

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное
общеобразовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 14 » января 2021 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

 В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий по дисциплине (модулю)
«Уравнения математической физики»**

**Основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

с направленностью (профилем)
Механика деформируемого твердого тела

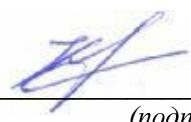
Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-21

Тула 2021 год

Разработчик методических указаний

Кузнецов А.В., к.ф.-м.н., доцент
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)


(подпись)

Некоторые примеры решения задач математической физики.

1.

Решение задачи о колебаниях струны.

Как и всякое дифференциальное уравнение, уравнение (*) имеет бесконечно много решений и для нахождения функции $u(x,t)$, описывающей колебания некоторой конкретной струны, нужно выделить из этого семейства одно, именно для этой струны. Для этого нужно исходить из некоторых исходных условий.

Во-первых, в нашем случае струна закреплена за два конца в точках $x = 0$ и $x = l$. Тогда смещение в этих точках в любой момент времени равно 0:

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0 \quad (1)$$

Эти условия (1) называют краевыми (граничными) условиями задачи.

Обычно задают еще некоторые начальные условия. Например, в начальный момент времени $t = 0$ известно смещение любой точки струны и известна начальная скорость любой точки струны, что выразится равенством:

$$u(x,0) = f(x) \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) \quad (3)$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – известные функции, $\frac{\partial u}{\partial t}$ – скорость.

Таким образом, решение задачи о колебании струны сводится к решению дифференциального уравнения (*), т.е. к нахождению функции 2-х переменных $u(x,t)$, удовлетворяющий краевым условиям (1) и начальным условиям (2) и (3). Существует несколько способов решения уравнения (*). Разберем метод Фурье (разделение переменных).

Будем искать решение в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = F(x) \cdot \Phi(t), \quad (4)$$

$F(x)$ – зависит только от x , $\Phi(t)$ – только от t .

Подставим (4) в (*). Т.к. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x) \cdot \Phi(t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)\Phi''(t)$, то $F(x) \cdot \Phi''(t) = a^2 F''(x) \cdot \Phi(t) \Rightarrow$

$$\frac{\Phi''(t)}{\Phi(t)} = a^2 \frac{F''(x)}{F(x)} \quad (5)$$

Левая часть (5) зависит только от t , правая – только от x , но т.к. они равны при любых $t \geq 0$ и любых $0 \leq x \leq l$, то фактически они не зависят ни от t , ни от x , т.е.

$$\frac{\Phi''(t)}{a^2\Phi(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = C = Const \quad (6)$$

Число С может быть только отрицательным $C < 0$.

Если $C > 0$, то никакого колебательного процесса не будет.

Действительно, при $C > 0$ можем считать $C = b^2$. Тогда имеем из (6)

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = b^2 \text{ или } F''(x) - b^2 F(x) = 0 \quad (7)$$

Это линейное однородное уравнение 2-го порядка. $k^2 - b^2 = 0$ – его характеристическое уравнение.

$$k_1 = b$$

$k_2 = -b$ его корни. Тогда решение (7) имеет вид

$$F(x) = C_1 e^{bx} + C_2 e^{-bx} \quad (8)$$

Используем краевые условия, т.е. что $u(0,t) = 0$; $u(e,t) = 0$ при любом t . Тогда из (8) имеем

$$\begin{cases} 0 = C_1 e^{b0} + C_2 e^{-b0} \\ 0 = C_1 e^{bl} + C_2 e^{-bl} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 e^{bl} + C_2 e^{-bl} \end{cases}$$

$C_1 = -C_2$. Из 2-ого $C_1 e^{bl} - C_1 e^{-bl} = 0 \Rightarrow C_1 (e^{bl} - e^{-bl}) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ тогда $C_2 = 0 \Rightarrow$

$$F(x) \equiv 0.$$

Но тогда и $u(x,t) \equiv 0$ (при любом t), т.е. колебаний нет.

Если $C = 0$, то $F''(x) = 0$. $F'(x) = C$. $F(x) = C_1 x + C_2$. Из краевых условий $0 = C_2$

$$0 =$$

$$C_1 e + C_2 \Rightarrow C_1 = 0$$

Снова $F(x) \equiv 0$, $u(x,t) \equiv 0 \Rightarrow$ колебаний нет.

Итак, возможно лишь $C < 0$. Обозначим для удобства $C = -b^2$.

Тогда из (6) имеем два линейных дифференциальных уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами:

$$F''(x) + b^2 F(x) = 0 \quad (9)$$

$$\Phi''(t) + a^2 b^2 \Phi(t) = 0 \quad (10)$$

$$9) - 10) \Rightarrow k^2 + b^2 = 0$$

$$k^2 + (ab)^2 = 0$$

$k_{12} = \pm bi$ $k_{12} = \pm abi$ корни характеристи-

Потому решения имеют соответственно вид:

$$F(x) = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx \quad (11)$$

$$\Phi(t) = D_1 \cos abt + D_2 \sin abt \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в (4), получим решение уравнения струны (*)

$$u(x,t) = (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)(D_1 \cos abt + D_2 \sin abt) \quad (13)$$

Это общее решение уравнения (*). Метод решения дифференциального уравнения 2-ого порядка в частных производных (*) путем его сведения к решению 2-х обыкновенных линейных

дифференциальных уравнений второго порядка был применен Фурье и носит его название – метод Фурье разделения переменных. Он широко применяется в уравнениях математической физики.

Продолжим решение. Наша конкретная струна закреплена и в решении (13) это нужно учесть, т.е. $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$. Из (13) видно, что в точках $x = 0$ и $x = l$ должен равняться 0 множитель, содержащий x , т.е.

$$\Rightarrow C_1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 \cos bx + C_2 \sin bx \Rightarrow C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ C_1 \cos bl + C_2 \sin bl = 0 \Rightarrow C_2 \sin bl = 0 \end{array} \right.$$

Здесь $C_2 \neq 0$, т.к. иначе снова $u(x,t) \equiv 0$ и колебания не было бы.

Тогда

$$\sin bl = 0 \quad (14)$$

(14) может осуществляться только для определенных значений b , т.к. l (длина струны) – постоянная. Тогда $bl = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Откуда

$$b = \frac{k\pi}{l} : 0, \pm \frac{\pi}{l}, \pm \frac{2\pi}{l}, \pm \frac{3\pi}{l}; \dots; \pm \frac{n\pi}{l}; \dots$$

$b = 0$ слева приводит к решению $(x,t) = 0$ – движения нет.

Если в (13) подставить значения $b = \frac{n\pi}{l}$ и $b = -\frac{n\pi}{l}$, то разница будет

лишь в знаке

у $\sin bx$, но наличие произвольной постоянной C_2 делает эти два решения одинаковыми.

Значит, достаточно брать $b > 0$, т.е.

$$b = \frac{n\pi}{l} (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

Для каждого n получим соответствующее решение уравнения (*).

$$u_n(x,t) = C_2 \left(D_1 \cos \frac{\pi ant}{l} + D_2 \sin \frac{\pi ant}{l} \right) \sin \frac{\pi nx}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Полагая $C_2 \cdot D_1 = A_n$, $C_2 \cdot D_2 = B_n$, можем записать

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{\pi an}{l} t + B_n \sin \frac{\pi an}{l} t \right) \sin \frac{\pi nx}{l} \quad (16)$$

Т.к. в состав A_n и B_n входят C_2 , D_1 и C_2 , D_2 , то они есть произвольные постоянные.

Из (16) видим, что каждая точка струны с абсциссой x с течением времени t совершает колебательные движения с частотой $\omega = \frac{\pi an}{l}$ и ампли-

тудой $A = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin \frac{n\pi x}{l}$ (общий вид колебательного движения $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\omega t + \alpha)$). Отсюда видим, что частота колебания однаакова для всех точек струны ($\omega = \frac{\pi an}{l}$ – не зависит от x), амплитуда колебания для каждой точки разная. Т.к. частоты одинаковы, то максимального отклонения все точки достигают в один и тот же момент времени. Все колебательные движения $u_n(t)$ носят название собственных колебаний или стоячих волн. Это гармонические колебания и потому имеют вид

синусоиды в любой момент времени. В зависимости от n (номера стоячей волны) зависит ее вид.

Например, при $n = 1$,

$u_1(x,t) = \left(A_1 \cos \frac{\pi at}{l} + B_1 \sin \frac{\pi at}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l}$. Амплитуда $A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sin \frac{\pi x}{l}$, достигает наибольшего значения при $\sin \frac{\pi x}{l} = 1$, т.е. $\frac{\pi x}{l} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{l}{2}$ - посередине.

При приближении к $x = 0$ и $x = l$ амплитуда уменьшается до 0. Стоячая волна имеет вид,

$$\text{при } n = 2, \quad u_2(x,t) = \left(A_2 \cos \frac{2\pi at}{l} + B_2 \sin \frac{2\pi at}{l} \right) \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

$A = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \sin \frac{2\pi x}{l}$. Наибольшее значение A при $\frac{2\pi x}{l} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. $\frac{2x}{l} = \frac{1+4k}{2}$. $k = 0$. $x = \frac{l}{4}$; $k = 1$, $x = \frac{5}{4}l$ - нет такой.

При $x = \frac{l}{2} \quad \sin \frac{l\pi x}{l} = 0$, при $x = \frac{3l}{4}$ $\sin \frac{2\pi 3l}{4l} = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$ наименьшее значение. В точке $x = \frac{l}{2}$ узел. Точка остается не месте при

колебаниях. Стоячая волна имеет вид, указанный на втором рисунке.

Совершенно аналогично стоячая волна при $n = 3$ имеет уже 2 узла и т.д.

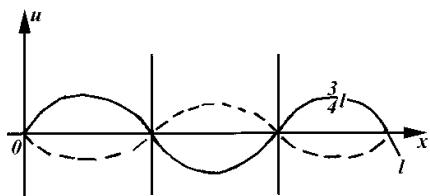
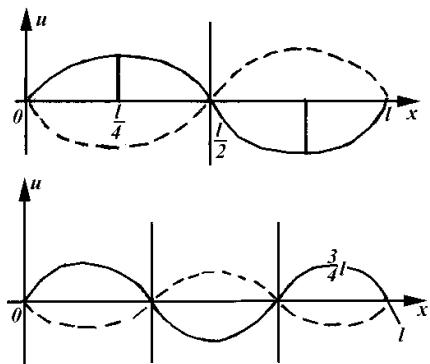
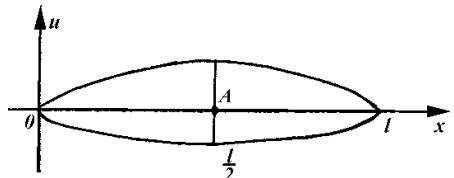
Так как уравнение (*) есть однородное линейное, то сумма ее решений тоже есть решение и потому функция представлена рядом

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right] \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (17)$$

тоже есть решение уравнения (*), только нужно требовать, чтобы этот ряд можно было почленно дважды дифференцировать. Действительно, тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right] = 0, \text{ т.е. } u(x,t) \text{ решение } (*)$$

Это решение $u(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям, т.к. им удовлетворяет любая из функций $u_n(x,t)$: $u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,t) = 0$, $u(l,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(l,t) = 0$.



В состав решения (17) входят произвольные коэффициенты A_n и B_n . Выберем эти коэффициенты так, чтобы выполнялись и начальные условия

$$(2) \text{ и } (3): u(x,0) = f(x) \text{ и } \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = \varphi(x).$$

Для этого нужно, чтобы функция $u(x,t)$ из (17) удовлетворяла им.

$$U(x,0) = \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x) \quad (18)$$

И т.к. $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi a}{l} A_n \sin \frac{n\pi at}{l} + \frac{n\pi a}{l} B_n \cos \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = \sum B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) \quad (19)$$

Вспоминая о разложениях в ряды Фурье функций $f(x)$ на $[0,l]$, из (18) и (19) видим, что можно считать

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (20)$$

$$B_n \cdot \frac{n\pi a}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \text{ или}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (21)$$

Таким образом, функция $u(x,t)$ из (17) с коэффициентами A_n и B_n , определяемым по (20) и (21), и есть решение дифференциального уравнения свободных колебаний струны, удовлетворяющих заданным краевым и начальным условиям.

Способ решения называется "наложением стоячих волн", т.к. получается сложение отдельных стоячих волн.

Если речь идет о струне музыкального инструмента, то стоячие волны имеют определенный смысл. Каждая стоячая волна есть колебания струны, вызывающая определенное звучание. Чем больше частота звучания $\omega = \frac{n\pi a}{l}$, тем больше высота звука (звук тоньше), чем больше амплитуда колебания A , тем сильнее звук.

Оказывается, что при $n \rightarrow \infty$, $A_n \rightarrow 0$ и $B_n \rightarrow 0$, т.е. с возрастанием и амплитуда A и, значит, сила звука уменьшается, а высота увеличивается.

Наибольшую силу имеет звук, доставляемый 1-ой ст. волной при $n = 1$.

Он называется основным тоном струны. Частота колебания ω_1 наименьшая, звук самый низкий. Частоты $\omega_2, \omega_3, \dots$ - колебаний струны называются частотами обертонов.

Т.к. настоящое колебание складывается из бесчисленного числа гармонических колебаний, то и звук складывается из бесчисленного числа звуков – основного тона и обертонов.

Обертоны влияют на тембр звука, окраску основного тона.

У различных музыкальных инструментов основной звук и обертоны подбираются по разному. В этом секрет их различного звучания.

2.

Конечная струна -- схема решения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), 0 < x < l$$

$$u|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u_t|_{t=0} = u_2(x)$$

+ Границные условия

Две границы $x = 0; x = l$

На каждой из границ могут быть следующий граничные условия:

I $u|_{x=0} = \varphi(t)$

II $u_x|_{x=l} = \psi(t)$

III $(u_x + Au)|_{x=l} = p(t)$

Шаг 1. Обнуление граничных условий.

$$u = v + \omega$$

Нужно найти функцию ω , которая имеет такие же граничные условия, как и функция u .

Тогда для функции v условия на границе будут = 0.

Шаг 2. Получить задачу для функции v . В исходную задачу подставляется $u = v + \omega$ (ω -найденная функция)

$$(v + \omega)_{tt} = a^2(v + \omega)_{xx} + f(x, t), 0 < x < l$$

$$(v + \omega)|_{t=0} = u_1(x)$$

$$(v + \omega)_t|_{t=0} = u_2(x)$$

+ нулевые граничные условия на функцию v

то есть

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \tilde{f}(x, t), 0 < x < l, \text{ где } \tilde{f}(x, t) = a^2 \omega_{xx} - \omega_{tt} + f(x, t)$$

$$v|_{t=0} = u_1(x) - \omega|_{t=0} = \tilde{u}_1(x)$$

$$v_t|_{t=0} = u_2(x) - \omega_t|_{t=0} = \tilde{u}_2(x)$$

+ нулевые граничные условия на функцию v .

Шаг 3.

Полученная задача еще разбивается на две задачи.

А именно, решение ищется в виде $v = v_1 + v_2$, где новые функции являются решением следующих задач.

$$v_{1tt} = a^2 v_{1xx}, 0 < x < l$$

$$v_1|_{t=0} = \tilde{u}_1(x)$$

$$v_{1t}|_{t=0} = \tilde{u}_2(x)$$

+ нулевые граничные условия на функцию v_1 .

и

$$v_2_{tt} = a^2 v_2_{xx} + \tilde{f}(x,t), 0 < x < l,$$

$$v_2|_{t=0} = 0$$

$$v_2_t|_{t=0}=0$$

+ нулевые граничные условия на функцию v_2 .

Шаг 4

Задача для функции v_1 решается методом разделения переменных (или иначе методом Фурье). Решение ищется в виде произведения

$$v_1 = T(t) \cdot X(x)$$

Подставляя это выражение в уравнение для функции v_1 , получаем

$$T''(t) \cdot X(x) = a^2 T(t) \cdot X''(x).$$

Поделим обе части на $a^2 T \cdot X$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Дальнейшее связано со следующим утверждением.

Лемма 1.

Если $f(\bar{x}) = g(\bar{y}) \quad \forall \bar{x} = (x_1, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$, то $f = g = const$

Доказательство: Фиксируем $\bar{y} = \bar{y}_0$, тогда

$$f(\bar{x}) = \psi(\bar{y}_0) = C = const.$$

Но

$$g(\bar{y}) = f(\bar{x}) = C \Rightarrow f = g = const. \text{ Ч.т.д.}$$

Как следствие Леммы 1

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = C = const$$

Отсюда получаем уравнение относительно функции $T(t)$

$$I_T: T'' - a^2 CT = 0$$

и относительно функции $X(x)$

$$II_X: X'' - CX = 0$$

Из нулевых граничных условий к уравнению II_X добавляются условия на функцию X на границах – это задача Штурма-Лиувилля.

Решить задачу Штурма-Лиувилля означает, что нужно найти нетривиальное решение $X(x)$ и определить C при которой существуют ненулевые решения.

Задача Штурма-Лиувилля имеет счетное число различных решений $\{X_n\}$ и каждому решению соответствует константа C_n .

Далее $\forall n$ решаем уравнение $I_T: T'' - a^2 C_n T = 0$

$$T_n(t) = a_n T_n^{(1)}(t) + b_n T_n^{(2)}(t)$$

$$\Rightarrow \forall n v_{1n} = T_n X_n$$

Уравнение линейно \Rightarrow действует принцип суперпозиции:

$$v_1 = \sum_n T_n X_n$$

Коэффициенты a_n, b_n находятся из начальных условий

$$\begin{aligned} v_1|_{t=0} &= v_1 \\ v_{1t}|_{t=0} &= \sum_n T_n X_n \end{aligned}$$

Шаг 5.

$$v_2 = \sum_n \gamma_n(t) X_n$$

Для выполнения нулевых начальных условий на v_2

достаточно потребовать $\gamma_n(0) = \gamma'_n(0) = 0$.

Наличие функций X_n обеспечивает нулевые условия на границах.

v_2 удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} v_{2tt} &= a^2 v_{2xx} + \hat{f}(x, t) \\ \left(\sum_n \gamma_n(t) X_n \right)_{tt} &= a^2 \left(\sum_n \gamma_n(t) X_n \right)_{xx} + \hat{f}(x, t) \end{aligned}$$

$$\sum_n \gamma_n'' X_n = a^2 \sum_n \gamma_n X_n'' + \hat{f}(x, t)$$

$$\sum_n (\gamma_n'' - a^2 C_n \gamma_n) X_n = \hat{f}(x, t)$$

$\hat{f}(x, t)$ раскладывается в ряд по $X_n(x)$

$$\hat{f}(x, t) = \sum_n f_n(t) X_n(x).$$

Тогда задача Коши на

$$\gamma_n(t): \begin{cases} \gamma_n'' - a^2 C_n \gamma_n = f_n(t) \\ \gamma_n(0) = \gamma'_n(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_n(t) \Rightarrow v_2 = \sum_n \gamma_n(t) X_n$$

$$u = \omega + v_1 + v_2$$

О задаче Ш.-Л.

Рассмотрим более общую ситуацию: задачу Ш.-Л следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{tt} + p(x)X_t + q(x)X = CX, 0 < x < l \\ \bigoplus \text{при } x = 0 \text{ и } x = l \text{ одно из граничных условий} \\ I X(0) = 0 \text{ или } X(l) = 0 \\ II X'(0) = 0 \text{ или } X'(l) = 0 \\ III (X' + AX)|_{x=0} = 0 \text{ или при } X = l \end{array} \right.$$

Предположим, что X_1 и X_2 – решение задачи Ш.-Л.

Пусть X_1 – решение соответствующее константе $C = C_1$;

X_2 – решение соответствующее константе $C = C_2$, тогда $| * | *$

$$X_1'' + pX_1' + qX_1 = C_1 X_1$$

$$X_2'' + pX_2' + qX_2 = C_2 X_2.$$

Умножим первое уравнение на $X_2 * e^{\int pdx}$, а второе на $X_1 * e^{\int pdx}$ и вычтем из первого второе.

$$e^{\int pdx}(X_1''X_2 - X_2''X_1) + p e^{\int pdx}(X_1'X_2 - X_2'X_1) = (C_1 - C_2)e^{\int pdx}X_1X_2$$

Левую часть можно представить как производную произведения

$$(e^{\int pdx}(X_1'X_2 - X_2'X_1))' = (C_1 - C_2)e^{\int pdx}X_1X_2$$

Проинтегрируем обе части равенства от 0 до l

$$e^{\int pdx}[X_1'(t)X_2(t) - X_2'(t)X_1(t)]|_0^l = (C_1 - C_2) \int_0^l e^{\int pdx}X_1X_2 dt$$

$$\begin{aligned} e^{\int pdx}[(X_1'(l)X_2(l) - X_2'(l)X_1(l)) - (X_1'(0)X_2(0) - X_2'(0)X_1(0))] \\ = (C_1 - C_2) \int_0^l e^{\int pdx}X_1X_2 dt \end{aligned}$$

При любых условиях на границах левая часть полученного равенства равна нулю, следовательно

$$\int_0^l e^{\int pdx}X_1X_2 dt = 0$$

Введем функцию $e^{\int pdx} = \rho(x)$, которая называется весовой функцией. В результате мы получили, что функции X_1 и X_2 являются ортогональными в интегральном смысле с весом $\rho(x)$.

Функцию $V(x)$ можно разложить в ряд по функциям $X_n(x)$. Предположим, что мы имеем подобное разложение

$$V(x) = \sum_n a_n X_n(x).$$

Умножим обе части на $X_m(x)\rho(x)$ и проинтегрируем от 0 до l . Тогда

$$\int_0^l V(x)\rho(x)X_m(x)dx = \sum_n a_n \int_0^l \rho X_n X_m dx.$$

Интегралы в правой части при $m \neq n$ равны 0. Остается только одно слагаемое при $m = n$, откуда

$$a_n = \frac{\int_0^l V(x)\rho X_n dx}{\int_0^l \rho X_n^2 dx};$$

Это общая формула нахождения коэффициентов разложения функции $V(x)$ в ряд по функциям $X_n(x)$ на отрезке $[0; l]$.

Пример в общем виде:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x, t), 0 < x < l$$

$$u|_{t=0} = u_1(x)$$

$$u_t|_{t=0} = u_2(x)$$

$$u|_{x=0} = 0$$

$$u_x|_{x=l} = 0$$

$$U = V_1 + V_2$$

$$V_{1,tt} = a^2 V_{1,xx}$$

$$V_1|_{t=0} = u_1(x)$$

$$V_{1,t}|_{t=0} = u_2(x)$$

$$V_1|_{x=0} = V_{1,x}|_{t=0} = 0$$

$$V_1 = T(x)X(x)$$

$$T''X = a^2 TX'' : a^2 TX$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = C$$

$$I_T : T'' - a^2 CT = 0$$

$$II_X : X'' - CX = 0$$

$$V_1|_{x=0} = T(x)X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$V_{1,x}|_{x=l} = T(t)X(l) = 0 \Rightarrow X'(l) = 0$$

$$C > 0 : C = \lambda^2 (\lambda > 0)$$

$$X'' - \lambda^2 X = 0$$

$$k^2 - \lambda^2 = 0 ; k_{1,2} = \pm \lambda$$

$$X = C_1 ch(\lambda x) + C_2 sh(\lambda x)$$

$$X(0) = C_1 = 0$$

$$X'(l) = \lambda C_2 ch(\lambda l) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$X = 0 \text{ (не интересует)}$$

$$C = 0$$

$$X'' = 0$$

$$X = C_1 x + C_2$$

$$X(0) = C_2 = 0$$

$$X'(l) = C_1 = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ (не интересует)}$$

$$C < 0 : C = -\lambda^2 (\lambda > 0)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$k^2 + \lambda^2 = 0 ; k_{1,2} = \pm \lambda i$$

$$X = \widetilde{C}_1 \cos(\lambda x) + \widetilde{C}_2 \sin(\lambda x)$$

$$X(0) = \widetilde{C}_1 = 0$$

$$X'(l) = \lambda \widetilde{C}_2 \cos \lambda l = 0 \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{C}_2 = 0 \\ \cos \lambda l = 0 \end{cases} \Rightarrow X = 0$$

$$\lambda l = \frac{\pi}{2} + \pi n, n = 0, 1, \dots, \infty$$

$$\lambda = \lambda_n = \frac{\pi}{l} \left(\frac{1}{2} + n \right), n = \overline{0, \infty}$$

$$C = C_n = -\lambda_n^2 = -\frac{\pi^2}{l^2} \left(\frac{1}{2} + n \right)^2$$

$$X(x) = \tilde{C}_2 \sin \lambda_n x$$

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

$$I_T T'' - a^2 CT = 0$$

$$T'' + a^2 \lambda_n^2 T = 0$$

$$k^2 + a^2 \lambda_n^2 = 0$$

$$k_{1,2} = \pm a \lambda_n i$$

$$T_n(t) = a_n \cos a \lambda_n t + b_n \sin a \lambda_n t$$

$$\forall n T_n(t) X_n(x) = V_{1n}$$

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} T_n X_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos a \lambda_n t + b_n \sin a \lambda_n t) \sin \lambda_n x$$

Из начальных условий:

$$V_1|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x = u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n} \sin \lambda_n x$$

$$u_{1n} = \frac{2}{l} \int_0^l u_1(x) \sin \lambda_n x dx$$

$$V_{1t}|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} ab_n \lambda_n \sin \lambda_n x = u_2(x)$$

$$ab_n \lambda_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_2(x) \sin \lambda_n x dx$$

$$b_n = \frac{2}{a \lambda_n l} \int_0^l u_2(x) \sin \lambda_n x dx \Rightarrow V_1 \text{ найдено}$$

$$V_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(t) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(t) \sin \lambda_n x$$

$$\gamma_n(0) = \gamma'_n(0) = 0$$

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \sin \lambda_n x$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \lambda_n x dx$$

$$\begin{cases} \gamma_n'' + a^2 \lambda_n^2 \gamma_n = f_n(t) \\ \gamma_n(0) = \gamma'_n(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_n(t) \Rightarrow V_2$$

Пример 1(конкретный):

$$u_{tt} = 4u_{xx} - 8t + t^2 \cos 3x, 0 < x < \pi$$

$$u|_{t=0} = \sin^2 x$$

$$u_t|_{t=0} = x^2 + \cos 4x$$

$$u_x|_{x=0} = 0$$

$$u_x|_{x=\pi} = 2\pi t$$

$$\begin{aligned}
& u = v + \omega \\
& \omega: \omega_x|_{x=0} = 0 \\
& \omega_x|_{x=\pi} = 2\pi t \Rightarrow \omega = x^2 t \\
& u = V + x^2 t \\
& V_{tt} + 0 = 4(v_{xx} + 2t) - 8t + t^2 \cos 3x \\
& V_{tt} = 4V_{xx} + t^2 \cos 3x \\
& u|_{t=0} = (V + x^2 t)|_{t=0} = \sin^2 x \\
& u_t|_{t=0} = (v + x^2 t)_t|_{t=0} = x^2 + \cos 4x \\
& V_t|_{t=0} = \cos 4x \\
& V_{tt} = 4V_{xx} + t^2 \cos 3x \\
& V|_{t=0} = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \\
& V_t|_{t=0} = \cos 4x \\
& V_x|_{x=0} = 0 \\
& V_x|_{x=\pi} = 0 \\
& V = V_1 + V_2 \\
& V_1: V_{1tt} = 4V_{1xx} \\
& V_1|_{t=0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \\
& V_{1t}|_{t=0} = \cos 4x \\
& V_{1x}|_{x=0} = 0 \\
& V_{1x}|_{x=\pi} = 0 \\
& V_1 = T(t)X(x) \\
& T''X = 4TX' - 4TX \\
& \frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = C \\
& I_T T''' - 4CT = 0 \\
& II_X \begin{cases} X'' - CX = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases} \\
& C > 0; C = \lambda^2 (\lambda > 0) \\
& X'' - \lambda X = 0 \\
& k_{1,2} = \pm \lambda \\
& X = \tilde{C}_1 ch(\lambda x) + \tilde{C}_2 sh(\lambda x) \\
& X'(0) = \tilde{C}_2 \lambda = 0 \Rightarrow \tilde{C}_2 = 0 \\
& X'(\pi) = \tilde{C}_1 \lambda sh(\lambda \pi) = 0 \Rightarrow \tilde{C}_1 = 0 \text{ (не интересует)} \\
& C = 0, X'' = 0 \\
& X = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 \\
& X'(0) = \tilde{C}_1 = 0 \\
& X(\pi) = \tilde{C}_2 = 0 \\
& X(x) = \tilde{C}_2 = 1 \text{ (произвольно)} \\
& X_0 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C < 0: C = -\lambda^2 (\lambda > 0) \\
X'' + \lambda^2 X = 0 \\
k_{1,2} = \pm \lambda i \\
X = \widetilde{C}_1 \cos \lambda x + \widetilde{C}_2 \sin \lambda x \\
X'(0) = \lambda \widetilde{C}_2 = 0 \Rightarrow \widetilde{C}_2 = 0 \\
X'(\pi) = -\lambda \widetilde{C}_1 \sin \lambda \pi = 0 \Rightarrow \frac{\widetilde{C}_1}{\sin \lambda \pi} = 0 \\
\lambda \pi = \pi n \\
\lambda = \lambda_n = n; n = \overline{1, \infty} \\
C = C_n = -\lambda_n^2 = -n^2 \\
X(x) = \widetilde{C}_1 \cos \lambda_n x (\widetilde{C}_1 = 1) \Rightarrow \\
C = 0 \Rightarrow X_n(x) = \cos nx \\
C = -n^2 \Rightarrow X_0 = 1 \\
X_n = \cos nx, n \geq 1 \Rightarrow X_n = \cos nx, n = \overline{1, \infty} \\
I_T: T'' - 4CT = 0 \\
C = -n^2 = -\lambda_n^2, n = \overline{1, \infty} \\
T'' + 4n^2 T = 0 \\
T'' + 4\lambda_n^2 T = 0 \\
k_{1,2} = \pm 2ni \\
T_n(t) = a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt \\
C = 0 \\
T'' = 0 \\
T_0 = a_0 + b_0 t
\end{aligned}$$

Общее решение V_1 :

$$\begin{aligned}
V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} T_n X_n &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cos nx = T_0 X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n X_n \\
&= a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt) \cos nx
\end{aligned}$$

Определяем a_n, b_n

$$V_1|_{t=0} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$a_0 = \frac{1}{2}; a_2 = -\frac{1}{2}; a_n = 0, n = \overline{1, 3, 4, 5, \dots, \infty}$$

$$V_t|_{t=0} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2n \cos nx = \cos 4x$$

$$n = 4 \quad b_n 2n = 1$$

$$b_4 = \frac{1}{8}; b_n = 0, n \neq 4, n > 0$$

$$V_1(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4t \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 8t \cos 4x$$

$$V_2: V_{tt} = 4V_{2xx} + t^2 \cos 3x$$

$$v_2|_{t=0} = 0$$

$$V_{2t}|_{t=0} = 0$$

$$V_{2x}|_{x=0} = 0$$

$$V_{2x}|_{x=\pi} = 0$$

$$V_2 = \sum_{n=0} \gamma_n(t) \cos nx$$

$$\gamma(0) = \gamma'(\pi) = 0$$

$$\gamma_n = 0, n \neq 3$$

$$v_2 = \gamma_3(t) X_3(x) = \gamma_3(t) \cos 3x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_3'' + 4 * 3^2 \gamma_3 = t^2 \\ \gamma_3(0) = \gamma'(0) \end{array} \right.$$

$$T'' + 4n^2 T = 0$$

$$\gamma_3 = \gamma_{3 \text{ odd}} + \overline{\gamma_3}$$

$$\gamma_{3 \text{ odd}} = \overline{C_1} \cos 6t + \overline{C_2} \sin 6t$$

$$\overline{\gamma_3} = At^2 + Bt + C$$

$$\overline{\gamma_3}' = 2At + b$$

$$\overline{\gamma_3}'' = 2A$$

$$2A + 4 * 3^2 (At^2 + Bt + C) = t^2$$

$$36A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{36}$$

$$B = 0$$

$$2A + 36C = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{36^2}$$

$$\gamma_3 = \widehat{C_1} \cos 6t + \widehat{C_2} \sin 6t + \frac{1}{36}t^2 - \frac{2}{36^2}$$

$$\gamma_3(0) = \widehat{C_1} - \frac{2}{36^2} = 0 \Rightarrow \widehat{C_1} = \frac{2}{36^2}$$

$$\gamma_3'(0) = 6\widehat{C_2} = 0 \Rightarrow \widehat{C_2} = 0$$

$$\gamma_3(t) = \frac{2}{36^2} \cos 6t + \frac{1}{36}t^2 - \frac{2}{36^2}$$

$$V_2 = \frac{2}{36^2} (\cos 6t + 18t^2 - 1) \cos 3x$$

$$u = \omega + V_1 + V_2$$

Пример 2(3-е граничное условие):

$$u_{tt} = 9u_{xx}, 0 \leq x \leq 2$$

$$u|_{t=0} = x$$

$$u_t|_{t=0} = 0$$

$$u|_{x=0} = 0$$

$$(u - u_x)|_{x=2} = 0$$

$$(u \equiv v_1)$$

$$u = T(t)X(x)$$

$$T''X = 9TX'' \quad (: 9TX)$$

$$\frac{T''}{9T} = \frac{X''}{X} = C$$

$$I_T T'' - 9CT = 0$$

$$I_T \left\{ \begin{array}{l} X'' - CX = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(2) - X'(2) = 0 \end{array} \right.$$

1 случай $C > 0; C = \lambda^2 (\lambda > 0)$

$$X'' - \lambda^2 X = 0$$

$$X = \tilde{C}_1 ch(\lambda x) + \tilde{C}_2 sh(\lambda x)$$

$$X(0) = \tilde{C}_1 = 0$$

$$X(2) - X'(2) = \tilde{C}_2 sh(2\lambda) - \lambda \tilde{C}_2 ch(2\lambda) = 0$$

$$\tilde{C}_2 (sh(2\lambda) - \lambda ch(2\lambda)) = 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{C}_2 = 0 \Rightarrow X \equiv 0$$

$$sh(2\lambda) - \lambda ch(2\lambda) = 0 \quad (: ch(2\lambda)) \Rightarrow$$

$$th(2\lambda) = \lambda$$

Нашлась точка (можно посмотреть графически) λ^* , удовлетворяющая уравнению $th(2\lambda) = \lambda$

$$X = \tilde{C}_2 sh(\lambda^* x)$$

$$\tilde{C}_2 = 1 \text{ (сами)}$$

$$X^*(x) = sh(\lambda^* x) \quad (th(2\lambda^*) = \lambda^*)$$

$$C = (\lambda^*)^2$$

2 случай: $C = 0 \Rightarrow X'' = 0$

$$X = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$$

$$X(0) = \tilde{C}_2 = 0$$

$$X(2) - X'(2) = 2\tilde{C}_1 - \tilde{C}_1 = \tilde{C}_1 = 0 \Rightarrow X \equiv 0$$

3 случай: $C < 0; C = -\lambda^2 (\lambda > 0)$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$X = \tilde{C}_1 \cos \lambda x + \tilde{C}_2 \sin \lambda x$$

$$X(0) = \tilde{C}_1 = 0$$

$$X(2) - X'(2) = \tilde{C}_2 \sin 2\lambda - \lambda \tilde{C}_2 \cos 2\lambda = 0$$

Отсюда либо $\tilde{C}_2 = 0$, что приводит к тривиальному решению, которое нас не интересует, либо $\sin 2\lambda - \lambda \cos 2\lambda = 0$. Поделив на косинус, получим следующее уравнение

$$tg 2\lambda = \lambda.$$

Графически можно показать, что это уравнение имеет бесконечное число решений, которые нельзя найти аналитически. Мы их просто обозначаем λ_n и далее работаем с этим буквенным обозначением.

Таким образом:

$$X = \tilde{C}_2 \sin \lambda_n x$$

$$\tilde{C}_2 = 1 \text{ (сами)}$$

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x$$

Далее решаем уравнение относительно функции T(t)

$$\text{Для } C = (\lambda^*)^2$$

$$T'' - 9(\lambda^*)^2 T = 0$$

$$T = a^* \operatorname{ch}(3\lambda^* t) + b^* \operatorname{sh}(3\lambda^* t)$$

$$\text{Для } C = -\lambda_n^2;$$

$$T'' + 9\lambda_n^2 T = 0$$

$$T_n = a_n \cos 3\lambda_n t + b_n \sin 3\lambda_n t$$

$$\begin{aligned} u &= T^* X^* + \sum_{n=1}^{\infty} T_n X_n \\ &= \left(a^* \operatorname{ch}(3\lambda^* t) + b^* \operatorname{sh}(3\lambda^* t) \right) \operatorname{sh}(\lambda^* x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 3\lambda_n t + b_n \sin 3\lambda_n t) \sin \lambda_n x \end{aligned}$$

$$u|_{t=0} = 3\lambda^* b^* \operatorname{sh}(\lambda^* x) + \sum_{n=1}^{\infty} 3\lambda_n b_n \sin \lambda_n x = 0 \Rightarrow b^* = b_n = 0$$

$$u|_{t=0} = a^* \operatorname{sh}(\lambda^* x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x = x$$

$$a_n = \frac{\int_0^2 x \rho(x) X_n dx}{\int_0^2 \rho(x) X_n^2 dx}$$

$$X'' + p(x)X' + qX = -CX$$

$p = 0$ в нашем случае

Весовая функция (вес) $\rho = e^{\int -p dx} = 1$

$$a_n = \frac{\int_0^2 x \sin \lambda_n x dx}{\int_0^2 \sin^2 \lambda_n x dx}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sin \lambda_n x dx &= \frac{1}{2} \int_0^2 (1 - \cos 2\lambda_n x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2\lambda_n} \sin 2\lambda_n x \right) \Big|_0^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 3\lambda_n = 1 - \frac{2 \sin 2\lambda_n \cos \lambda_n}{4\lambda_n} = 1 - \frac{1}{2} \cos^2 2\lambda_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \sin \lambda_n x dx &= -\frac{1}{\lambda_n} \int_0^2 x d \cos \lambda_n x = -\left(\frac{x}{\lambda_n} \cos \lambda_n x - \frac{1}{\lambda_n^2} \sin \lambda_n x \right) \Big|_0^2 \\ &= -\frac{2}{\lambda_n} \cos 2\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n^2} \sin 2\lambda_n = [\sin 2\lambda_n - \lambda_n \cos 2\lambda_n = 0] \\ &= -\frac{1}{\lambda_n} \cos 2\lambda_n \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{-\frac{1}{\lambda_n} \cos 2\lambda_n}{1 - \frac{1}{2} \cos^2 2\lambda_n}$$

Аналогично можно найти

$$\alpha^* = \frac{\int_0^2 xsh(\lambda^*x)dx}{\int_0^2 sh^2(\lambda^*x)dx} = \frac{\frac{1}{\lambda^*}ch(2\lambda^*)}{1 - \frac{1}{2}ch^2(2\lambda^*)}$$

Теперь можно написать ответ:

$$u = (a^* ch(3\lambda^*t))sh(\lambda^*x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 3\lambda_n t) \sin \lambda_n x$$

3.

Пример для резонансного случая.

$$\Delta u = r^3 \sin 5\varphi, \quad 2 < r < 3$$

$$u|_{r=2} = 4$$

$$u|_{r=3} = \sin \varphi$$

Если искать решение так же, как в предыдущем примере, то получится следующее:

$$u_\varphi = \omega = Ar^\alpha \sin 5\varphi, \quad A = const$$

Для этой функции потребуем выполнение уравнения

$$\Delta \omega = \omega_{rr} + \frac{1}{r}\omega_r + \frac{1}{r^2}\omega_{\varphi\varphi} = r^3 \sin 5\varphi \quad (2)$$

Тогда получим

$$A\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} \sin 5\varphi + A\alpha r^{\alpha-2} \sin 5\varphi - 25Ar^{\alpha-2} \sin 2\varphi = r^3 \sin 5\varphi$$

Далее, сократив на $\sin 5\varphi$ имеем

$$Ar^{\alpha-2}(\alpha^2 - 25) = r^3.$$

$$\text{Откуда } r^{\alpha-2} = r^3$$

$$\alpha - 2 = 3$$

$$\alpha = 5.$$

Сократив на r^3 получаем

$$A(\alpha^2 - 25) = 0 \cdot A = 1$$

Естественно, что полученное соотношение не имеет смысла. То есть значения A не существует.

Но это не означает, что задача не решается. Единственный вывод, который отсюда следует, что решение ω нужно искать в другом виде.

Просто мы считали, что A константа. В результате получили, что такой константы не существует.

Значит ищем теперь решение в виде

$$u_\varphi = \omega = A(r)r^\alpha \sin 5\varphi$$

Найденное значение $\alpha = 5$ используем, то есть

$$u_\varphi = \omega = A(r)r^5 \sin 5\varphi$$

Остается определить функцию $A(r)$.

Вычисляем производные

$$\omega_r = A'(r)r^5 \sin 5\varphi + 5A(r)r^4 \sin 5\varphi$$

$$\omega_{rr} = A''(r)r^5 \sin 5\varphi + 10A'(r)r^4 \sin 5\varphi + 20A(r)r^3 \sin 5\varphi$$

$$\omega_{\varphi\varphi} = -25A(r)r^5 \sin 5\varphi$$

и подставляем все в уравнение (2).

$$A''(r)r^5 \sin 5\varphi + 10A'(r)r^4 \sin 5\varphi + 20A(r)r^3 \sin 5\varphi +$$

$$+\frac{1}{r}(A'(r)r^5 \sin 5\varphi + 5A(r)r^4 \sin 5\varphi) - \frac{1}{r^2}25A(r)r^5 \sin 5\varphi = r^3 \sin 5\varphi$$

Сократив на $\sin 5\varphi$ и r^3 получим

$$A''(r)r^2 + 10A'(r)r + 20A(r)r^3 + (A'(r)r + 5A(r)) - 25A(r) = 1$$

$$\text{или } A''(r)r^2 + 11A'(r)r = 1$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение домножим обе его части на r^9 .

Тогда $A''(r)r^{11} + 11A'(r)r^{10} = r^9$ и левую часть можно свернуть как производную произведения

$$(A'(r)r^{11})' = r^9.$$

Интегрируем

$$A'(r)r^{11} = \int r^9 dr = \frac{r^{10}}{10} + C_1.$$

Так как мы хотим найти хоть какое-нибудь решение, то самый простой способ взять константу как можно проще.

А именно берем $C_1 = 0$. Тогда, сократив на r^{10} получим

$$A'(r) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{r}.$$

Еще раз интегрируем и получаем

$$A(r) = \frac{1}{10} \cdot \ln r + C_2.$$

Опять же для простоты вида функции $A(r)$ берем $C_2 = 0$ и тогда получаем

$$A(r) = \frac{1}{10} \cdot \ln r, \text{ откуда}$$

$$u_u = \omega = A(r)r^5 \sin 5\varphi = \frac{1}{10} \cdot r^5 \ln r \cdot \sin 5\varphi$$

Далее действуем также, как и в предыдущем примере:

ищем решение исходной задачи в виде

$$u = v + \omega.$$

Функция v является решением следующей задачи

$$\Delta v = 0, \quad 2 < r < 3$$

$$v|_{r=2} = u|_{r=2} - \omega|_{r=2} = 4 - \frac{1}{10} 2^5 \ln 2 \cdot \sin 5\varphi$$

$$v|_{r=3} = u|_{r=3} - \omega|_{r=3} = \sin \varphi - \frac{1}{10} 3^5 \ln 3 \cdot \sin 5\varphi$$

Далее воспользуемся тем, что общее решение уравнения Лапласа для кольца уже получено

$$v(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + \\ + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi$$

Ищем коэффициенты. Они находятся из следующих систем:

$$\begin{cases} A_0 \ln 2 + B_0 = 4 \\ A_0 \ln 3 + B_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 2 + D_1 2^{-1} = 0 \\ B_1 3 + D_1 3^{-1} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_5 2^5 + D_5 2^{-5} = -\frac{1}{10} 2^5 \ln 2 \\ B_5 3^5 + D_5 3^{-5} = -\frac{1}{10} 3^5 \ln 3 \end{cases}$$

Системы можно решить и найти значения коэффициентов.

Надеясь, что каждый из вас подобные системы может решить и поскольку выражения для коэффициентов получатся достаточно плохие, то при решении подобных задач контрольной и зачета достаточно будет записать системы для нахождения коэффициентов, не решая их. То есть то, что уже у нас написано. И учитывая, что все остальные коэффициенты равны нулю, записываем результат.

Решение исходной задачи

$$u = v + \omega = A_0 \ln r + B_0 + \\ + (B_1 r + D_1 r^{-1}) \sin \varphi + (B_5 r^5 + D_5 r^{-5}) \sin 5\varphi + \frac{1}{10} r^5 \ln r \cdot \sin 5\varphi$$

На контрольной задача будет содержать два слагаемых в правой части, например:

$$\Delta u = r \sin 2\varphi + r^3 \sin 5\varphi, \quad 2 < r < 3$$

$$u|_{r=2} = \sin 3\varphi$$

$$u|_{r=3} = \cos \varphi$$

Одно слагаемое -- резонансный случай, а другое -- не резонансный. Соответственно функция ω будет представлять собой два слагаемых.

$\omega = \omega_1 + \omega_2$, каждое из которых ищется отдельно. Одно для уравнения

$$\Delta\omega_1 = (\omega_1)_{rr} + \frac{1}{r}(\omega_1)_r + \frac{1}{r^2}(\omega_1)_{\varphi\varphi} = r \sin 2\varphi$$

другое для уравнения

$$\Delta\omega_2 = (\omega_2)_{rr} + \frac{1}{r}(\omega_2)_r + \frac{1}{r^2}(\omega_2)_{\varphi\varphi} = r^3 \sin 5\varphi.$$

Соответственно ω_1 находится как в примере предыдущей лекции, а ω_2 как в настоящем примере.

Далее так же как в обоих примерах работаем с функцией ω .

Что касается задач в круге и внешности круга, то на контрольной их не будет, но могут попасться на зачете. На практике для тренировки будет несколько примеров с нерезонансным случаем. Принцип решения такой же, как и для кольца: с помощью функции ω уравнение Пуассона сводится к решению уравнения Лапласа, для которого вид общего решения уже найден. И остается только определить коэффициенты и записать ответ.

4.

Уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega$$

Уравнение Пуассона:

$$\Delta u = -f(x, t) \text{ в } \Omega$$

Плюс граничные условия.

Если на границе области задано значение функции: $u|_{\partial\Omega} = u_0(x)$, то задача именуется задачей Дирихле для уравнения Лапласа (Пуассона)

Если на границе области задана производная по нормали к границе:

$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = u_0(x)$, то задача называется задачей Неймана для уравнения Лапласа (Пуассона).

Если на границе задано 3-е граничное условие, то задача не имеет своего названия.

Решение любой из задач для уравнения Пуассона можно представить в виде суммы функций: первая из которых является решением соответствующей задачи для уравнения Лапласа, а вторая решением уравнения Пуассона с нулевым соответствующим условием на границе области.

Но реально удобнее указывается решать уравнение Пуассона несколько под другому.

Идея состоит в том, что найдя какое-нибудь решение уравнения Пуассона ω можно свести решение уравнения Пуассона к решению уравнения Лапласа.

Если решая уравнение $\Delta u = -f(x, t)$ мы найдем некоторую функцию $\Delta \omega = -f(x, t)$, то представив $u = v + \omega$ получим, что $\Delta v = 0$. Границные условия на новую неизвестную функцию $v = \omega - u$ можно найти, поскольку функция ω известна, а граничные условия на функцию u можно взять из условия задачи.

Следует отметить, что получение общего решения уравнения Лапласа никак не связано с условиями на границе.

Уравнение Лапласа для круга, кольца и внешности круга.

Во всех случаях будем рассматривать решения такие, что $|u(x)| < M$ - огранич.

Кольцо: Переходим к полярным координатам:

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0 \\ u|_{r=R_1} &= u_1(\varphi) \\ u|_{r=R_2} &= u_2(\varphi)\end{aligned}$$

Ищем решение в виде:

$$\begin{aligned}u &= R(r)\Phi(\varphi) \\ R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' &= 0 \quad / \Phi R \\ \frac{r^2 \left(R'' + \frac{1}{r}R' \right)}{R} &= -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda^2 \\ u(r, \varphi) &= u(r, \varphi + 2\pi)\end{aligned}$$

$$I. \Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0, \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$$

$$\lambda = n, n = \overline{0, \infty}$$

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi$$

При $n = 0$ имеем одно решение $\Phi_0(\varphi) = 1$, при $n \geq 1$ имеется два независимых решения

$$\Phi_n^{(c)}(\varphi) = \cos n\varphi$$

$$\Phi_n^{(s)}(\varphi) = \sin n\varphi$$

Общее решение при этом будет иметь вид

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

II. $r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0$ -- уравнение Эйлера

$$\lambda = 0 \quad rR'' + R' = 0, \quad R' = y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dr}{r} \Rightarrow y = C_1 \frac{1}{r} \Rightarrow R = C_1 \ln r + C_2$$

Два независимых решения $R_1 = \ln r$, $R_2 = 1$

При $\lambda = n$ ищем решение в виде $R = r^\alpha$.

$$\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0$$

Сокращая r^α получаем $\alpha^2 = n^2$, $\alpha = \pm n$, то есть имеем два независимых решения

$$R_{(1)} = r^n, \quad R_{(2)} = r^{-n}.$$

Общее решение получается как линейная комбинация этих независимых решений

$$R_n = C_{1n} r^n + C_{2n} r^{-n}$$

Итак имеем

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \text{ при } n \geq 1$$

$$\Phi_0(\varphi) = A_0 \text{ при } n = 0$$

$$R_n(r) = C_{1n} r^n + C_{2n} r^{-n}, \quad n \geq 1$$

$$n = 0 \quad R_0(r) = C_{10} \ln r + C_{20}$$

Соответственно при каждом n получаем решение $u_n(r, \varphi)$.

$$u_0(r, \varphi) = \Phi_0 \cdot R_0 = C_{10} \ln r + C_{20} = A_0 \ln r + B_0$$

При $n \geq 1$

$$u_n(r, \varphi) = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n + (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) r^{-n}.$$

Общее решение имеет вид

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n + \\ + (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) r^{-n}$$

Можно записать иначе

$$u(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + \\ + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi \tag{1}$$

По сути -- одно и то же. Смысл в том, что раскрыв скобки мы получим и в том, и в другом линейную комбинацию произведений независимых реше-

ний Φ и R . Одна и другая форма записи связаны только со способом группировки слагаемых.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце.

$$\Delta u = 0, \quad R_1 < r < R_2$$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} u|_{r=R_1} = u_1(\varphi) \\ u|_{r=R_2} = u_2(\varphi) \end{array} \right\} \text{—кольцо}$$

Для кольца:

$$u|_{r=R_1} = B_0 \ln R_1 + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_1^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) +$$

$$+ R_1^{-n} (C_1 \cos n\varphi + D_1 \sin n\varphi) = u_1(\varphi)$$

$$u|_{r=R_2} = B_0 \ln R_2 + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_2^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) +$$

$$+ R_2^{-n} (C_2 \cos n\varphi + D_2 \sin n\varphi) = u_2(\varphi)$$

Если вспомнить разложение функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ в ряд Фурье

$$f(\varphi) = u_1(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} f_0^{(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^{(c)} \cos n\varphi + f_n^{(s)} \sin n\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

то для нахождения коэффициентов используются известные формулы

$$f_n^{(c)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi$$

$$f_n^{(s)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi$$

Аналогично и на другой границе

$$g(\varphi) = u_2(\varphi) = \frac{1}{2} g_0^{(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n^{(c)} \cos n\varphi + g_n^{(s)} \sin n\varphi)$$

Коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n находим из систем, причем при этом удобнее использовать решение в форме (1)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}f_0^{(c)} = B_0 \ln R_1 + A_0 \\ \frac{1}{2}g_0^{(c)} = B_0 \ln R_2 + A_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_n^{(c)} = R_1^n A_n + R_1^{-n} C_n \\ g_n^{(c)} = R_2^n A_n + R_2^{-n} C_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_n^{(s)} = R_1^n B_n + R_1^{-n} D_n \\ g_n^{(s)} = R_2^n B_n + R_2^{-n} D_n \end{cases}$$

Найдя коэффициенты записываем решение в виде (1) с найденными конкретными коэффициентами.

В общем случае получаем решение в виде ряда (1)

$$u(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi +$$

$$+ (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi$$

Для круга:

$$\Delta u = 0, \quad r < R_2$$

$$u|_{r=R_2} = u_0(\varphi)$$

Решение для круга можно получить из решения для кольца, устремив меньший радиус кольца к нулю и учитывая, что решение должно быть ограничено.

При $R_1 \rightarrow 0$ в общем решении для кольца имеются слагаемые, стремящиеся к бесконечности. В силу ограниченности решения эти слагаемые должны исчезнуть.

А возможно это только в случае, если этих слагаемых в решении просто не будет, то есть

$$B_0 = C_n = D_n = 0.$$

Тогда общее решение уравнения Лапласа для круга примет следующий вид:

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$$u|_{r=R_2} = u_0 = f(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_2^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} f_0^{(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n^{(c)} \cos n\varphi + f_n^{(s)} \sin n\varphi) \Rightarrow$$

$$A_0 = \frac{1}{2} f_0^{(c)}, \quad B_n = \frac{1}{R_2^n} f_n^{(s)}, \quad A_n = \frac{1}{R_2^n} f_n^{(c)}$$

Внешность круга.

$$\Delta u = 0, \quad r > R_1$$

$$u|_{r=R_1} = u_0(\varphi).$$

Аналогично решению для круга решение для внешности круга получим устремляя больший радиус кольца к бесконечности.

Соответственно при $R_2 \rightarrow \infty$ в общем решении для кольца будут слагаемые стремящиеся к бесконечности. В силу ограниченности решения они должны исчезнуть. Это произойдет, если этих слагаемых не будет. То есть

$$B_0 = A_n = B_n = 0$$

и решение для внешности круга будет выглядеть следующим образом

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$$

Соответственно

$$\begin{aligned} u|_{r=R_1} = u_0 &= f(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_1^{-n} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) = \\ &= \frac{1}{2} f_0^{(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n^{(c)} \cos n\varphi + f_n^{(s)} \sin n\varphi \right) \\ A_0 &= \frac{1}{2} f_0^{(c)}, \quad C_n = R_1^n f_n^{(c)}, \quad D_n = R_1^n f_n^{(s)} \end{aligned}$$

Пример решения задачи

$$\Delta u = r \sin 2\varphi, \quad 2 < r < 3$$

$$u|_{r=2} = \sin 3\varphi$$

$$u|_{r=3} = \cos \varphi$$

Найдем частное решение уравнения Пуассона.

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = r \sin 2\varphi$$

Из структуры оператора Лапласа в полярных координатах следует, что это решение можно искать в виде

$$u_r = \omega = Ar^\alpha \sin 2\varphi.$$

Подставив это выражение в уравнение Пуассона получим

$$A\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} \sin 2\varphi + A\alpha r^{\alpha-2} \sin 2\varphi - 4Ar^{\alpha-2} \sin 2\varphi = r \sin 2\varphi$$

далее, сократив на $\sin 2\varphi$ получим

$$\cdot Ar^{\alpha-2}(\alpha^2 - 4) = r.$$

Откуда $r^{\alpha-2} = r$

$$\alpha - 2 = 1$$

$$\alpha = 3.$$

Таким образом $A(\alpha^2 - 4) = A(3^2 - 4) = 1$ и $A = \frac{1}{5}$.

Значит $\omega = \frac{1}{5}r^3 \sin 2\varphi$.

Далее ищем решение исходной задачи в виде

$$u = v + \omega.$$

Функция v является решением следующей задачи

$$\Delta v = 0, \quad 2 < r < 3$$

$$v|_{r=2} = \sin 3\varphi - \omega|_{r=2} = \sin 3\varphi - \frac{1}{5}2^3 \sin 2\varphi$$

$$v|_{r=3} = \cos \varphi - \omega|_{r=3} = \cos \varphi - \frac{1}{5}3^3 \sin 2\varphi$$

Общее решение уравнения Лапласа для кольца уже получено

$$v(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi + \\ + (B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi$$

Остается найти коэффициенты. Они найдутся из следующих систем

$$\begin{cases} B_2 2^2 + D_2 2^{-2} = -\frac{2^3}{5} \\ B_2 3^2 + D_2 3^{-2} = -\frac{3^3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_3 2^3 + D_3 2^{-3} = 1 \\ B_3 3^3 + D_3 3^{-3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 2 + C_1 2^{-1} = 0 \\ A_1 3 + C_1 3^{-1} = 1 \end{cases}$$

Все остальные коэффициенты равны нулю.

Решение исходной задачи

$$u = u(r, \varphi) = (A_1 r + C_1 r^{-1}) \cos \varphi +$$

$$+ (B_2 r^2 + D_2 r^{-2}) \sin 2\varphi + (B_3 r^3 + D_3 r^{-3}) \sin 3\varphi + \frac{1}{5} r^3 \sin 2\varphi$$

5.

Уравнение Лапласа в шаровом слое для случая радиальной симметрии.

Уравнением Лапласа называется уравнение

$$\Delta u = 0,$$

$$u = u(r); \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

a) $u _{r=R_1} = A$	б) $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} _{r=R_1} = A$	в) $u _{r=R_1} = A$	г) $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} _{r=R_1} = A$
$u _{r=R_2} = B$	$u _{r=R_2} = B$	$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} _{r=R_2} = B$	$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} _{r=R_2} = B$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = 0$$

$$v = u_r$$

$$v_r + \frac{2}{r} v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2}{r} dr$$

$$\ln|v| = -2 \ln|r| + C_1$$

$$v = \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow u = \frac{C_1}{r} + C_2$$

Отсюда видно, что выполнение условия (г) невозможно.

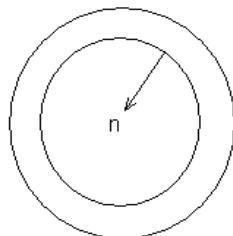
Примеры:

$$\text{а) } \begin{cases} u|_{r=1} = 2 \\ u|_{r=2} = 3 \end{cases} \quad u = \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ \frac{C_1}{2} + C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow u = -\frac{2}{r} + 4$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}|_{r=1} = 2 \\ u|_{r=2} = 3 \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = -\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2}$$

$$\begin{cases} \frac{C_1}{1} = 2 \\ \frac{C_1}{2} + C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow u = \frac{2}{r} + 2$$



$$\text{b)} \quad u\Big|_{r=1} = 2 \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{r=2} = 3 \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{C_1}{r^2}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ \frac{-C_1}{4} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -12 \\ C_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow u = -\frac{12}{r} + 14$$

