

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»**

**Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра «Вычислительная механика и математика»**

Утверждено на заседании кафедры  
«Вычислительная механика и математика»  
«14» января 2021г., протокол № 5  
Заведующий кафедрой

  
В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к самостоятельной работе по дисциплине (модулю)  
«Математика»**

**Основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**23.03.02 Наземные транспортно-технологические комплексы**

с направленностью (профилем)  
**Подъемно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование**

Форма обучения: заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 230302-01-21

Тула 2021 год

**Разработчик методических указаний**

Кузнецова В.А., доцент, к.ф.-м.н.  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



\_\_\_\_\_  
(подпись)

### Аналитическая геометрия

В прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  положение любой точки задается тремя числами – *координатами* :  $A(x_A, y_A, z_A)$  (рисунок 1).

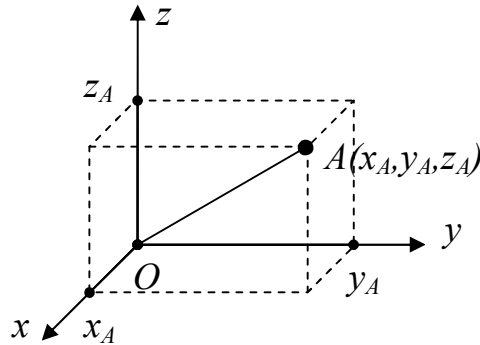


Рисунок 1.

Расстояние между двумя точками  $A_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $A_2(x_2, y_2, z_2)$  определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

При решении задач аналитической геометрии на плоскости необходимы следующие сведения о прямой линии:

1) если точка  $M(x; y)$  делит отрезок  $M_1M_2$  ( $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ ) в отношении  $\lambda$ , то координаты этой точки выражаются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (2)$$

если же точка  $M(x; y)$  - середина отрезка  $M_1M_2$ , то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad (3)$$

2) уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(x_1; y_1)$  и имеющей данный угловой коэффициент  $k$ , записывается в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1); \quad (4)$$

3) уравнение прямой, проходящей через две данные точки  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ , имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \text{ при этом } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad (5)$$

4) острый угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|, \quad (6)$$

при этом условие параллельности прямых имеет вид  $k_1 = k_2$ , а условие перпендикулярности  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ ; (7)

5) если прямая на плоскости задана *общим уравнением*  $Ax + By + C = 0$ , то  $k_1 = -\frac{A}{B}$  - ее угловой коэффициент;

6) если в общем уравнении прямой поделить все члены на  $C \neq 0$ , получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{где } a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}; \quad (8)$$

7) точка пересечения двух прямых  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  определяется из решения системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

*Уравнение окружности* с центром в точке  $E(a, b)$  и радиусом  $R$  имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (10)$$

**Пример.** Даны вершины треугольника  $ABC$ :  $A(-4; 8)$ ,  $B(5; -4)$ ,  $C(10; 6)$ .  
Найти: 1) длину стороны  $AB$ ; 2) уравнения сторон  $AB$  и  $AC$  в общем виде и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол  $A$  в радианах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты  $CD$  в общем виде и ее длину; 5) уравнение окружности, для которой высота  $CD$  есть диаметр.

*Решение:*

1) Расстояние  $d$  между двумя точками на плоскости определяется по формуле (1), в которую подставлены значения координат точек  $A$  и  $B$  (положим  $z_1 = z_2 = 0$ ), тогда

$$AB = \sqrt{(5 - (-4))^2 + (-4 - 8)^2} = \sqrt{81 + 144} = 15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки имеет вид (5):

Подставив в (5) координаты точек  $A$  и  $B$ , получим уравнение прямой  $AB$ :

$$\frac{x - (-4)}{5 - (-4)} = \frac{y - 8}{-4 - 8}, \quad \frac{x + 4}{9} = \frac{y - 8}{-12}, \quad \frac{x + 4}{3} = \frac{y - 8}{-4},$$

$$3y - 24 = -4x - 16, \quad \text{или} \quad 4x + 3y - 8 = 0 \quad (AB).$$

Для нахождения углового коэффициента  $k_{AB}$  прямой  $AB$  разрешим полученное уравнение относительно  $y$ :  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ . Отсюда  $k_{AB} = -\frac{4}{3}$ . Подставив в формулу

(5) координаты точек  $A$  и  $C$ , найдем уравнение прямой  $AC$ :  $\frac{x - (-4)}{10 - (-4)} = \frac{y - 8}{6 - 8},$

$$\frac{x + 4}{14} = \frac{y - 8}{-2}, \quad \frac{x + 4}{7} = \frac{y - 8}{-1},$$

$$7y - 56 = -x - 4 \quad \text{или} \quad x + 7y - 52 = 0 \quad (AC).$$

Отсюда  $k_{AC} = -\frac{1}{7}$ .

3) Угол между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны  $k_1$  и  $k_2$ , определяется по формуле (6). Угол  $A$ , образованный прямыми  $AB$  и  $AC$ , найдем по

формуле (6), подставив в нее  $k_1 = k_{AB} = -\frac{4}{3}, \quad k_2 = k_{AC} = -\frac{1}{7}.$

$$\operatorname{tg} A = \frac{-\frac{1}{7} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{21}} = \frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}} = 1,$$

$$\angle A = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ \approx 0,79 \text{ рад.}$$

4) Так как высота  $CD$  перпендикулярна стороне  $AB$ , то угловые коэффициенты этих прямых связаны соотношением (7), поэтому

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном угловым коэффициентом  $k$  направлении, имеет вид (4). Подставив в (4) координаты точки  $C$  и  $k_{CD} = \frac{3}{4}$ , получим уравнение высоты  $CD$ :

$$y - 6 = \frac{3}{4}(x - 10), \quad 4y - 24 = 3x - 30, \quad 3x - 4y - 6 = 0 \quad (CD).$$

Для нахождения длины  $CD$  определим координаты точки  $D$ , решив систему уравнений  $(AB)$  и  $(CD)$ :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - 4y - 6 = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда } x = 2, y = 0, \quad \text{то есть } D(2; 0).$$

Подставив в формулу (1) координаты точек  $C$  и  $D$ , находим:

$$CD = \sqrt{(10 - 2)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

5) Так как  $CD$  является диаметром искомой окружности, то ее центр  $E$  есть середина отрезка  $CD$ . Воспользовавшись формулой (3) деления отрезка пополам, получим:

$$x_E = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{10 + 2}{2} = 6, \quad y_E = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{6 + 0}{2} = 3.$$

Следовательно,  $E(6; 3)$  и  $R = \frac{CD}{2} = \frac{10}{2} = 5$ . Используя формулу (10), получаем уравнение искомой окружности:  $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

Если известны начало вектора  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и конец  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , то координаты вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$  находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1, \quad (11)$$

а его длина определяется выражением

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (12)$$

Вектор  $\vec{a}$  с координатами  $(x, y, z)$  может быть представлен разложением по ортам в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (13)$$

Если  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы, которые вектор  $\vec{a}$  образует с положительными направлениями осей координат, то  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$  называются *направляющими косинусами* вектора  $\vec{a}$  (рисунок 2). Тогда имеют место соотношения

$$x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma, \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Для векторов  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  вводятся операции *сложения* и *умножения на число* такие, что

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad \text{и} \quad \lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1),$$

где  $\lambda$  – любое число.

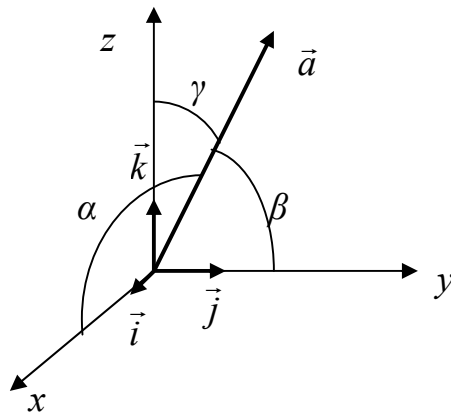


Рисунок 2.

*Скалярным произведением* двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ) называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла  $\varphi$  между ними,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$  или, если векторы заданы своими координатами, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (14)$$

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называют *коллинеарными*. Признак коллинеарности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является пропорциональность их координат:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (15)$$

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  взаимно перпендикулярны, то  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ .

Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  определяется соотношением:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (16)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{N} = (A, B, C)$ , имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (17)$$

**Пример.** Даны координаты трех точек:  $A(3; 0; -5)$ ,  $B(6; 2; 1)$ ,  $C(12; -12; 3)$ .

Требуется: 1) записать векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$  в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ ; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $C$  перпендикулярно вектору  $\vec{AB}$ .

*Решение:*

1) Найдем координаты вектора  $\vec{AB}$ , подставив в формулу (11) координаты точек  $A$  и  $B$ , и запишем разложение этого вектора по ортам (13):

$$\vec{AB} = (6 - 3)\vec{i} + (2 - 0)\vec{j} + (1 + 5)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Подобным образом

$$\vec{AC} = (12 - 3)\vec{i} + (-12 - 0)\vec{j} + (3 + 5)\vec{k} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Модули векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$  найдем, подставляя их координаты в формулу (12):

$$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7, \quad \left| \vec{AC} \right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = 17.$$

2) Найдем косинус угла  $\varphi$  между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ . Для этого вычислим их скалярное произведение по формуле (14):

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-12) + 6 \cdot 8 = 51.$$

Тогда по формуле (16)

$$\cos \varphi = \frac{51}{7 \cdot 17} \approx 0,4286, \quad \varphi \approx 64^\circ 37' \approx 1,13 \text{ рад.}$$

3) По условию задачи искомая плоскость проходит через точку  $C(12; -12; 3)$  перпендикулярно вектору  $\vec{AB} = (3, 2, 6)$ . Подставляя в (17)  $A = 3$ ,  $B = 2$ ,  $C = 6$ ,  $x_0 = 12$ ,  $y_0 = -12$ ,  $z_0 = 3$ , получим:

$$3(x - 12) + 2(y + 12) + 6(z - 3) = 0,$$

или  $3x + 2y + 6z - 30 = 0$  – искомое уравнение плоскости.

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Условием компланарности трех векторов  $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $\vec{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$  является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Три вектора образуют *базис* в том случае, если они *некомпланарны*.

Если для векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  выполняется условие  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \neq 0$ , то они образуют базис, и любой четвертый вектор  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  может быть представлен разложением по этому базису в виде

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3, \quad (19)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – координаты вектора  $\vec{b}$  в базисе, образованном векторами  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ .

Координаты  $\alpha, \beta, \gamma$  находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = b_1 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = b_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = b_3 \end{cases} \quad (20)$$

**Пример.** Показать, что векторы  $\vec{a}_1(3; 1; 4)$ ,  $\vec{a}_2(2; 1; -1)$ ,  $\vec{a}_3(1; -1; 5)$  образуют базис трехмерного пространства. Найти координаты вектора  $\vec{b}(5; 0; 3)$  в этом базисе.

*Решение:*

Вычислим смешанное произведение векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ :

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Так как смешанное произведение отлично от нуля, то векторы некопланарны и образуют базис. Координаты вектора  $\vec{b}$  в этом базисе найдем, разложив его по векторам  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  следующим образом:

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3,$$

а координаты вектора  $\vec{b}$  в новом базисе найдем из системы уравнений (20)

$$\begin{cases} \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 5 \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (-1) = 0 \\ \alpha \cdot 4 + \beta \cdot (-1) + \gamma \cdot 5 = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}$$

Решим эту систему для заданных векторов методом Гаусса.

Поменяем местами первое и второе уравнения

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}$$

После этого умножим первое уравнение на  $(-3)$  и сложим со вторым. Далее умножим первое уравнение на  $(-4)$  и сложим с третьим. Получим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -5\beta + 9\gamma = 3 \end{cases}$$

Затем умножаем второе уравнение на  $(-5)$  и складываем с третьим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -11\gamma = -22 \end{cases}$$

Из последнего уравнения имеем  $\gamma = 2$ . Подставляем это значение во второе уравнение, получаем  $\beta = 3$  и, наконец, из первого уравнения находим  $\alpha = -1$ .

Таким образом, подставив в уравнение (19) координаты вектора  $\vec{b}$ , получим

$$\vec{b} = -\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3.$$

### Решение систем линейных уравнений

Неоднородная система трех уравнений с тремя неизвестными в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3 \end{cases}$$

и может быть записана в матричном виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{H}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  - матрица коэффициентов при неизвестных,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  - матрица-столбец неизвестных,

$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$  матрица-столбец свободных членов.

Если матрица  $\mathbf{A}$  – невырожденная, то есть имеет определитель, отличный от нуля, то существует матрица  $\mathbf{A}^{-1}$ , обратная к  $\mathbf{A}$ , так что  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$  ( $\mathbf{E}$  - единичная матрица). Умножим обе части уравнения (22) на  $\mathbf{A}^{-1}$  и получим

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H},$$

или

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}, \quad (23)$$

поскольку  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$ .

Равенство (23) является решением системы уравнений (22).

Матрица, обратная к невырожденной матрице  $\mathbf{A}$ , находится по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где  $A_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ) – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ , которое является произведением  $(-1)^{i+j}$  на минор (определитель) второго порядка, полученный вычеркиваем  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца в определителе матрицы  $\mathbf{A}$ ;  $\Delta$  – определитель матрицы  $\mathbf{A}$ .

**Пример.** Данную систему уравнений записать в матричной форме и решить ее с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

*Решение:*

Выпишем для данной системы уравнений матрицу коэффициентов при неизвестных **A** и столбец свободных членов **H**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель  $\Delta$  и алгебраические дополнения  $A_{ij}$  элементов матрицы **A**:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

следовательно, матрица **A** имеет обратную матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$ .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Тогда по формуле (24) обратная матрица равна

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (23) находим решение данной системы уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + (-1) \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 - 1 \cdot 8 + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = -2$ .

### Введение в анализ

Число  $A$  называют пределом функции  $y=f(x)$  в точке  $a$ , если эта функция определена в некоторой окрестности точки  $a$ , за исключением, быть может, самой точки  $a$ , и для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Вычисление пределов арифметических выражений  $f_1(x)/f_2(x)$ ,  $f_1(x) \cdot f_2(x)$ ,  $f_1(x) - f_2(x)$  по пределам функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , из которых они составлены, не всегда возможно. В этих случаях говорят, что возникают неопределенности следующих видов:

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (0 \cdot \infty), (\infty - \infty), (1^\infty).$$

Для нахождения пределов таких неопределенных выражений нужно учитывать конкретный вид функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Например,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{x^n} = 0; \tag{25}$$

предел отношения двух многочленов  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix} = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$

первый замечательный предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1;$  (26)

второй замечательный предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1)^\infty = e.$  (27)

Величина  $\alpha(x)$  называется *бесконечно малой* при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ .

Две бесконечно малые величины называются *эквивалентными*, если предел их отношения равен 1, то есть  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ . Под знаком предела любая бесконечно малая величина может быть заменена на эквивалентную ей. Приведем таблицу эквивалентных бесконечно малых при  $x \rightarrow 0$  величин:

$$\begin{aligned} \sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \quad e^x - 1 \sim x, \\ \operatorname{tg} x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

**Пример.** Вычислить пределы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{3x^2 + 10x + 3}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x), \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 5x}, \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+5}. \end{aligned}$$

*Решение:*

а) Подстановка предельного значения аргумента  $x = -3$  приводит к неопределенному выражению вида  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на множитель  $(x+3)$ . Такое сокращение здесь возможно, так как множитель  $(x+3)$  отличен от нуля при  $x \rightarrow -3$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{3x^2 + 10x + 3} &= \frac{4 \cdot (-3)^2 + 11 \cdot (-3) - 3}{3 \cdot (-3)^2 + 10 \cdot (-3) + 3} = \left( \frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(4x-1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x-1}{3x+1} = \frac{4 \cdot (-3) - 1}{3 \cdot (-3) + 1} = \frac{13}{8}.\end{aligned}$$

б) При  $x \rightarrow \infty$  выражение  $\sqrt{x^2 + 3x} - x$  дает неопределенность вида  $(\infty - \infty)$ . Для ее устранения умножим и разделим это выражение на  $\sqrt{x^2 + 3x} + x$ , после чего разделим числитель и знаменатель полученной дроби на  $x$ , учитывая формулу (25):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

в) При  $x \rightarrow 0$  получим неопределенность  $\left( \frac{0}{0} \right)$ . Обозначим  $\operatorname{arctg} 5x = y$ . Тогда  $5x = \operatorname{tgy}$

и  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Применяя свойства пределов и формулу (26), имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 5x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \left( \frac{1}{5} \operatorname{tgy} \right)}{y} = \frac{2}{5} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\cos y} = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

Эту задачу можно решить, используя эквивалентные замены бесконечно малых величин (28). Поскольку при  $x \rightarrow 0$  эквивалентны  $\operatorname{arctg} 5x \sim 5x$ , можно записать

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 5x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

г) При  $x \rightarrow \infty$  выражение  $\left( \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+5}$  является неопределенностью вида  $(1^\infty)$ . Для

устранения этой неопределенности представим основание степени в виде суммы 1 и

бесконечно малой (при  $x \rightarrow \infty$ ) величины; после чего применим формулу второго замечательного предела (27):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1-4}{2x+1} \right)^{4x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-4}{2x+1} \right)^{4x+5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-4}{2x+1} \right)^{\left( \frac{2x+1}{-4} \right) \cdot \left( \frac{-4}{2x+1} \right) \cdot (4x+5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-4}{2x+1} \cdot (4x+5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-16x-20}{2x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-16}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-8} = \frac{1}{e^8}. \end{aligned}$$

## Дифференциальное исчисление функции одной переменной

*Производной* от функции  $y = f(x)$  по аргументу  $x$  называется предел отношения приращения функции  $\Delta y$  к приращению аргумента  $\Delta x$ , когда последнее стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производная есть скорость изменения функции в точке  $x$ .

Отыскание производной называется дифференцированием функции.

*Основные правила дифференцирования:*

1.  $(C)' = 0$ , где  $C = \text{Const}$ .
2.  $(x)' = 1$
3.  $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$
4.  $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ ,  $(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$
5.  $\left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ ,  $\left( \frac{C}{v(x)} \right)' = \frac{-C \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ ,  $\left( \frac{u(x)}{C} \right)' = \frac{u'(x)}{C}$
6.  $F'(u(x)) = F'_u \cdot u'(x)$

Таблица производных элементарных функций ( $u = u(x)$ ):

$$1. (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u',$$

$$4. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$2. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', \quad (e^u)' = e^u \cdot u', \quad 5. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$3. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u', \quad 6. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u', \quad 7. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u',$$

$$8. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', \quad (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$9. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u', \quad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Если в таблице положить  $u(x) = x$ , то  $u' = 1$ .

**Пример.** Найдите производные функций:

$$\text{а) } y = \ln(2 + \sin 3x); \quad \text{б) } y = (3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + 1)^4; \quad \text{в) } \cos(xy^2) - 3y^2 + 4x = 0.$$

*Решение:*

а) последовательно применяя правила дифференцирования сложной функции, правила и формулы дифференцирования, имеем:

$$\begin{aligned} y' &= (\ln(2 + \sin 3x))' = \frac{1}{2 + \sin 3x} \cdot (2 + \sin 3x)' = \frac{1}{2 + \sin 3x} \cdot (2' + (\sin 3x)') = \\ &= \frac{1}{2 + \sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = \frac{3 \cos 3x}{2 + \sin 3x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= ((3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + 1)^4)' = 4(3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + 1)^3 \cdot (3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + 1)' = \\ &= 4(3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + 1)^3 \cdot 3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot (\operatorname{arctg} \sqrt{x})' = \\ &= 4(3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + 1)^3 \cdot 3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' = \\ &= 4(3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + 1)^3 \cdot 3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2 \ln 3}{(1+x)\sqrt{x}} \cdot 3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot (3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + 1)^3 \end{aligned}$$

в) в данном случае функциональная зависимость задана в  *неявном*  виде. Для нахождения производной  $y'$  нужно продифференцировать по переменной  $x$  обе части уравнения, считая при этом  $y$  функцией от  $x$ , а затем полученное уравнение разрешить относительно  $y'$ :

$$-\sin(xy^2) \cdot (xy^2)' - 3 \cdot 2yy' + 4 = 0;$$

$$-\sin(xy^2) \cdot (x'y^2 + x(y^2)') - 6yy' + 4 = 0;$$

$$-\sin(xy^2) \cdot (y^2 + 2xyy') - 6yy' + 4 = 0;$$

$$-y^2 \sin(xy^2) - 2xyy' \sin(xy^2) - 6yy' + 4 = 0;$$

Из последнего уравнения находим  $y'$ :

$$2yy'(x \sin(xy^2) + 3) = 4 - y^2 \sin(xy^2);$$

$$y' = \frac{4 - y^2 \sin(xy^2)}{2y(x \sin(xy^2) + 3)}.$$

Исследование функции одной независимой переменной будем проводить по следующей схеме:

1. Найдем область определения функции.
2. Исследуем функцию на непрерывность.
3. Установим, является ли данная функция четной, нечетной или функцией общего вида.
4. Найдем интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума.
5. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой, точки ее перегиба.
6. Найдем асимптоты кривой.

**Пример.** Исследовать функцию  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$  и построить ее график.

*Решение.*

Реализуем приведенную схему исследования функции:

1. Функция определена при всех значениях аргумента  $x$ , кроме  $x=1$ .

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна на своей области определения, то есть на интервалах  $(-\infty;1)$  и  $(1;+\infty)$ .

В точке  $x=1$  функция терпит разрыв.

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = +\infty$$

3. Для установления четности или нечетности функции проверим выполнимость равенств  $f(-x) = f(x)$  (тогда  $f(x)$  – четная функция) или  $f(-x) = -f(x)$  (для нечетной функции) для любых  $x$  из области определения функции:

$$f(-x) = \frac{-2x-1}{(-x-1)^2}, \quad -f(x) = -\frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

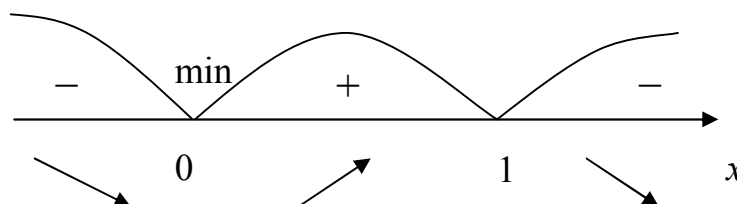
Следовательно,  $f(-x) \neq f(x)$  и  $f(-x) \neq -f(x)$ , то есть данная функция является функцией общего вида.

4. Для исследования функции на экстремум найдем ее первую производную:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

Определим критические точки функции:  $y' = 0$  при  $x = 0$ ,  $y'$  не существует при  $x = 1$ . Тем самым имеем две критические точки:  $x=0$ ,  $x=1$ . Но точка  $x=1$  не принадлежит области определения функции, экстремума в ней быть не может.

Разобьем числовую ось на три интервала  $(-\infty;0)$ ,  $(0;1)$ ,  $(1;+\infty)$ .



В первом и третьем интервалах первая производная отрицательна, следовательно, здесь функция убывает, во втором интервале – положительна, и данная функция возрастает. При переходе через точку  $x=0$  первая производная

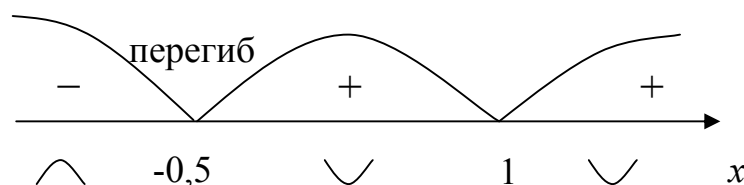
меняет свой знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет минимум:

$y_{\min} = y(0) = -1$ . Значит,  $A(0; -1)$  является точкой минимума.

5. Для определения точек перегиба графика функции и интервалов выпуклости и вогнутости кривой найдем вторую производную:

$$y'' = -2 \cdot \frac{(x-1)^3 - x \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = 2 \cdot \frac{2x+1}{(x-1)^4}.$$

Для второй производной  $y'' = 0$  при  $x = -0,5$  и  $y''$  не существует при  $x=1$ . Разобьем числовую ось на три интервала  $(-\infty; -0,5)$ ,  $(-0,5; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ .



На первом интервале вторая производная  $y''$  отрицательна и дуга исследуемой кривой выпукла; на втором и третьем интервалах  $y'' > 0$ , поэтому график является вогнутым. При переходе через точку  $x = -0,5$  вторая производная меняет свой знак, поэтому в этой точке кривая имеет перегиб:  $y_{nep} = y(-0,5) = -\frac{8}{9}$ .

Следовательно,  $B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$  – точка перегиба графика функции.

6. В точке  $x=1$  функция терпит бесконечный разрыв (см. п. 2). Тогда прямая  $x=1$  является вертикальной асимптотой графика функции.

Для определения уравнения наклонной асимптоты  $y = kx + b$  воспользуемся формулами:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Тогда  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2 x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$

При найденных значениях  $k$  и  $b$  прямая  $y=0$  есть горизонтальная асимптота графика исследуемой функции, представленного на рисунке 1.

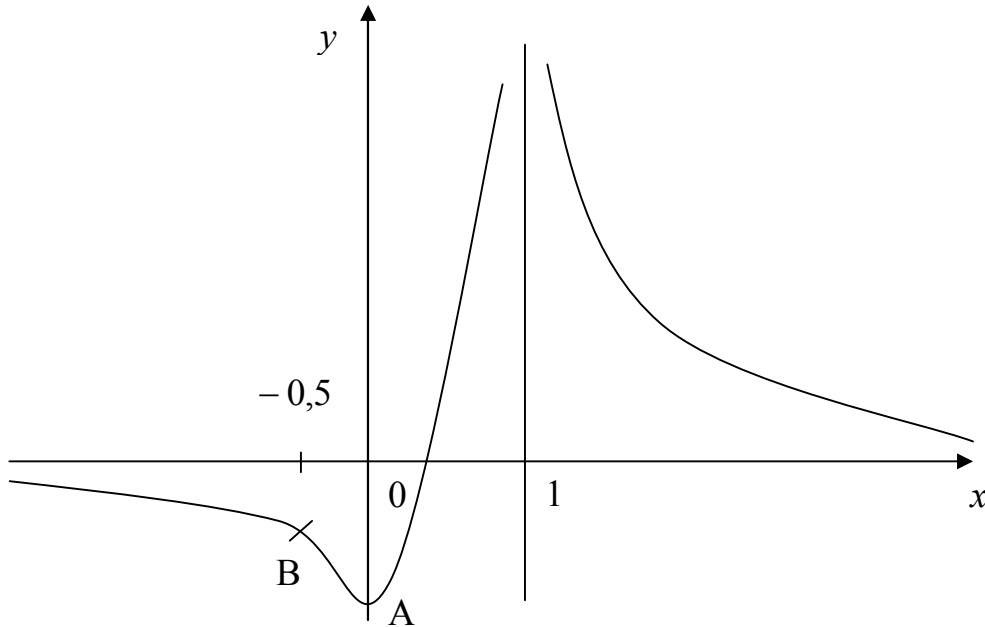


Рисунок 1. График исследуемой функции.

**Пример.** Резервуар, имеющий форму открытого сверху прямоугольного параллелепипеда с квадратным дном, нужно вылудить внутри оловом. Каковы должны быть размеры резервуара при его емкости  $108 \text{ дм}^3$ , чтобы затраты на его лужение были наименьшими?

*Решение.* Затраты на покрытие резервуара оловом будут наименьшими, если при данной вместимости площадь его поверхности будет минимальной.

Обозначим через  $a$  (дм) – сторону основания,  $b$  (дм) – высоту резервуара. Тогда площадь его поверхности  $S = a^2 + 4ab$ , а объем  $V = a^2b$ , или, согласно условия,  $108 = a^2b$ . Поэтому

$$b = \frac{108}{a^2} \quad \text{и} \quad S = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{108}{a^2} = a^2 + \frac{432}{a}.$$

Полученное соотношение устанавливает зависимость между площадью поверхности резервуара  $S$  (функция) и стороной основания  $a$  (аргумент). Область

определения этой функции  $a > 0$ , так как  $a$  – сторона основания. Исследуем функцию  $S$  на экстремум. Найдем первую производную  $S'$ , приравняем ее к нулю и решим полученное уравнение:

$$S' = 2a - \frac{432}{a^2} = \frac{2a^3 - 432}{a^2} = 0.$$

Отсюда  $a = 6$ . Производная  $S'(a)$  не существует при  $a = 0$ , но это значение аргумента не принадлежит области определения функции. При  $0 < a < 6$  производная  $S'(a) < 0$ , при  $a > 6$   $S'(a) > 0$ . Следовательно, при  $a = 6$  функция  $S$  имеет минимум. Если  $a = 6$ , то  $b = 3$ . Таким образом, затраты на лужение резервуара емкостью 108 л будут наименьшими, если он имеет размеры  $6(\text{дм}) \times 6(\text{дм}) \times 3(\text{дм})$ .

### Функция нескольких переменных

Переменная величина  $z$  называется *функцией двух переменных*  $x$  и  $y$ , если каждой паре значений  $(x, y)$  из данной области соответствует единственное определенное значение  $z = f(x, y)$ .

Для функции  $z = f(x, y)$  вводятся понятия *частных производных* первого порядка, которые определяются выражениями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

и *частных производных* второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Функция  $z = f(x, y)$  имеет в точке  $M_0(x_0, y_0)$  *максимум (минимум)*, если значение этой функции в точке  $M_0$  больше (меньше), чем значения функции в любой точке из окрестности точки  $M_0$ .

Необходимыми условиями существования *экстремума* (максимума или минимума) дифференцируемой функции  $z = f(x, y)$  является равенство нулю ее частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Точки, в которых частные производные обращаются в ноль, называются *стационарными точками* функции  $z = f(x, y)$ . Для того чтобы стационарная точка являлась экстремумом, в ней должны выполняться *достаточные условия*.

Обозначим  $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_0}$ ,  $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0}$ ,  $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_0}$ ,  $\Delta = AC - B^2$ .

Если в стационарной точке  $M_0(x_0, y_0)$

$\Delta > 0, A > 0$ , то  $M_0$  есть точка минимума;

$\Delta > 0, A < 0$ , то  $M_0$  есть точка максимума;

$\Delta < 0$ , то в точке  $M_0$  нет экстремума;

$\Delta = 0$ , то требуется дополнительное исследование.

**Пример.** Исследовать на экстремум функцию  $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 + 6$ .

*Решение.*

1. Найдем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2y.$$

2. Запишем необходимые условия существования экстремума

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 4 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

значит точка  $M(1; 2)$  является стационарной точкой функции.

3. Проверим выполнение в точке  $M$  достаточного условия. Для этого найдем вторые частные производные функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

В точке  $M(1;2)$   $A = -2, B = 0, C = -2$  и  $\Delta = (-2) \cdot (-2) - 0 = 4$ . Поскольку  $\Delta = 4 > 0, A = -2 < 0$ , точка  $M(1;2)$  является точкой максимума. Значение функции в этой точке  $z|_M = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1^2 - 2^2 + 6 = 11$ .

Функция двух независимых переменных  $z = f(x, y)$  принимает наибольшее и наименьшее значения в области  $D$ , ограниченной линией  $\varphi(x, y) = 0$ , либо в стационарных точках, расположенных внутри области  $D$ , либо на границе этой области.

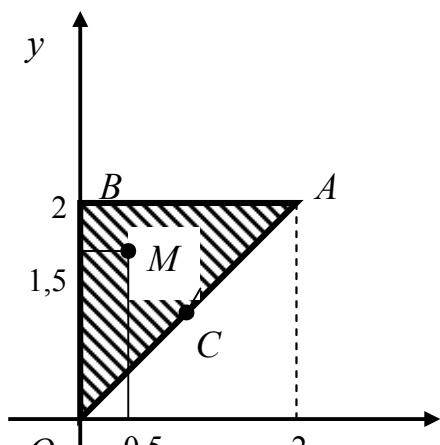
Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции  $z = f(x, y)$  в заданной области  $D$  решается по следующему плану:

1. Определяем стационарные точки функции, расположенные внутри области  $D$ , и вычисляем значения функции в этих точках.
2. Находим стационарные точки функции на границе  $\varphi(x, y) = 0$  области или на отдельных ее участках, заданных различными уравнениями, и вычисляем значения функции в этих точках.
3. Из всех вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 2xy - 4x - y$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $y = x$ .

*Решение.*

1. Найдем стационарные точки функции из условий равенства нулю частных производных функции



$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 1,5 \end{cases}$$

Стационарная точка  $M(0,5;1,5)$  лежит внутри заданной области  $OAB$ .

Значение функции в точке  $M$  равно

$$z|_M = 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 1,5 - 4 \cdot 0,5 - 1,5 = -1,75.$$

2. Исследуем поведение функции на границах области:

а) на границе  $OA$   $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $z = x^2 + 2x \cdot x - 4 \cdot x - x$  или  $z = 3x^2 - 5x$ ;

$$z' = 6x - 5, \quad z' = 0 \quad \text{при} \quad x = \frac{5}{6}, \quad \text{тогда} \quad y = \frac{5}{6} \quad (\text{так как } y=x).$$

$$\text{В точке } C\left(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right) \text{ значение функции равно } z|_C = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} = -\frac{25}{12}.$$

Вычислим значения функции в крайних точках отрезка  $OA$ .

В точке  $O(0;0)$   $z|_O = 0$ , в точке  $A(2;2)$  значение функции равно

$$z|_A = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 = 2.$$

б) на границе  $BA$   $y = 2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $z = x^2 + 2x \cdot 2 - 4x - 2$  или  $z = x^2 - 2$ ;

$$z' = 2x, \quad z' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \text{а } y = 2 \quad \text{согласно уравнению прямой } BA.$$

$$\text{В точке } B(0;2) \text{ значение функции равно } z|_B = 3 \cdot 0^2 - 2 = -2.$$

в) на границе  $OB$   $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $z = -y$ ;

$z' = -1 \neq 0$  при всех  $y \in [0;2]$ , следовательно, стационарных точек на линии  $OB$  нет.

3. Из всех вычисленных значений заданной функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$$z|_A = 2 \quad \text{— наибольшее значение функции в области } OAB$$

$$z|_C = -\frac{25}{12} \quad \text{— наименьшее значение функции в области } OAB$$

### Интегральное исчисление функции одной переменной

*Первообразной функцией* для функции  $f(x)$  называется такая функция  $F(x)$ ,

что  $F'(x) = f(x)$ .

Неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Функция  $f(x)$  называется подынтегральной функцией,  $F(x)$  – результат интегрирования,  $C$  – произвольная постоянная.

*Свойства неопределенного интеграла:*

1.  $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx .$
2.  $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$ , где  $A$  – постоянная.
3. Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$  и  $u = \varphi(x)$ , то  $\int f(u)du = F(u) + C .$

*Таблица простейших интегралов:*

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\int dx = x + C .$  | 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C .$                                      |
| 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1) .$         | 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C .$                                    |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C .$                             | 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C .$                              |
| 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \int e^x dx = e^x + C .$ | 10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C .$           |
| 5. $\int \sin x dx = -\cos x + C .$                               | 11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0) .$           |
| 6. $\int \cos x dx = \sin x + C .$                                | 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 + A} \right  + C, (A \neq 0) .$ |

*Основные методы интегрирования:*

1. Подведение под знак дифференциала:
  - а) к функции, стоящей под знаком дифференциала, можно прибавлять или вычитать любую постоянную:  $df(x) = d(f(x) \pm A)$ ;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель:

$$df(x) = \frac{1}{A} d(A \cdot f(x));$$

в) под знак дифференциала подводится функция по правилу:  $f'(x)dx = df(x)$ .

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ где } u = u(x), v = v(x).$$

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а)  $\int a^x \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = a^x dx.$

б)  $\int \sin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \sin ax dx.$

в)  $\int \cos ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \cos ax dx,$

г)  $\int \ln ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \ln ax, \quad dv = P_n(x) dx,$

д)  $\int \arcsin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \arcsin ax, \quad dv = P_n(x) dx,$

е)  $\int \operatorname{arctg} ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \operatorname{arctg} ax, \quad dv = P_n(x) dx,$

где  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \text{ где } x = \varphi(t).$$

**Пример.** Найти неопределенные интегралы:

а)  $\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$  б)  $\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx;$  в)  $\int (3x + 4)e^{3x} dx.$

*Решение.*

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \left(-\frac{1}{2}\right) \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \\
&= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C\right)' = \\
&= \frac{1}{3} \cdot 3(\arcsin x)^2 \cdot (\arcsin x)' - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' + C' = \\
&= \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 17 & x^2 - 4x + 3 \\
\underline{x^3 - 4x^2 + 3x} & \\
4x^2 - 3x - 17 & \\
\underline{4x^2 - 16x + 12} & \\
13x - 29 &
\end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx &= \int \left(x + 4 + \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3}\right) dx = \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx = \\
&= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx.
\end{aligned}$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби  $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$  и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)},$$

значит  $13x - 29 = A(x - 3) + B(x - 1)$ .

При  $x = 3$  имеем  $13 \cdot 3 - 29 = B(3 - 1)$ , откуда  $B = 5$ ;

при  $x = 1$  имеем  $13 \cdot 1 - 29 = A(1 - 3)$ , откуда  $A = 8$ .

Получаем  $\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)} = \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3}$  и интегрируем

$$\begin{aligned} \int \frac{13x-29}{(x-1)(x-3)} dx &= \int \frac{8}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-3} dx = 8 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 5 \int \frac{d(x-3)}{x-3} = \\ &= 8 \ln|x-1| + 5 \ln|x-3| + C \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 8 \ln|x-1| + \ln|x-3| + C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\begin{aligned} \left( \frac{x^2}{2} + 4x + 8 \ln|x-1| + \ln|x-3| + C \right)' &= \frac{2x}{2} + 4 + \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3} = \\ &= \frac{(x+4)(x-1)(x-3) + 8(x-3) + 5(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3}, \end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

*Замечание.*

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C; \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(-k+1)} (x-a)^{-k+1} + C, \quad (k=2,3,\dots).$$

в) применим методом интегрирования по частям.

Примем  $u = 3x + 4$ ,  $dv = e^{3x} dx$ , тогда  $du = 3dx$ ,  $v = \frac{1}{3}e^{3x}$ . По формуле

интегрирования по частям получаем

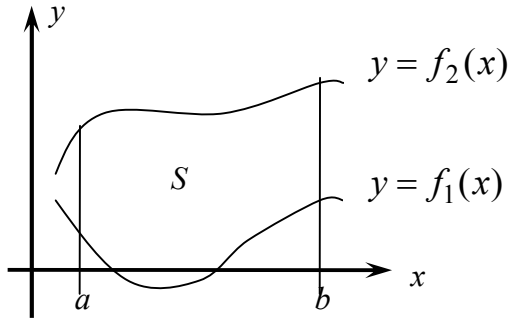
$$\int (3x+4)e^{3x} dx = (3x+4) \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 3dx = \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \int e^{3x} dx =$$

$$= \frac{3x+4}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3} e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C.$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1) + C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}(3(x+1) + 1) = e^{3x}(3x+4),$$

что совпадает с подынтегральной функцией.



Если на плоскости  $Oxy$  задана фигура, ограниченная двумя непрерывными линиями  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  и вертикальными прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , то площадь  $S$  такой фигуры может быть вычислена по

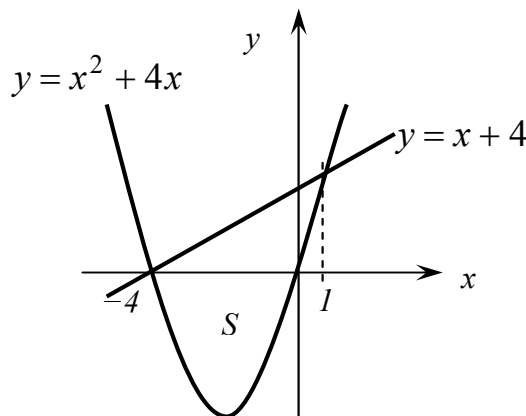
формуле  $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$ , где  $f_2(x) \geq f_1(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

**Пример.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 + 4x, \quad y = x + 4.$$

*Решение.*

Заданные линии ограничивают на плоскости  $Oxy$  криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем  
пересечения  
решим

координаты точек  
заданных линий, для этого  
систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^1 (x + 4 - x^2 - 4x) dx = \int_{-4}^1 (4 - 3x - x^2) dx = \left( 4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^1 = \\ &= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

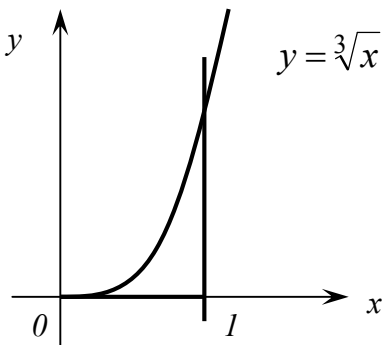
Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой  $y = f(x) \geq 0$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ ,

1) вокруг оси  $Ox$ , вычисляются по формуле  $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ ;

2) вокруг оси  $Oy$ , вычисляются по формуле  $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$ .

**Пример.** Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  криволинейного треугольника, ограниченного кривой  $y = \sqrt[3]{x}$ , осью  $Ox$  и прямой  $x = 1$ .

*Решение.*



1) объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$ , равен

$$V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \text{ (куб. ед.)}$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$ , равен

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x} dx = 2\pi \left. \frac{x^{7/3}}{7/3} \right|_0^1 = \frac{6\pi}{7} \text{ (куб. ед.)}.$$

### Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называют дифференциальными уравнениями с *разделяющимися переменными*:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x)}{f_1(y)} \rightarrow f_1(y) dy = f_2(x) dx, \quad (1)$$

или в дифференциальной форме

$$f_1(x) \cdot f_2(y) dx + f_3(x) f_4(y) dy = 0. \quad (2)$$

Разделим обе части уравнения (2) на произведение функций  $f_2(y) f_3(x)$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = 0 \quad (2')$$

и, после интегрирования, получим общий интеграл (общее решение) уравнения:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = C.$$

При делении на  $f_2(y) f_3(x)$  может произойти потеря некоторых частных решений. Пусть, например, при  $y = y_0$  имеем  $f_2(y_0) = 0$ , тогда функция  $y = y_0$  является решением уравнения (2'), т.к.  $dy = dy_0 = 0$ . Решением может также быть функция  $x = x_0$ , если  $f_3(x_0) = 0$ .

**Пример.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка

$$x(y+1)dx - (x^2+1)ydy = 0.$$

*Решение:*

Данное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, причем  $f_1(x) = x$ ;  $f_2(y) = y + 1$ ;  $f_3(x) = x^2 + 1$ ;  $f_4(y) = -y$ . Разделим обе части уравнения на произведение

$$f_2(y)f_3(x) = (y+1)(x^2+1)$$

и получим

$$\frac{xdx}{x^2+1} - \frac{ydy}{y+1} = 0.$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = C,$$

используя подведение под знак дифференциала

$$\int \frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{x^2+1} - \int dy + \int \frac{d(y+1)}{y+1} = C,$$

получим общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2} \ln|x^2+1| - y + \ln|y+1| = C.$$

При делении на  $f_2(y) = y + 1$  потеряно частное решение:  $y = -1$ .

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (3)$$

линейное относительно искомой функции и её производной, называется *линейным*.

Уравнение (3) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными следующим образом. Запишем искомую функцию  $y(x)$  в виде произведения двух

функций:  $y = u(x) \cdot v(x)$ . Одна из этих функций может быть абсолютно произвольной, а вторая определяется в зависимости от первой так, чтобы их произведение удовлетворяло уравнению (3).

Из равенства  $y = u \cdot v$  находим  $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ . Тогда в соответствие с (3) имеем  $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$  или  $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$ . Выберем в качестве  $v(x)$  какое-нибудь частное решение уравнения

$$v' + p(x)v = 0, \quad (4)$$

тогда для отыскания  $u(x)$  получим уравнение

$$u'v = q(x). \quad (5)$$

Найдем  $v(x)$ , разделяя переменные в (4):

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \text{ откуда } \ln v = -\int p(x)dx \text{ и } v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Зная  $v(x)$ , найдем  $u(x)$  из уравнения (5):

$$\frac{du}{dx}v = q(x) \Rightarrow du = e^{\int p(x)dx} q(x)dx, \text{ тогда } u = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Общее решение линейного уравнения (3) имеет вид

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx} \left[ \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

**Пример.** Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка  $y' - 2y = 1$ .

*Решение.*

Запишем искомую функцию  $y(x)$  в виде произведения двух функций:

$$y = u(x) \cdot v(x), \text{ тогда } y' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

и подставим полученные выражения в заданное уравнение

$$u'v + uv' - 2uv = 1.$$

Вынесем за скобки  $u(x)$

$$u'v + u(v' - 2v) = 1$$

и, приравнявая к нулю выражение в скобках, получим и решим два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' - 2v = 0$$

$$u'v = 1$$

$$\frac{dv}{v} = 2dx$$

$$\frac{du}{dx} e^{2x} = 1$$

$$\ln v = 2x$$

$$du = e^{-2x} dx$$

$$v = e^{2x}$$

$$u = \int e^{-2x} dx,$$

$$u = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

Запишем общее решение заданного дифференциального уравнения в виде

$$y = uv = \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) \cdot e^{2x}, \text{ или } y = -\frac{1}{2} + C e^{2x}.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (6)$$

называется неоднородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$ .

Общее решение этого уравнения  $y = \bar{y} + y^*$ , где  $\bar{y}$  – общее решение соответствующего однородного уравнения;  $y^*$  – частное решение уравнения (6).

Дифференциальное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (7)$$

является однородным и называется соответствующим неоднородному уравнению (6). Общее решение однородного уравнения (7) находят по корням характеристического уравнения

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение может иметь три случая для корней  $r_1$  и  $r_2$ :

1) корни характеристического уравнения действительные и различные:  $r_1 \neq r_2$ .

В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде  $\bar{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные;

2) корни характеристического уравнения действительные и равные:  $r_1 = r_2$ . В

этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде  $\bar{y} = e^{r_1 x} (C_1 + C_2 x)$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные;

3) корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа

$r_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i$ ,  $\beta \neq 0$ . В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде  $\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Частное решение  $y^*$  неоднородного уравнения (6) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в зависимости от вида правой части уравнения  $f(x)$ .

*Первый случай.* Правая часть уравнения (6) имеет вид  $f(x) = P(x)e^{mx}$ , где  $P(x)$  – многочлен. Тогда уравнение (6) имеет частное решение вида

$$y^* = x^k Q(x)e^{mx}, \quad (8)$$

где  $Q(x)$  – полный многочлен той же степени от  $x$ , что и  $P(x)$ , но с неопределенными коэффициентами;

$k = 0$ , если число  $m$  не является корнем характеристического уравнения;

$k = 1$ , если число  $m$  является простым корнем характеристического уравнения;

$k = 2$ , если число  $m$  является двукратным корнем характеристического уравнения.

Правило сохраняет свою силу и при  $m = 0$ , когда  $f(x) = P(x)$  – многочлен.

Неопределенные коэффициенты в многочлене  $Q(x)$  определяют подстановкой функции (8) и ее производных в уравнение (6) с последующим приравнованием коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях уравнения.

**Пример.** Найти частное решение дифференциального уравнения второго

порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' - 3y' - 4y = 4x - 1, \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

*Решение.* Характеристическое уравнение  $r^2 - 3r - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 4$ , следовательно,  $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$ . Правая часть уравнения имеет вид  $f(x) = 4x - 1 = (4x - 1) \cdot e^{0 \cdot x}$ , где  $m = 0$  и не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение при  $k = 0$  ищем в виде  $y^* = x^0 \cdot (Ax + B) \cdot e^{0 \cdot x} = Ax + B$ ,  $(y^*)' = A$ ,  $(y^*)'' = 0$ . После подстановки в дифференциальное уравнение получаем

$$0 - 3A - 4(Ax + B) = 4x - 1;$$

$$-3A - 4Ax - 4B = 4x - 1;$$

$$-4A \cdot x + (-3A - 4B) = 4 \cdot x + (-1);$$

$$x^1: -4A = 4; \quad A = -1$$

$$x^0: -3A - 4B = -1, \quad -4B = -1 + 3A = -4, \quad B = 1$$

Частным решением является функция  $y^* = Ax + B = -1 \cdot x + 1 = 1 - x$ . Общим решением является функция  $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - x + 1$ .

Найдем значение констант  $C_1, C_2$  из начальных условий. Для этого определим

$$y' = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x} - 1.$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} y|_{x=0} = C_1 + C_2 + 1 = 2, \\ y'|_{x=0} = -C_1 + 4C_2 - 1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Искомым частным решением является функция  $y = e^{4x} - x + 1$ .

**Пример.** Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

*Решение.* Характеристическое уравнение  $r^2 - 4r + 4 = 0$  имеет двукратный корень  $r_1 = 2$ , следовательно,  $\bar{y} = e^{2x}(C_1 + C_2x)$ . Правая часть уравнения имеет вид  $f(x) = e^{2x}$ ,  $m = 2$  является двукратным ( $k = 2$ ) корнем характеристического уравнения, тогда частное решение ищем в виде

$$y^* = x^2 \cdot Ae^{2x}, \quad (y^*)' = x^2 \cdot 2Ae^{2x} + 2x \cdot Ae^{2x} = 2Ae^{2x}(x^2 + x),$$

$$(y^*)'' = 4Ae^{2x}(x^2 + x) + 2Ae^{2x}(2x + 1) = Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2).$$

После подстановки  $y^*$  и ее производных в исходное дифференциальное уравнение получаем

$$Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2) - 4 \cdot 2Ae^{2x}(x^2 + x) + 4Ae^{2x} \cdot x^2 = e^{2x},$$

$$Ae^{2x}(\cancel{4x^2} + \cancel{8x} + 2 - \cancel{8x^2} - \cancel{8x} + \cancel{4x^2}) = e^{2x},$$

$$2Ae^{2x} = e^{2x},$$

$$2A = 1, \quad A = \frac{1}{2}.$$

Частным решением является функция  $y^* = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2$ . Общим решением является функция  $y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2$ .

Найдем значение констант  $C_1, C_2$  из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = e^{2x}(2C_1 + 2C_2x + C_2) + e^{2x}(x^2 + x),$$

и получим систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y|_{x=0} = e^0 \cdot C_1 = 2, \quad C_1 = 2$$

$$y'|_{x=0} = e^0(2C_1 + C_2) = 3, \quad C_2 = -1$$

Искомым решением является функция  $y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(2 - x) + \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2$ .

*Второй случай.* Правая часть уравнения (6) имеет вид  $f(x) = a \cos nx + b \sin nx$ .

Если числа  $\pm in$  не являются корнями характеристического уравнения, то

$$y^* = A \cos nx + B \sin nx.$$

Если числа  $\pm in$  являются корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y^* = (A \cos nx + B \sin nx) \cdot x.$$

В частных случаях, когда  $a$  или  $b$  равно нулю, решение всё равно надо искать в указанном общем виде.

**Пример.** Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' + 4y' + 13y = 5 \sin 3x, \quad y|_{x=0} = \frac{1}{8}, \quad y'|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

*Решение.* Характеристическое уравнение  $r^2 + 4r + 13 = 0$  имеет корни

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i,$$

тогда  $\bar{y} = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ .

Числа  $\pm 3i$  не являются корнями характеристического уравнения, поэтому

$$y^* = A \sin 3x + B \cos 3x,$$

$$(y^*)' = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x,$$

$$(y^*)'' = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x.$$

Подставляем  $y^*$  и ее производные в исходное уравнение и получаем

$$\begin{aligned} -9A \sin 3x - 9B \cos 3x + 4(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) + 13(A \sin 3x + B \cos 3x) &= C, \\ (4A - 12B) \sin 3x + (4B + 12A) \cos 3x &= 5 \cdot \sin 3x + 0 \cdot \cos 3x; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 3x: 4A - 12B &= 5 \\ \cos 3x: 4B + 12A &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{8} \\ B &= -\frac{3}{8} \end{aligned} \right\}.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{3}{8} \cos 3x.$$

Найдем значение констант  $C_1, C_2$  из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = -2e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-2x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) + \frac{3}{8} \cos 3x + \frac{9}{8} \sin 3x$$

и запишем систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y|_{x=0} = e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) - \frac{3}{8} = \frac{1}{8},$$

$$y'|_{x=0} = -2e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 (C_1 \cdot 0 + 3C_2) + \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}, \\ C_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \right) = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Искомым решением является функция

$$y = e^{-2x} \left( \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{3}{8} \sin 3x \right) + \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{3}{8} \cos 3x.$$

## Ряды

*Степенным рядом* называют ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (9)$$

расположенный по степеням двучлена  $(x-a)$ .

В соответствии с теоремой Абеля ряд (9) сходится на интервале  $x \in (a-R, a+R)$ , а для всех  $x$ , лежащих вне этого интервала, ряд расходится. Число  $R$  называют *радиусом сходимости* степенного ряда. На концах интервала (при  $x = a-R$  и при  $x = a+R$ ) вопрос о сходимости и расходимости данного ряда решается

индивидуально для каждого конкретного ряда. У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ( $R = 0$ ), у других охватывает всю ось  $Ox$  ( $R = \infty$ ).

Согласно признаку Даламбера радиус сходимости определяют по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (10)$$

Если воспользоваться признаком Коши, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

**Пример.** Найти интервал сходимости ряда и исследовать его

сходимость на краях интервала  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}$

*Решение.*

Радиус сходимости определим по формуле (10):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 10^{n+1}}{n \cdot 10^{n+1}} \right| = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 10.$$

На концах интервала: при  $x = -10$  получим числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n \cdot 10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ,

который является знакочередующимся и сходится по теореме Лейбница, так как его члены убывают по абсолютной величине  $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . При  $x = 10$

получим гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , который расходится. Таким образом, данный степенной ряд сходится при  $x \in [-10; 10)$ .

Основные элементарные функции имеют простые разложения по степеням  $x$ , которые представлены ниже:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad \forall x \in (-1, 1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1].$$

При приближенных вычислениях определенных интегралов требуется разложить подынтегральную функцию в степенной ряд, который в пределах интервала сходимости может быть почленно проинтегрирован. Используя формулу Ньютона – Лейбница, определенный интеграл вычисляют как частичную сумму получающегося числового ряда. Если ряд знакочередующийся, то точность приближенных вычислений не превосходит первого из отброшенных членов.

**Пример.** Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования

этого ряда:  $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$ .

*Решение.*

Используем разложение в ряд для функции  $\sin x$  и подставим его в подынтегральное выражение

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{0,5} \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\ &= \int_0^{0,5} \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)} + \dots \right) \Bigg|_0^{0,5} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 3!3} + \frac{1}{2^5 5!5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{2n-1} (2n-1)!(2n-1)} + \dots \approx \\
&\approx 0,5 - 0,0069 + 0,00005 \approx 0,5 - 0,0069 \approx 0,4931 \approx 0,493.
\end{aligned}$$

В вычислениях приведены первые три члена ряда с сохранением четырех знаков после запятой, так как заданная точность составляет 0,001. Третий член ряда отброшен, так как он по величине меньше заданной точности  $(0,00005) < 0,001$ . В окончательном результате проведено округление до трех знаков после запятой.

### Теория вероятностей

При классическом определении *вероятность события* определяется равенством

$$P(A) = m/n,$$

где  $m$  – число элементарных исходов испытаний, благоприятствующих появлению события  $A$ ,  $n$  – общее число элементарных исходов испытания.

*Числом сочетаний* из  $l$  элементов по  $k$  называют количество комбинаций, составленных из  $l$  элементов по  $k$ , которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний

$$C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}.$$

**Пример.** В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

*Решение:*

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь три детали из пятнадцати, то есть  $n = C_{15}^3$ ;

б) число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, равно числу способов, которыми можно выбрать три окрашенных детали из 10, то есть  $m = C_{10}^3$ ;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{\frac{10!}{3! \cdot 7!}}{\frac{15!}{3! \cdot 12!}} = \frac{10! \cdot 12!}{7! \cdot 15!} = \frac{\cancel{10!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{10!} \cdot \cancel{12!} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{24}{91} \approx 0,26.$$

**Пример.** В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны 5 деталей. Определить вероятность того, что среди отобранных деталей ровно три стандартных.

*Решение:*

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь пять деталей из десяти, то есть  $n = C_{10}^5$ ;

б) найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных пяти деталей ровно три стандартные): три стандартные детали можно выбрать из 7 стандартных деталей  $C_7^3$  способами; при этом остальные ( $5-3=2$ ) детали должны быть нестандартными, которые можно выбрать из ( $10-7=3$ ) нестандартных деталей, имевшихся в партии,  $C_3^2$  способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов  $m = C_7^3 \cdot C_3^2$ ;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!}}{\frac{10!}{5! \cdot 5!}} = \frac{7! \cdot 5! \cdot 5!}{2! \cdot 4! \cdot 10!} = \frac{\cancel{7!} \cdot \cancel{4!} \cdot 5 \cdot 5!}{2 \cdot \cancel{4!} \cdot \cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{5!}{4 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{3}{8} = 0,375$$

*Теоретические сведения.*

Вероятность события  $A$ , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез)  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу, равна

сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события  $A$ :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A),$$

где  $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$ .

Приведенную формулу называют *формулой полной вероятности*.

**Пример.** Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь. Найти вероятность того, что она окажется бракованной.

*Решение:*

а) обозначим через  $A$  событие – взятая деталь является бракованной. Можно сделать три предположения (гипотезы):  $H_1$  – деталь выбрана из первой партии;  $H_2$  – деталь выбрана из второй партии;  $H_3$  – деталь выбрана из третьей партии. Поскольку число деталей во всех трех партиях равно, вероятности гипотез равны

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

б) условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из первой партии,  $P_{H_1}(A) = 0$ ; условная вероятность того, что деталь будет бракованной,

если она взята из второй партии,  $P_{H_2}(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ ; условная вероятность того, что

деталь будет бракованной, если она взята из третьей партии,  $P_{H_3}(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ .

в) искомая вероятность того, что выбранная наудачу деталь является бракованной, находится по формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

*Теоретические сведения.*

Вероятность того, что в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна  $p$  ( $0 < p < 1$ ), событие наступит ровно  $k$  раз (безразлично в какой последовательности), определяется по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где  $q = 1 - p$  – вероятность того, что событие в каждом из испытаний не появится.

**Пример.** Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех.

*Решение:*

а) пусть событие  $A$  – из 4 семян взойдут не менее трех семян; событие  $B$  – из 4 семян взойдут 3 семени; событие  $C$  – из 4 семян взойдут 4 семени. По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

б) вероятности событий  $B$  и  $C$  определим по формуле Бернулли:

$$P(B) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0,9^3 \cdot (1 - 0,9) = 0,2916,$$

$$P(C) = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0,9^4 = 0,6561.$$

в) искомая вероятность  $P(A) = 0,2916 + 0,6561 = 0,9477$ .

Если число повторяющихся испытаний велико, то определение вероятности по формуле Бернулли затруднено из-за громоздкости вычислений. В этом случае применяют приближенную формулу, выражающую *локальную теорему Лапласа*:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$  и  $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ .

Значения функции  $\varphi(x)$  определяются из таблицы, приведенной в приложении 1.

При малых значениях вероятности  $p$  для вычисления  $P_n(k)$  применяют асимптотическую формулу Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } e = 2,7182...; \lambda = np.$$

Эта формула используется при  $\lambda \leq 10$ , причем чем меньше  $p$  и больше  $n$ , тем результат точнее.

**Пример.** Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдут 350 семян.

*Решение.*

а) из условия задачи  $p = 0,9; q = 1 - 0,9 = 0,1; n = 400; k = 350$ . Тогда

$$x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -\frac{10}{6} \approx -1,67;$$

б) из таблицы в приложении 1 находим  $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67) = 0,0989$ ;

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \cdot 0,0989 \approx 0,0165.$$

**Пример.** Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

*Решение.*

Из условия задачи  $p = 0,0002; n = 10000; k = 6$ . Тогда  $\lambda = 10000 \cdot 0,0002 = 2$ .

Искомая вероятность равна

$$P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} \approx \frac{64}{720} \cdot 0,1353 \approx 0,012.$$

Если вероятность наступления события  $A$  в каждом из  $n$  испытаний постоянна и равна  $p$ , то вероятность  $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$  того, что событие  $A$  в таких испытаниях

наступит не менее  $k_1$  раз и не более  $k_2$  раз, определяется по интегральной теореме Лапласа формулой:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где  $\alpha = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$  и  $\beta = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ ,  $q = 1 - p$ .

Функция  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  называется функцией Лапласа. В приложении 2

даны значения этой функции для  $0 \leq x \leq 5$ . При  $x > 5$  функция  $\Phi(x) = 0,5$ . При отрицательных значениях  $x$  в силу нечетности функции Лапласа  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ .

Используя функцию Лапласа, имеем

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

**Пример.** Процент всхожести семян пшеницы равен 90%. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

*Решение.*

а) из условия задачи  $p = 0,9$ ;  $q = 1 - 0,9 = 0,1$ ;  $n = 500$ ;  $k_1 = 400$ ;  $k_2 = 440$ .

Тогда  $\alpha = \frac{400 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -7,45$ ;  $\beta = \frac{440 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,49$ .

б) из таблицы в приложении 2 находим

$$\Phi(-1,49) = -\Phi(1,49) \approx -0,4319; \quad \Phi(-7,45) = -\Phi(7,45) \approx -0,5.$$

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(400 \leq k \leq 440) \approx \Phi(-1,49) - \Phi(-7,45) = -0,4312 + 0,5 = 0,0681.$$

*Дискретной* называют *случайную величину*, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными возможностями. *Законом распределения* дискретной случайной величины называют перечень её возможных значений и соответствующих им вероятностей. Этот закон

может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения  $x_i$ , а вторая – вероятности  $p_i$ , причем  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ :

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

Характеристикой среднего значения случайной величины служит математическое ожидание. *Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (1)$$

Свойства математического ожидания:

- 1) математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной;
- 2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания;
- 3) математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей;
- 4) математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

*Дисперсией* случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \quad (2)$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (3)$$

Свойства дисперсии:

- 1) дисперсия постоянной величины равна нулю;
- 2) постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат;
- 3) дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых.

*Средним квадратическим отклонением* случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (4)$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины характеризует рассеяние возможных значений случайной величины вокруг её среднего значения.

**Пример.**

Задан закон распределения дискретной случайной величины  $X$ . Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

$X$	40	42	41	44
$P$	0,1	0,3	0,2	0,4

*Решение.*

а) Вычислим математическое ожидание по заданному закону распределения дискретной случайной величины, пользуясь формулой (1):

$$M(X) = 40 \cdot 0,1 + 42 \cdot 0,3 + 41 \cdot 0,2 + 44 \cdot 0,4 = 42,4;$$

б) вычислим дисперсию, воспользовавшись формулой (3). Для этого составим закон распределения квадрата случайной величины:

$X^2$	$40^2$	$42^2$	$41^2$	$44^2$
$P$	0,1	0,3	0,2	0,4

Тогда  $M(X^2) = 40^2 \cdot 0,1 + 42^2 \cdot 0,3 + 41^2 \cdot 0,2 + 44^2 \cdot 0,4 = 1799,8;$

$$D(X) = 1799,8 - 42,4^2 = 2,04.$$

в) среднее квадратическое отклонение вычислим по формуле (4):

$$\sigma(X) = \sqrt{2,04} \approx 1,43.$$

*Функцией распределения* (интегральной функцией распределения) называют функцию  $F(x)$ , определяющую для каждого значения  $x$  вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, меньшее  $x$ , то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства интегральной функции распределения:

- 1) значения функции распределения принадлежат отрезку  $[0;1]$ ;
- 2) функция распределения есть неубывающая функция;
- 3) вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(a;b)$ , равна приращению функции распределения на этом интервале:  $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$ ;
- 4) вероятность того, что случайная величина  $X$  примет одно определенное значение, например,  $x_1$ , равна нулю;
- 5) если все возможные значения случайной величины  $X$  принадлежат интервалу  $(a;b)$ , то

$$F(x) = 0 \quad \forall x \leq a; \quad F(x) = 1 \quad \forall x \geq b.$$

*Дифференциальной функцией распределения*  $f(x)$  непрерывной случайной величины называю первую производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \quad (5)$$

Если задана дифференциальная функция распределения  $f(x)$ , вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(a;b)$ , равна

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

*Математическое ожидание* непрерывной случайной величины  $X$ , возможные значения которой принадлежат всей числовой оси, определяется равенством

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Если все возможные значения случайной величины  $X$  принадлежат интервалу  $(a; b)$ , то

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx. \quad (6)$$

Дисперсией непрерывной случайной величины  $X$ , возможные значения которой принадлежат всей числовой оси, определяется равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Если все возможные значения случайной величины  $X$  принадлежат интервалу  $(a; b)$ , то

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2. \quad (7)$$

**Пример.** Непрерывная случайная величина  $X$  задана интегральной функцией

$$\text{распределения } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Требуется найти дифференциальную функцию распределения математическое ожидание и дисперсию.

*Решение.*

а) По определению (5) найдем дифференциальную функцию распределения  $f(x)$  как производную от заданной интегральной функции распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 3x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

б) математическое ожидание вычислим по формуле (6). Так как функция  $f(x)$  при  $x < 0$  и  $x > 1$  равна нулю, то имеем

$$M(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \frac{3x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

в) вычислим дисперсию по формуле (7)

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot 3x^2 dx = 3 \int_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2\right) dx = \\ &= 3 \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{8} + \frac{3x^3}{16}\right]_0^1 = 3 \cdot \left[\frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16}\right] = \frac{3}{80}. \end{aligned}$$

Если задана дифференциальная функция распределения  $f(x)$ , вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(a; b)$ , равна

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (8)$$

Вероятность выполнения строгих неравенств  $a < X < b$  определяется той же формулой.

*Нормальным* называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины  $X$ , дифференциальная функция распределения которого имеет вид

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ , где  $a$  – математическое ожидание,  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение  $X$ .

Если случайная величина  $X$  распределена по нормальному закону, то вероятность того, что  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(\alpha; \beta)$ , равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \quad (9)$$

где  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – функция Лапласа (приведена в приложении 2).

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа  $\delta$ , определяется по формуле

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (10)$$

**Пример.** Длина детали представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием 40 мм и средним квадратическим отклонением 3 мм. Найти вероятность того, что длина произвольно взятой детали будет больше 34 мм и меньше 43 мм. Определить вероятность того, что длина детали отклонится от её математического ожидания не более чем 1,5 мм.

*Решение.*

а) По условию задачи  $a = 40, \alpha = 34, \beta = 43, \sigma = 3$ . Тогда по формуле (9)

$$\begin{aligned} P(34 < X < 43) &= \Phi\left(\frac{43-34}{3}\right) - \Phi\left(\frac{34-40}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) \approx 0,3413 + 0,4772 \approx 0,8185. \end{aligned}$$

б) вероятность того, что  $a - \delta < X < a + \delta$ , где  $a = 40, \delta = 1,5$ , вычислим по формуле (10):

$$P(|X - 40| < 1,5) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1,5}{3}\right) = 2 \cdot \Phi(0,5) \approx 2 \cdot 0,1915 \approx 0,383.$$

## Комплексные числа

*Комплексным числом* называется выражение вида

$$z = x + iy, \quad (11)$$

где  $x, y$  - вещественные (действительные) числа,

$i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица.

Число  $x$  называют *действительной частью* комплексного числа  $z$  и обозначают  $x = \operatorname{Re} z$ , а число  $y$  - *мнимой частью* числа  $z$ :  $y = \operatorname{Im} z$ . Мнимая единица  $i$

представляет собой корень квадратного уравнения  $z^2 + 1 = 0$ , то есть  $i^2 = -1$ . Запись комплексного числа в форме (11) называют *алгебраическим представлением* комплексного числа. Число  $\bar{z} = x - iy$  называют сопряженным комплексному числу (11).

*Модулем* комплексного числа называют величину  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , *аргументом* комплексного числа называют величину  $\varphi = \arg z$  такую, что  $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ;  $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ;  $\varphi = \arg z = \arctg \frac{y}{x}$ , где угол  $\varphi$ , отсчитываемый против часовой стрелки, считается положительным, в противном случае – отрицательным. Комплексное число  $z = x + iy$  можно представить в *тригонометрической форме*

$$z = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (12)$$

Обозначим  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , тогда можно перейти от тригонометрической формы представления комплексного числа (12) к *показательной форме*:

$$z = |z| e^{i\varphi}. \quad (13)$$

Рассмотрим основные алгебраические операции над комплексными числами  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$ .

1. Сложение:  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ .
2. Вычитание:  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ .
3. Умножение:  $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ .
4. Деление:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ .

5. Возведение комплексного числа в степень: в этом случае удобно от алгебраической формы представления числа  $z = x + iy$  перейти к показательной форме:  $z = |z| e^{i\varphi}$ . Тогда  $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$ , и, записывая результат в тригонометрической форме, получим так называемую *формулу Муавра*:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (14)$$

6. Извлечение корня из комплексного числа: корнем  $n$ -ой степени из комплексного числа  $z$  называется такое комплексное число  $w$ , что при возведении его в  $n$ -ую степень получим  $z$ :  $\sqrt[n]{z} = w$ , если  $w^n = z$ .

Для каждого комплексного числа можно найти  $n$  значений корня  $n$ -ой степени по формуле

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_{k+1} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (15)$$

**Пример.** Заданы комплексные числа. Требуется а) выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме; б) найти все значения корня и представить ответ в алгебраической форме:

а)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 - i^3$ ; б)  $\sqrt[5]{-i}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \text{а) } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 - i^3 &= \left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^2 - i \cdot i^2 = \left(\frac{1-i-i+i^2}{1-i^2}\right)^2 - i \cdot i^2 = \\ &= \left(\frac{1-2i-1}{1-(-1)}\right)^2 - i \cdot (-1) = \left(\frac{-2i}{2}\right)^2 + i = -1 + i, \end{aligned}$$

В преобразованиях использовали тот факт, что  $i^2 = -1$ .

б) для вычисления  $\sqrt[5]{-i}$  представим число  $-i$  в тригонометрической форме. Поскольку  $|-i| = 1$ ,  $\cos \varphi = \frac{0}{1} = 0$ ,  $\sin \varphi = \frac{-1}{1} = -1$ ,  $\varphi = 270^\circ$ , то  $-i = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ$ .

Найдем  $\sqrt[5]{-i}$  по формуле (15):

$$\left(\sqrt[5]{-1}\right)_{k+1} = \sqrt[5]{1} \left( \cos \frac{270^\circ + 360^\circ k}{5} + i \sin \frac{270^\circ + 360^\circ k}{5} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$\left(\sqrt[5]{-1}\right)_{k+1} = 1 \cdot \left( \cos(54^\circ + 72^\circ k) + i \sin(54^\circ + 72^\circ k) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

при  $k = 0$   $\left(\sqrt[5]{-1}\right)_1 = \cos 54^\circ + i \sin 54^\circ$ ,

при  $k = 1$   $\left(\sqrt[5]{-1}\right)_2 = \cos 126^\circ + i \sin 126^\circ$ ,

при  $k = 2$   $\left(\sqrt[5]{-1}\right)_3 = \cos 198^\circ + i \sin 198^\circ$ ,

при  $k = 3$   $\left(\sqrt[5]{-1}\right)_4 = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ$ ,

при  $k = 4$   $\left(\sqrt[5]{-1}\right)_5 = \cos 342^\circ + i \sin 342^\circ$ ,

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### 1 Основная литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : Учебник для вузов / Д.В.Беклемишев .— 9-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2007 .— 312с.
2. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. Ч.2 / А.В.Ефимов [и др.]; под ред. А.В.Ефимова, А.С.Поспелова .— 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2004 .— 432с.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие для втузов / под ред. Н.В.Ефимова .— 17-е изд., стер. — СПб. : Профессия, 2006 .— 200с.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов .— 9-е изд., стер .— СПб. [и др.] : Лань, 2007 .— 240 с.
5. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа : учеб. пособие для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович .— 14-е изд., стер. — СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008 .— 736 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов. в 2 т., Т.1 / Н.С.Пискунов .— Изд.стер. — М. : Интеграл-Пресс, 2007 .— 416с
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов. в 2 т., Т.2 / Н.С.Пискунов .— Изд.стер. — М.: Интеграл-Пресс, 2006 .— 544с.
8. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. Ч.1 / А.В.Ефимов [и др.]; под ред.А.В.Ефимова, А.С.Поспелова .— М. : Физматлит, 2004 .— 288с.

### 2. Дополнительная литература

1. Аверин В.В. Математика: курс лекций: учеб. пособие/ В.В. Аверин, М.Ю. Соколова, Д.В.Христич: ТулГУ – Тула: Изд. ТулГУ, 2010, Ч.1- 254с.
2. Аверин В.В. Математика: курс лекций: учеб. пособие/ В.В. Аверин, М.Ю. Соколова, Д.В.Христич: ТулГУ – Тула: Изд. ТулГУ, 2010, Ч.2- 275с.
3. Инченко О.В. Математика для заочников: учеб. пособие / О.В. Инченко, В. А. Кузнецова . - Тула: Изд. ТулГУ, 2019. .— 168 с.