на рис.4.24.

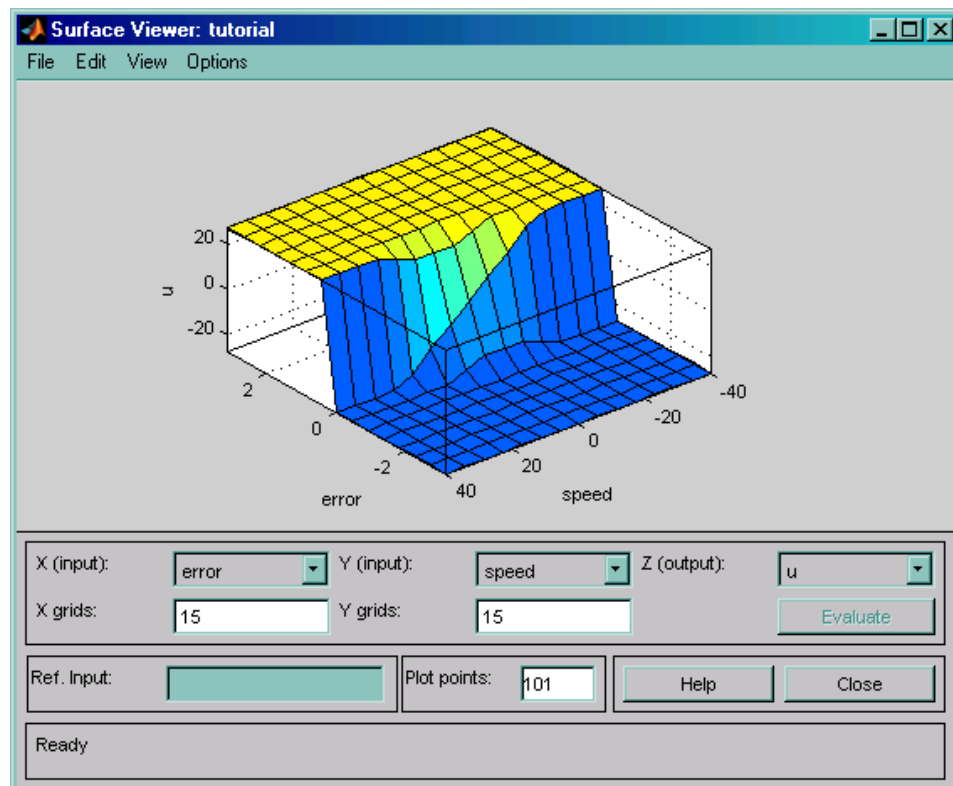
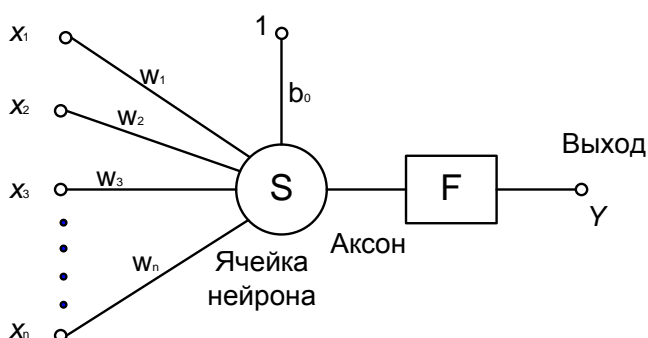


Рис.4.24.

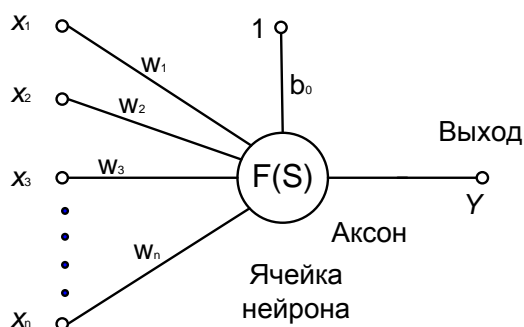
## Практическое занятие 5

### Структура технического нейрона

По аналогии с нервными клетками головного мозга, которые могут быть возбуждены или заторможены, каждый нейрон, как типовой элемент сетевой структуры, характеризуется своим текущим состоянием. Он обладает группой однонаправленных входных связей - синапсов, соединенных с выходами других нейронов, а также имеет выходную связь данного нейрона - аксон, с которой сигнал (возбуждения или торможения) поступает на синапсы следующих нейронов. Общий вид нейрона приведен на рис. 5.1.



а)



б)

Рис. 5.1. Нейронный элемент, а)развернутая и б)сокращенная схема.

Уравнение, описывающее работу отдельного нейрона:

$$S = \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i + b_0, \quad (5.1.)$$

$$Y = F(S), \quad (5.2.)$$

где,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - компоненты вектора входного сигнала,  $w_1, w_2, \dots, w_n$  - коэффициенты передачи по каждому входу (коэффициенты синаптической связи),  $b_0$  - начальное возбуждение нейрона,  $F$  - функция преобразования нейрона.

Каждая компонента вектора входного сигнала  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , представляющая собой выходные сигналы других нейронных элементов или вход сети, умножается на соответствующий вес связи весового вектора  $W=(w_1, w_2, \dots, w_n)$  и поступает на суммирующий блок  $\Sigma$ . Вес связи является скалярной величиной, положительной для усиливающих и отрицательной величиной для тормозящих связей.

Уровень возбуждения нейронного элемента равен:

$$S = \sum_{i=0}^n w_i \cdot x_i \text{ или в векторном виде } S = W \cdot X. \quad (5.3)$$

При этом смещение, как правило, определяется особой - «нулевой» связью вход которой равен 1, при этом вес соответствующей синаптической связи устанавливается равным  $b_0$ .

Выходной сигнал  $Y$  определяется преобразованием суммы  $S$  функцией активации  $F$  (в общем случае нелинейной) :

$$Y = F\left(\sum_{i=0}^n w_i x_i\right). \quad (5.4)$$

Абсолютные значения весов  $w_i, i=0, 1, 2, \dots, n$ , как правило, принадлежат отрезку  $[0; 1]$ , что позволяет избежать больших входных значений для других нейронных элементов.

Нейронная сеть, получающая на входе некоторый сигнал, способна после прохода его по нейронам выдавать на выходе результат, зависящий от весовых коэффициентов всех нейронов, и смещения -  $b_0$  (порог) нейронного элемента, характеризующее смещение функции активации по оси абсцисс.

Обучение нейронной сети есть не что иное, как «настраивание» весовых коэффициентов на то, чтобы определенному входному сигналу соответствовал определенный выходной сигнал.

Примеры реализации логических функций формальным нейроном.

Двухвходовый нейрон с единичными коэффициентами синаптических связей ( $w_1=1$ ,  $w_2=1$ ), имеющий пороговую функцию активации:

$$\begin{aligned} S &= w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + b_0; \\ y &= 1, \text{ если } S \geq 0; \\ y &= 0, \text{ если } S < 0. \end{aligned} \quad 4 \quad (5.5)$$

реализует:

- функцию логического умножения «И» при  $b_0 = 2$ ;
- функцию логического сложения «ИЛИ» при.

Нейрон с одним входом и весовым коэффициентом  $w_1=-1$  реализует функцию логического отрицания «НЕ», при  $b_0 = 0$ .

### Функции активации нейронных элементов

Наиболее распространенными функциями активации, нелинейными усилительными характеристиками нейронного элемента или передаточными функциями являются следующие: пороговая, сигнум, логистическая, гиперболический тангенс, линейная, линейная ограниченная, радиальная базисная и др.

1. Пороговая бинарная функция – это функция, для которой нейронный элемент остается неактивным до достижения входом порогового значения  $S_0$  (рис. 5.2).

$$Y(s) = \begin{cases} 0, & S \leq S_0 \\ 1, & S > S_0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Если  $S_0=0$ , то бинарная пороговая функция называется единичной функцией активации с жестким ограничением (**hardlim(S)**).

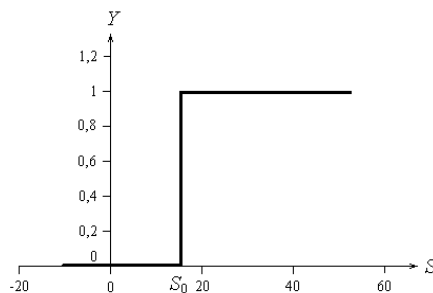


Рис. 5.2. Бинарная пороговая функция **hardlim(S)**

2. Сигнум, или модифицированная пороговая функция **hardlims(S)** , для которой значение  $S_0=0$  (рис. 5.3), задается уравнением

$$Y(s) = \begin{cases} -1, & S < S_0 \\ 0, & S = 0 \\ 1, & S > S_0 \end{cases} \quad (5.7)$$

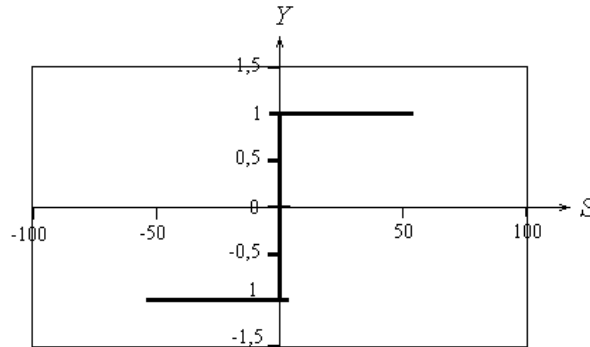


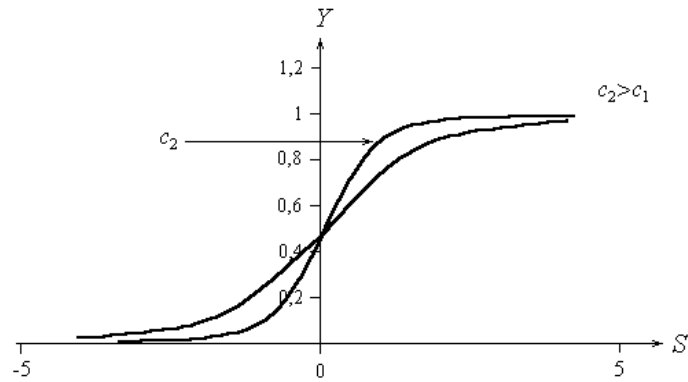
Рис. 5.3. Функция сигнум – **hardlims(S)**

3. Сигмоидная или логистическая функция (S-образная, имеющая две горизонтальные асимптоты и одну точку перегиба).

Одной из наиболее распространенных, является нелинейная функция активации с насыщением, называемая логистической функцией, или сигмоидом:

$$F(S) = \frac{1}{1 + e^{-cS}} = \frac{1}{1 + \exp(-c * S)} \quad (5.8)$$

При уменьшении параметра  $c$  сигмоид становится более пологим, в пределе, при  $c = 0$  он вырождается в горизонтальную линию на уровне 0.5. При увеличении параметра  $c$  сигмоид по виду приближается к функции единичного скачка с порогом  $T$  в точке  $S = 0$ . Из выражения для сигмоида очевидно, что выходное значение нейрона лежит в диапазоне  $[0,1]$  (рис. 5.4).



4

Рис. 5. 4. Логистическая функция **logsig(S)**.

В общем случае логистическая функция определяется уравнением:

$$Y(s) = \frac{1}{1 + \exp(-c \cdot (s - s_0))},$$

где  $S_0$  – значение смещения. Если значение коэффициента  $c$  велико, то график общей логистической функции приближается к пороговой функции (рис. 5.5).

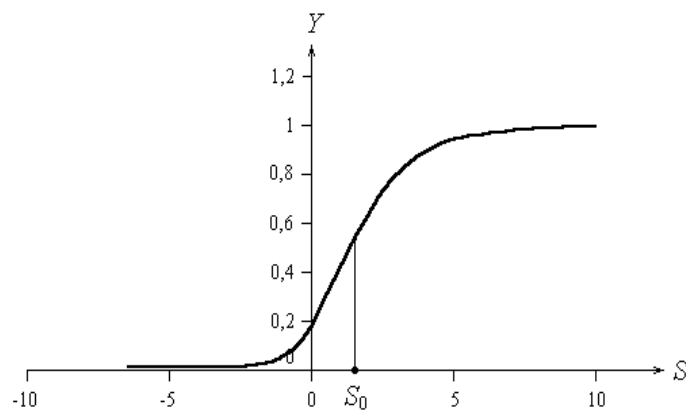


Рис. 5. 5. Общая логистическая функция

Одно из ценных свойств сигмоидальной функции заключается в простоте выражения для ее производной:

$$F'(S) = c * F(S)(1 - F(S)) \quad (5.9)$$

Следует отметить, что сигмоидальная функция дифференцируема на всей оси абсцисс, что используется в некоторых алгоритмах обучения. Кроме того, она обладает свойством усиления малых сигналов и предотвращения насыщения от больших сигналов, так как они соответствуют областям аргументов, где сигмоид имеет пологий наклон.



Биполярная сигмоидная функция (рис. 5.6), уравнение которой

$$Y(s) = \frac{2}{1 + \exp(-c \cdot s)} - 1,$$

4

принимает значения в диапазоне (-1; 1).

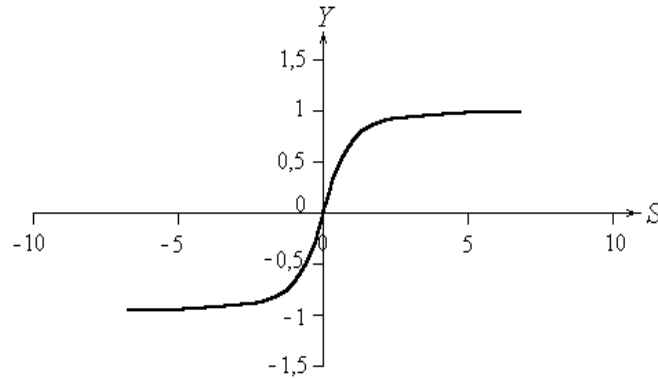


Рис. 5.6. Биполярная логистическая функция

5. Гиперболический тангенс (рис. 5.7) аналогичен биполярной логистической функции без смещения и является симметричной функцией (**tansig(S)**):

$$Y(s) = \frac{\exp(c \cdot s) - \exp(-c \cdot s)}{\exp(c \cdot s) + \exp(-c \cdot s)}.$$

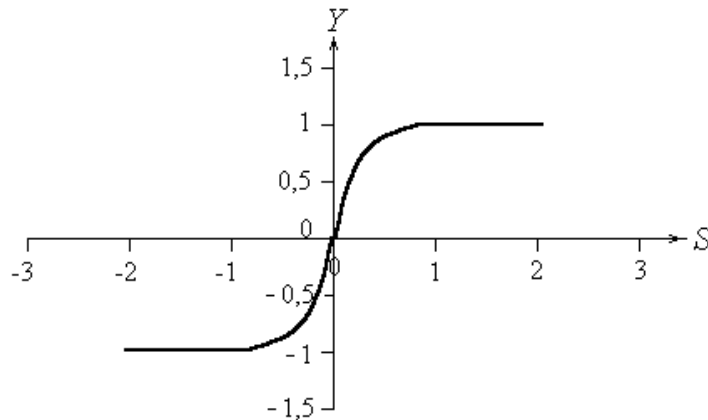


Рис. 5.7. Гиперболический тангенс **tansig(S)**

4. Линейная функция активации, уравнение которой

$$Y(s) = k \cdot s,$$

где  $k$  – угловой коэффициент наклона прямой, представлена на рис. 5.8 (**purelin(S)**).

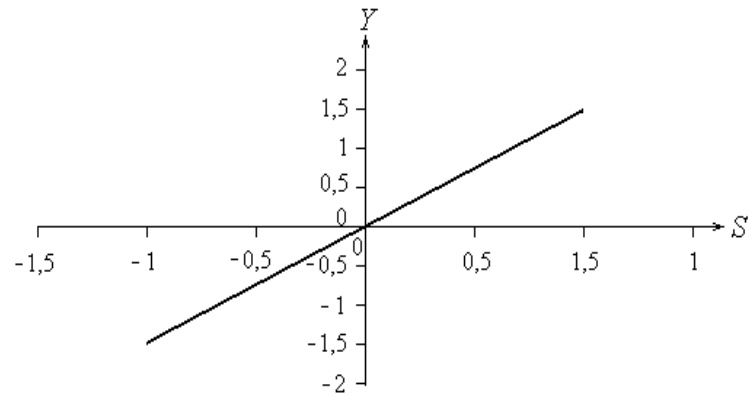


Рис. 5.8. Линейная функция **purelin(S)**

6. Линейная, ограниченная на отрезке  $[-a; a]$  функция активации (рис. 5.9) определяется по формуле:

$$Y(s) = \begin{cases} p, & s > a \\ -p, & s < -a \\ s, & -a \leq s \leq a \end{cases}$$

где  $p$ , как правило, равно единице (**satlin(S)**):

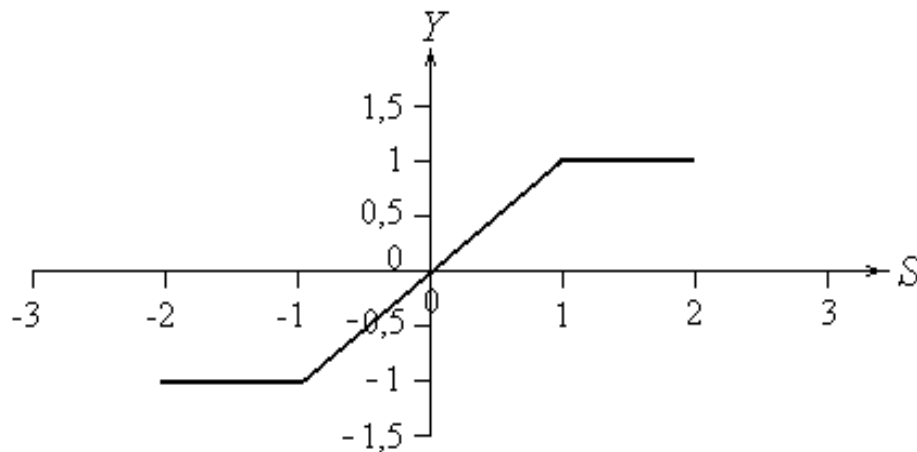


Рис. 5.9. Линейная ограниченная функция **satlin(S)**.

7. Радиально-базисная функция активации (**radbas(S)**) характеризуется функцией Гаусса для нормального закона распределения, в соответствии с которой:

$$Y(s) = \exp\left(\frac{-s^2}{2 \cdot \sigma^2}\right),$$

где  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение, характеризующее крутизну радиально-базисной функции (рис.5.10). Величина  $s$  определяется в соответствии с евклидовым расстоянием между входным и весовым векторами:

4

$$S^2 = |X - W|^2 = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - w_i)^2 \right).$$

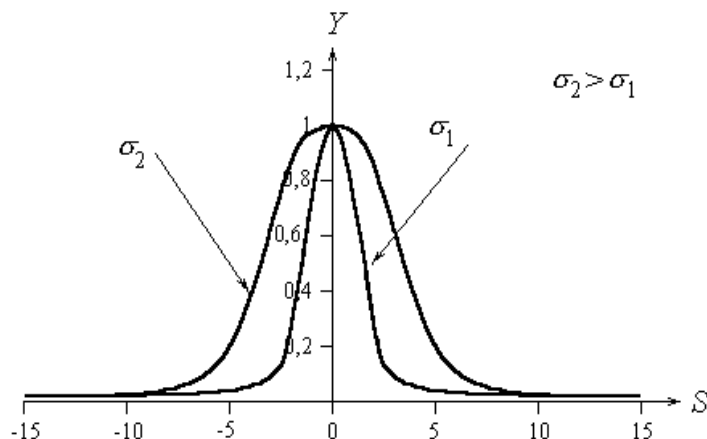


Рис. 5.10. Радиально-базисная функция **radbas(S)**

Многомерные радиальные распределения позволяют производить многомерный анализ путем сведения его к анализу одномерных симметричных распределений, таких как многомерное нормальное распределение или равномерное в шаре с центром в начале координат.

В заключении можно отметить, что на начальной стадии развития нейронных сетей (в частности, модели нейрона МакКаллока и Питтса) использовались пороговые функции.

В настоящее время чаще всего используется сигмоидальная функция, либо функция гиперболического тангенса.

### **Синтез нейронной сети для решения нормальной системы дифференциальных уравнений**

Формируемые НС эффективны при решении задач, для которых имеется хорошо сформулированный в нейросетевом базисе алгоритм решения. Вычислительная математика специализируется на разработке таких методов решения задач, которые могут быть реализованы на ЭВМ. Базой для многих методов, разработанных вычислительной математикой, является аппроксимация функций. В общем виде идею аппроксимации функции можно представить следующим выражением:

$$y(x) = \sum_i a_i \varphi_i(x). \quad (6.1)$$

Выбор базисных функций  $\varphi_i(x)$  в приведенном выражении определяется особенностью решаемой задачи, используемым методом, опытом разработчика и его техническими возможностями. Нетрудно заметить, что это выражение при определенных  $\varphi_i(x)$  описывает однослойную НС.

Значительно больше функциональных возможностей можно получить, если использовать для аппроксимации функций многослойные нейронные сети. Так, аппроксимация с помощью двухслойной сети может быть записана в следующем виде:

$$y(x) = f_2 \left( \sum_i w_{2i} f_1 \left( \sum_j w_{1j} x_j \right) \right). \quad (6.2)$$

Поскольку *нейросетевой базис* представляет собой операцию нелинейного преобразования взвешенной суммы, то естественно говорить об эффективности реализации методов вычислительной математики при решении задач управления динамическими объектами.

4

В теории и практике систем управления для повышения качества проектируемых технических устройств широко используют блоки аппаратного и/или программного интегрирования и дифференцирования сигналов, блоки аппаратной и/или программной аппроксимации функций, блоки решения систем алгебраических линейных или нелинейных уравнений.

Так, например, в системах бесплатформенной инерциальной навигации и ориентации принципиально необходимо интегрировать кинематические уравнения по данным, получаемым с датчиков угловой скорости и датчиков линейного ускорения (акселерометров). Это интегрирование ложится на бортовую УЦВМ. Кроме того, в таких системах УЦВМ должна решать задачу преобразования координат, что всегда связано с вычислением тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Таким образом, общая размерность решаемой УЦВМ системы уравнений для обеспечения качественного управления полетом летательного аппарата в отдельных случаях составляет 100-120.

Следует особо выделить тот факт, что в настоящее время специалисты по системам управления разрабатывают новые методы анализа, синтеза систем, ориентированные на программно-аппаратную реализацию на ЦВМ. В частности, к таким методам можно отнести спектральные методы, методы пространства состояний. Реализация этих методов в общем случае предполагает применение операций над матрицами, которые в свою очередь сводятся к арифметическим. Размерность матриц при описании современных систем управления, как правило, очень большая. Это открывает широкий фронт для исследования возможности реализации указанных алгоритмов управления в нейросетевом базисе.

Как уже отмечалось, нейросетевой базис представляет собой операцию взвешенного суммирования нескольких входных сигналов с последующим преобразованием этой суммы посредством функцией активации формального нейрона, которая может быть как линейной, так и нелинейной. Рассмотрим, в какой мере численные методы решения дифференциальных уравнений могут удовлетворять нейросетевому базису, какую при этом необходимо иметь функцию активации, какова будет топология НС.

С целью упрощения выкладок рассмотрим случай стационарной системы.

### **6.1. Интегрирование стационарных систем дифференциальных уравнений**

Пусть задана нормальная система  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{Y}(t) = A \cdot Y(t) \quad (6.3)$$

где  $A$  - квадратная матрица постоянных коэффициентов размера  $n \times n$ ;  $Y$  -  $n$ -мерный вектор искомой функции аргумента  $t$

Хорошо известны различные варианты аналитического решения системы (6.3), определяемые видом корней характеристического уравнения. Именно наличие вариантов и затрудняет разработку единого метода решения произвольной системы.

Обобщенное приближенное решение системы (6.3) численными методами Рунге-Кутты можно представить в следующем виде:

$$Y_{i+1} = \exp(hA) \cdot Y_i \quad (6.4)$$

где  $h$  - шаг интегрирования, а  $i$  - его номер.

Элементы матричной экспоненты  $\exp(hA)$  - постоянные коэффициенты. Матричная экспонента по определению может быть разложена в ряд Маклорена:

$$\exp(hA) = E + Ah + \frac{1}{2!}(Ah)^2 + \frac{1}{3!}(Ah)^3 + \dots$$

Произведение вектора  $Y_i$  на разложение этой экспоненты в степенной ряд Маклорена есть не что иное, как взвешенное суммирование. Поэтому итерационный процесс (6.1) полностью удовлетворяет требованиям нейросетевого базиса. Удерживая в разложении экспоненты два, три, четыре и более членов (включая единицу), можно получить нейросетевую реализацию решения системы (6.3) методами Рунге-Кутты первого, второго, третьего и более порядков аппроксимации.

Реализация процесса численного интегрирования (6.1) возможна в том случае, если нейронная сеть синхронная, а функции активации нейронов - линейные. Элементы матрицы  $A$  ( $a_{jk}, j, k = 1, 2, \dots, n$ ) определяют связь между компонентами вектора  $Y$  ( $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ ) в прямом направлении (от  $y_1$  к  $y_2$  -  $a_{21}$  и т.д.), в обратном (от  $y_2$  к  $y_1$  -  $a_{12}$ , и т. д.) и самого компонента на себя (элементы главной диагонали матрицы  $A$ ). Поэтому для нейросетевой реализации необходимо, чтобы нейроны в слое, реализующем интегрирование по формуле (6.1), соединялись между собой по принципу «каждый с каждым», включая связь с выхода нейрона на свой же вход. Далее, поскольку размерность вектора искомой функции  $Y$  не зависит от используемого численного метода, то число нейронов, необходимых для интегрирования системы (6.3), в соответствии с выражением (6.4), определяется размерностью вектора  $Y$  (в нашем случае  $n$ ).

Рассмотрим конкретные примеры. Решение системы (6.4) методом прямоугольников (метод Рунге-Кутты первого порядка аппроксимации) имеет вид

$$Y_{i+1} = Y_i + hA \cdot Y_i. \quad (6.5)$$

Представим последнее равенство (6.5) в следующем виде:

$$Y_{i+1} = (E + hA)Y_i = B_1 \cdot Y_i. \quad (6.6)$$

где  $E$  – единичная матрица  $n \times n$ .

4

Элементы матрицы  $B_1 = E + hA$  есть первые два члена разложения матричной экспоненты  $\exp(hA)$  в степенной ряд. Для системы двух уравнений (при  $n=2$ ) выражение (6.3) в развернутом виде принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} y_{1i+1} &= b_{11}y_{1i} + b_{12}y_{2i} = (1 + ha_{11})y_{1i} + ha_{12}y_{2i}; \\ y_{2i+1} &= b_{21}y_{1i} + b_{22}y_{2i} = ha_{21}y_{1i} + (1 + ha_{22})y_{2i}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Уравнения (6.7) содержат лишь операции взвешенного суммирования. Поскольку решаемая система является системой двух уравнений, то выходные сигналы  $y_1, y_2$  снимаются с двух нейронов. При этом выход первого нейрона, как следует из первого уравнения (6.4), должен быть соединен со входом этого же нейрона через синаптический коэффициент  $(1 + ha_{11})$ . Со входом второго нейрона первый нейрон соединяется, как следует из второго уравнения (6.7), через коэффициент  $(ha_{21})$ . Выход второго нейрона соединяется со входом первого через синаптический коэффициент  $ha_{12}$  и подается на собственный вход через коэффициент  $(1 + ha_{22})$ .

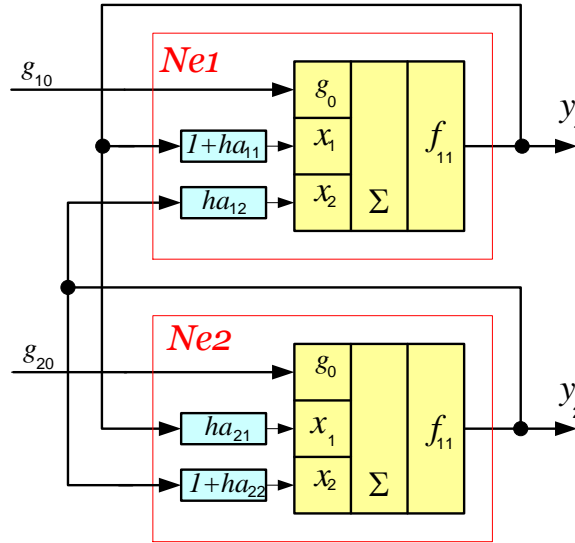
Поскольку решение (6.7) - рекуррентное выражение, то нейронная сеть, реализующая это решение, должна быть синхронной, а нейроны должны иметь линейную симметричную функцию активации.

На рис. 6.1 представлена схема соединения нейронов, реализующая решение системы (6.2) в соответствии с выражением (6.7). На этом рисунке  $Ne1$ ,  $Ne2$  - нейроны, участвующие в операции интегрирования. Выходом сети являются сигналы  $y_1$ ,  $y_2$ . Входные сигналы  $g_{10}$  и  $g_{20}$  вводят в нейроны начальное возбуждение, эквивалентное начальным условиям решения системы уравнений. Функция активации у обоих нейронов - симметричная



линейная функция. Схема на рис. 6.1 является универсальной, так как применима для любых систем двух уравнений. В каждом конкретном случае разработчик должен ввести лишь конкретные значения коэффициентов  $a_{ij}$ .

4



**Рис. 6.1.** Схема НС для интегрирования системы двух дифференциальных уравнений методом прямоугольников.

Рассмотрим систему трех уравнений ( $n = 3$ ). Выражение (6.3) в скалярной форме записи для этого случая имеет вид:

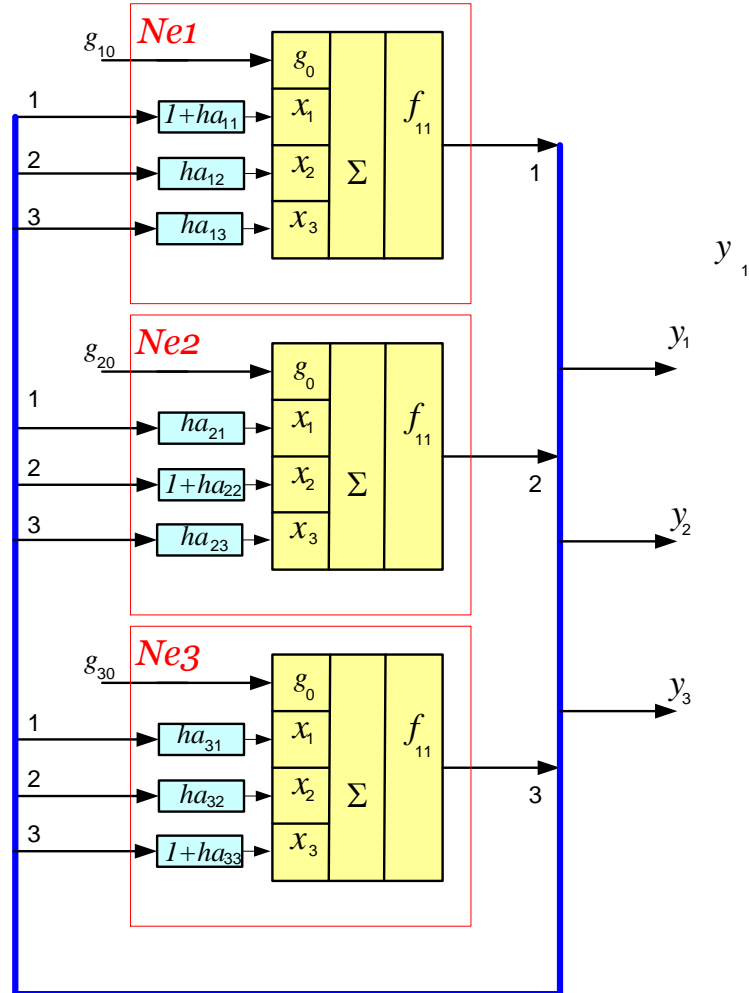
$$\begin{aligned} y_{1i+1} &= b_{11}y_{1i} + b_{12}y_{2i} + b_{13}y_{3i}; \\ y_{2i+1} &= b_{21}y_{1i} + b_{22}y_{2i} + b_{23}y_{3i}; \\ y_{3i+1} &= b_{31}y_{1i} + b_{32}y_{2i} + b_{33}y_{3i}. \end{aligned}$$

После замены коэффициентов  $b_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) в последнем выражении на элементы разложения матричной экспоненты  $\exp(h\mathbf{A})$  в ряд Маклорена получим:

$$\begin{aligned} y_{1i+1} &= (1 + ha_{11})y_{1i} + ha_{12}y_{2i} + ha_{13}y_{3i}; \\ y_{2i+1} &= ha_{21}y_{1i} + (1 + ha_{22})y_{2i} + ha_{23}y_{3i}; \\ y_{3i+1} &= ha_{31}y_{1i} + ha_{32}y_{2i} + (1 + ha_{33})y_{3i}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь, как и в случае системы двух уравнений в (6.5), присутствуют лишь операции взвешенного суммирования, следовательно, и она тоже удовлетворяет нейросетевому базису. На рис. 6.7 показана схема соединения

нейронов для решения системы трех уравнений методом прямоугольников. Нетрудно заметить, что при  $a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{23}, a_{13}$ , равных нулю, выражения (6.8) переходят в выражение (6.7), а следовательно, и схема, показанная на рис. 6.1, переходит в схему, представленную на рис. 6.2



**Рис.6.2.** Схема НС для интегрирования системы трех дифференциальных уравнений методом прямоугольников

Используя описанный выше прием, можно получить выражения, подобные (6.4) и (6.5), для системы с любым числом уравнений.

Рассмотрим решение системы (6.1) численным методом Рунге-Кутты второго порядка аппроксимации (метод трапеции). В этом случае общее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + 0,5h(K1 + K2) \\ K1 &= AY_i, \quad K2 = A(Y_i + hK1) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Подставим выражения для  $\mathbf{K}_1$  и  $\mathbf{K}_2$  в первое уравнение системы (6.9) и после несложных преобразований получим

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{B}_2 \mathbf{Y}_i = (\mathbf{E} + h\mathbf{A} + 0,5h^2\mathbf{A}^2)\mathbf{Y}_i \quad (6.10)$$

Элементы матрицы  $\mathbf{B}_2 = (\mathbf{E} + h\mathbf{A} + 0,5h^2\mathbf{A}^2)$ , как и элементы матрицы  $\mathbf{B}_1$ , удовлетворяют нейросетевому базису, а сама матрица определяет топологию нейронной сети для решения системы (6.2) рассматриваемым методом.

Решение (6.10) для случая системы двух уравнений ( $n = 2$ ) в развернутом виде можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} y_{1i+1} &= (1 + ha_{11} + 0,5h^2a_{11}^2 + 0,5h^2a_{12}a_{21})y_{1i} \\ &\quad + (ha_{12} + 0,5h^2a_{11}a_{12} + 0,5h^2a_{12}a_{22})y_{2i}; \\ y_{2i+1} &= (ha_{21} + 0,5h^2a_{11}a_{21} + 0,5h^2a_{21}a_{22})y_{1i} + (1 + ha_{22} + \\ &\quad 0,5h^2a_{12}a_{21} + 0,5h^2a_{22}^2)y_{2i} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Сопоставляя (6.7) с (6.11), можно заметить, что топология сети в обоих случаях одинакова. Меняются лишь значения синаптических коэффициентов. В решении (6.11) появились слагаемые в синаптических коэффициентах, определяемые третьим членом ряда разложения матричной экспоненты  $\exp(h\mathbf{A})$ , членом, пропорциональным квадрату аргумента экспоненты  $-0,5h^2\mathbf{A}^2$ .

Для случая  $n = 3$  выражение (6.11) принимает вид:

$$\begin{aligned} y_{1i+1} &= (1 + ha_{11} + 0,5h^2a_{11}^2 + 0,5h^2a_{12}a_{21} + 0,5h^2a_{13}a_{31})y_{1i} + \\ &\quad + (ha_{12} + 0,5h^2a_{11}a_{12} + 0,5h^2a_{12}a_{22} + 0,5h^2a_{13}a_{32})y_{2i} + \\ &\quad + (ha_{13} + 0,5h^2a_{11}a_{13} + 0,5h^2a_{13}a_{23} + 0,5h^2a_{13}a_{33})y_{3i}; \\ y_{2i+1} &= (ha_{21} + 0,5h^2a_{11}a_{21} + 0,5h^2a_{21}a_{22} + 0,5h^2a_{23}a_{31})y_{1i} + \\ &\quad + (1 + ha_{22} + 0,5h^2a_{12}a_{21} + 0,5h^2a_{22}^2 + 0,5h^2a_{23}a_{32})y_{2i} + \\ &\quad + (ha_{23} + 0,5h^2a_{13}a_{21} + 0,5h^2a_{22}a_{23} + 0,5h^2a_{23}a_{33})y_{3i}; \\ y_{3i+1} &= (ha_{31} + 0,5h^2a_{11}a_{31} + 0,5h^2a_{21}a_{32} + 0,5h^2a_{31}a_{33})y_{1i} + \\ &\quad + (ha_{32} + 0,5h^2a_{12}a_{31} + 0,5h^2a_{22}a_{32} + 0,5h^2a_{32}a_{33})y_{2i} + \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$+(1 + ha_{33} + 0,5h^2a_{13}a_{31} + 0,5h^2a_{23}a_{32} + 0,5h^2a_{33}^2)y_{3i};$$

Топология сети, построенной по выражению (6.12), очевидно, будет полностью совпадать с топологией сети, приведенной на рис. 6.1. Как и в предыдущем случае (при  $n = 2$ ), изменение порядка численного метода привело к изменению лишь коэффициентов синаптической связи.

Решение системы (6.2) методом Рунге-Кутты третьего порядка аппроксимации в общем случае имеет вид:

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + \frac{1}{6}h(K1 + 4K2 + K3); \\ K1 &= AY_i, \quad K2 = A(Y_i + 0,5hK1); \\ K3 &= A(Y_i + hK1 + 2K2). \end{aligned} \quad (6.13)$$

После подстановки выражений  $K1, K2, K3$  в первое уравнение (6.5) и соответствующих преобразований получим

$$Y_{i+1} = B_3 Y_i = (E + hA + 0,5h^2A^2 + \frac{1}{6}h^3A^3)Y_i \quad (6.14)$$

Аналогичные рассуждения и преобразования для метода Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации дают следующий результат:

$$Y_{i+1} = B_4 Y_i = (E + hA + 0,5h^2A^2 + \frac{1}{6}h^3A^3 + \frac{1}{24}h^4A^4)Y_i \quad (6.15)$$

Очевидно, что в выражениях (6.6), (6.10), (6.14) и (6.15) матрицы  $B_1, B_2, B_3$  и  $B_4$  представляют собой ряд разложения матричной экспоненты аргумента  $hA$ , ограниченный до двух, трех, четырех и пяти членов соответственно. Следовательно, решение системы (6.2) методом Рунге-Кутты в общем виде можно представить как

$$Y_{i+1} = \exp(hA) Y_i \approx B_k Y_i \quad (6.16)$$

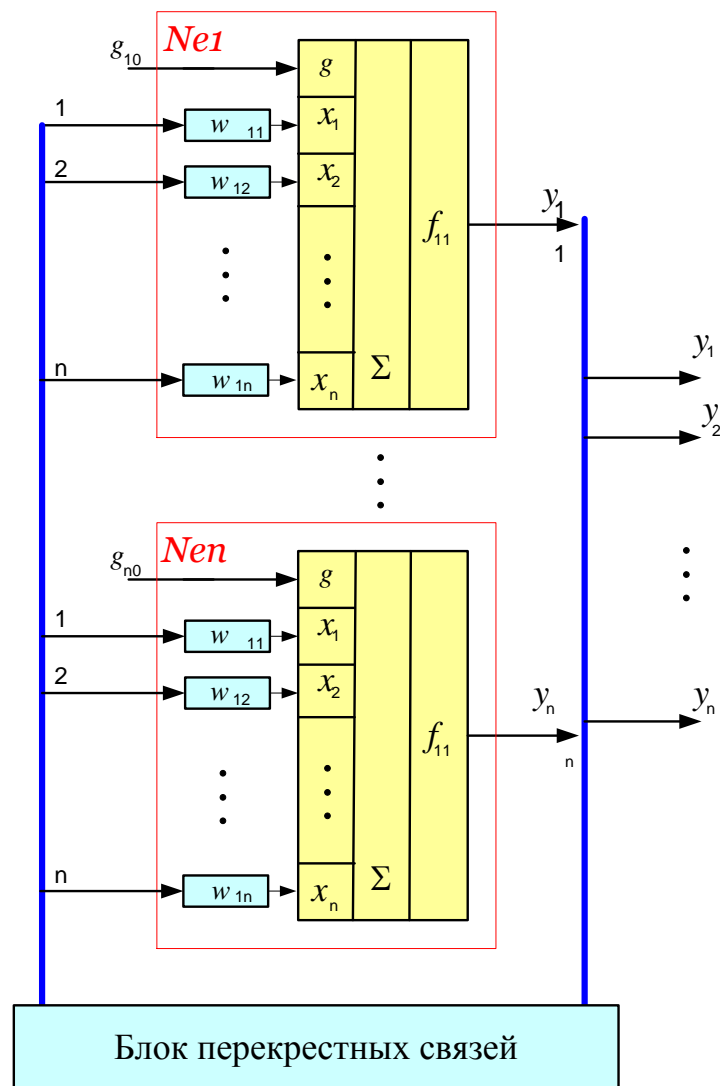
где  $k$  - порядок метода интегрирования, а матрица  $B_k$  определяется по следующей зависимости:

$$B_k = (E + hA + 0,5h^2A^2 + \frac{1}{6}h^3A^3 + \dots + \frac{1}{k!}h^kA^k) \quad (6.17)$$

Любая из матриц  $B_k$  полностью удовлетворяет нейросетевому базису и определяет схему решения системы (6.2).

Выражения (6.16) и (6.17) делают возможным построения нейронных сетей, интегрирующих систему (6.2) с любой, наперед заданной точностью. Анализируя особенности матриц  $B_k$  по выражению (6.17), можно сделать вывод, что <sup>4</sup> *точность решения системы (6.2) в формируемых нейронных сетях будет определяться точностью установки коэффициентов синоптической связи, а не числом используемых нейронов.*

На рис. 6.3 представлена универсальная схема НС для интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений (6.1) размерности  $n$  по выражениям (6.16) и (6.17).



**Рис. 6.3.** Схема универсальной НС для интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений

## Применение степенных рядов при синтезе формируемых нейронных сетей

4

Степенные ряды имеют огромное значение при конструировании алгоритмов УЦВМ. Воспроизведение элементарных функций, аналитических нелинейностей проводится в вычислительной технике с помощью степенных рядов. Поэтому актуальность постановки задачи о реализации вычислительных алгоритмов на базе степенных рядов в НС несомненна.

Рассмотрим, в какой мере степенные ряды могут удовлетворять требованиям нейросетевого базиса. Попытаемся также дать ответы на вопросы:

- какие функции активации должны иметь нейроны для успешной реализации алгоритмов, основанных на степенных рядах;
- какова должна быть топология сети, реализующей эти алгоритмы?

По определению степенным рядом называется функциональный ряд вида:

$$a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_{n-1}(x - c)^{n-1} + a_n(x - c)^n + \dots, \quad (7.1)$$

где коэффициенты ряда  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $c$  - некоторые постоянные числа.

Частичная сумма ряда (7.19), определенная для  $n$  его членов с заранее известным методом задания коэффициентов  $a_i$  применяется для приближенного вычисления аналитически нелинейных функций, например ряды Тейлора и Маклорена. Хорошо известна методология применения этих рядов для приближения функций. Существенным ограничением на класс функций, приближенное значение которых определяется с помощью рядов Тейлора или Маклорена, является требование непрерывности производных этих функций до  $(n+1)$ -го порядка. Это ограничение не уменьшает значимости решения поставленной задачи.

Рассмотрим разложение функции  $\varphi(x)$  в ряд Маклорена (в окрестности точки  $x=0$ ):

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\dot{\varphi}(0) + \frac{x^2\ddot{\varphi}(0)}{2!} + \dots + \frac{x^n\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \dots \quad (7.2)$$

Задаваясь требуемой точностью вычисления  $\varphi(x)$ , ограничивают ряд (7.2) конечным числом членов  $n$ . На практике для многих известных элементарных функций высокая точность достигается уже при  $n = 5 \dots 7$ . Выражение (7.2) является основой для получения ответов на поставленные выше вопросы. Покажем это на примере.

Пусть для конкретности  $n = 5$ . Введем обозначения:

$$a_0 = \varphi(0), a_1 = \varphi^I(0), a_2 = \varphi^{II}(0), a_3 = \varphi^{III}(0), a_4 = \varphi^{IV}(0), a_5 = \varphi^V(0).$$

Тогда

$$\varphi(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5. \quad (7.3)$$

Нетрудно заметить, что приближенное равенство (7.3) есть взвешанная сумма степеней аргумента искомой функции. Следовательно, в идеальном случае для реализации этого выражения на НС необходимы нейроны с линейной, квадратичной, кубической и т. д. функциями активации. В этом (идеальном) случае топология НС может быть определена как однослойная, двухслойная, трехслойная и т. д.

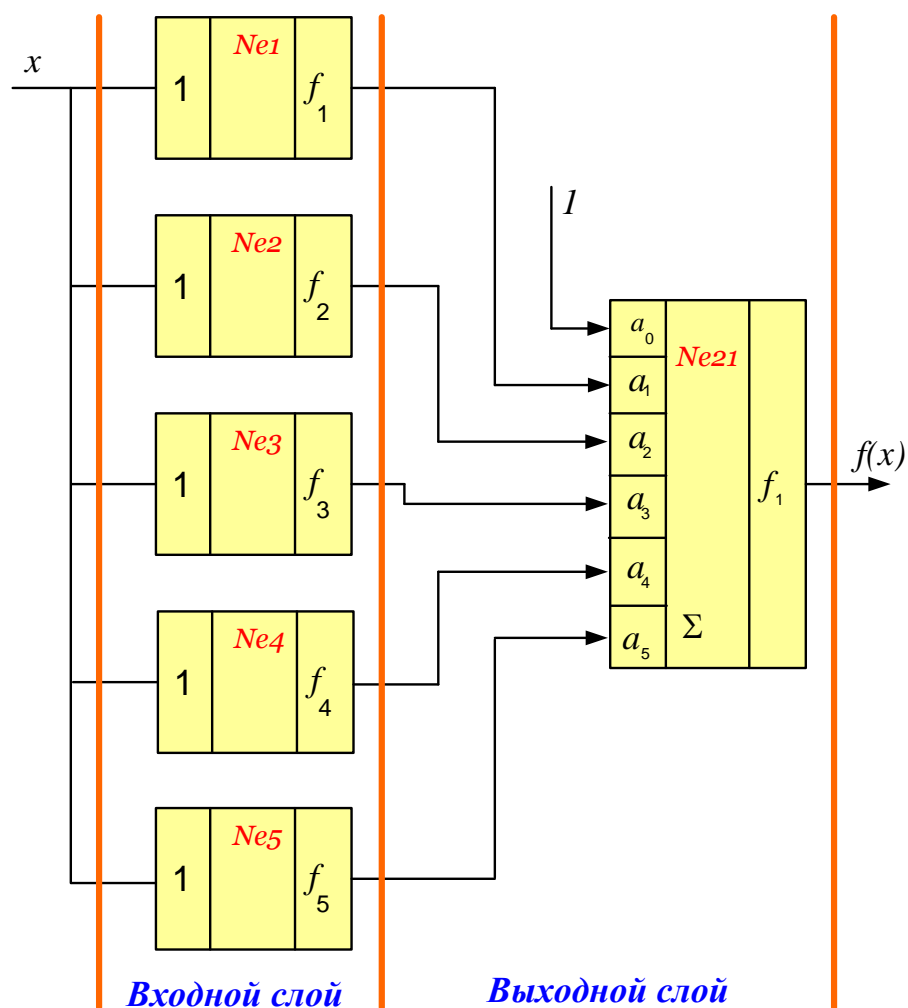
Рассмотрим двухслойную сеть. В этом случае аргумент искомой функции должен подаваться на пять нейронов входного слоя. Функции активации этих нейронов являются соответственно линейной, квадратичной, кубической, параболой 4-й и 5-й степеней. Выходные сигналы нейронов первого слоя через коэффициенты синаптической связи, равные  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ , поступают на единственный нейрон выходного слоя. На сумматор этого же нейрона поступает также сигнал, эквивалентный единице.

Сигнал с сумматора нейрона выходного слоя и есть искомое значение  $\varphi(x)$ . Чтобы это значение не претерпевало дальнейших искажений, функция активации нейрона выходного слоя должна быть линейной. Уравнение такой сети может быть записано в виде

$$\varphi(x) = f_{21} \left( a_0 + \sum_{i=1}^5 a_i f_{1i}(x) \right). \quad (7.4)$$

где суммирование ведется по  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ );  $f_{11}$  - линейная<sup>4</sup> функция активации нейрона;  $f_{12}$ - квадратическая;  $f_{13}$ - кубическая и т. д. Первая цифра индекса при  $f$  указывает номер слоя.

На рис. 7.1 представлена идеальная НС, реализующая степенной ряд Маклорена из шести членов (включая  $a_0$ ) и описываемая уравнением (7.1).



**Рис. 7.1.** Идеальная НС ряда Маклорена из шести членов

В настоящее время разработчик ограничен в выборе типа функций активаций нейронов на аппаратном уровне. В лучшем случае он имеет



возможность применять линейную, квадратичную и кубическую функции активации. Покажем, что и в этом случае возможно решение поставленных задач.

Пусть разработчик может использовать лишь линейную и квадратичную функции активации. Перепишем функцию (7.3) в следующем виде:

$$\varphi(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3((x^2)(x)) + a_4(x^2)^2 + a_5((x^2)(x)(x^2)). \quad (7.5)$$

Здесь введены следующие обозначения - члены взвешенного суммирования без скобок реализуются в одном слое на нейронах, имеющих линейную симметричную ( $f_{11}$ ) или квадратичную функции активации ( $f_2$ ); члены в скобках реализуются через операцию умножения переменных по нейросетевому алгоритму. Как видно из выражения (7.2) для реализации  $x^5$  необходимо дважды применить операцию нейросетевого умножения.

## 7.6. Операции умножения двух переменных в нейросетевом базисе

Метод реализации операции умножения двух переменных основывается на следующем выражении:

$$z = \frac{1}{4}((x + y)^2 - (x - y)^2), \quad (7.6)$$

где  $x$ ,  $y$  - переменные сомножители;  $z$  - произведение  $x$  и  $y$ . Для реализации выражения (7.6) потребуется два нейрона с квадратичной функцией активации и один нейрон, алгебраически суммирующий с весовым коэффициентом 0,25 результаты работы первых двух.

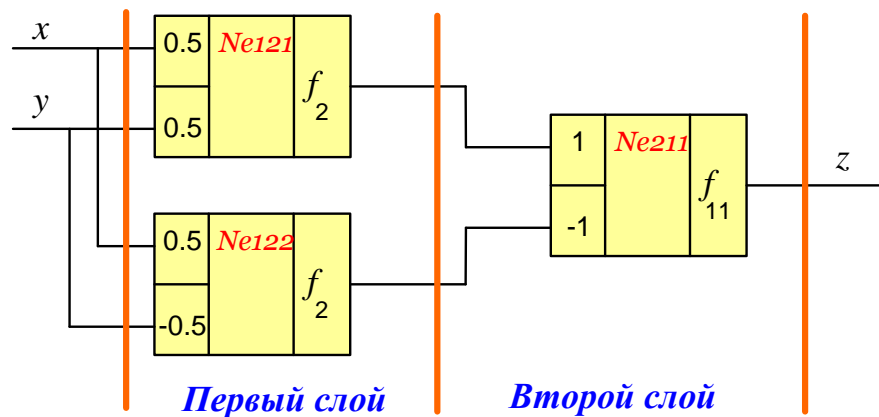
Преобразуем выражение (7.6) к следующему виду:

$$z = f_{211} \left( f_{121} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right) - f_{122} \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right) \right). \quad (7.7)$$

Здесь три цифры нижнего индекса при  $f_{ijk}$  соответственно означают:  $i$  - номер слоя,  $j$  - тип функции,  $k$  - номер нейрона в слое. В этой записи нейроны первого слоя, имеющие квадратичную функцию активации, возводят свои аргументы в квадрат. При этом умножение каждого из сомножителей на 0,5

эквивалентно умножению на 0,25 в (7.6). Один нейрон второго слоя имеет линейную функцию активации. Коэффициенты синаптических связей нейронов первого слоя равны 0,5; 0,5; 0,5; 0,5 соответственно для первого и второго нейронов, а нейрона второго слоя 1 и -7.

На рис. 7.11 приведена схема для реализации операции умножения двух переменных на НС.



**Рис. 7.2.** Схема НС для реализации операции умножения двух переменных

### Возведение аргумента в куб в нейросетевом базисе

Уравнение возведения аргумента в третью степень в нейросетевом базисе можно записать в следующем виде:

$$x^3 = (x^2)(x) = f_{21} \left( 1 \cdot f_{12} \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) - 1 \cdot f_{12} \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \right) \right).$$

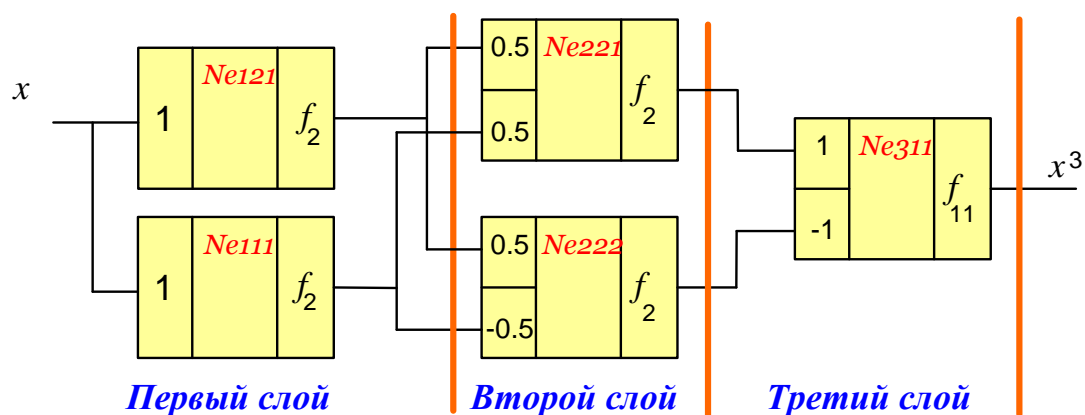
Здесь два нейрона первого слоя, имеющие квадратичные функции активации, возводят в квадрат сумму и разность половинных сомножителей  $x^2$  и  $x$ . Нейрон второго слоя имеет линейную функцию активации.

Для большей конкретизации введем, как и в уравнении (7.7), индексацию для функций активации нейронов тройными индексами и преобразуем в нейро-сетевой базис внутренние скобки последнего выражения:

$$x^3 = ((x)(x))(x) = f_{311} \left( 1 \cdot f_{221} \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) + 1 \cdot f_{222} \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \right) \right) =$$

$$= f_{311} \left( 1 \cdot f_{221} \left( \frac{1}{2} f_{121}(x) + \frac{1}{2} f_{112}(x) \right) \right) - 1 \cdot f_{222} \left( \frac{1}{2} f_{121}(x) - \frac{1}{2} f_{112}(x) \right) \quad (7.8)$$

Таким образом, для возведения аргумента в куб необходима трехслойная сеть, в которой в первом слое будут два нейрона с функциями активации  $f_{11}$  и  $f_2$ , во втором - два нейрона с функциями  $f_2$ , в третьем - один нейрон с функцией  $f_{11}$ . Коэффициенты синаптической связи у нейронов первого слоя будут равны 1, у нейронов второго слоя: 0,5 и 0,5 для первого нейрона, 0,5 и -0,5 для второго; у нейрона третьего слоя 1 и -1. На рис. 7.1 приведена схема нейронной сети для возведения аргумента в куб. Если разработчик имеет возможность применять НС, которая позволяет вводить входные данные и в первый, и во второй слой, то схему, представленную на рис. 7.2, можно упростить, исключив в первом слое нейрон Ne112 с функцией активации  $f_{11}$ .



**Рис. 7.3.** Схема НС возведения аргумента в куб

### Нейронная сеть, воспроизводящая ряд Маклорена из шести членов

В заключение рассмотрим пример нейронной сети, воспроизводящей ряд Маклорена из шести членов. Данная сеть представлена в работе / /.

Полная схема НС, реализующей ряд Маклорена, может быть получена объединением ранее рассмотренных схем с добавлением к ним двух нейронов для реализации второго и третьего слагаемых уравнения (7.5).<sup>4</sup> Выходы  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $x^4$ ,  $x^5$ , а также постоянный сигнал «1» необходимо подать на входы нейрона шестого слоя с коэффициентами синаптической связи  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $a_0$  соответственно. Полная схема НС для реализации ряда Маклорена из шести членов представлена на рис. 7.4.

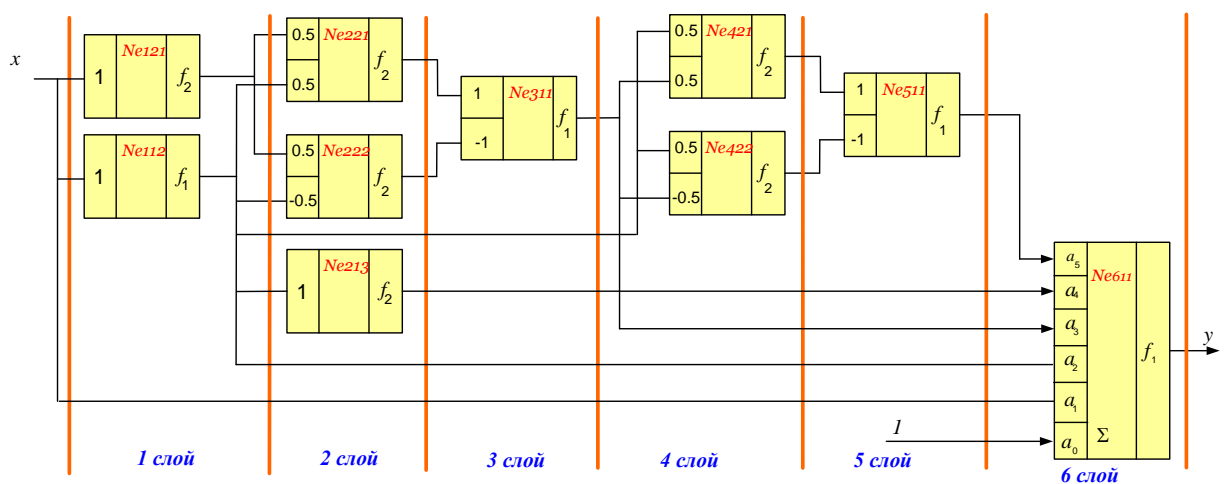


Рис.7.4.

Данная сеть является в некотором роде универсальной, так как может применяться для вычисления любой функции, разложенной в ряд Маклорена до шести членов. С различием функций меняются лишь коэффициенты синаптической связи  $a_i$ . Очевидно, что предлагаемая топология сети не является единственной. Можно рассматривать сеть и с большим числом слоев, и с иным числом нейронов в слоях. Все определяется опытом разработчика и его реальными условиями.

Схема, приведенная на рис. 7.4, была испытана на функциях  $\sin(x)$  и  $\cos(x)$  на имитаторе НС *NeuroIterator*, разработанном в Калужском филиале

МГТУ им. Н.Э. Баумана. Коэффициенты синаптической связи имели следующие значения:

для функции  $\sin$ :  $a_0=0$ ,  $a_1=1$ ,  $a_2=0$ ,  $a_3=-0,16667$ ,  $a_4=0$ ,  $a_5=0,00833$ ; для функции  $\cos$ :  $a_0=1$ ,  $a_1=0$ ,  $a_2=-0,5$ ,  $a_3=0$ ,  $a_4=0,04667$ ,  $a_5=0$ .

Диапазон изменения аргумента составлял  $-1,8 \dots +1,8$  рад. Ряд разлагался в точке с координатами  $x = 0$  и  $y = 0$ . Для этого диапазона была получена точность в 1,1%.

На практике используют разложение функций  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  в ряд Тейлора для диапазона от  $-\frac{\pi}{4}$  до  $+\frac{\pi}{4}$ . В этом случае ряд хорошо сходится. Если же практический диапазон изменения аргумента превышает  $\pm 1$  рад, то для повышения точности при минимальных аппаратных (или программных) затратах необходимо привести представляемый угол к диапазону  $\pm \pi$ , а затем уже вычислять тригонометрические функции.

### Задачи

1. Синтезируйте НС для воспроизведения функции:

а)  $y = \exp(x)$ ,  $x=(-2\dots 2)$ ;

б)  $y = \ln(x)$ ,  $x=(0,07\dots 4)$ ;

в)  $y = \operatorname{tg}(x)$ ,  $x=(-1,1\dots 1,1)$ ;

г)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x=(0,01\dots 5)$ .

2. Разработайте НС для решения следующих дифференциальных уравнений:

а)  $y_1' = y_2$

$$y_2 = -y_1$$

При следующих начальных условиях:  $y_1(0)=-1$ ,  $y_2(0)=0$ ,  $t=(0\dots 2\pi)$ ;

б)  $\frac{dy_1}{dt} = -y_2 + y_3$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_3$$

$$\frac{dy_3}{dt} = -y_1 + y_2$$

При следующих начальных условиях:  $y_1(0)=0$ ,  $y_2(0)=0$ ,  $y_3(0)=1$ ,  $t=(0\dots 15)$ ;

в)  $\mathbf{X}'(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)$ ,

где  $\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix} t & 0 & 1 & -t \\ -2t & t & 0 & -1 \\ t & -t & t & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & t \end{bmatrix}$

4

при следующих начальных условиях:  $x_1(0)=0$ ,  $x_2(0)=-1$ ,  $x_3(0)=0$ ,  
 $x_4(0)=1$ ,  $t=(0 \dots 12)$ .

## Практическое занятие 8

### Структуры нечетких регуляторов

Обычно НЛР включаются последовательно с объектом управления, подобно традиционным регуляторам.

Входные и выходные сигналы НЛР подвергаются преобразованию.

В общем случае предобработка входного сигнала может включать такие операции, как:

- квантификация (округление);
- нелинейное шкалирование;
- фильтрация и удаление шумов;
- дифференцирование и (или) интегрирование;
- усреднение на некотором интервале времени, экстраполяция, интерполяция;
- вычисление произвольных функций над комбинациями входных переменных для получения семантически значимых значений.

Однако чаще всего предобработка сводится к нормализации (N) входного сигнала — приведению его к диапазону  $[-1, 1]$ . Тогда постобработка сводится к денормализации (DN) выходного сигнала НЛР (рис. 8.12).

Если  $x$  - входная переменная НЛР, то нормализация происходит путем умножения  $x$  на масштабирующий коэффициент:



Рис. 8.1. Обработка сигналов на входе и выходе НЛР



Рис. 8.2. Нормализация и денормализация сигналов на входе и выходе НЛР

$$x_N = xN = \frac{x}{|x_{\max}|} \quad (8.1)$$

4

Денормализация выходной величины  $u$  сводится к обратной операции:

где  $u_{\max} \approx$  максимальное значение управления, подаваемого на объект.

Количество и вид входных и выходных сигналов НЛР зависят от решаемой задачи, однако чаще всего входами НЛР служат (в разных комбинациях) ошибка управления, ее производная и интеграл. Соответственно различают НЛР П-типа, ПД-типа, ПИ-типа или ПИД-типа (рис.8.3-8.8).



Рис. 8.3. НЛР П-типа (НЛР\_П)

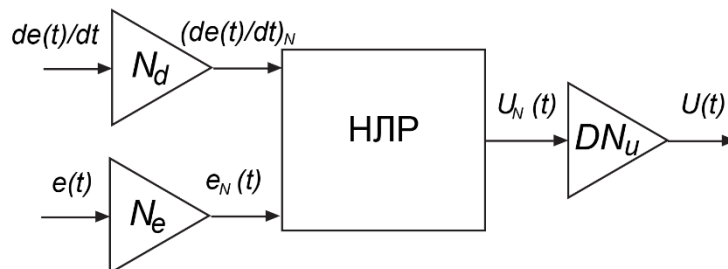


Рис. 8.4. НЛР ПД-типа (НЛР\_ПД)

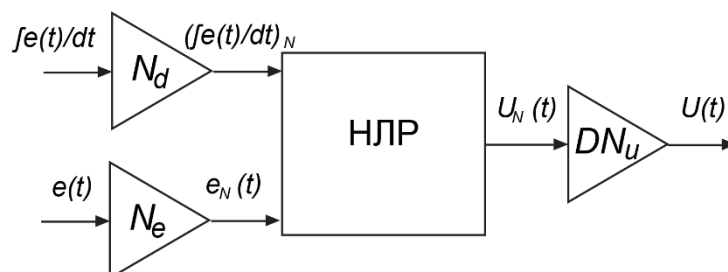


Рис. 8.5 НЛР ПИ-типа (НЛР\_ПИ)



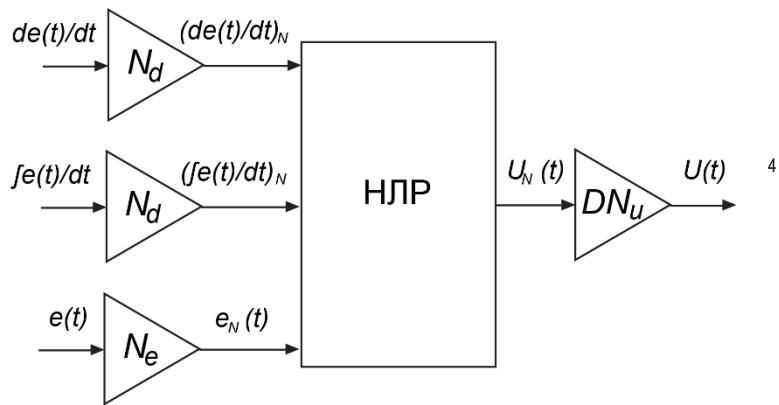


Рис. 8.6. НЛР ПИД-типа (НЛР\_ПИД)

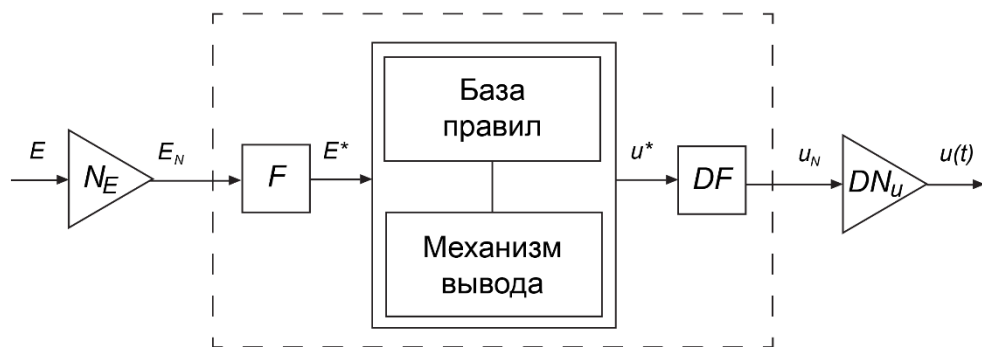


Рис. 8.7. НЛР П-типа

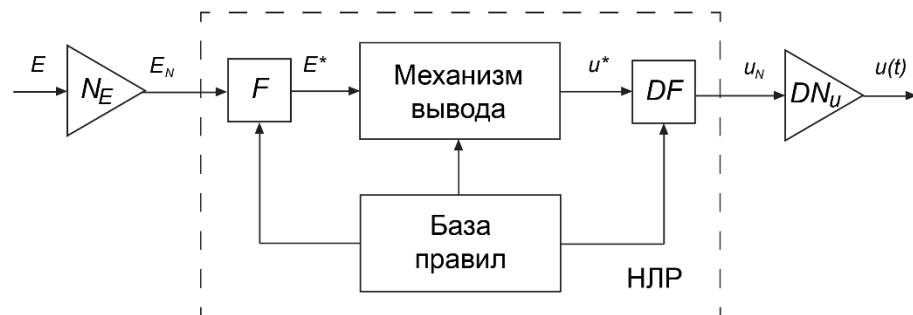


Рис. 8.8. Уточненный вариант описания НЛР\_П

Обозначим через  $E$  входной вектор НЛР (рис. 8.7), он преобразуется в нечеткую форму  $E^*$  (блок фаззификации  $F$ ), затем выполняется нечеткий логический вывод в базе правил, в результате чего получается нечеткая выходная переменная  $u^*$ . После дефаззификации (блок  $DF$ ) на объект управления поступает «четкий» сигнал управления  $u$ .

Операции фаззификации и дефаззификации зависят от параметров термов, описывающих входные и выходные переменные. Таким образом,

можно сказать, что помимо механизма вывода в НЛР существует база знаний, включающая описание термов и правил (рис. 8.8).

Запишем  $k$ -е правило управления НЛР ПИД в виде

4

$$\text{Если } (x_1 = A_1^k) \text{ и } (x_2 = A_2^k) \text{ и } (x_3 = A_3^k), \text{ то } y = B_k, \quad (8.2)$$

где  $x_i$  - соответственно ошибка управления, ее производная и интеграл;  
 $y$  - сигнал управления;  $A_i$  и  $B$  - термы, входящие в  $k$ -е правило.

На практике нечеткий вывод реализуется обычно в несколько шагов:

1. Выполняется фаззификация - вычисляются значения  $\alpha_{i,k}$  соответствия  $i$ -й входной переменной  $i$ -й посылке  $k$ -го правила

$$\alpha_{i,k} = x_i^* \cap A_i^k, \quad (8.3)$$

где  $x_i$  нечеткое множество (синглетон), образованное из  $x_i$ .

2. Определяется степень соответствия всех посылок  $k$ -го правила текущим входным данным:

$$\beta_k = T_{i=1}^N \alpha_{i,k}, \quad (8.4)$$

где  $N$  - количество посылок правила;  $T$  - используемая Т-норма; - степень срабатывания (запуска) правила. 3. Определяется выходной сигнал каждого правила:

$$\mu_{B'_k}(y) = I(\beta_k, \mu_{B_k}(y)), \quad (8.5)$$

4. Общий выходной сигнал системы правил  $B'$  определяется путем агрегирования выходных сигналов отдельных правил:

$$\mu_{B'}(y) = I(\beta_k, \mu_{B_k}(y)),$$

Таким образом, закон управления реализуется как совокупное действие всех правил, записанных в базе правил:

4

$$R = R_1 \vee R_2 \vee R_3 \dots R_k.$$

В соответствии с рис. 8.8 синтез НЛР связан с определением параметров:

- 1) коэффициентов нормализации и денормализации;
- 2) функций принадлежности термов ЛП;
- 3) управляющих правил НЛР.

Возможны разные постановки задачи синтеза НЛР, но для придания ей реалистического характера желательно минимизировать количество параметров.

В зависимости от количества входов меняется количество посылок нечетких управляющих правил.

Для НЛР\_П количество правил равно количеству термов, описывающих ЛП «Ошибка управления». Для других типов НЛР потенциальное количество правил равно декартову произведению мощностей термножеств входных переменных. Если считать, что каждая входная переменная имеет одинаковое количество термов, то число правил можно оценить в соответствии с табл. 8.1.

Таблица 8.1. Потенциальное количество правил для разных типов  
*НЛР*

Количество термов	Количество правил		
	НЛР_П	НЛР_ПД (ПИ)	НЛР_ПИД
3	3	9	27
5	5	25	125
7	7	49	343

Запишем уравнение ПИД-регулятора в виде:

$$u(t) = \left( \frac{1}{2} k_p e(t) + k_d \frac{de(t)}{dt} \right) + \left( \frac{1}{2} k_p e(t) + k_i \int e(t) dt \right). \quad (8.6)$$

Первая скобка описывает ПД-регулятор, вторая скобка<sup>4</sup> - ПИ-регулятор, т. е. ПИД-регулятор можно представить в виде параллельного соединения этих регуляторов. Соответственно, НЛР\_ПИД можно представить в виде структуры, показанной на рис. 8.9.

Другой вариант реализации имеет вид:

$$u(t) = k_p \left( e(t) + \frac{k_d}{k_p} \frac{de(t)}{dt} \right) + k_i \int e(t) dt. \quad (8.7)$$

Здесь первая скобка описывает ПД-регулятор, отвечающий за время нарастания и перерегулирование, а вторая скобка - И-регулятор, который служит для уменьшения статической ошибки. Таким образом, ПД-регулятор должен передавать управление И-регулятору, когда  $e(t)$  и  $de(t)/dt$  становятся малыми (рис. 8.10).

Нечеткие логические регуляторы реализуются обычно на базе микроконтроллеров. В дискретном НЛР вместо производной ошибки управления рассматривается ее приращение  $\Delta e(t) = e(t) - e(t-1)$ . Значения масштабирующих коэффициентов не изменяются.

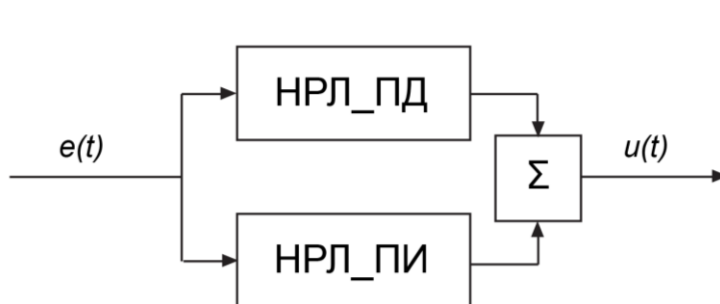


Рис. 8.9. Упрощение структуры НЛР\_ПИД



Рис. 8.10. Вариант структуры НЛР\_ПИД

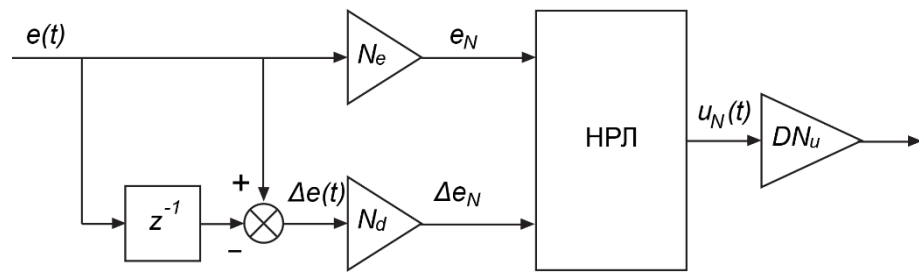


Рис. 8.11. дискретное описание НЛР\_ПД

Поведение НЛР\_ПД можно описать выражением

$$u(t) = F_{\text{л}}(e(t), \Delta e(t)),$$

где  $F_{\text{л}}$  – лингвистический закон управления, заданный набором правил (рис. 8.11, где  $z^{-1}$  обозначает операцию задержки на 1 такт).

Пусть  $k$  – номер шага квантования по времени, тогда:

$$\Delta e = e(k) - e(k-1) = (1 - z^{-1})e(k),$$

и цифровой НЛР\_ПД можно представить в виде, показанном на рис. 8.12.

Пропорционально-интегральный контроллер для каждой пары значений ошибки и ее интеграла вычисляет значение управления:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int e(t) dt. \quad (8.8)$$

Рассмотрим производную уравнения (8.8):

$$du(t) / dt = k_p de(t) / dt + k_i e(t)$$

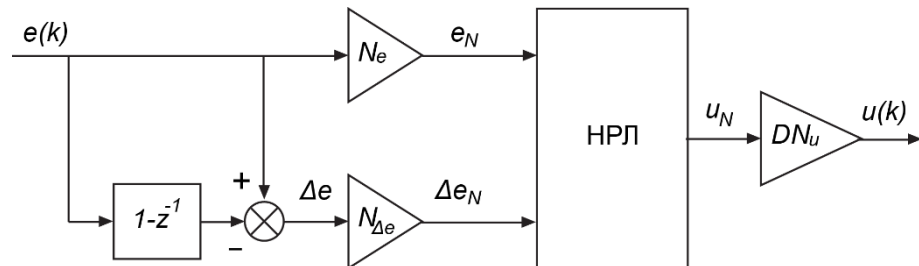


Рис. 8.12 Вариант дискретного описания НЛР\_ПД

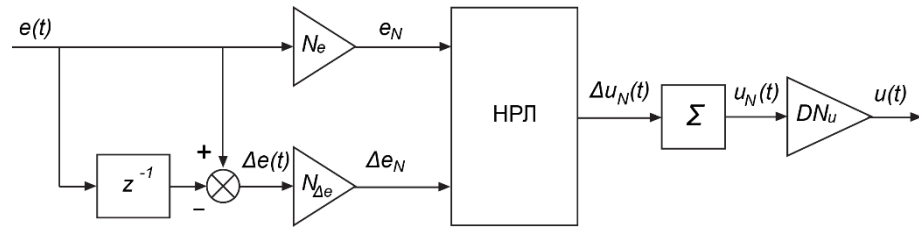


Рис.8.13. Дискретное описание НЛР\_ПИ

В дискретной форме вместо производной рассматривается приращение, а вместо интеграла – сумма:

$$\Delta u(t) = k_p \Delta e(t) + k_i e(t),$$

$$\text{где } \Delta u(t) = u(t) - u(t-1).$$

Таким образом, поведение НЛР\_ПИ описывается системой лингвистических правил вида:

$$\Delta u(t) = F_n(e(t), \Delta e(t)),$$

и структура НЛР\_ПИ совпадает по виду со структурой НЛР\_ПД (рис. 8.11 и 8.12) за исключением того, что здесь рассматривается не сигнал управления, а его приращение (рис. 8.13).

Блок суммирования обычно описывается в виде, показанном на рис. 8.14.

Рассматривая приращение сигнала управления:

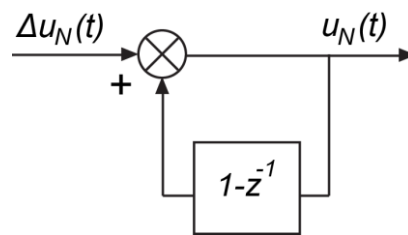
$$\Delta u = u(k) - u(k-1) = (1 - z^{-1})u(k),$$

можно записать

$$u(k) = \frac{\Delta u}{1 - z^{-1}},$$

и тогда дискретный НЛР\_ПИ можно представить в виде, показанном на рис.8.14.

Помимо описанных типовых структур НЛР, возможны и другие варианты использования НЛР в системе управления. Например, НЛР может служить для компенсации внешних шумов (рис. 8.15).



4

Рис. 8.14. Дискретная реализация интеграла.

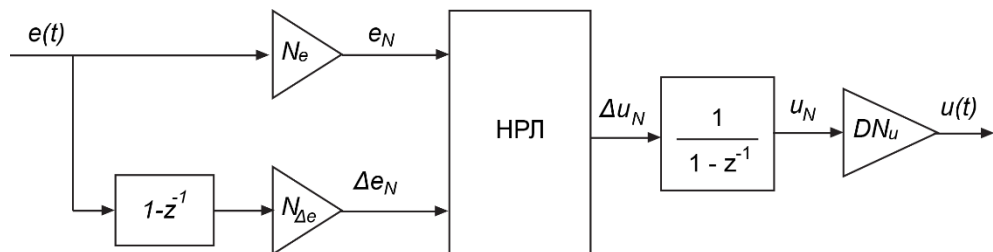


Рис. 8.15. Вариант дискретного описания НЛР\_ПИ

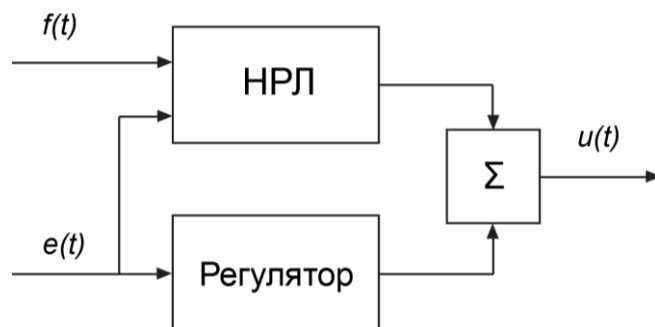


Рис. 8.16. Нечеткая компенсация внешних возмущений

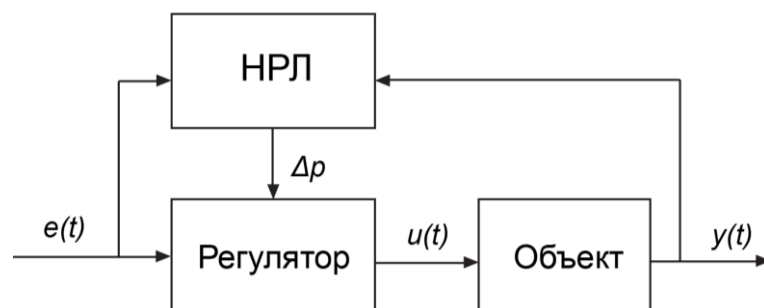


Рис. 8.17. Включение НЛР в контур адаптации

Возможно использование НЛР в составе адаптивной системы для изменения параметров  $\Delta p$  основного регулятора при ухудшении качества функционирования (рис. 8.17).

В ряде случаев эффективной также может оказаться иерархическая структура из НЛР, в которой регуляторы нижнего уровня осуществляют первичную обработку информации.



## Литература

1. Леоненков, А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А.В.Леоненков .— СПб. : БХВ-Петербург, 2005 .— 736с. : ил.  
— (Мастер решений) .— Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-94157-087-2 : 161.00.
2. Горячев О.В. Основы теории компьютерного управления : учеб. пособие / О. В. Горячев, С. А. Руднев ; ТулГУ .— Тула : Изд-во ТулГУ, 2008 .— 220 с. : ил. — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-7679-1194-3 : 181,00.
3. Девятков В.В. ; Системы искусственного интеллекта; 2001; М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана; 352; 28; ; 25
4. Бесекерский, В.А. Теория систем автоматического управления : [Учебное издание] / В.А.Бесекерский, Е.П.Попов .— 4-е изд., перераб.и доп. — СПб. : Профессия, 2004 .— 752с.
5. Суэмацу Е. Микрокомпьютерные системы управления.Первое знакомство : пер.с яп. / Е.Сумаэцу; под ред.Е.Амэмия .— М. : Додэка-XXI, 2002 .— 256с. : ил. — ISBN 5-94120-048-X : 156.00.
6. Музылева И. В. Элементная база для построения цифровых систем управления : учеб. пособие для вузов / И.В.Музылева .— М. : Техносфера, 2006 .— 144с. : ил. — (Мир электроники) .— Библиогр. в конце кн. — ISBN 5-94836-099-7 : 116,97.
7. Пупков К.А. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления : учебник для вузов / К.А.Пупков [и др.]; под ред.Н.Д.Егупова .— 2-е изд., стер. — М. : Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2002 .— 744с. : ил. — (Методы теории автоматического управления) .— Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-7038-2030-8 /в пер./ : 306.00.
8. Комарцова, Л. Г. Нейрокомпьютеры : учеб. пособие для вузов / Л. Г. Комарцова, А. В. Максимов .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004 .— 400 с. : ил. — (Информатика в техническом университете) .— ISBN 5-7038-2554-7 ((в пер.)) : 125,00.

9. Методы классической и современной теории автоматического управления : учебник для вузов : в 5 т. Т. 5. Методы современной теории автоматического управления / К. А. Пупков [и др.] ; под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : МГТУ им. Баумана, 2004 .— 784 с. : ил. — (Методы теории автоматического управления/под общ. ред. К. А. Пупкова) .— Библиогр. в конце кн. — ISBN 5-7038-2190-8 (Т. 5) .— ISBN 5-7038-2194-0.