

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Естественнонаучный институт

Кафедра физика

Утверждено на заседании кафедры  
«Физики»

« 31 » 08 2020 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой



Р.Н.Ростовцев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)  
«ФИЗИКА»**

**основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки

**15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение  
машиностроительных производств**

с направленностью

**Технология машиностроения**


Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 150305-02-21

Тула 2021 г.

## Разработчик(и) методических указаний

Шуваева Ольга Вячеславовна, доцент, к.т.н.  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

  
(подпись)

\_\_\_\_\_  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	стр.4
Семестр 2	
Работа №1. Исследование косого удара о наклонную плоскость.....	5
Работа №2. Упругий удар шаров.....	7
Работа №3а. Определение скорости пули с помощью баллистического маятника.....	9
Работа №3б. Измерение скорости пули с помощью физического маятника.....	11
Работа №3в. Измерение скорости пули с помощью вращающейся платформы.....	13
Работа №4. Изучение вращательного движения.....	15
Работа №5. Определение моментов инерции методом колебаний.....	16
Работа №6. Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности методом катающегося шарика.....	19
Работа №6а. Определение момента инерции тел методом крутильных колебаний.....	21
Работа №7. Определение коэффициента трения качения для различных материалов.....	24
Работа №8. Определение силы трения скольжения.....	27
Работа №9. Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника.....	29
Работа №10. Изучение колебаний пружинного маятника.....	31
Работа №13. Определение показателя адиабаты методом Клемана и Дезорма.....	34
Работа №14. Определение коэффициента поверхностного натяжения воды методом отрыва кольца.....	37
Работа №15. Определение коэффициента вязкости жидкости по методу Стокса.....	40
Работа №16. Определение длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха.....	42
Семестр 3	
Работа №21. Исследование электрического поля проводника с током.....	44
Работа №22. Измерение сопротивлений проводников мостовыми схемами.....	46
Работа №23. Релаксационные колебания.....	49
Работа №24. Термоэлектрические явления.....	51
Работа №25. Определение удельного заряда электрона методом магнетрона.....	53
Работа №26. Магнитное поле Земли.....	56
Работа №27. Исследование магнитного поля соленоида.....	58
Работа №28. Определение индуктивности тороида с ферритовым магнитопроводом.....	61
Работа №29. Исследование электрических затухающих колебаний с помощью осциллографа.....	63
Работа №30. Определение характеристик колебательного контура методом резонанса.....	66
Библиографический список.....	69

## ВВЕДЕНИЕ

Рабочие программы предусматривают обязательное выполнение шести лабораторных работ по физике во втором семестре обучения и шести лабораторных работ в третьем семестре обучения. Эти работы выполняются по индивидуальному графику, имеющемуся в каждой лаборатории кафедры физики. Без выполнения шести работ и сдачи оформленного согласно приложенным образцам отчета по проделанным измерениям и полученным результатам студент не допускается к экзамену по физике.

Каждый сданный отчет по одной работе оценивается в 2 балла текущей аттестации. Студент имеет право ответить на вопросы и тесты, обосновывающие теорию и методику выполняемой работы. Успешная сдача такого теоретического минимума по каждой работе оценивается также в 2 балла текущей аттестации.

Далее приведены теоретические обоснования всех лабораторных работ, выполняемых в лабораторном практикуме кафедры физики ТулГУ по различным темам курса физики, изучаемым согласно рабочим программам. Изложены минимальные сведения, необходимые для защиты выполненных лабораторных работ и успешного ответа на контрольные вопросы. В каждой работе указан порядок выполнения экспериментальных измерений, их обработки и оформления отчетов. Эти сведения можно также найти на сайте кафедры физики: (<http://physics.tsu.tula.ru/>).

## Работа №1. Исследование косого удара о наклонную плоскость

**Цель работы:** исследовать траекторию движения шара после удара о плоскость; определить коэффициент восстановления скорости шара.

### Теоретическое описание

Лабораторная установка изображена на рис. 1. Двумя держателями “Д” закрепляют стальную наклонную плоскость и бункер “С”, куда помещают маленький стальной шарик  $m$ . Угол  $\alpha$  наклона плоскости к горизонту определяют, измерив расстояния  $h_1$  и  $h_2$  от плоскости до опоры в двух точках и расстояние  $l$  между этими точками. Тогда  $\sin \alpha = (h_2 - h_1)/l$  (рис.1).

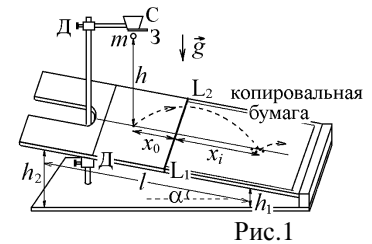


Рис.1

На стальную плоскость кладут полоску чистой бумаги, на которой отмечена линия  $L_1L_2$ , и закрепляют бумагу скобой. Положение этой линии отмечают риску в точке  $L_1$  на стальной поверхности. Сверху помещают листок копировальной бумаги **слева** от этой линии. Если открыть заслонку “З”, то, падая с высоты  $h$  из жёстко закреплённого бункера, шарик будет падать на копировальную бумагу практически в одну точку, расстояние  $x_0$  от которой до линии  $L_1L_2$  измеряют по полуценной на бумаге отметке.

В работе исследуется удар стального шарика о стальную поверхность. Поэтому бумажную полоску перегибают по линии  $L_1L_2$  и снова кладут на стальную поверхность **справа**, накрывая листком копировальной бумаги и закрепляя скобой так, чтобы линия  $L_1L_2$  совпала с отмеченной риской  $L_1$ . Теперь шарик будет отскакивать от стали и, как обсуждается ниже, будет попадать на бумагу с разбросом, создавая отметки на разных расстояниях  $x_i$  от линии  $L_1L_2$  (рис.2.1). По этим отметкам можно найти среднее расстояние  $x = x_0 + \langle x_i \rangle$  между двумя точками попадания шарика на наклонную плоскость.

Удар называется абсолютно упругим, если после удара механическая энергия сталкивающихся тел не изменяется. В данном случае при абсолютно упругом ударе шарик должен отскочить от плоскости с той же по величине скоростью, с которой он падал на неё. Напомним, что полная механическая энергия, состоящая из кинетической и потенциальной энергии, сохраняется,  $E_{\text{мех}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \text{const}$ , если все действующие в системе силы консервативны, т.е. их работа, равная изменению кинетической энергии, равна убыли потенциальной энергии системы:  $A_{\text{конс}} = \int \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} = -\Delta E_{\text{пот}} = \Delta E_{\text{кин}}$ . Такой силой является сила упругости. Кинетическая энергия сталкивающихся тел переходит в потенциальную энергию упругого взаимодействия и наоборот.

При абсолютно неупругом ударе сталкивающиеся тела слипаются и движутся как одно целое. При этом часть механической энергии превращается в тепло или в энергию неупругих деформаций. Изменение механической энергии равно работе неконсервативных сил, действующих в системе:  $\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{неконс}}$ . Примером неконсервативной силы будет сила трения.

В реальных столкновениях слипания тел не происходит, но суммарная механическая энергия соударяющихся тел уменьшается. Эту потерю характеризуют коэффициентом восстановления скорости. Пусть сталкиваются два тела, летевшие со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . Линия, перпендикулярная к общей касательной к поверхностям сталкивающихся тел в точке соприкосновения называется линией удара  $n$  (рис.2). Разность проекций скоростей на эту линию будет относительной скоростью сближения тел  $|\vec{v}_{1n} - \vec{v}_{2n}|$ . Сразу после столкновения скорости разлетающихся тел  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  и относительная скорость их разлёта  $|\vec{u}_{1n} - \vec{u}_{2n}|$  уменьшаются. Коэффициентом восстановления скорости называется величина

$$k_c = |\vec{u}_{1n} - \vec{u}_{2n}| / |\vec{v}_{1n} - \vec{v}_{2n}| < 1.$$

В данной работе одно из тел (стальная плоскость) неподвижно, и коэффициент  $k_c$  определяется как отношение проекций скоростей шарика на нормаль  $n$  к плоскости сразу после соударения (рис.3,в) и до соударения (рис.3,а):  $k_c = |u_n/v_n|$ .

В момент наибольшего сближения шарика с плоскостью его нормальная проекция скорости будет равна нулю (рис.3,б). И шарик, и плоскость деформируются (изменяют свою форму) и возникает нормальная сила реакции (сила упругости  $\vec{F}_{\text{упр}}$ ), которая будет отталкивать шарик от плоскости, сообщая ему новую скорость  $\vec{u}_n$ . При этом деформация происходит и в

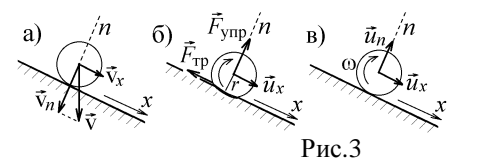


Рис.3

касательном направлении, приводя к появлению силы, которую обычно называют силой трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (рис.3,б). Эта сила не успевает изменить касательную проекцию скорости шарика, так как удар происходит очень быстро, а центр масс шарика может смещаться вдоль плоскости. Но при этом создаётся момент сил трения  $\vec{M}_{\text{тр}} = [\vec{r}, \vec{F}_{\text{тр}}]$ , который раскручивает шарик, сообщая ему угловую скорость  $\omega$ . После 2-3 ударов шарик перестаёт отскакивать и начинает катиться по наклонной плоскости, а касательная проекция скорости шарика после удара практически не изменяется:  $u_x = v_x$ .

Для расчета выберем оси координат, в которых ось  $x$  направлена вдоль наклонной плоскости, под углом  $\alpha$  к горизонту, а ось  $y$  – по нормали к плоскости (рис.4). При падении с высоты  $h$  потенци-

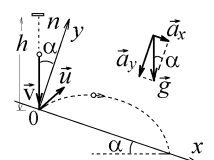


Рис.4

альная энергия шарика превращается в кинетическую:  $mgh = mv^2/2$ , т.е. шарик подлетает к плоскости со скоростью

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

После отскока проекция его скорости на ось  $x$  не меняется,  $u_x = v_x = v \sin \alpha$ , а проекция  $u_y = u_n = k_c v_n = k_c v \cos \alpha$  будет меньше величины  $v_n$ , поскольку часть механической энергии шарика превратилась в тепловую энергию и энергию неупругой деформации тел.

В выбранных осях шарик движется с постоянным ускорением, имеющим проекции  $a_x = g \sin \alpha$  и  $a_y = -g \cos \alpha$  ( $g$  – ускорение свободного падения). В момент повторного падения шарика на плоскость уравнения кинематики имеют вид:

$$x = u_x t + a_x t^2/2 = v \sin \alpha \cdot t + g \sin \alpha \cdot t^2/2, \quad (2)$$

$$y = 0 = u_y t + a_y t^2/2 = k_c v \cos \alpha \cdot t - g \cos \alpha \cdot t^2/2. \quad (3)$$

Из уравнения (3) получим  $t = 2k_c v/g$  и, подставляя в (2), находим  $x = 2v^2 \sin \alpha (k_c^2 + k_c)/g$ . С учетом (1) приходим к

$$\text{уравнению } k_c^2 + k_c - \frac{x}{4h \sin \alpha} = 0, \text{ имеющему решение } k_c = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{x}{h \sin \alpha}} - 1 \right). \quad (4)$$

Опыты показывают, что при соударении тел из стали  $k_c \approx 0,55$ .

#### Порядок выполнения работы

1. Перемещением муфты А установить произвольный наклон плоскости (примерно 10-15°). Измерить высоты  $h_1$  и  $h_2$ , длину наклонной плоскости  $l$  между линиями  $L_1$  и  $L_2$  (см.рис.1) и определить величину  $\sin \alpha = (h_2 - h_1)/l$ .

*Примечание.* Можно произвольно изменять длину наклонной плоскости  $l$ , изменяя при этом другие высоты  $h_1$  и  $h_2$ .

2. Перемещением муфты В установить произвольную высоту  $h$  (17–20 см) бункера С над наклонной плоскостью. Отцентрировать установку бункера так, чтобы шарик после отскока ударился еще один раз о наклонную плоскость в направлении ее продольной оси.

3. Положить на наклонную плоскость узкую полоску бумаги краем вдоль черты  $L_1$ , накрыть сверху копировальной бумагой и закрепить оба листа скобой. При проведении эксперимента скобу не трогать.

4. Поместить шарик в бункер С в слегка открытое отверстие (это позволит более точно фиксировать начальное положение шарика). Затем медленно открыть заслонку, дав шарiku провалиться. Ударившись о плоскость, шарик отскочит и оставит след на бумаге.

5. Обозначить точку удара на бумаге точкой 1. Отогнуть от линии  $L_1$  и полоску бумаги и копировальную бумагу таким образом, чтобы повторное падение шарика из бункера пришлось на металлическую поверхность; отскочив от нее, шарик второй раз ударится о поверхность и оставит след на бумаге. Эту точку обозначить цифрой 1'.

6. Повторить опыт при отогнутой бумаге 9 раз, отмечая следы от повторных ударов соответственно 1', 2', ..., 9'.

7. Снять листы с плоскости, определить расстояния  $x_i$  между точками 1-1', 1-2', 1-3', ..., 1-9' и занести в табл.1.

8. Вычислить среднее значение  $\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9}{9}$ .

9. Определить случайные отклонения  $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$  каждого измерения расстояния, среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta x_i)^2}$ . Вычислить погрешность  $\Delta x$  результата измерений:  $\Delta x = \frac{S}{\sqrt{n}}$  ( $n$  – количество точек).

Таблица 1

$x_i$ , мм	$\Delta x_i$ , мм	$(\Delta x_i)^2$ , мм <sup>2</sup>

10. Вычислить среднее значение коэффициента восстановления скорости по формуле (4)  $\langle k_c \rangle = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\langle x \rangle}{h \sin \alpha}} - 1 \right)$ . Принимаем

радиус шарика  $r \ll h$ .

11. Вычислить абсолютную  $\Delta k$  и относительную  $E$  погрешности:  $\Delta k_c = \frac{\Delta x}{4(2\langle k_c \rangle + 1)h \sin \alpha}$ ;  $E = \frac{\Delta k_c}{\langle k_c \rangle} 100\%$ . (5)

12. Результаты измерений и расчетов записать в табл.1 и 2.

Таблица 2

$l$ , мм	$h$ , мм	$h_1$ , мм	$h_2$ , мм	$\sin \alpha$	$\langle x \rangle$ , мм	$S$ , мм	$\Delta x$ , мм	$\langle k_c \rangle$	$\Delta k_c$	$E$ , %

13. Записать результат в виде:  $k_c = \langle k_c \rangle \pm \Delta k_c = \dots \pm \dots$

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 1

1. Что называется коэффициентом восстановления скорости?

2. Опишите методику определения этого коэффициента в данной работе. Зачем надо фиксировать линию  $L_1 L_2$  на установке?

3. Какое соударение называется абсолютно упругим, а какое - абсолютно неупругим? Наблюдаются ли эти соударения в данной работе?
4. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии. Когда этот закон выполняется, а когда нарушается в данной работе?
5. Опишите этапы соударения шарика со стальной плоскостью на рис.3. Почему нормальная проекция скорости шарика при ударе меняет свою величину, а касательная проекция его скорости практически не меняется?
6. Во что превращается часть механической энергии соударяющихся тел? Как определить эту часть при нормальном падении шарика на плоскость, если известен коэффициент восстановления скорости  $k_c$ ?
7. С помощью рис.4 и уравнений кинематики сделайте все этапы получения расчётной формулы (4).

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - гл. III, §19, 24, 25, 27
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл. I §8, гл. 3 §3,6, гл. 6 §4.

## Работа №2. Упругий удар шаров

**Цель работы:** ознакомиться с явлением удара на примере соударения шаров, рассчитать коэффициент восстановления энергии, проверить выполнение закона сохранения импульса.

### Теоретическое описание

В работе исследуется соударение двух небольших металлических шаров, подвешенных на невесомых нитях длины  $l$ . В положении равновесия шары находятся в нижней точке и касаются друг друга. Их положения  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  определяются по круговой шкале, на которой деления нанесены в градусах. Один из шаров отводят на угол  $\Delta\alpha$ . Тогда  $\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha_1$  - новое положение шара, отмечаемое по шкале. При этом, как видно из рис.5, он поднимается на высоту

$$h = l(1 - \cos \Delta\alpha_1) = l \cdot 2 \sin^2 (\Delta\alpha_1/2). \quad (6)$$

После того, как поднятый шар будет отпущен, он движется вниз и соударяется со вторым шаром, висющим неподвижно. Скорость  $v$  налетающего шара в момент удара можно определить из закона сохранения механической энергии (потенциальная энергия переходит в кинетическую):  $mgh = mv^2/2$ , откуда

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (7)$$

Дальнейшее движение шаров после удара можно определить с помощью законов сохранения. Закон сохранения импульса всегда выполнен в замкнутой (или изолированной) системе, на которую не действуют внешние силы или действием таких сил можно пренебречь. Это следует из уравнения движения (2-го закона Ньютона), записанного в виде

$\frac{d\vec{p}_{\text{системы}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ , откуда импульс  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ . В нашем случае силы тяжести  $m\vec{g}$  и натяжения нити  $\vec{N}$  уравновешены только в нижней точке, в которой происходит удар.

Но закон сохранения импульса часто можно применить и в незамкнутой системе, в которой  $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$ , но взаимодействие происходит очень быстро, за время  $\Delta t \rightarrow 0$  (удар, взрыв). Тогда изменение импульса  $\Delta \vec{p}_{\text{системы}} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \Delta t \rightarrow 0$  пренебрежимо мало и можно считать, что  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ . В нашем случае выполнены оба этих условия.

Сразу после центрального удара шары движутся со скоростями  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ , направленными вдоль горизонтальной линии удара (рис.2), проходящей через центры масс шаров. Эти скорости направлены в одну сторону, если масса налетающего шара  $m_1$  больше массы  $m_2$  шара, висевшего неподвижно. Если  $m_1 < m_2$ , то шары разлетаются в разные стороны, как показано на рис. 6. В таком случае, когда меньший шар налетает со скоростью  $v$  на неподвижный большой шар, закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось имеет вид

$$m_1 v = -m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (8)$$

После удара нити подвеса разлетающихся шаров  $m_1$  и  $m_2$  отклонятся на максимальные углы  $\Delta\alpha_2$  и  $\Delta\beta_2$ , а шары поднимутся на высоту  $h_1$  и  $h_2$  соответственно (рис. 6). Связь скорости  $v$ , с которой шар  $m_1$  подлетает к точке удара, с углом  $\Delta\alpha_1$  первоначального отклонения нити его подвеса (рис5) следует из соотношений (6) и (7):

$$v = 2\sqrt{gl} \sin(\Delta\alpha_1/2). \quad (9)$$

Аналогичными соотношениями связаны углы  $\Delta\alpha_2$  и  $\Delta\beta_2$  со скоростями разлёта шаров на рис. 6:

$$u_1 = 2\sqrt{gl} \sin(\Delta\alpha_2/2), \quad u_2 = 2\sqrt{gl} \sin(\Delta\beta_2/2). \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим соотношение

$$m_1 \sin(\Delta\alpha_1/2) = -m_1 \sin(\Delta\alpha_2/2) + m_2 \sin(\Delta\beta_2/2), \quad (11)$$

позволяющее экспериментально проверить выполнение закона сохранения импульса при ударе шаров по измеренным углам отклонения их нитей подвеса.

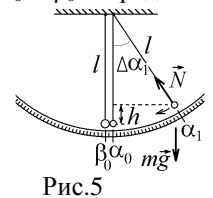


Рис.5

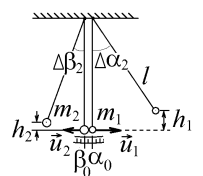


Рис.6

Закон сохранения полной механической энергии будет выполняться в том случае, когда все действующие в системе силы консервативны. В этом случае происходит абсолютно упругий удар: шары при столкновении упруго сжимаются и часть их кинетической энергии превращается в потенциальную энергию упругой деформации. В момент наибольшего сближения (деформации) шары движутся с одной скоростью, а потом начинают разлетаться, восстанавливая свою форму. Потенциальная энергия упругой деформации превращается в кинетическую энергию шаров, разлетающихся со скоростями  $u_1$  и  $u_2$ . В таком случае для проводимого эксперимента закон сохранения механической энергии можно записать в виде  $\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$  и решать его совместно с законом сохранения импульса (8).

При абсолютно неупругом ударе шары слипаются и движутся далее с одной скоростью  $u$ . Часть механической энергии затрачивается на работу диссипативных сил внутреннего трения, которая превращается в энергию остаточной деформации и выделяется в результате в виде тепла  $Q$ . Законы сохранения импульса и энергии в этом случае примут вид

$$m_1 v = (m_1 + m_2) u \quad \text{и} \quad \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + Q.$$

В случае реального центрального соударения металлических шаров, исследуемого в работе, шары не слипаются, но действующие диссипативные силы внутреннего трения уменьшают механическую энергию системы. Это уменьшение характеризуют величиной коэффициента восстановления кинетической энергии  $k_3$  – отношения кинетической энергии шаров после удара к их энергии до удара. С учетом (9) и (10) величину этого коэффициента можно вычислить по формуле

$$k_3 = \frac{m_1 u_1^2 / 2 + m_2 u_2^2 / 2}{m_1 v^2 / 2} = \frac{m_1 \sin^2(\Delta\alpha_2/2) + m_2 \sin^2(\Delta\beta_2/2)}{m_1 \sin^2(\Delta\alpha_1/2)}. \quad (12)$$

Предоставив шарам раскачиваться и совершать удары, можно убедиться, что постепенно скорости и амплитуды движения шаров будут затухать, и со временем шары неподвижно повиснут в положении равновесия. Вся кинетическая энергия будет израсходована на работу диссипативных сил.

#### Порядок выполнения работы

1. Записать начальные положения  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ , соответствующие точкам пересечения нитей бифилярных подвесов с линией деления шкалы, когда шары неподвижны. Здесь и в дальнейшем обозначение " $\alpha$ " относится к шару А с меньшей массой  $m_1$ , а " $\beta$ " – к шару В с меньшей массой  $m_2$ .

2. Отклонить шар А на угол  $\alpha_1$  от  $10^\circ$  до  $15^\circ$  и отпустить без начальной скорости. Произвести отсчет первого отброса обоих шаров  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  (так как сразу практически невозможно взять два отсчета, то поступают так: сначала берут отсчет для одного шара, затем производят повторный удар из того же положения шара А и берут отсчет для второго шара). Удар из данного положения производят не менее 10 раз, чтобы для каждого шара получить не менее пяти значений отбросов нитей после удара ( $\alpha_2$  и  $\beta_2$ ). Найти среднее  $\langle\alpha_2\rangle$  и  $\langle\beta_2\rangle$ .

3. Опыт проделать для двух других значений  $\alpha_1$ . (от  $20^\circ$  до  $25^\circ$ , от  $30^\circ$  до  $35^\circ$ ). Заполнить таблицу 1.

4. Проверить закон сохранения импульса (8). Для этого определить начальные и конечные отклонения шаров  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ ,  $\Delta\alpha_2 = \langle\alpha_2\rangle - \alpha_0$  и  $\Delta\beta_2 = \langle\beta_2\rangle - \beta_0$  (рис.6) и рассчитать величины левой и правой части уравнения (11):

$\xi_1 = m_1 \sin(\Delta\alpha_1/2)$  и  $\xi_2 = -m_1 \sin(\Delta\alpha_2/2) + m_2 \sin(\Delta\beta_2/2)$ . Результаты занести в таблицу 2, и по формуле  $\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1} \cdot 100\%$

рассчитать на сколько процентов отличаются величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

5. Вычислить коэффициент восстановления энергии  $k_3$  по формуле (12).

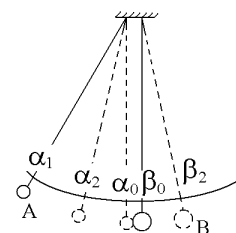


Таблица 1.

$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$				$\langle\alpha_2\rangle, ^\circ$	$\beta_2, ^\circ$				$\langle\beta_2\rangle, ^\circ$

$\alpha_0, ^\circ = \dots$

$\beta_0, ^\circ = \dots$

Таблица 2.

$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0, ^\circ$	$\Delta\alpha_2 = \langle\alpha_2\rangle - \alpha_0, ^\circ$	$\Delta\beta_2 = \langle\beta_2\rangle - \beta_0, ^\circ$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1} \cdot 100\%$	$k_3$

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 2

1. Сформулируйте закон сохранения импульса системы и условия его выполнения.
2. Какая система называется замкнутой, и будет ли замкнутой система соударяющихся шаров?
3. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии системы и условия его выполнения.



4. Какая величина называется коэффициентом восстановления энергии и может ли она быть большей или равной единице?
5. По какой причине сохраняется импульс шаров после удара, хотя их механическая энергия уменьшается? Верно ли это утверждение?
6. Какой удар называется абсолютно упругим и абсолютно неупругим? Каким ударом будет соударение шаров в проводимом эксперименте?

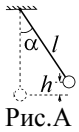


Рис.А

7. Получите связь между углом отклонения нити подвеса и высотой подъема шара  $h$  (рис.А).
8. Шар с массой  $m_1$  поднимают на высоту  $h = 9$  см и отпускают без начальной скорости. Он испытывает центральное соударение с шаром массы  $m_2$ , висевшим неподвижно на нити той же длины (рис.Б). Запишите выражения закона сохранения энергии и закона сохранения импульса в случае абсолютно упругого удара. Определите с помощью этих соотношений максимальную высоту подъема шаров  $m_2$  и  $m_1$  после удара в случае, когда  $m_2 = m_1$  и в случае, когда  $m_2 = m_1/2$ .

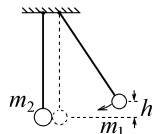


Рис.Б

9. При условиях, изображенных на рис.2 происходит абсолютно неупругое соударение шаров. Определите величину коэффициента восстановления кинетической энергии в случаях  $m_2 = m_1$  и  $m_2 = 2m_1$ .
10. Сделайте вывод соотношений (11) и (12). Объясните, каким образом в данной работе проверяется выполнение закона сохранения импульса.

### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1970.- §§23, 27-30.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §3,6; гл.5 §1,5; гл.6 §1,2.

## Работа №3а. Определение скорости пули с помощью баллистического маятника

**Цель работы:** использовать законы сохранения импульса и механической энергии для измерения скорости пули баллистическим методом.

### Теоретическое описание

Баллистический маятник представляет из себя тяжёлый пустотелый цилиндр, заполненный пластилином и подвешенный на нитях. Подобные устройства используются в баллистике для определения скорости быстро летящих предметов (снарядов, пуль), застревающих в маятнике, но при этом в момент удара не возникает сил, препятствующих его движению. По углу отклонения баллистического маятника с застрявшей в нём пулей определяют скорость пули до удара.

Летающая горизонтально со скоростью  $v$  пуля массы  $m_1$  застревает в пластине, заполняющей неподвижно висевший цилиндр маятника массы  $m_2$ . Это **абсолютно неупругий удар**, после которого маятник с застрявшей в нём пулей начинает двигаться со скоростью  $u$  (рис.7).

При таком ударе механическая энергия системы пуля-маятник не сохраняется. Закон сохранения полной механической энергии выполняется, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы, которую можно найти из соотношения

$$A_{\text{тр}} = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_2 + m_1) u^2}{2}$$
 (разность кинетических энергий тел до и после удара). Большая часть этой работы идёт на нагревание тел.

Закон сохранения импульса справедлив в замкнутой (или изолированной) системе, на которую не действуют внешние силы или действием таких сил можно пренебречь. Это следует из уравнения 2-го закона Ньютона, записанного

в виде  $\frac{d\vec{p}_{\text{системы}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ , откуда импульс  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ . Но закон сохранения импульса часто можно применить

и в незамкнутой системе, в которой  $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$ , но взаимодействие происходит очень быстро, за время  $\Delta t \rightarrow 0$  (удар, взрыв). Тогда изменение импульса  $\Delta \vec{p}_{\text{системы}} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \Delta t \rightarrow 0$  пренебрежимо мало, и можно считать, что  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ .

В данной работе, строго говоря, удар происходит не мгновенно. Пуля некоторое время  $\tau$  продолжает движение в пластине, а маятник за это время отклоняется от положения равновесия, так что внешние силы тяжести и натяжения нитей не уравновешены. Однако время  $\tau \ll T$ , где  $T$  – период колебаний маятника, равный  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , так как баллистический маятник на двух невесомых нитях движется после удара поступательно (все его точки движутся с одинаковыми скоростями по одинаковым траекториям). Такой маятник является не физическим, а математическим. За малое время  $\tau$  импульс не успевает измениться и закон его сохранения при ударе можно записать в виде

$$m_1 v = (m_2 + m_1) u. \quad (13)$$

Для математического маятника не надо учитывать кинетическую энергию вращательного движения вокруг оси подвеса. Центр масс маятника поднимается на высоту  $h$ , и кинетическая энергия поступательного движения переходит в потенциальную энергию консервативной силы тяжести:  $(m_2 + m_1) u^2 / 2 = (m_2 + m_1) gh$ , откуда

$$u = \sqrt{2gh}. \quad (14)$$

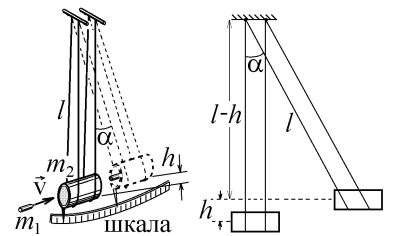


Рис.7

Высоту подъёма определяют по углу  $\alpha$  отклонения нитей подвеса, измеряемому по круговой шкале (рис.7). Масса баллистического маятника намного больше массы пули, поэтому маятник отклоняется на малый угол, для которого  $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$  (угол измеряется в радианах). Если расстояние от оси подвеса до центра маятника равно  $l$ , то

$$h = l(1 - \cos \alpha) = l \cdot 2 \sin^2(\alpha/2) \approx l\alpha^2/2. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и (13), находим скорость пули до удара:

$$v = \frac{m_2 + m_1}{m_1} 2\sqrt{gl} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{m_2 + m_1}{m_1} \alpha \sqrt{gl}. \quad (16)$$

#### Порядок выполнения работы

1. В таблицу 1 занести значения массы пули  $m_1$ , массы маятника  $m_2$ , длины нити  $l$  и их погрешности (величины  $m_1$  и  $m_2$  в граммах указаны на пуле и цилиндре). Записать в таблицу значения погрешностей измерения этих величин.

Погрешность длины нити  $l$  определяется, как половина цены деления линейки, с помощью которой измерена длина. Погрешность масс  $m_1$  и  $m_2$  определяется, как половина единицы последнего разряда числа, указанного на пуле и цилиндре. Например  $m_1 = 30,3$  г. Последний разряд это десятые. Тогда  $\Delta m_1 = \frac{0,1}{2} = 0,05$  г.

Таблица 1.

$m_1$ , кг	$\Delta m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$\Delta m_2$ , кг	$l$ , м	$\Delta l$ , м

2. Вставить пулю в ствол пружинного пистолета.

3. Нажимая на спуск, произвести выстрел и отсчитать по шкале угол  $\alpha$  отклонения маятника от вертикального положения (см. рис.7).

4. Значение угла отклонения записать в таблицу 2.

Таблица 2.

$\alpha_i^\circ$									
$\Delta \alpha_i^\circ$									
$(\Delta \alpha_i^\circ)^2$									
$\langle \alpha \rangle^\circ = \dots\dots\dots$		$S = \dots\dots\dots$			$\Delta \alpha^\circ = \dots\dots\dots$				

5. Измерения провести не менее  $n = 9$  раз. Вычислить среднее значение угла отклонения  $\langle \alpha \rangle^\circ = \sum_{i=1}^n \alpha_i^\circ / n$ ; случайные отклонения каждого измерения  $\Delta \alpha_i^\circ = \alpha_i^\circ - \langle \alpha \rangle^\circ$ ; среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta \alpha_i^\circ)^2}$ , где  $n$  – число измерений; погрешность результата измерений  $\Delta \alpha^\circ = S / \sqrt{n}$ . Результаты занести в таблицу 2.

6. По формуле (16)  $\langle v \rangle = \frac{m_1 + m_2}{m_1} 2\sqrt{gl} \sin\left(\frac{\langle \alpha \rangle}{2}\right)$  определить среднее значение скорости пули.

7. Относительную и абсолютную погрешности результата рассчитать по формулам

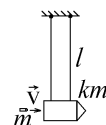
$$E = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1 + \Delta m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \alpha^\circ}{\langle \alpha \rangle^\circ}\right)^2}, \quad \Delta v = E < v > \text{ и записать в таблицу 3.}$$

Таблица 3.

$< v >$ , м/с	$\Delta v$ , м/с	$E$ , %

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 3а

1. При каких условиях выполняются законы сохранения импульса и полной механической энергии системы? Почему при столкновении пули с баллистическим маятником можно использовать закон сохранения импульса и нельзя использовать закон сохранения механической энергии системы “пуля-маятник”?
2. Какая система называется замкнутой и будет ли замкнутой система “пуля-маятник”?
3. Какие силы называются консервативными и диссипативными?
4. Что происходит с кинетической энергией системы “пуля-маятник” в момент удара? Какой это удар? При каком ударе она будет сохраняться?
5. Будет ли сохраняться импульс и механическая энергия системы “пуля-маятник” при её движении после удара?
6. Чем баллистический маятник отличается от физического? Каким выражением определяется период его колебания и почему?
7. Пуля с массой  $m$ , летевшая со скоростью  $v$ , врезается в баллистический маятник с массой  $m' = km$ , висевший неподвижно (см. рисунок). Во сколько раз изменится механическая энергия этой системы после удара, и на какую высоту поднимется центр масс маятника с застрявшей в нём пулей?
8. Сделайте и объясните вывод расчетной формулы (16) для скорости пули.



### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§5, 16, 21, 22, 24, 25.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §3,6; гл.5 §1,4,5; гл.6 §1,2.

## Работа №36. Измерение скорости пули с помощью физического маятника

**Цель работы:** использовать законы сохранения импульса и механической энергии для измерения скорости пули с помощью физического маятника.

### Теоретическое описание

В данной работе физический маятник представляет собой пустотелый цилиндр с массой  $m_{\text{ц}}$ , заполненный пластилином и закрепленный на длинном стержне с массой  $m_{\text{с}}$  и длиной  $l$ . Стержень может вращаться на подшипнике с массой  $m_{\text{под}}$  вокруг неподвижной закрепленной горизонтальной оси О (рис.8). Летящая со скоростью  $v$  пуля с массой  $m_{\text{п}}$  застревает в пластине и маятник вместе с застрявшей в нём пулей начинает вращаться вокруг оси О с угловой скоростью  $\omega$ .

В момент удара, длящегося время  $\tau$ , со стороны закреплённой оси на маятник действует большая внешняя сила реакции  $\vec{F}_{\text{реак}}$ , изменяющая импульс системы на величину  $\Delta \vec{p} = \vec{F}_{\text{реак}} \cdot \tau$ . Однако линия действия этой силы, как и линия действия силы тяжести  $(m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + m_{\text{с}}) \vec{g}$ , проходит через

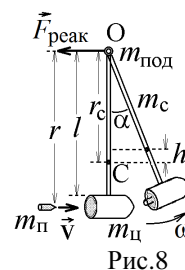


Рис.8

ось О (в момент удара маятник висит неподвижно). Моменты этих сил относительно оси О равны нулю, и можно воспользоваться законом сохранения момента импульса, который справедлив, если сумма моментов внешних сил равна нулю или действием таких моментов сил можно пренебречь. Это следует из основного уравнения динамики вращательного движения, записанного в виде  $d\vec{L}_{\text{системы}}/dt = \sum \vec{M}_{\text{внеш}} = 0$ , откуда момент импульса  $\vec{L}_{\text{системы}} = \text{const}$ .

В данной работе, строго говоря, удар происходит не мгновенно. Пуля некоторое время  $\tau$  продолжает движение в пластине, а маятник за это время отклоняется от положения равновесия, так что центр его масс С слегка отклоняется от вертикали, проходящей через ось подвеса О. Возникает момент силы тяжести, но время удара  $\tau \ll T$ , где  $T$  – период колебаний маятника. За это малое время момент импульса системы пуля-маятник не успевает измениться. До удара он был равен моменту импульса пули  $L_{\text{пули}} = m_{\text{п}} v \cdot r$ , где  $r$  – плечо, т.е. кратчайшее расстояние от линии скорости  $\vec{v}$  до оси О (рис.8). После удара маятник и застрявшая в нем пуля имеют общий момент инерции  $I$ , начинают вращаться с угловой скоростью  $\omega$ , и закон сохранения момента импульса запишется как

$$m_{\text{п}} v \cdot r = I \omega \quad (17)$$

до удара                      после удара

Момент инерции системы пуля-маятник складывается из моментов инерции её частей. Цилиндр вместе с пулей имеет небольшой размер по сравнению с расстоянием  $l$  до оси подвеса, поэтому, их общий момент инерции мало отличается от момента инерции материальной точки с массой  $m_{\text{ц}} + m_{\text{п}}$ , находящейся на расстоянии  $r$  от оси вращения:

$I_{\text{ц}} + I_{\text{п}} = (m_{\text{ц}} + m_{\text{п}}) r^2$ . Подшипник имеет очень малый размер, и его моментом инерции можно пренебречь. Момент инерции стержня относительно оси О, проходящей через его край, равен  $I_{\text{с}} = m_{\text{с}} r^2 / 3$ .

Общий момент инерции системы будет равен

$$I = I_{\text{ц}} + I_{\text{п}} + I_{\text{с}} = \left( m_{\text{ц}} + m_{\text{п}} + \frac{m_{\text{с}}}{3} \right) r^2. \quad (18)$$

После удара пуля движется вместе с маятником. Это абсолютно неупругий удар, при котором механическая энергия системы пуля-маятник не сохраняется. Закон сохранения полной механической энергии выполняется, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы,

которую можно найти из соотношения  $A_{\text{тр}} = \frac{m_{\text{п}} v^2}{2} - \frac{I \omega^2}{2}$  (разность кинетической энергии поступательного движения пули до удара и кинетической энергии вращающегося маятника после удара). Большая часть работы силы трения идёт на нагревание тел.

Возникающий при отклонении маятника от положения равновесия момент сил тяжести  $\vec{M} = [\vec{r}_{\text{с}}, \sum m_i \vec{g}]$  начинает тормозить вращение. Расстояние  $r_{\text{с}}$  от оси подвеса до центра масс С системы пуля-маятник можно найти из определения радиус-вектора центра масс системы материальных тел с массами  $m_i$ , координаты центров масс которых имеют радиусы  $\vec{r}_i$ :

$$\vec{r}_{\text{с}} = \sum m_i \vec{r}_i / \sum m_i. \quad (19)$$

Для системы пуля-маятник с общей массой  $m = m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + m_{\text{с}} + m_{\text{под}}$ , формула (19), как видно из рис.8, даёт

$$r_{\text{с}} = \left( m_{\text{п}} r + m_{\text{ц}} r + m_{\text{с}} \frac{l}{2} \right) / m. \quad (20)$$

Кинетическая энергия вращательного движения переходит в потенциальную энергию силы тяжести, которая определяется по высоте  $h$  подъёма центра масс:

$$I \omega^2 / 2 = m g h. \quad (21)$$

Эту высоту можно определить по углу отклонения маятника от положения равновесия  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ , измеряемому по круговой шкале (рис. 9):

$$h = r_c (1 - \cos \alpha) = r_c \cdot 2 \sin^2 (\alpha/2). \quad (22)$$

Выразив  $\omega$  из уравнения (21) и подставляя в (17), получим с учётом (22) скорость пули до соударения с маятником:

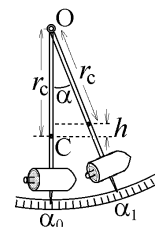
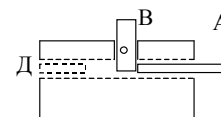
$$v = \frac{I\omega}{m_{\text{п}}r} = \frac{\sqrt{2Igh}}{m_{\text{п}}r} \quad \text{или} \quad v = \frac{2 \sin(\alpha/2)}{m_{\text{п}}r} \sqrt{2Igr_c}. \quad (23)$$


Рис.9

#### Порядок выполнения работы

1. Зарядить пружинную пушку. Для этого оттянуть назад ударный стержень, взявшись за выступ А. Стержень оттягивать до тех пор, пока другой рукой не удастся поставить выступ В в вертикальное положение, в котором он удерживает стержень и пружину в сжатом состоянии. Затем в дуло Д пушки заложить пулю (левый край пули совместить с торцом Д).



2. Записать начальное положение  $\alpha_0$  острия стержня при неподвижном цилиндре (рис.9). Цена наименьшего деления шкалы 10' (угловых минут).

3. Повернуть выступ В на себя (приведя в горизонтальное положение), отсчитать положение острия  $\alpha_1$  при максимальном отклонении маятника (рис.9)

4. Вычислить угол отклонения маятника  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ . Опыт повторить 5 раз (выстрел производить только по неподвижному маятнику). Найти средний угол отклонения  $\langle \alpha \rangle^\circ$  (в угловых градусах).

5. Вычислить массу всей системы "пуля-маятник" по формуле  $m = m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + m_{\text{с}} + m_{\text{под}}$ , где  $m_{\text{п}}$  – масса пули,  $m_{\text{ц}}$  – масса цилиндра,  $m_{\text{с}}$  – масса стержня,  $m_{\text{под}}$  – масса подшипника. На пуле указана величина её массы, остальные массы указаны на установке. Расстояние  $r$  от точки подвеса до центра цилиндра измеряется линейкой.

6. Найти величину момента инерции  $I$  всей системы по формуле (18).

7. Определить положение центра масс С системы "пуля-маятник"  $r_c$  относительно точки подвеса О (см. рис.9) по формуле (20).

8. Среднюю скорость  $\langle v \rangle$  пули перед ударом в маятник рассчитать по формуле (23):  $\langle v \rangle = \frac{2 \sin \langle \alpha \rangle}{m_{\text{п}}r} \sqrt{Imgr_c}$ .

9. Данные всех измерений и вычислений занести в таблицы 1 и 2.

Таблица 1.

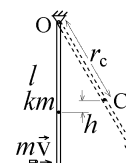
$m_{\text{под}}$ , кг	$m_{\text{с}}$ , кг	$l$ , м	$m_{\text{ц}}$ , кг	$r$ , м	$m_{\text{п}}$ , кг	$\alpha_0^\circ$	$m$ , кг	$I$ , кг·м <sup>2</sup>	$r_c$ , м

Таблица 2.

Номер опыта						$\langle \alpha \rangle^\circ$	$\langle v \rangle$ , м/с
$\alpha_1^\circ$							
$\alpha^\circ = \alpha_1 - \alpha_0$							

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 3б

- Почему в данной работе можно использовать закон сохранения момента импульса и нельзя применить закон сохранения импульса?
- Какая система называется замкнутой и будет ли замкнутой система "пуля-маятник"?
- Дайте определение момента силы и момента импульса. По каким формулам определяются эти величины в данной работе? Почему при движении маятника надо учитывать момент силы тяжести и не надо учитывать момент силы реакции в оси подвеса?
- Какая величина называется моментом инерции? Как вычислить момент инерции системы "пуля-маятник"?
- Сформулируйте законы сохранения момента импульса и полной механической энергии системы. Будет ли сохраняться механическая энергия системы "пуля-маятник" до и после удара, и если нет – то по какой причине?
- Какие силы называются консервативными, а какие диссипативными?
- Что происходит с кинетической энергией системы "пуля-маятник" в момент удара? Какой это удар? При каком ударе она будет сохраняться?
- Будет ли сохраняться момент импульса и механическая энергия системы "пуля-маятник" при её движении после удара?
- Пуля с массой  $m$ , летевшая со скоростью  $v$ , врезается в нижний конец неподвижно висевшего тонкого стержня длины  $l$  с массой  $m' = km$  и застревает в нём (см. рисунок). Найти: а) расстояние  $r_c$  от оси подвеса О до центра масс С стержня с застрявшей пулей; б) высоту  $h$  подъёма центра масс С после удара; в) работу сил трения, совершенную в момент удара; г) во сколько раз изменится механическая энергия этой системы после удара.
- Сделайте и объясните вывод расчетной формулы (23) для скорости пули.



#### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§ 21, 24, 26, 27, 32, 34.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.4 §1-3; гл.5 §2,6,7; гл.7 §2-5.

## Работа №3в. Измерение скорости пули с помощью вращающейся платформы

**Цель работы:** использовать закон сохранения проекции момента импульса для определения скорости пули при выстреле.

### Теоретическое описание

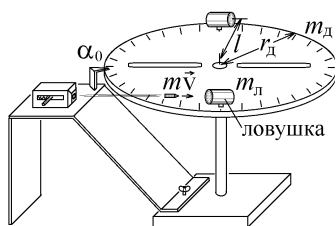


Рис.10

На горизонтально расположенной платформе-диске с массой  $m_d$  и радиусом  $r_d$  закреплены две симметрично расположенные и заполненные пластилином ловушки с массами  $m_l$  (рис.10). Пуля с массой  $m$  выстреливается из пружинного пистолета со скоростью  $v$ . Винтами пистолет и ловушки закрепляют так, чтобы пуля летела по оси ловушки (рис.10).

Попадая в ловушку, пуля прилипает к пластилину, и диск вместе с ловушками и прилипшей пулей начинает вращаться с угловой скоростью, вектор которой  $\vec{\omega}$  направлен по оси вращения диска. Направление этого вектора можно определить по движению вращающегося в ту же сторону винта (правило винта, рис.11).

Вертикально направленная сила тяжести создаёт момент сил  $\vec{M}_{mg} = [\vec{r}, m\vec{g}]$ , направление которого легче определить по правилу левой руки, как показано на рис.11: четыре пальца левой руки направлены вдоль первого вектора  $\vec{r}$ , второй вектор  $m\vec{g}$  входит в ладонь, большой палец показывает направление векторного произведения  $\vec{M}_{mg}$ .

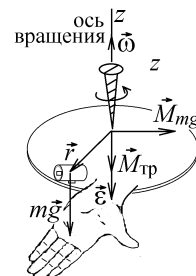


Рис.11

Этот вектор направлен перпендикулярно оси вращения  $z$  и не может изменить величину проекции  $L_z$  на эту ось момента импульса системы пуля-платформа, равную  $L_z = I\omega$ , где  $I$  – момент инерции системы относительно оси вращения. Однако в подшипнике оси создаётся постоянный момент сил трения  $\vec{M}_{тр}$ , направленный против вектора  $\vec{\omega}$ , и тормозящий вращение.

Замкнутой (изолированной) системой будет называться система, на которую не действуют внешние силы и моменты внешних сил, или действием этих моментов можно пренебречь. В такой системе всегда выполняется закон сохранения момента импульса. В данном случае из-за наличия  $\vec{M}_{тр}$  система не замкнута, и уравнение динамики вращательного движения в проекции на ось  $z$ ,  $dL_z/dt = I\epsilon = -M_{тр}$  приводит к уменьшению величины  $L_z = I\omega$ .

Однако соударение происходит очень быстро, за время  $\tau = \Delta t \rightarrow 0$ , и можно считать, что  $\Delta L_z = -M_{тр} \cdot \tau \rightarrow 0$ . Проекция на ось  $z$  момента импульса пули равна  $\vec{L}_{пули} = [\vec{r}, m\vec{v}]$ , где  $r = l$  – расстояние от центра ловушки до оси. Она не успевает измениться, и можно записать закон сохранения момента импульса в момент удара:

$$\begin{matrix} m\vec{v} \cdot l & = & I\omega \\ \text{до удара} & \text{после удара} \end{matrix} \quad (24)$$

Момент инерции системы пуля-платформа складывается из моментов инерции диска  $I_d = m_d r_d^2 / 2$ , маленькой пули  $I_{п} = ml^2$  и двух ловушек, размерами которых тоже можно пренебречь,  $I_l = 2m_l l^2$ . В результате:

$$I = \frac{m_d r_d^2}{2} + 2m_l l^2 + ml^2 \quad (25)$$

(если при проведении работы окажется, что ловушки имеют разные массы и разные расстояния до оси вращения, то в формуле (25) надо заменить  $2m_l l^2 \rightarrow m_{л1} l_1^2 + m_{л2} l_2^2$ ).

При попадании пули в ловушку происходит абсолютно неупругий удар, при котором механическая энергия системы не сохраняется. Закон сохранения полной механической энергии выполняется, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластилине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы, которую можно найти как разность кинетической энергии поступательного движения пули до удара и кинетической энергии вращающейся

платформы после удара:  $A_{тр} = \frac{m_{п} v^2}{2} - \frac{I\omega^2}{2}$ . Большая часть работы силы трения идёт на нагревание тел.

Момент сил трения тормозит вращение платформы, и она остановится спустя время  $t$  после удара, повернувшись на угол  $\phi$ , измеряемый по круговой шкале, нанесенной на край платформы. Для равнозамедленного вращения, происходящего с постоянным угловым ускорением  $\epsilon$  и с начальной угловой скоростью  $\omega$ , можно записать два кинематических соотношения:

$$0 = \omega - \epsilon t \quad \text{и} \quad \phi = \omega t - \frac{\epsilon t^2}{2} \quad (26)$$

Исключая отсюда переменную  $t$ , получаем

$$\omega = \sqrt{2\epsilon\phi} \quad (27)$$

Чтобы определить величину углового ускорения  $\epsilon$ , входящего в это выражение, надо слегка толкнуть рукой диск платформы, одновременно включив секундомер, и измерить время  $t$  до полной остановки вращения платформы на угол  $\alpha$ . Тогда, исключая из равенств (26) неизвестную начальную угловую скорость  $\omega$ , получим известное кинематическое

выражение  $\alpha = \varepsilon t^2/2$  или  $\varepsilon = 2\alpha/t^2$ .

Окончательно из формул (24), (25) и (27) находим величину скорости пули до удара:

$$v = \frac{I}{ml} \sqrt{2\varepsilon\varphi}. \quad (28)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Массы диска  $m_d$ , ловушки  $m_l$  и пули  $m$  указаны на установке или на самих телах.
2. Установить ловушки симметрично на произвольном расстоянии  $l$  от оси вращения диска (платформы), закрепить их (отверстием, заполненным пластилином в сторону пистолета). Измерить линейкой расстояние  $l$  от оси вращения до центра ловушки (рис.10).
3. Толкнуть диск рукой и включить секундомер. Определить на какой угол  $\alpha$  повернется диск и какое время  $t$  проходит до его остановки (рис.10). Опыт проделать  $n = 9$  раз, определяя каждый раз углы  $\alpha_i$  и времена  $t_i$ .
4. Из-за действия постоянного момента сил трения в оси вращения диск (платформа) движется равнозамедленно.

По формуле  $\varepsilon_i = \frac{2\langle\alpha_i\rangle}{\langle t_i\rangle^2}$  вычислить величину углового ускорения в каждом из опытов, а затем найти среднее значение уг-

лового ускорения платформы, вызванного трением в оси:  $\langle\varepsilon\rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i / n$ .

5. Зарядить пружинный пистолет и повернуть его так, чтобы при выстреле пуля попала в ловушку, которая должна быть ориентирована по касательной к траектории движения вылетающей из пистолета пули.

6. Произвести выстрел. Определить угол поворота  $\varphi$  диска до остановки. Опыт повторить  $n = 9$  раз, определяя каждый раз величину угла  $\varphi_i^o$ , затем вычислить среднее значение  $\langle\varphi\rangle^o = \sum_{i=1}^n \varphi_i^o / n$ . Величину этого угла, измеренного в

градусах надо перевести в радианы по формуле  $\langle\varphi\rangle = 3,142 \cdot \langle\varphi_i^o\rangle / 360^o$ .

7. Определить момент инерции  $I$  диска с ловушками и пулей по формуле (25).

8. Определить скорость пули по формуле (28):  $\langle v\rangle = \frac{I}{ml} \sqrt{2\langle\varepsilon\rangle\langle\varphi\rangle}$ .

9. Данные всех измерений и вычислений занести в таблицы 1-3.

Таблица 1.

$m$ , кг	$m_d$ , кг	$m_l$ , кг	$r_d$ , м	$l$ , м

Таблица 3.

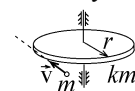
$I$ , кг·м <sup>2</sup>	$\langle v\rangle$ , м/с

Таблица 2.

$\alpha_i^o$	$t_i$ , с	$\varepsilon_i$ , рад/с <sup>2</sup>	$\varphi_i^o$
		$\langle\varepsilon\rangle = \dots\dots$ рад/с <sup>2</sup>	$\langle\varphi\rangle^o = \dots\dots^o$ $\langle\varphi\rangle = \dots\dots$ рад

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 3б

1. Какая система называется замкнутой и будет ли замкнутой система “пуля-платформа”?
2. Дайте определение момента силы и момента импульса. По каким формулам они определяются в данной работе и как определить направление этих векторных величин?
3. Какая величина называется моментом инерции? Как вычислить момент инерции системы “пуля-платформа” после удара?
4. Сформулируйте закон сохранения момента импульса. Будет ли сохраняться его величина во время удара, и если да – то как записать уравнение этого закона для системы “пуля-платформа”?
5. Какие силы называются консервативными, а какие диссипативными?
6. Сформулируйте закон сохранения и изменения полной механической энергии системы. Что происходит с кинетической энергией системы “пуля-платформа” при ударе? При каком ударе она сохраняется?
7. Будет ли сохраняться момент импульса и механическая энергия системы “пуля-платформа” при её движении после удара?
8. Маленький пластилиновый шарик с массой  $m$  летел по касательной к ободу тонкого неподвижного диска с массой  $m' = km$  и с радиусом  $r$  и прилип к нему (см. рисунок). Совершив равнозамедленно один полный обо-



рот вокруг закрепленной оси симметрии, диск остановился. Найти: а) величину углового ускорения диска с прилипшим шариком во время его вращения; б) величину момента сил трения в оси диска; в) работу сил трения, совершенную в момент удара; г) во сколько раз изменится механическая энергия этой системы после удара.

9. Сделайте и объясните вывод расчетной формулы (28) для скорости пули.

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§ 21, 24, 27, 32, 33, 34.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.4 §1-3; гл.5 §2,6,7; гл.7 §2-5.

## Работа №4. Изучение вращательного движения

**Цель работы:** с помощью маятника Обербека изучить зависимость углового ускорения тела, вращающегося относительно неподвижной оси, от результирующего момента действующих на него сил; определить момент инерции вращающегося маятника и действующий в его оси момент сил трения.

### Теоретическое описание

Для изучения законов динамики вращательного движения используется **маятник Обербека** – на шкив небольшого радиуса  $r$  намотана невесомая нить, к которой прикреплён груз массы  $m$ . Шкив может вращаться вокруг горизонтальной закрепленной оси  $O$ . Для создания большого момента инерции шкив соединён с двумя перпендикулярными массивными стержнями, на которых могут быть закреплены симметрично расположенные грузы массы  $m_1$  (рис.12).

Маятником такое устройство называется потому, что, опускаясь, груз  $m$  раскручивает шкив со стержнями. Когда нить размотается полностью, система продолжит вращение, наматывая нить на шкив до полной остановки груза  $m$ . Потом груз снова начнёт опускаться, вращая шкив в противоположную сторону и т.д. Система периодически вращается то в одну, то в другую сторону, аналогично колебаниям маятника.

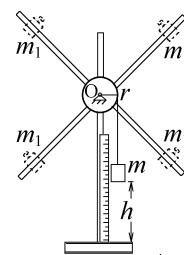


Рис.12

В данной работе нить имеет большую длину и, падая вниз с высоты  $h$  с ускорением  $\bar{a}$  без начальной скорости, груз  $m$  упадёт на подставку за время  $t$ , измеряемое секундомером. Простое кинематическое соотношение  $h = at^2/2$  позволяет по измеренным величинам  $h$  и  $t$  определить величину ускорения груза  $m$ , совершающего поступательное движение, и углового ускорения вращающегося шкива:

$$\varepsilon = a/r = 2h/t^2 r. \quad (29)$$

Силы, действующие при этом на шкив и на груз, показаны на рис.13. Уравнение динамики поступательного движения груза  $m$  запишется, как  $ma = mg - T$  и позволяет найти силу натяжения нити:

$$T = m(g - a) = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right). \quad (30)$$

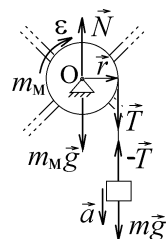


Рис.13

Центр масс шкива находится на его оси и неподвижен. Поэтому действующие на шкив с общей массой  $m_M$  сила тяжести  $m_M \bar{g}$ , сила натяжения нити  $\vec{T}$  и сила реакции в точке опоры  $\vec{N}$  уравновешены:

$m_M g + T - N = 0$ . При этом линии действия сил  $m_M \bar{g}$  и  $\vec{N}$  проходят через ось вращения  $O$  (рис.13) и не создают вращающих моментов сил. Шкив будет вращаться под действием силы натяжения нити, создающей момент силы  $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{T}]$ . Этот вектор направлен вдоль оси вращения шкива, как и вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$ . Это можно определить, например, используя “правило левой руки” (см. рис.11). Величину вращающего шкив момента сил согласно (30) можно вычислить по формуле

$$M = Tr = mr\left(g - \frac{2h}{t^2}\right). \quad (31)$$

В оси вращения при этом действует момент сил трения  $\vec{M}_{тр}$ , направленный в противоположную сторону и тормозящий вращение. Основное уравнение динамики вращательного движения маятника в проекции на ось вращения запишется в виде  $I\varepsilon = M - M_{тр}$ , где  $I$  - момент инерции маятника (шкива с прикрепленными к нему стержнями). Зависимость углового ускорения  $\varepsilon$  от вращающего маятник момента сил  $M$  линейна, если момент сил трения не зависит от скорости вращения:

$$\varepsilon = (M - M_{тр})/I. \quad (32)$$

Меняя массу  $m$  подвешенного к нити груза, измеряем время его падения с высоты  $h$ , и по формулам (29) и (31) вычисляем несколько значений углового ускорения  $\varepsilon$  при разных величинах  $M$ . По этим значениям строим график линейной зависимости  $\varepsilon = \varepsilon(M)$  (рис.14).

По этому графику, согласно (32), можно определить момент инерции маятника Обербека  $I = \frac{\Delta M}{\Delta \varepsilon}$  и величину постоянного момента сил трения  $M_{тр}$ , отмеченного на рис.14. Для этого оси графика должны начинаться в точке  $\varepsilon = 0$ .

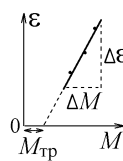
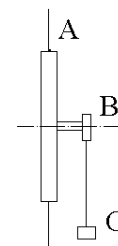


Рис.14

### Порядок выполнения работы

1. Вращая маятник за стержни А, намотать нить на шкив В и поднять груз С массой  $m$ , указанной на нем, на максимально возможную высоту  $h$  и измерить ее линейкой (см. рис.12).

2. Измерить время падения груза. Для этого, придерживая одной рукой маятник за любой из стержней, другой коснуться головки секундомера. Одновременно нажать головку секундомера и отпустить стержень маятника. В момент удара груза о подставку снова нажать на головку секундомера, остановив его. По секундомеру отсчитать время  $t$  падения груза. Опыт повторить 5 раз, поднимая груз на одну и ту же высоту  $h$ . Определить среднее время  $\langle t \rangle$  падения груза. По формулам (31) и (29) подсчитать вращаю-



щий момент  $M = m \left( g - \frac{2h}{\langle t \rangle^2} \right) r$  и угловое ускорение вращения  $\epsilon = \frac{2h}{\langle t \rangle^2 r}$ . Здесь  $r = 2$  см – радиус шкива В,

на который намотана нить.

3. Те же самые измерения и расчеты проделать, добавляя к висящему на нити грузу грузы-довески (масса каждого довеска указана на нем).

4. Данные измерений и вычислений занести в таблицу.

5. По трем вычисленным точкам  $\epsilon$  и  $M$  построить график зависимости  $\epsilon(M)$ , аналогичный приведенному на рис.14.

6. По графику определить:

а) момент инерции крестовины  $I = \frac{\Delta M}{\Delta \epsilon} = \dots, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ ;

б) момент силы трения в оси вращения  $M_{\text{тр}} = \dots \text{Н} \cdot \text{м}$ .

$m$ , кг	$t$ , с	$\langle t \rangle$ , с	$\epsilon$ , с <sup>-2</sup>	$M$ , Н·м

### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 4

1. Как устроен маятник Обербека и почему он называется маятником?

2. Дайте определение векторов углового ускорения и момента сил. Как определить направление этих векторов? Куда направлены векторы  $\vec{\epsilon}$ ,  $\vec{M}$  и  $\vec{M}_{\text{тр}}$  на рисунках 12 или 13?

3. Запишите уравнения, описывающие поступательное движение подвешенного груза и вращательного движения шкива с крестовиной.

4. Как связаны ускорение  $a$  груза  $m$  и угловое ускорение шкива  $\epsilon$ ?

5. Каким образом в данной работе определяются величины углового ускорения  $\epsilon$  и вращающего момента сил  $M$ ?

6. Почему на вращение шкива с крестовиной не оказывают влияние действующие на них сила тяжести и сила реакции в оси подвеса?

7. Каким образом в данной работе определяются величины момента инерции маятника и момента сил трения в его оси?

8. При массе подвешенного на нити груза  $m \leq m_0$  он будет висеть, не опускаясь вниз. Найдите величину массы  $m_0$ , считая момент сил трения в оси постоянным.

9. Диск (цилиндр) с массой  $m' = km$  и с радиусом  $r$  может вращаться без трения вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О (рис.А). К намотанной на него невесомой нити прикреплен груз массы  $m$ . Записав уравнения динамики, определите величину ускорения груза  $a$ .  $g$  – ускорение свободного падения.

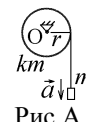


Рис.А

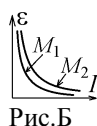


Рис.Б

10. В опыте на рис.12 меняют момент инерции  $I$  крестовины, меняя массу прикрепляемых к ней грузов  $m_1$ . На рис.Б показаны два графика зависимости её углового ускорения от величины  $I$  при двух постоянных вращающих моментах сил  $M_1$  и  $M_2$ . Какой из этих моментов больше и почему?

### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§ 26, 31, 32.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.4 §1-3; гл.7 §1-5.

### Работа №5. Определение моментов инерции методом колебаний

**Цель работы:** экспериментальное определение моментов инерции однородного стержня относительно двух параллельных осей; проверка теоремы Штейнера.

### Теоретическое описание

Моментом инерции материальной точки называется произведение её массы  $m$  на квадрат расстояния  $r$  до оси вращения. Разбивая физическое тело на маленькие участки, которые можно считать материальными точками, складываем их моменты инерции, получая величину момента инерции тела относительно данной оси вращения  $I_{\text{физ.тела}} = \sum m_i r_i^2$  (рис.15). Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Чем больше величина  $I$ , тем труднее заставить вращаться массивное тело, если оно покоилось, или затормозить, если оно вращалось.



Рис.15



Если известен момент инерции тела  $I_C$  относительно оси вращения, проходящей через центр масс  $C$ , то вычислить момент инерции  $I_A$  этого тела с массой  $m$  относительно любой другой параллельной оси вращения  $A$ , находящейся на расстоянии  $d$ , можно с помощью теоремы Штейнера:

$$I_A = I_C + md^2. \quad (33)$$

В данной работе выполнение теоремы Штейнера проверяется на примере тонкого стержня с массой  $m$  и длиной  $l$  (рис.15). Чтобы найти момент инерции  $I_C$ , разбиваем стержень на крошечные участки длиной  $dx$  с массой  $dm = dx \cdot m/l$ . Момент инерции такого участка (материальной точки) относительно оси  $C$ , как видно из рис.16, равен  $dI_C = dm \cdot x^2$ . Момент инерции тонкого стержня относительно перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр масс, будет равен сумме (интегралу), взятой по всей длине стержня:

$$I_C = \int dI_C = \int_{-l/2}^{+l/2} dx \frac{m}{l} \cdot x^2 = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-l/2}^{x=l/2} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (34)$$

Тогда момент инерции относительно параллельной оси  $A$ , проходящей через край стержня, согласно (33) должен быть равен

$$I_A = I_C + m(l/2)^2 = \frac{1}{3} ml^2. \quad (35)$$

Для проверки теоремы Штейнера (35) моменты инерции  $I_A$  и  $I_C$  определяются экспериментально методом малых колебаний, которые происходят по гармоническому закону. Вначале стержень длины  $l$  подвешивают на двух нитях длины  $b$  в горизонтальном положении (рис.17,а) и поворачивают в горизонтальной плоскости на **малый** угол  $\varphi_0 \approx 4^\circ$ . Если угол мал, то нити подвеса отклоняются от вертикали на малый угол  $\theta_0$ , а край стержня отклоняется от первоначального положения на малое расстояние  $\Delta x$  практически в горизонтальной плоскости. Это расстояние, как дугу окружности, можно выразить через малые углы, которые надо взять в радианах:

$\Delta x \approx b\theta_0$  и  $\Delta x \approx (l/2) \cdot \varphi_0$  (рис.17,а), что даёт связь между углами:

$$\varphi_0 = 2b\theta_0/l. \quad (36)$$

При таком повороте центр масс  $C$  стержня поднимается на высоту  $h_C$ . Если стержень аккуратно отпустить, он будет совершать малые колебания в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси  $C$ , проходящей через центр масс, с периодом  $T_C$ , циклической частотой  $\omega_C = 2\pi/T_C$  и начальной амплитудой  $\varphi_0$ . Если нити подвеса идеальны и не деформируются при отклонении, то колебания будут гармоническими:  $\varphi = \varphi_0 \cos \omega_C t$ . В действительности из-за деформации этих нитей и возникающих в точках подвеса диссипативных сил трения колебания постепенно затухают. Можно считать, что только при первых 5-15 колебаниях их амплитуда не успевает заметно измениться, и можно использовать формулу незатухающих гармонических колебаний.

Величина угловой скорости вращения стержня  $\omega = d\varphi/dt$  будет максимальной при  $\varphi = 0$ , когда стержень опустится:  $\omega_{\max} = \varphi_0 \omega_C = 2\pi\varphi_0/T_C$ . При этом потенциальная энергия стержня, поднятого на высоту  $h_C$ , перейдёт в кинетическую энергию его вращения:

$$mgh_C = I_C \omega_{\max}^2 / 2 = 2\pi^2 \varphi_0^2 I_C / T_C^2. \quad (37)$$

Высоту подъёма центра масс стержня можно найти, посмотрев на него сбоку (рис.17,б). При малом угле поворота  $\theta \approx \theta_0$  и

$$h_C = b(1 - \cos \theta_0) = b \cdot 2 \sin^2 (\theta_0/2) \approx b\theta_0^2/2. \quad (38)$$

Подставляя (38) и (36) в (37) получаем формулу для момента инерции  $I_C$ , записанную через период малых колебаний вокруг оси  $C$ :

$$I_C = \frac{mgl^2}{16\pi^2 b} T_C^2. \quad (39)$$

Теперь подвесим стержень за колечко на его краю и заставим совершать **малые** колебания в вертикальной плоскости вокруг оси подвеса  $A$  (рис.18). Это – физический маятник. Если пренебречь малым моментом сил трения в оси, можно считать, что его первые 5-15 колебаний будут гармоническими колебаниями  $\theta = \theta_0 \cos \omega_A t$  с амплитудой  $\theta_0$ : циклической частотой  $\omega_A = 2\pi/T_A$  и периодом  $T_A = 2\pi\sqrt{I_A/mgd}$  (период колебаний физического маятника, где  $d = l/2$  – расстояние от центра масс до оси подвеса).

При отклонении стержня на максимальный угол  $\theta_0$  центр его масс  $C$  поднимается на высоту

$$h_C = \frac{l}{2}(1 - \cos \theta_0) = \frac{l}{2} \cdot 2 \sin^2 (\theta_0/2) \approx \frac{l}{4} \theta_0^2, \quad (40)$$

а стержень приобретает потенциальную энергию  $mgh_C$ , которая определяется положением центра масс. В нижней точке эта энергия переходит в кинетическую энергию вращательного движения с максимальной угловой скоростью  $\omega_{\max} = |d\theta/dt|_{\max} = \theta_0 \omega_A = 2\pi\theta_0/T_A$ :

$$mgh_C = I_A \omega_{\max}^2 / 2 = 2\pi^2 \theta_0^2 I_A / T_A^2. \quad (41)$$

Подставляя (40) в (41), получаем формулу для момента инерции  $I_A$ , записанную через период малых колебаний относи-

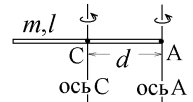


Рис.2.15

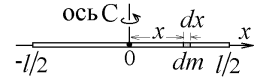


Рис.2.16

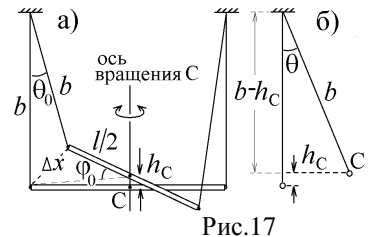


Рис.17

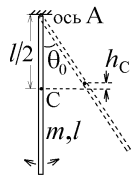


Рис.18

тельно оси А:

$$I_A = \frac{mgl}{8\pi^2} T_A^2. \quad (42)$$

Проверка выполнения теоремы Штейнера в данной работе заключается в проверке соотношения (33):

$$I_A - I_C = ml^2/4, \quad (43)$$

где величины  $I_A$  и  $I_C$  вычисляются с помощью формул (42) и (39).

#### Порядок выполнения работы

1. Подвесить стержень на нитях строго горизонтально, расположив его между направляющими планки.  
2. Взяться за правую направляющую, подвести к стержню и повернуть его на угол  $4^\circ$ . Затем резко развернуть направляющую планку от стержня, предоставив ему возможность совершать крутильные колебания относительно оси С, как показано на рис.17,а.

3. Измерить секундомером время  $t_C$  полных  $n$  колебаний ( $n = 10$ , отсчет времени начинать при прохождении колеблющегося стержня любого крайнего положения). Рассчитать период колебаний  $T_{Ci} = \frac{t_{Ci}}{n}$ . Опыт повторить 9 раз и определить среднее значение периода  $\langle T_C \rangle$ .

4. Линейкой измерить  $l$  – расстояние между точками подвеса стержня и  $b$  – длину нитей подвеса (рис.17,а). Масса стержня (в граммах) указана на нем.

5. Подвесить стержень за конец А и заставить колебаться в вертикальной плоскости. Угол отклонения не должен превышать  $4^\circ$ . (см. рис.18).

6. Измерить время  $t_A$   $n=10$  полных колебаний стержня и вычислить период колебаний  $T_{Ai} = \frac{t_{Ai}}{n}$ . Опыт повторить 9 раз и определить среднее значение периода  $\langle T_A \rangle$ .

7. По формулам (39) и (42) и вычислить моменты инерции стержня относительно перпендикулярных ему, но параллельных друг другу осей, проходящих через центр масс  $I_C = \frac{mgl^2}{16\pi^2 b} \langle T_C \rangle^2$  и через край стержня  $I_A = \frac{mgl}{8\pi^2} \langle T_A \rangle^2$ .

8. Случайные отклонения каждого измерения периодов равны соответственно,  $\Delta T_{Ci} = T_{Ci} - \langle T_C \rangle$  и  $\Delta T_{Ai} = T_{Ai} - \langle T_A \rangle$ , а средние квадратичные отклонения:  $S_C = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_{Ci})^2}$ ,  $S_A = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_{Ai})^2}$ . Погрешности результатов измерения периодов  $\Delta T_C = S_C / \sqrt{n}$ ,  $\Delta T_A = S_A / \sqrt{n}$ .

9. Рассчитать относительные и абсолютные погрешности по формулам

$$E_C = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_C}{\langle T_C \rangle}\right)^2}; \quad E_A = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_A}{\langle T_A \rangle}\right)^2}; \quad \Delta I_C = E_C \cdot I_C; \quad \Delta I_A = E_A \cdot I_A.$$

10. Вычислить величины  $I_A - I_C$  и  $ml^2/4$  и сравнить их значения, которые должны совпасть согласно (43).

11. Данные измерений и вычислений занести в таблицы 1-4.

Таблица 1.

$n$	$t_{Ci}, \text{с}$	$T_{Ci}, \text{с}$	$\Delta T_{Ci}, \text{с}$	$(\Delta T_{Ci})^2, \text{с}^2$
$\langle T_C \rangle = \dots\dots, \text{с}; \quad S_C = \dots\dots, \text{с}; \quad \Delta T_C = \dots\dots, \text{с};$				

Таблица 2.

$n$	$t_{Ai}, \text{с}$	$T_{Ai}, \text{с}$	$\Delta T_{Ai}, \text{с}$	$(\Delta T_{Ai})^2, \text{с}^2$
$\langle T_A \rangle = \dots\dots, \text{с}; \quad S_A = \dots\dots, \text{с}; \quad \Delta T_A = \dots\dots, \text{с};$				

Таблица 3.

$m, \text{кг}$	$\Delta m, \text{кг}$	$l, \text{м}$	$\Delta l, \text{м}$	$b, \text{м}$	$\Delta b, \text{м}$

Таблица 4.

$I_C, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\Delta I_C, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$I_A, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\Delta I_A, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$I_A - I_C, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$m \frac{l^2}{4}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$

### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 5

1. Дайте определение и объясните физический смысл момента инерции материальной точки и физического тела.
2. Каким образом вычислить момент инерции тела относительно оси симметрии, проходящей через центр масс? Сделайте этот вывод для тонкого стержня, для тонкого кольца, для сплошного диска.
3. Сформулируйте теорему Штейнера. Каким образом эта теорема проверяется в данной работе?
4. Из одинаковых тонких жестяных деталей в виде эллипса сделали, разрезав их на части, и раздвинув на одинаковые расстояния от оси вращения, четыре плоские фигуры (рис.А). Расставьте моменты инерции  $I_i$  этих фигур в порядке возрастания их величин и объясните свой ответ.
5. Тонкий стержень массы  $m$  и длины  $l$  имеет момент инерции  $I_C = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  относительно перпендикулярной оси С, проходящей через его центр (рис.Б). Чему равен его момент инерции относительно параллельной оси В, находящейся на расстоянии  $l/4$ ?
6. Два одинаковых тонких стержня с массой  $m$  и длиной  $l$  каждый приварены концами под прямым углом друг к другу. Найдите момент инерции этого угольника относительно перпендикулярной оси А, показанной на рис.В.
7. Получите связь между максимальной угловой скоростью стержня и амплитудой его колебаний. Как эта скорость связана с изменением высоты центра масс колеблющегося стержня?
8. Проделайте и объясните вывод соотношений (39) и (42).

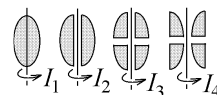
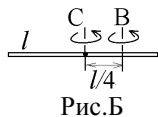


Рис.А

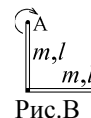


Рис.В

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - §§ 39, 41, 54.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.5 §5; гл.7 §2-4; гл.9 §1,2.

### Работа №6. Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности методом катающегося шарика

**Цель работы:** изучить законы движения катающегося по сферической вогнутой поверхности шарика, рассмотреть условия возникновения его гармонических колебаний и определить радиус кривизны поверхности.

#### Теоретическое описание

Используемый в работе метод определения радиуса кривизны основан на измерении периода малых колебаний шарика, катающегося по исследуемой вогнутой поверхности. При качении без проскальзывания скорость точки А шарика, касающейся неподвижной поверхности, равна нулю. Поэтому длина дуги ВС, которую опишет точка В на поверхности катающегося шарика радиуса  $r$ , равна длине дуги АС вогнутой поверхности радиуса  $R$  (рис.19):  $s_{AC} = R\varphi = s_{BC} = r\theta$ . Углы  $\theta$  и  $\varphi$ , указанные на рис.19 и измеренные в радианах связаны соотношением

$$\theta = R\varphi/r. \quad (44)$$

На рис.20 показано, как меняется направление полного ускорения центра масс шарика  $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ , складывающегося из тангенциального  $\vec{a}_\tau$  и нормального  $\vec{a}_n$  ускорений. В верхней точке подъема А скорость шарика и его нормальное ускорение  $a_n = v^2/R$  равны нулю, а ускорение шарика равно его тангенциальному ускорению. В нижней точке траектории В скорость шарика максимальна и её производная в точке максимума, т.е. тангенциальное ускорение, равна нулю:  $a_\tau = dv/dt = 0$ . В промежуточных точках траектории вектор  $\vec{a}$  поворачивается, как показано на рис.20.

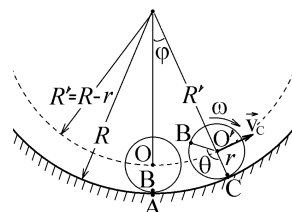


Рис.19

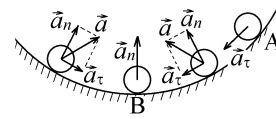


Рис.20

Силы тяжести  $m\vec{g}$ , нормальной реакции  $\vec{N}$  и сила трения сцепления  $\vec{F}_{тр}$ , действующие на шарик, показаны на рис.21. Скорость центра масс шарика  $v_C = ds/dt$  направлена вправо, увеличивая проходимый им путь  $s = OO' = R'\varphi$ . Тангенциальное ускорение направлено противоположно. Его проекция на касательное к траектории направление будет равна

$$a_\tau = -\frac{d^2s}{dt^2} = -(R-r)\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (45)$$

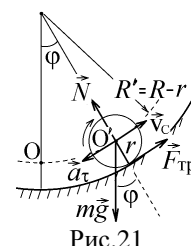


Рис.21

Проекция векторов угловой скорости и углового ускорения шарика также имеют разные знаки и связаны с углом поворота шарика вокруг своей оси:  $\omega = d\theta/dt$ ,  $\varepsilon = -d^2\theta/dt^2$ . Учитывая (45) и (44), находим связь тангенциального и углового ускорения шарика при качении по сферической поверхности:

$$a_\tau = -R' \cdot \frac{r}{R} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{R-r}{R} r \varepsilon. \quad (46)$$

Запишем уравнение динамики поступательного движения центра масс шарика в проекции на касательное направление, а также уравнение динамики вращательного движения шарика вокруг своей оси, в котором торможение вращения происходит из-за действия момента силы трения сцепления, а момент инерции шарика  $I_C = 2mr^2/5$  (рис.21):

$$ma_\tau = mg \sin \varphi - F_{тр}; \quad I_C \varepsilon = F_{тр} \cdot r. \quad (47)$$

Последовательно исключаем из этих уравнений неизвестную  $F_{тр}$ , затем подставляем  $\varepsilon$  из (46), затем – выражение для

$$a_{\tau} \text{ из (45). Получим уравнение } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{5g}{7R-5r} \sin \varphi = 0. \quad (48)$$

Это уравнение совпадает с динамическим уравнением незатухающих собственных гармонических колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (49)$$

в том случае, когда  $\sin \varphi \approx \varphi$ , т.е. угол отклонения шарика от положения равновесия должен быть малым:  $\varphi \leq 5^\circ - 10^\circ$ . Уравнение (49) имеет решение в виде  $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ .

Напомним, что физическое тело будет совершать гармонические колебания, если на него действует сила или момент силы, пропорциональные смещению от положения равновесия и стремящиеся вернуть тело в положение равновесия. Именно такой момент сил возвращает шарик в нижнюю точку траектории, стремясь уменьшить угол  $\varphi$ . Из соотношений (45)–(47) можно найти его величину, пропорциональную величине  $\varphi$  при малых углах:  $M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot r \approx \frac{2mrR}{7R-5r} g \cdot \varphi$ .

Из-за наличия момента сил трения реальные колебания шарика при проведении опыта будут затухать, и использовать приближение гармонических колебаний можно только с оговоркой, что их амплитуда за время колебаний изменяется мало. Поэтому для определения периода следует измерять время не более  $N = 4-5$  полных колебаний, хотя для более точного измерения его величины  $T = t/N$  желательно измерить секундомером время как можно большего числа колебаний.

Циклическая частота незатухающих малых колебаний катающегося по сферической поверхности шарика следует из сравнения уравнений (48) и (49):  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{5g}{7R-5r}}$ . Из этого соотношения получаем расчётную формулу для величины радиуса вогнутой поверхности, выраженного через измеряемый секундомером период колебаний  $T_0$ :

$$R = \frac{5}{7} g \frac{T_0^2}{4\pi^2} + \frac{5}{7} r. \quad (50)$$

Это выражение может дать неточный результат из-за двух причин:

- 1) реальный период колебаний  $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  зависит от коэффициента затухания  $\beta$ , который был принят равным нулю;
- 2) при колебаниях шарик отклоняется от положения на большой угол, для которого не выполнено условие  $\sin \varphi \approx \varphi$ .

#### Порядок выполнения работы

1. С помощью микрометра измерить диаметр  $d$  шарика  $n_1 = 5$  раз в разных местах. Занести данные в таблицу 1.
2. Вывести шарик из положения равновесия так, чтобы угол отклонения  $\varphi$  (см. рис. 19) был мал. Определить время  $t$  пяти ( $n_1 = 5$ ) полных колебаний шарика. Опыт провести  $n = 9$  раз, определяя период колебаний  $T_i = t_i / n$ . Занести данные в таблицу 2.

3. Вычислить средние значения диаметра  $\langle d \rangle$  и радиуса шарика  $\langle r \rangle = \langle d \rangle / 2$ , а также периода колебаний  $\langle T \rangle$ .

4. Определить случайные отклонения  $\Delta T_i = T_i - \langle T \rangle$  каждого измерения периода, а также среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_i)^2}$ . Вычислить погрешность  $\Delta T$  результата измерений:  $\Delta T = S / \sqrt{n}$ .

5. Аналогично вычислить погрешность измерения диаметра и радиуса  $\Delta d = \sqrt{\frac{1}{n_1(n_1-1)} \sum (d_i - \langle d \rangle)^2}$  и  $\Delta r = \Delta d / 2$ .

6. По формуле (50) вычислить радиус кривизны поверхности  $\langle R \rangle = \frac{5}{7} g \frac{\langle T \rangle^2}{4\pi^2} + \frac{5}{7} \langle r \rangle$ .

7. Найти абсолютную  $\Delta R$  и относительную  $E$  погрешности в определении радиуса кривизны вогнутой поверхности  $R$  по формулам  $\Delta R = \frac{2 \langle R \rangle \Delta T}{\langle T \rangle} + \Delta r$  и  $E = \frac{\Delta R}{\langle R \rangle} \times 100\%$ .

8. Данные измерений и вычислений занести в таблицы 1-3.

Таблица 1.

$d$ , м	$\langle d \rangle$ , м	$\langle r \rangle$ , м

Таблица 3.

$S$ , с	$\Delta T$ , с	$\Delta r$ , м	$R$ , м	$\Delta R$ , м	$E$ , %

Таблица 2.

$t_i$ , с	$n_1$	$T_i$ , с	$\Delta T_i$ , с	$(\Delta T_i)^2$ , с
$\langle T \rangle = \dots\dots\dots$				

### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 6

1. По каким формулам рассчитываются тангенциальное, нормальное, полное и угловое ускорение шарика?
2. Маленький шарик совершает колебания, катаясь по вогнутой поверхности между точками А и В (рис.А). В каких точках угловая скорость и угловое ускорение шарика будут равны нулю? В каких точках они будут максимальны и почему?
3. В каких точках траектории шарика на рис.А его тангенциальное и нормальное ускорения будут равны нулю? Может ли вектор полного ускорения шарика быть направлен параллельно или перпендикулярно вектору ускорения свободного падения  $\vec{g}$ ?
4. Как связаны величины тангенциального  $a_t$  и нормального  $a_n$  ускорения шарика с величинами угловой скорости  $\omega$  и углового ускорения  $\epsilon$ ?
5. Какой будет связь между  $a_t$  и  $\epsilon$  в данной работе и почему?
6. Шарик катится по плоской поверхности со скоростью  $v$  без проскальзывания. Какими будут величины скоростей точек А, В и С на его поверхности (рис.Б)?
7. Укажите все силы и моменты сил, действующие на катящийся шарик, и запишите уравнения динамики его поступательного и вращательного движения.
8. При каком условии шарик будет совершать гармонические колебания? Почему угол отклонения шарика от положения равновесия должен быть мал?
9. Прodelайте и объясните вывод формул (46) – (47). Получите расчетную формулу (50).
10. Используя эти формулы, получите выражение для силы трения сцепления  $F_{тр}$ , действующей на шарик.
11. В нижней точке вогнутой поверхности катящийся без проскальзывания шарик с массой  $m$  и с радиусом  $r$  имеет скорость  $v$ . На какую максимальную высоту  $h$  может подняться вверх его центр масс (рис.В)?
12. По каким причинам полученная в работе величина радиуса кривизны поверхности может отличаться от истинного значения?

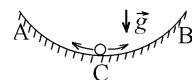


Рис.А

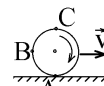


Рис.Б

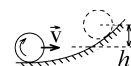


Рис.В

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - §§ 4, 24, 41-43, 53.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.7 §1-5; гл.9 §1,2;

### Работа №6а. Определение момента инерции методом крутильных колебаний

**Цель работы:** изучить метод крутильных колебаний, используемый для расчета момента инерции тел разной формы. Сравнить экспериментально полученные значения моментов инерции этих тел с теоретическими расчетами.

#### Теоретическое описание

К краям неподвижного верхнего диска Д с радиусом  $r$  на трёх симметрично расположенных нитях длины  $l$  подвешена круговая платформа радиуса  $R$  (трифилярный подвес, рис.22). В центр платформы помещают тело массы  $m$ , момент инерции которого необходимо измерить. При закручивании нитей на малый угол платформа будет совершать малые колебания с периодом  $T$  в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси симметрии  $OO'$ , одновременно поднимаясь и опускаясь с периодом  $T_{верт} = T/2$ .

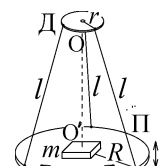


Рис.22

Определим высоту  $h$  подъёма платформы при её закручивании в горизонтальной плоскости на малый угол  $\varphi$ . Совместим начало координат 0 с центром платформы. В положении равновесия расстояние

$$z = OO' \text{ было равно } z = CA = \sqrt{BA^2 - BC^2} = \sqrt{l^2 - (R-r)^2} \quad (51)$$

(см. рис.23,а). После поворота платформы на угол  $\varphi$  это расстояние стало равным

$z' = AC' = \sqrt{B'A^2 - B'C'^2}$ , где  $B'A = BA = l$  – длина нити, а расстояние  $B'C'$  можно найти из треугольника  $B'C'O$  со сторонами  $B'O = R$ ,  $C'O = r$  и углом  $\varphi$  между ними по теореме косинусов (см. рис.23,б):

$B'C'^2 = B'O^2 + C'O^2 - 2B'O \cdot C'O \cdot \cos \varphi = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi$ . Тогда

$$z' = AC' = \sqrt{l^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \varphi}. \quad (52)$$

Из соотношений (52) и (51) следует, что  $z'^2 = z^2 - 2Rr(1 - \cos \varphi) = z^2 - 2Rr \cdot 2 \sin^2(\varphi/2)$ . Если угол поворота мал, то

$$\sin(\varphi/2) \approx \varphi/2 \text{ и } z' = \sqrt{z^2 - Rr\varphi^2} = z\sqrt{1 - Rr\varphi^2/z^2}. \quad (53)$$

Воспользуемся теперь формулой разложения в ряд Тейлора  $(1 \pm \epsilon)^\alpha \approx 1 \pm \alpha\epsilon + O(\epsilon^2)$ . В нашем случае малой величиной будет  $\epsilon = \frac{Rr\varphi^2}{z^2} \ll 1$ , и из формулы (53) следует  $z' \approx z \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{Rr\varphi^2}{z^2} \right)$ .

$$\text{Высота подъёма платформы, как видно из рис.23,б, будет равна } h = z - z' = \frac{Rr\varphi^2}{2z} = \frac{Rr\varphi^2}{2\sqrt{l^2 - (R-r)^2}}. \quad (54)$$

Напомним, что физическое тело совершает гармонические колебания, если на него действует сила или момент

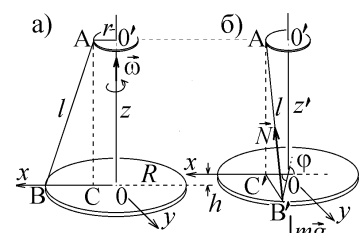


Рис.23

силы, пропорциональные смещению от положения равновесия и стремящиеся вернуть тело в положение равновесия.

При повороте платформы на малый угол  $\varphi$  против часовой стрелки, как показано на рис.24, нить отклоняется на значительно меньший угол  $\theta$ , пропорциональный углу  $\varphi$ . Появляющаяся горизонтальная проекция силы натяжения нити  $\vec{N}$  создаёт момент сил  $\vec{M} = [\vec{R}, \vec{N}]$ , который стремится повернуть платформу в противоположном направлении, вернуть её в положение равновесия, причём величина этого момента пропорциональна углу  $\varphi$ :  $M = N_{\text{гор}} R = N \sin \theta \cdot R \sim \varphi$ .

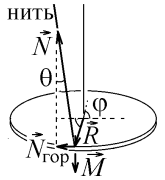


Рис.24

Поэтому платформа будет совершать малые гармонические колебания с циклической частотой  $\omega_0 = 2\pi/T$ :  $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ . Её угловая скорость  $\omega = d\varphi/dt = \varphi_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$  максимальна, когда вращающаяся платформа проходит положение равновесия и угол её поворота  $\varphi = 0$ :  $\omega_{\text{max}} = \varphi_0 \omega_0 = 2\pi\varphi_0/T$ , (55)

где  $\varphi_0$  – максимальный угол закручивания платформы, когда она поднимается на максимальную высоту  $h$ .

Полная механическая энергия системы, складывающаяся из её потенциальной и кинетической энергии, сохраняется, если все действующие в системе силы консервативны. Такими силами будут сила тяжести  $m\vec{g}$  и упругие силы натяжения нитей  $\vec{N}$ , если пренебречь их деформацией и возникающими в точках подвеса диссипативными силами трения. В этом случае кинетическая энергия вращательного движения платформы с общей массой  $m_{\text{общ}}$  и моментом инерции  $I$  в нижней точке будет переходить в потенциальную энергию силы тяжести в верхней точке её подъёма:

$$I \omega_{\text{max}}^2 / 2 = m_{\text{общ}} g h_{\text{max}}, \quad (56)$$

(максимальная высота подъёма  $h_{\text{max}}$  соответствует амплитуде  $\varphi_0$ ).

Силы натяжения практически перпендикулярны к перемещениям точек крепления нитей (рис.24) и совершают настолько малую работу, что её можно не учитывать по сравнению с работой силы тяжести.

Подставляя в (56) соотношения (54) и (55) и сокращая в обеих частях равенства величину  $\varphi_0^2$ , выражаем момент инерции платформы с лежащим на ней грузом через период  $T$  малых крутильных колебаний:

$$I = \frac{m_{\text{общ}} g R r}{\sqrt{l^2 + (R-r)^2}} \frac{T^2}{4\pi^2}. \quad (57)$$

Моменты инерции тел, вращающихся относительно общей оси, складываются. Чтобы экспериментально определить момент инерции тела с массой  $m$ , помещённого на платформу с массой  $m_{\text{пл}}$  (рис.22), сначала измеряют период колебаний  $T_1$  пустой платформы, а затем период колебаний  $T_2$  платформы с грузом и, согласно (57) вычисляют экспериментально определённый момент инерции лежащего на платформе тела:

$$I_{\text{эсп}} = \frac{g R r}{4\pi^2 \sqrt{l^2 + (R-r)^2}} ((m_{\text{пл}} + m) T_2^2 - m_{\text{пл}} T_1^2). \quad (58)$$

В действительности из-за деформации нитей подвеса и возникающих в точках подвеса диссипативных сил трения крутильные колебания постепенно затухают. Однако при первых 10-25 колебаниях их амплитуда  $\varphi_0$  не успевает заметно измениться, и можно использовать формулу незатухающих гармонических колебаний (55).

Экспериментально определённый момент инерции физических тел (плоских пластинок, которые кладут на платформу так, чтобы центр их масс совпадал с осью симметрии платформы (с осью вращения)) сравнивают с величиной момента инерции  $I_C$ , вычисленного теоретически.

Для такого вычисления исследуемое тело разбивают на очень малые участки, которые можно считать материальными точками с массой  $m_i$ , находящимися на расстоянии  $r_i$  от оси вращения. Момент инерции тела складывается из моментов инерции составляющих его материальных точек:  $I_{\text{физ.тела}} = \sum m_i r_i^2$  (рис.15). Эта величина является мерой инертности физического тела. Чем больше величина  $I$ , тем труднее заставить вращаться массивное тело, если оно покоилось, или затормозить, если оно вращалось.

Моменты инерции тел симметричной формы в виде плоских пластинок легко вычислить, если разбить их на малые элементы – тонкие полоски длины  $l$  или тонкие кольца с радиусом  $r$  и с массой  $dm$ . Моменты инерции этих элементов относительно оси симметрии, проходящей через их центр масс  $C$ , приведены на рис.25.

Используем также теорему Штейнера: если известен момент инерции тела  $I_C$  относительно оси вращения, проходящей через центр масс  $C$ , то момент инерции  $I_A$  этого тела с массой  $m$  относительно любой другой параллельной оси вращения  $A$ , находящейся на расстоянии  $d$ , будет равен

$$I_A = I_C + m d^2. \quad (59)$$

Для примера вычислим момент инерции тонкой пластинки в виде равностороннего треугольника с массой  $m$  и стороной  $a$  (рис.26). Проводим ось  $x$  вдоль высоты  $h = \sqrt{3}a/2$  этого треугольника и разбиваем его на полоски толщины  $dx$  и длины  $y = 2x/\sqrt{3}$ , перпендикулярные оси  $x$  и находящиеся на расстоянии  $x$  от перпендикулярной к пластинке оси вращения  $A$ , проходящей через вершину треугольника. Масса этой полоски пропорциональна её площади:  $dm = \frac{dS}{S_A} m = \frac{y dx}{ha/2} m = \frac{8x dx}{3a^2} m$ . В соответствии с теоремой Штейнера и рис.25 момент инерции этой полоски относительно оси  $A$  равен

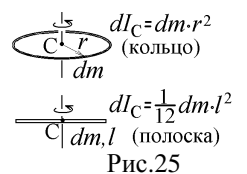


Рис.25

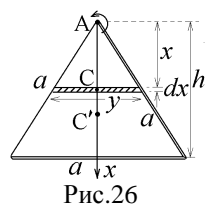
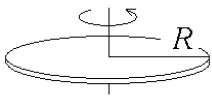
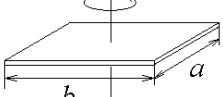
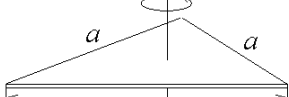


Рис.26



Таблица 3. Моменты инерции плоских тел относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно их плоскости.

	диск радиуса $R_d$	прямоугольник	равносторонний треугольник
Исследуемое тело			
Вычисленный момент инерции $I_{\text{теор}}$	$I_{\text{диск}} = \frac{1}{2} m R_d^2$	$I_{\text{прямо}} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$	$I_{\text{треуг}} = \frac{1}{12} m a^2$

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 6а

1. Дайте определение и объясните физический смысл момента инерции материальной точки и физического тела.
2. Сформулируйте теорему Штейнера.
3. Из одинаковых тонких жестяных деталей в виде ромба сделали, разрезав их на части, и раздвинув на одинаковые расстояния от оси вращения, четыре плоские фигуры (рис.А). Расставьте моменты инерции  $I_i$  этих фигур в порядке возрастания их величин и объясните свой ответ.
4. Два одинаковых тонких стержня с массой  $m$  и длиной  $l$  каждый приварены концами под прямым углом друг к другу. Найдите момент инерции этого угольника относительно перпендикулярной оси А, показанной на рис.Б.
5. Как вычислить момент инерции относительно оси симметрии, проходящей через центр масс плоской пластины? Проведите этот вывод и получите расчетные формулы для моментов инерции плоской прямоугольной пластины и диска, приведенные на рис.27.
6. Получите расчетную формулу для момента инерции пластины в форме равностороннего треугольника относительно оси, лежащей в плоскости пластины и проходящей через одну из его сторон (рис.В).
7. Объясните метод крутильных колебаний, которым в данной работе экспериментально определяются моменты инерции исследуемых пластин. Как надо размещать пластины на платформе?
8. По каким причинам угол отклонения платформы от положения равновесия должен быть малым? В каком случае платформа будет совершать гармонические колебания?
9. Как максимальная угловая скорость платформы связана с амплитудой колебаний и с высотой подъема платформы?
10. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии и объясните, каким образом его можно использовать в данной работе.
11. Проведите и объясните вывод формул (54) и (57).
12. Объясните возможные причины несоответствия величин моментов инерции, получаемых в данной работе экспериментальным способом и с помощью теоретических формул.

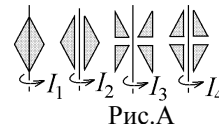


Рис.А

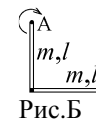


Рис.Б

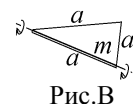


Рис.В

#### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - §§ 39, 41, 54.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.7 §1-5; гл.9 §1,2.

#### Работа №7. Определение коэффициента трения качения для различных материалов

**Цель работы:** определить величину коэффициента трения качения для различных пар металлических поверхностей; определить момент инерции физического тела несимметричной формы методом колебаний.

#### Теоретическое описание

По горизонтальной поверхности, образованной пластинками из разных металлов, которые можно менять, насаживая или снимая их со штырей, может свободно кататься тяжёлый маятник массы  $m$  (рис.28). Маятник образован двумя цилиндрами с радиусами  $R$  и  $r$ , параллельные оси которых не совпадают. По пластинкам катается цилиндр с меньшим радиусом  $r$ , под которым образуется пятно контакта – область, где цилиндр и пластинка прижаты друг к другу, а их материал деформирован.

Рассмотрим вначале качение любого круглого тела, например – цилиндра с радиусом  $r$ . Когда цилиндр покоится, давление в области контакта распределено симметрично (рис.29,а), а возникающая сила нормальной реакции опоры  $\vec{N}$  проходит через ось цилиндра. Если же цилиндр начинает катиться вправо со скоростью  $v$ , то происходит перераспределение давления, возникает крохотный валик из сжимаемого материала, препятствующий качению цилиндра (рис.29,б). Качение без проскальзывания означает поворот цилиндра относительно горизонтальной мгновенной оси вращения, проходящей через точку приложения силы реакции опоры  $\vec{F}_p$ .

Эта точка смещена на расстояние  $\delta$  относительно вертикали, проходящей через ось катящегося цилиндра. Силу  $\vec{F}_p$  можно разложить на две проекции:  $\vec{N}$  – сила нормальной реакции и  $\vec{F}_{тр}$  – сила трения качения или сила трения сцепления (рис.29,б). При повороте цилиндра с радиусом  $r$  на угол  $\Delta\phi$  вокруг оси О он переместится вдоль горизонтальной опоры на расстояние  $\Delta x = r \cdot \Delta\phi$ , а сила  $\vec{F}_{тр}$ , направленная про-

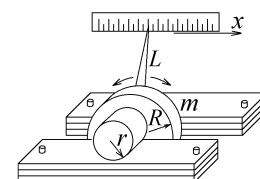


Рис.28

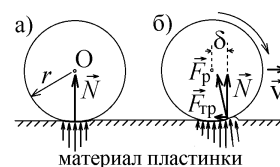


Рис.29



тив скорости  $\vec{v}$ , совершит работу, уменьшающую кинетическую энергию поступательного движения на величину:

$$\Delta\left(mv^2/2\right) = -F_{\text{тр}}\Delta x = -\vec{F}_{\text{тр}}r\Delta\varphi. \quad (61)$$

Работа момента силы равна произведению момента силы на угол поворота:  $dA = M \cdot d\varphi$ . Силы  $\vec{F}_{\text{тр}}$  и  $\vec{N}$  стремятся вращать цилиндр в разных направлениях вокруг оси О. Моменты этих сил, равные произведению силы на плечо, направлены в разные стороны. Их работа будет изменять кинетическую энергию вращательного движения маятника с моментом инерции  $I_0$  вокруг оси О:

$$\Delta\left(I_0\omega^2/2\right) = F_{\text{тр}}r \cdot \Delta\varphi - N\delta \cdot \Delta\varphi. \quad (62)$$

Расстояние  $\delta$  (плечо силы  $\vec{N}$  относительно оси катящегося тела О) называется коэффициентом трения качения (измеряется этот коэффициент в единицах длины и при качении металлического тела по металлу лежит в пределах 0,1-0,8 мм). Для металлических тел коэффициент  $\delta$  практически не зависит от скорости  $v$  и определяется только упругими свойствами металла.

Полная механическая энергия системы складывается из её потенциальной и кинетической энергии поступательного и вращательного движения. Она сохраняется, если все действующие в системе силы консервативны. В нашем случае, складывая уравнения (61) и (62), видим, что суммарная работа силы трения сцепления  $F_{\text{тр}}$  и момента этой силы равна нулю. На замедление скорости катящегося тела она не влияет. Механическая энергия катящегося цилиндра уменьшается на величину, равную работе момента силы нормальной реакции, который называется моментом трения качения:

$$-\Delta E_{\text{мех}} = -\Delta\left(mv^2/2 + I_0\omega^2/2\right) = N\delta \cdot \Delta\varphi. \quad (63)$$

Эта энергия идёт на работу по сжатию материала опоры под давлением катящегося тела, на формирование валика перед катящимся телом, на преодоление мостиков сцепления (участков, где из-за микронеровностей на поверхностях соприкосновения цилиндра и опоры возникают настолько большие давления, что между их молекулами возникают силы межмолекулярного притяжения, и они в этих местах "сцепляются" друг с другом).

Рассмотрим теперь движение маятника, изображенного на рис.28. Так как ось большого цилиндра радиуса  $R$  находится ниже оси О меньшего, катающегося по пластинкам цилиндра, то их общий центр масс С находится на расстоянии  $OC = l$  от оси О (рис.30,а). При повороте маятника на малый угол  $\varphi$ , для которого  $\sin \varphi \approx \varphi$ , центр масс поднимется на высоту  $h = l - l \cos \varphi = 2l \sin^2(\varphi/2) \approx l\varphi^2/2$ , а маятник приобретает потенциальную энергию  $E_{\text{пот}} = mgh = mgl\varphi^2/2$ .

В точке максимального отклонения от положения равновесия маятник останавливается, и вся его механическая энергия равна потенциальной. Пусть  $\varphi_0$  – начальный угол отклонения маятника от положения равновесия, а  $\varphi_1$  – максимальный угол отклонения после первого колебания. Тогда потеря механической энергии за время первого колебания равна  $\Delta E = mgl(\varphi_0^2 - \varphi_1^2)/2$ . Эта величина согласно (63) равна величине работы момента трения качения, которая не зависит от того, в какую сторону отклоняется маятник. Он остановится, совершив поворот на угол  $\varphi_{1/2}$ , а затем вернётся, отклонившись на угол  $\varphi_1$  (рис.30,б). Суммарный угол поворота за время первого колебания  $\Delta\varphi = \varphi_0 + 2\varphi_{1/2} + \varphi_1$ .

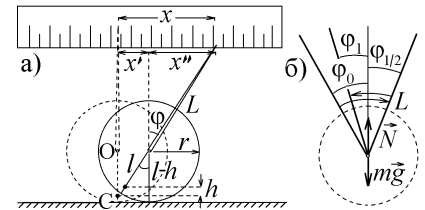


Рис.30

Для малых углов можно считать, что  $\varphi_{1/2} \approx (\varphi_0 + \varphi_1)/2$  и  $\Delta\varphi \approx 2(\varphi_0 + \varphi_1)$ . Соотношение (63) примет вид

$$\Delta E = mgl(\varphi_0^2 - \varphi_1^2)/2 = A_{\text{тр}} = N\delta \cdot 2(\varphi_0 + \varphi_1), \quad (64)$$

а так как сила нормальной реакции уравновешена силой тяжести,  $N = mg$ , то из (64) следует, что для малых углов  $\delta = l(\varphi_0 - \varphi_1)/4$ .

После второго колебания максимальный угол отклонения окажется равным  $\varphi_2$ , и те же расчеты дадут величину  $\delta = l(\varphi_1 - \varphi_2)/4$  и т.п. После  $n$ -го колебания имеем  $\delta = l(\varphi_{n-1} - \varphi_n)/4$ . Складывая все эти величины, находим

$$n\delta = \frac{l(\varphi_0 - \varphi_n)}{4} \quad \text{или} \quad \delta = \frac{l(\varphi_0 - \varphi_n)}{4n}. \quad (65)$$

Вместо углов поворота смещение маятника в данной работе измеряется показанием стрелки указателя длины  $L$  на линейке. Стрелка закреплена на оси катающегося цилиндра. При его повороте на угол  $\varphi$  ось цилиндра сместится на длину дуги  $x' = r\varphi$ , а конец стрелки сместится на расстояние  $x'' = L \sin \varphi \approx L\varphi$  (рис.30,а). Суммарное смещение стрелки, измеряемое на линейке,  $x = x' + x'' = (r + L)\varphi$  пропорционально углу  $\varphi$ . Отклонив стрелку вместе с маятником на расстояние  $x_0$ , маятник отпускают и измеряют отклонение стрелки  $x_n$  после  $n$ -го колебания. Тогда, согласно (65) коэффициент трения качения можно вычислить по формуле

$$\delta = \frac{l(x_0 - x_n)}{4n(r + L)}. \quad (66)$$

Запишем теперь систему уравнений динамики поступательного и вращательного движения для маятника, катящегося без проскальзывания с ускорением  $a$  и угловым ускорением  $\varepsilon = a/r$  относительно оси симметрии О (рис.31):

$$\begin{cases} ma = m\epsilon r = -F_{\text{тр}}; \\ I_0\epsilon = r \cdot F_{\text{тр}} - mg \cdot l \sin \varphi - N \cdot \delta. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений переменную  $F_{\text{тр}}$  и подставляя  $N = mg$ ,  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\epsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ,

получаем уравнение  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I_0 + mr^2} \varphi = -\frac{mg\delta}{I_0 + mr^2}$ . Это уравнение совпадает с динамическим

уравнением гармонических колебаний  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = \text{const}$ , в котором циклическая частота  $\omega_0$  связана с периодом колебаний  $T = t/n$ , который определяют, производя с помощью секундомера измерение времени  $n$  колебаний маятника.

Так как  $\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{mgl}{I_0 + mr^2}$ , то измерив период колебаний, можно найти величину момента инерции маятника

$$\text{ка относительно оси О:} \quad I_0 = \frac{mgl}{4\pi^2} T^2 - mr^2 \quad (67)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Поставить тяжёлое тело (маятник) из двух цилиндров с несовпадающими осями на металлические пластинки из одного металла, как показано на рис.28, так, чтобы оно не касалось стенок прореза, а стрелка  $L$  показывала ноль на миллиметровой шкале-линейке).

2. Отклонить маятник из положения равновесия, чтобы конец стрелки  $L$  (см. рис.30,а) оказался в точке с координатой  $x = x_0 = 40$  мм на миллиметровой шкале (это начальная амплитуда колебаний). Отпустить маятник, и измерить время  $t$  его  $n$  полных колебаний ( $n = 10$ ), а также величину  $x = x_n$  максимального отклонения стрелки после  $n$ -го колебания (амплитуду  $n$ -го колебания). Вычислить величину периода колебаний по формуле  $T = t/n$ . Повторить измерения 5 раз (начальная амплитуда  $x_0$  должна быть одинаковой). Результаты измерений занести в таблицу и вычислить средние значения  $\langle x_n \rangle$  и  $\langle T \rangle$ .

3. Измерения повторить для пластинок из двух других металлов и результаты также занести в таблицу.

4. Для каждой пары контактирующих металлов (цилиндр-пластинка) по формуле (66) определить величину коэффициента трения качения  $\delta = \frac{l(x_0 - \langle x_n \rangle)}{4n(r + L)}$ . Величина расстояния  $l$  от оси опорного катающегося цилиндра до центра

масс системы С (рис.30,а или рис.31), а также величина радиуса  $r$  опорного цилиндра приведены на установке. Расстояние  $r + L$  надо измерить линейкой – это расстояние от винта, которым стрелка прикреплена к оси опорного цилиндра до точки её пересечения с миллиметровой шкалой, по которой определяется расстояние  $x$  (рис.30,а).

5. По формуле (67)  $I = \frac{mgl}{4\pi^2} \langle T \rangle^2 - mr^2$  вычислить момент инерции маятника относительно оси О опорного цилиндра радиуса  $r$  в трех случаях, когда он катается по пластинкам из разных металлов (масса  $m$  маятника приведена на установке).

6. Сравнить полученные значения  $I$  (в пределах погрешностей измерения и вычислений они должны совпадать). Вычислить среднее значение  $\langle I \rangle$ . Все результаты занести в таблицу.

Таблица результатов измерения и вычислений

$m = \dots\dots \text{ кг}$				$r = \dots\dots \text{ м}$				$l = \dots\dots \text{ м}$				$r + L = \dots\dots \text{ м}$				$x_0 = \dots\dots \text{ м}$			
Название материала																			
1. ....						2. ....						3. ....							
$t, \text{ с}$	$n$	$T, \text{ с}$	$x_n, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$n$	$T, \text{ с}$	$x_n, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$n$	$T, \text{ с}$	$x_n, \text{ м}$								
$\langle T \rangle = \dots\dots\dots \text{ с}$		$\langle x_n \rangle = \dots\dots\dots \text{ м}$		$\langle T \rangle = \dots\dots\dots \text{ с}$		$\langle x_n \rangle = \dots\dots\dots \text{ м}$		$\langle T \rangle = \dots\dots\dots \text{ с}$		$\langle x_n \rangle = \dots\dots\dots \text{ м}$									
$\delta = \dots\dots\dots \text{ м}$		$I = \dots\dots\dots \text{ кг} \cdot \text{м}^2$		$\delta = \dots\dots\dots \text{ м}$		$I = \dots\dots\dots \text{ кг} \cdot \text{м}^2$		$\delta = \dots\dots\dots \text{ м}$		$I = \dots\dots\dots \text{ кг} \cdot \text{м}^2$									
$\langle I \rangle = \dots\dots\dots \text{ кг} \cdot \text{м}^2$																			

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 7

- В чем отличие механизма трения качения и трения скольжения? Одинаковы ли силы трения скольжения и трения сцепления?
- Что называется коэффициентом трения качения? От чего зависит величина этого коэффициента?

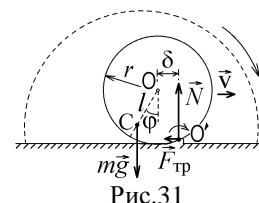


Рис.31

- Почему неконсервативная сила трения сцепления, действующая на катящееся без проскальзывания тело, не изменяет скорости его качения? Почему это тело замедляет своё движение и останавливается?
- Дайте определение момента силы и работы момента силы.
- Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии системы. По какой причине в данной работе уменьшается полная механическая энергия движущегося маятника? Что при этом происходит с маятником и опорной пластиной?
- Получите связь между высотой подъёма центра масс маятника и углом  $\varphi$  его отклонения от положения равновесия.
- Как показание конца стрелки на линейке связано с углом поворота маятника?
- Прodelайте и объясните вывод расчетной формулы (66) для  $\delta$ .
- Сформулируйте условие возникновения гармонических колебаний.
- Запишите уравнения динамики поступательного и вращательного движения и, сделав вывод, получите с их помощью выражение для циклической частоты  $\omega_0$  и момента инерции  $I_0$  исследуемого в работе маятника (формула (67)).

### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986.- §§ 21, 24, 53, 54.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §3,6; гл.7 §2-5; гл.9 §1,3.

## Работа №8. Определение силы трения скольжения

**Цель работы:** используя законы сохранения импульса и изменения механической энергии, экспериментально определить величину силы трения скольжения, а также величину коэффициента трения скольжения.

### Теоретическое описание

При соприкосновении тел между их поверхностями образуются пятна касания размером  $\Delta \sim 1-50$  мкм, в которых микронеровности, шероховатости соприкасающихся тел плотно прижаты друг к другу. Эти размеры сильно зависят от свойств материала контактирующих тел и от величины прижимающих их сил. В пятнах касания возникают силы, сцепляющие молекулы двух прижатых поверхностей (явление адгезии).

Если на одно из тел подействовать внешней силой  $F_{\tau}$ , касательной к соприкасающимся поверхностям, а величина этой силы меньше некоторого предельного значения  $F_{\max}$ , то пятна контакта сместятся на несколько микрометров, их границы чуть изменятся, но тела друг относительно друга практически не сдвинутся (рис.32). В пятнах касания возникнут силы, препятствующие их смещению. Суммарная величина таких сил сцепления микронеровностей называется **силой трения покоя**  $F_{\text{трпок}} = F_{\tau}$ . Она уравнивает внешнюю силу и может принимать любое значение от 0 до  $F_{\max}$  (относительная скорость тел  $v=0$ ).

Если внешняя сила  $F_{\tau}$  превысит критическое значение  $F_{\max}$ , тела начинают двигаться, скользить друг относительно друга со скоростью  $v$ . Пятна контакта передвигаются по поверхности контактирующих тел, исчезают и возникают в тех точках, где начинают соприкасаться микронеровности, выступы на поверхностях. Сумма сил их сцепления образует **силу трения скольжения**  $F_{\text{трск}}$ , препятствующую смещению тел, но уже не уравнивающую внешнюю силу  $F_{\tau}$  и направленную против скорости движения тела.

Сила  $F_{\text{трск}}$  практически не зависит от скорости  $v$  и от площади соприкасающихся поверхностей (она зависит только от суммарной площади возникающих пятен касания, которая пропорциональна силе нормального давления  $\vec{N}$ , действующей на движущееся тело). Небольшой рост этой силы при больших скоростях  $v$ , показанный на рис.32, связан с появлением пластической деформации материала и началу превращения силы сухого трения (без смазки) в силу вязкого трения. Сила трения неконсервативна, её работа идёт на остаточную деформацию поверхностей и на нагревание тел.

Величина силы трения скольжения вычисляется по формуле

$$F_{\text{трск}} = \mu N,$$

где  $\mu$  – **коэффициент трения скольжения**, зависящий от природы соприкасающихся поверхностей. Такая зависимость  $F_{\text{тр}}$ , показанная на рис.32 называется **законом Амонтона-Кулона**.

В данной работе пулю с массой  $m_1$  помещают в пружинный пистолет, плотно прижимая к затвору с массой  $m_3$ , соединённому с пружиной, имеющей коэффициент жёсткости  $k$ . Предварительно затвор отводят на расстояние  $x$ , сжимая пружину на эту длину (рис.33). В момент выстрела вся потенциальная энергия сжатой пружины превратится в кинетическую энергию пули и затвора (трением деталей при растягивании пружины можно пренебречь):

$$kx^2/2 = (m_1 + m_3)v^2/2, \quad (68)$$

где  $k$  – коэффициент жёсткости пружины, указанный на установке.

Соединённый с пружиной затвор остаётся в пистолете, а пуля, вылетающая со скоростью  $v$ , попадает в висящее на горизонтальном стержне тело массы  $m_2$  и застревает в заполняющем его пластилине. Такой удар, после которого тело с застрявшей в нём пулей начинает двигаться со скоростью  $u$ , называется **абсолютно неупругим**. Величину скорости  $u$  можно определить с помощью законов сохранения.

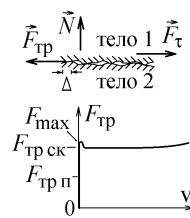


Рис.32

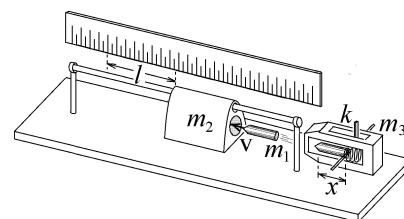


Рис.33

Закон сохранения импульса справедлив в замкнутой (или изолированной) системе, на которую не действуют внешние силы или действием таких сил можно пренебречь. Это следует из уравнения 2-го закона Ньютона, записанного в виде  $\frac{d\vec{p}_{\text{системы}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ , откуда импульс  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ . Но закон сохранения импульса часто можно применить и в незамкнутой системе, в которой  $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$ , но взаимодействие происходит очень быстро, за время  $\Delta t \rightarrow 0$  (удар, взрыв). Тогда изменение импульса  $\Delta \vec{p}_{\text{системы}} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \Delta t \rightarrow 0$  пренебрежимо мало, и можно считать, что  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ .

Считая, что пуля застревает в пластине практически мгновенно, можем записать закон сохранения импульса при ударе:

$$m_1 v = (m_2 + m_1) u. \quad (69)$$

Механическая энергия системы пуля-маятник при неупругом ударе не сохраняется. Закон сохранения полной механической энергии выполнен, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы, которую можно найти из соотношения  $A_{\text{тр}} = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_2 + m_1) u^2}{2}$  (разность кинетических энергий до и после удара). Значительная часть работы силы трения идёт на нагревание тел.

После удара механическая энергия также не сохраняется, так как на начавшее скользить по стержню тело действует постоянная неконсервативная сила трения скольжения, равная  $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu (m_2 + m_1) g$ .

Вся кинетическая энергия скользящего тела расходуется на работу силы трения скольжения и, пройдя расстояние  $l$ , измеряемое по линейке (рис.33), тело с застрявшей в нём пулей останавливается:

$$A_{\text{тр}} = \int F_{\text{тр}} dx = F_{\text{тр}} \cdot l = \mu (m_2 + m_1) g \cdot l = \frac{(m_2 + m_1) u^2}{2}. \quad (70)$$

Исключая из уравнений (68), (69) и (70) переменные  $v$  и  $u$ , находим величину силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{m_1^2 k x^2}{2l(m_2 + m_1)(m_1 + m_3)}. \text{ Массой затвора и пружины для данной установки можно пренебречь по сравнению с мас-}$$

$$\text{сой пули и считать, что } m_3 \approx 0. \text{ Поэтому } F_{\text{тр}} = \frac{m_1 k x^2}{2l(m_2 + m_1)} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{m_1 k x^2}{2lg(m_2 + m_1)^2}. \quad (71)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Прижать затвор к недеформированной пружине и заметить его положение (расстояние до края пружинного пистолета). Затем отвести затвор пистолета в крайнее положение, как показано на рис.33 (его фиксирование происходит автоматически), и снова заметить его положение. Разность этих положений, измеряемых линейкой, будет смещением затвора, которое соответствует сжатию  $x$  пружины. Занести измеренное смещение  $x$  в таблицу 2. Поместить пулю в ствол пружинного пистолета, прижав её к затвору.

2. Переместить подвешенный на горизонтальном направляющем стержне цилиндр с массой  $m_2$  к стволу пистолета до упора (рис.33).

3. Нажатием на спуск произвести выстрел. По шкале линейки измерить перемещение  $l$  цилиндра с застрявшей в нем пулей и записать значение в таблицу 1.

4. Опыт повторить 5 раз, найти среднее значение  $\langle l \rangle$ .

5. По формулам (71) вычислить величину силы трения скольжения  $\langle F_{\text{тр}} \rangle = \frac{m_1 k x^2}{2\langle l \rangle(m_2 + m_1)}$ , а также коэффициент

трения скольжения  $\langle \mu \rangle = \frac{m_1 k x^2}{2\langle l \rangle g (m_2 + m_1)^2}$ , где  $m_1$  – масса пули,  $m_2$  – масса цилиндра,  $k$  – коэффициент упругости пружины указаны на установке.

Результаты измерений и вычислений записать в таблицах 1 и 2.

Таблица 1.

$l$ , м					
---------	--	--	--	--	--

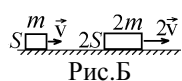
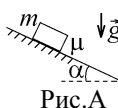
Таблица 2.

$x$ , м	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$k$ , Н/м	$\langle l \rangle$ , м	$\langle F_{\text{тр}} \rangle$ , Н	$\langle \mu \rangle$

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 8

1. По каким причинам возникают силы трения скольжения и сила трения покоя? В чем различие этих сил?
2. Какая величина называется коэффициентом трения скольжения?
3. Зависит ли величина силы трения скольжения от массы и от скорости движущегося тела?

4. На плоскости находится тело массы  $m$ . Коэффициент трения скольжения равен  $\mu$  (рис.А). При каком наибольшем угле наклона  $\alpha$  тело ещё не будет скользить? Чему равна максимальная величина  $F_{\text{тр}}^{\text{макс}}$  силы трения покоя?



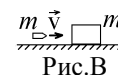
5. По горизонтальной плоскости скользят два плоских тела из одинакового материала, массы, площади и скорости которых отличаются в два раза (рис.Б). Во сколько раз отличаются действующие на них силы трения?

6. Сформулируйте закон сохранения и изменения импульса. Как этот закон используется в данной работе, и по какой причине его можно использовать?

7. Какие силы называются консервативными и неконсервативными? Приведите примеры таких сил.

8. Сформулируйте закон сохранения или изменения полной механической энергии. Как этот закон используется в данной работе?

9. Пуля с массой  $m$ , летевшая со скоростью  $v$ , врезается и застревает в неподвижно стоявшем на горизонтальной плоскости теле с массой  $m' = km$  (рис.В). Коэффициент трения скольжения равен  $\mu$ . Определите путь, пройденный после этого телом  $m'$  до остановки, а также величину потерь механической энергии в момент удара. В каком случае эти потери будут больше – при  $m' > m$  или при  $m' < m$ ?



10. Сделайте и объясните вывод расчетных формул (71).

### Литература

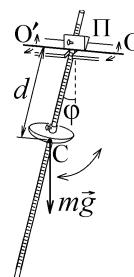
1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986.- §§ 15, 20-22, 24, 27.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §1-3,6; гл.5 §1,5.

## Работа №9. Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника

**Цель работы:** экспериментально определить ускорение свободного падения с помощью физического маятника.

### Теоретическое описание

**Физическим маятником** называется любое массивное тело, совершающее колебания в поле сил тяжести вокруг горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс  $C$ . В данной работе таким маятником является длинный металлический стержень, вблизи центра которого для увеличения периода колебаний закреплен массивный груз в виде металлической чечевицы (рис.34). На стержне винтом закрепляется маленькая опорная призма “П”, которую можно смещать по стержню, меняя расстояние  $d$  до центра масс маятника  $C$ . Маятник подвешивают в вертикальном положении, ставя призму “П” на горизонтальную опору, отводят от вертикали на небольшой угол  $\varphi$  и отпускают. После этого маятник будет совершать колебания вокруг горизонтальной оси подвеса  $OO'$  (рис.34).



Уравнение динамики вращательного движения маятника в проекции на ось вращения имеет вид:  $I_0 \cdot d^2\varphi/dt^2 = M$ , где проекция момента силы тяжести  $M = -mg \cdot d \sin \varphi$  (плечом силы тяжести будет расстояние  $d \sin \varphi$ ). Этот момент стремится уменьшить угол  $\varphi$  и вернуть маятник в вертикальное положение равновесия.

Получаем уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{I_0} \sin \varphi = 0, \quad (72)$$

где  $I_0$  – момент инерции маятника относительно оси  $OO'$ .

Условием возникновения гармонических колебаний будет действие на физическое тело силы или момента силы, пропорциональных смещению от положения равновесия и стремящихся вернуть тело в положение равновесия. В нашем случае таким моментом будет момент силы тяжести при условии малых колебаний ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ). В этом случае уравнение

(72) превращается в динамическое уравнение незатухающих собственных гармонических колебаний  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0$ ,

имеющее решение в виде  $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , где циклическая частота и период колебаний физического маятника определяются формулами

$$\omega_0 = \omega_{\text{физ маят}} = \sqrt{\frac{mgd}{I_0}}, \quad T_{\text{физ маят}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{физ маят}}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgd}}. \quad (73)$$

Здесь  $I_0$  – момент инерции маятника относительно оси подвеса,  $d$  – расстояние от оси подвеса до центра масс маятника,  $m$  – его масса.

Только при **малых** углах отклонения маятника от положения равновесия,  $\varphi \leq 5^\circ - 6^\circ$ , период его колебаний не будет зависеть от амплитуды. Для более точного измерения периода определяют время большого числа  $n$  полных колебаний. Тогда  $T = t/n$ . Из-за трения призмы “П” об опору колебания будут затухающими. Поэтому удаётся измерить время  $n = 10 - 20$  колебаний, а формула (73) задаёт их период с некоторой погрешностью, что сказывается на полученных результатах.

Частным случаем физического маятника является **математический маятник** – грузик массы  $m$ , пренебрежимо малого размера, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длины  $l$  (рис.35,б). В этом случае  $I_0 = ml^2$ ,  $d = l$ , а период **малых** колебаний математического маятника  $T_{\text{мат маят}} = 2\pi\sqrt{l/g}$ . Период колебаний физического маятника совпадает

с периодом колебаний математического маятника, длина которого равна

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_0}{md} . \quad (74)$$

Эта длина называется приведенной длиной физического маятника. На расстоянии  $l_{\text{пр}}$  от оси подвеса  $O$  на линии, проходящей через центр масс  $C$ , находится точка  $O_K$  – центр качаний (рис.35,а). Это точка, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период малых колебаний получившегося математического маятника был равен периоду физического маятника, колеблющегося относительно оси подвеса  $O$ :  $T_O = T_{O_K}$ . Точки  $O$  и  $O_K$  называют сопряженными.

Момент инерции тела  $I_0$  относительно произвольной оси  $O$  равен моменту инерции  $I_C$  этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс  $C$ , сложенному с произведением массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между осями:  $I_0 = I_C + md^2$  (это – теорема Штейнера). Согласно (73), имеем  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + md^2}{mgd}}$ .

Это – квадратное уравнение, из которого следует, что маятник будет иметь одинаковый период колебаний  $T_1 = T_2$  и одинаковую приведенную длину при двух разных расстояниях  $d_1$  и  $d_2$  от оси подвеса до центра масс (рис.35):

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_C + md_1^2}{md_1} = \frac{I_C + md_2^2}{md_2} . \quad (75)$$

Зависимость периода колебаний от расстояния  $d$  показана на рис.36. Приводя соотношение (75) к общему знаменателю, и сокращая общий множитель  $d_1 - d_2$ , получим  $I_C = md_1d_2$  и

$$l_{\text{пр}} = d_1 + d_2 . \quad (76)$$

Так как  $d_2$  – расстояние от оси подвеса до центра масс, то можно, перевернув маятник, который называют оборотным, взять точку подвеса в центре качания на расстоянии  $d_2$  ниже центра масс, как показано на рис.35,а. Но можно подвесить маятник на том же расстоянии выше центра масс, как показано на рис.35,в. Правая часть соотношения (75) от этого не изменится, как и период колебаний, равный  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{d_1 + d_2}{g}}$ . Отсюда находим ве-

личину ускорения свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2(d_1 + d_2)}{T^2} . \quad (77)$$

При использовании оборотного маятника вычисленная величина  $g$  будет более точной, так как расстояние  $d_1 + d_2$  можно определить, измеряя расстояния от краёв стержня на рис.34, длина которого известна. На данной установке маятник подвешивается с одной стороны от центра масс, и необходимо точно знать его положение. Для этого груз (чечевица) закрепляется посередине стержня, и расстояния  $d_1$  и  $d_2$  отсчитываются от середины стержня, где будет находиться центр масс  $C$  (рис.34). Любое смещение груза приведет к ошибке в определении  $g$ .

#### Порядок выполнения работы

1. Опорную призму укрепить винтом на конце стержня так, чтобы ребро, на которое она будет опираться на опору, было на уровне ближайшей риски стержня (рис.34).

2. Измерить расстояние  $d$  от ребра призмы до центра масс маятника  $C$ , который в данной работе практически совпадает с центром закрепленной на середине стержня чечевицы. Для дальнейшего определения этого расстояния можно использовать риски, нанесенные на стержень через каждый сантиметр.

3. Ребром опорной призмы установить маятник на подставку посередине прорези перпендикулярно ей и отклонить на угол  $4^\circ$  (коснитесь грузом стены, см.рис.34).

4. Секундомером измерить время  $t$  полных  $n = 10$  колебаний маятника (включать секундомер и начинать отсчет времени следует при прохождении маятником любого крайнего положения). Вычислить период колебаний  $T = t/n$ .

5. Перемещая опорную призму через каждые три сантиметра к центру стержня, т.е. меняя расстояние  $d$ , измерять время 10 колебаний и величину периода. Получить значения 15 периодов.

6. По полученным данным построить график зависимости периода колебаний  $T$  от расстояния  $d$ , аналогичный изображенному на рис.36.

7. Для произвольного значения периода  $T = T_1$  провести прямую, параллельную оси абсцисс, которая даст две точки пересечения с кривой:  $d_1$  и  $d_2$  (рис.36). При этом  $l_{\text{пр}1} = d_1 + d_2$  – приведенная длина маятника при выбранном периоде колебаний.

8. Ускорение свободного падения определить по формуле (77)  $g = \frac{4\pi^2 l_{\text{пр}1}}{T_1^2}$ .

9. Аналогично подсчитать величину  $g_i$  еще четыре раза, взяв другие значения периода  $T_i$  и определяя соответствующие им величины  $l_{\text{пр}i}$  по построенному графику.

10. Найти среднее значение  $\langle g \rangle$ .

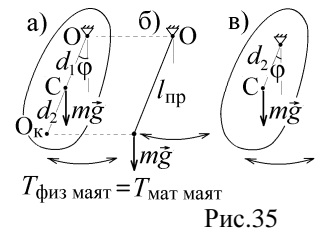


Рис.35

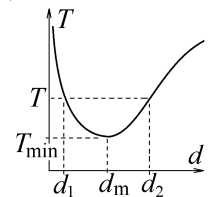


Рис.36



движения такого маятника  $m \frac{dv_x}{dt} = F_{\text{упр } x} = -kx$  можно записать в общей форме динамического уравнения собственных незатухающих гармонических колебаний, справедливой при действии любой квазиупругой силы:  $d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0$ , где введено обозначение  $\omega_0^2 = k/m$ .

Подстановкой нетрудно убедиться, что решением этого уравнения является функция  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , описывающая колебания с циклической частотой  $\omega_0$ . Период незатухающих колебаний пружинного маятника (рис.2.37) зависит от его массы и от жесткости пружины:

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (78)$$

Величину постоянной амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\varphi_0$  можно найти из начальных условий для смещения и скорости маятника в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$x(t=0) = A \cos \varphi_0; \quad v_x(t=0) = dx/dt = -A\omega_0 \sin \varphi_0. \quad (79)$$

В первом упражнении коэффициент жёсткости пружинки определяется статическим методом. Для этого по линейке определяют длину  $l_0$  свободно висющей на опоре пружинки, а затем к ней по очереди подвешивают 3-5 разных грузов с заданными массами  $m_i$ , измеряя длину  $l_i$  растянутой пружинки (рис.38). Сила тяжести уравновешена силой упругости:  $m_i g = k(l_i - l_0)$ , откуда

$$k = m_i g / (l_i - l_0). \quad (80)$$

Вычисленные по формуле (80) значения  $k$  усредняют, получая величину  $k_{\text{стат}}$ .

Во втором упражнении величину  $k$  определяют динамическим методом, заставляя подвешенные по очереди грузики  $m_i$  совершать вертикальные гармонические колебания с малой амплитудой (рис.37). Секундомером измеряют время  $n = 10$  полных колебаний и определяют их периоды  $T_i = t_i/n$ . Для большей точности период колебаний каждого грузика  $m_i$  определяют 3-4 раза, находя его среднее значение  $\langle T_i \rangle$ . По формуле (78) находят значение  $k$  для каждого грузика:

$$k_i = 4\pi^2 m_i / \langle T_i \rangle^2, \quad (81)$$

а затем усредняют эти значения:  $k_{\text{дин}} = \langle k_i \rangle$ . Если измерения периодов проведены аккуратно, величины  $k_{\text{стат}}$  и  $k_{\text{дин}}$  должны совпасть с точностью до погрешностей.

В третьем упражнении исследуются собственные затухающие колебания пружинного маятника, для чего грузик на пружинке опускают в сосуд с жидкостью, обладающей вязкостью (рис.39). При не очень больших скоростях на движущийся грузик действует замедляющая движение диссипативная сила вязкого трения, пропорциональная скорости тела:  $\vec{F}_{\text{тр}} = -\eta \vec{v}$ , где  $\eta$  – коэффициент вязкого трения. С учетом этой силы уравнение движения

$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{упр } x} + F_{\text{тр } x} = -kx - \eta \frac{dx}{dt}$  можно записать в виде динамического уравнения собственных затухающих колебаний,  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ , где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\beta = \frac{\eta}{2m}$  – коэффициент затухания колебаний. В случае малой вязкости, когда  $\beta < \omega_0$ , его решением будет

$$x(t) = \underset{\text{амплитуда}}{A_0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (82)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – циклическая частота,  $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – период затухающих колебаний, который возрастает с ростом вязкости  $\eta$ .

В случае большого сопротивления среды, когда  $\beta \geq \omega_0$ , колебания не возникают, несмотря на присутствие квазиупругой силы. Движение маятника в такой вязкой жидкости будет апериодическим (рис.40).

Амплитуда затухающих колебаний  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ , убывает со временем тем быстрее, чем больше величина  $\beta$ . Затухание колебаний характеризуют также величиной логарифмического декремента затухания  $\theta$ . Это натуральный логарифм отношения амплитуды в момент времени  $t$  к амплитуде через период:  $\theta = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T$ .

Логарифмический декремент можно вычислить другим способом:

$$\theta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{A_0}{A_n} \right), \quad (83)$$

где величины амплитуд  $A_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , меняющиеся через каждый период, показаны на рис.41.

При выполнении работы грузик в жидкости отводят от положения равновесия на расстояние  $A_0$  и отпускают, одновременно включая секундомер. После того, как маятник совершит  $n$  полных колебаний, секундо-

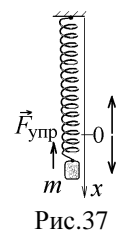


Рис.37

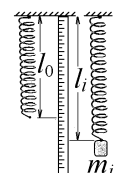


Рис.38

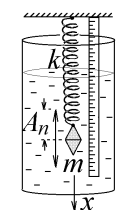


Рис.39

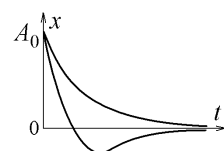


Рис.40

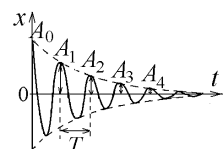


Рис.41



мер, измеривший время  $t$ , выключают и одновременно по линейке (рис.39) определяют амплитуду  $A_n$   $n$ -го колебания. Эти измерения повторяют 3-4 раза для одинаковых значений  $A_0$ , каждый раз определяя период колебания  $T = t/n$ , а затем находя среднее значение периода  $\langle T \rangle$  и среднее значение  $\langle A_n \rangle$ .

Теперь по формуле (83) можно определить величину логарифмического декремента затухания  $\theta$ , величину коэффициента затухания колебаний  $\beta = \frac{\theta}{\langle T \rangle}$  и величину коэффициента вязкого трения  $\eta = 2m\beta$ .

#### Порядок выполнения работы

1. Определить по линейке длину  $l_0$  нерастянутой пружины, подвешенной на кронштейне (рис.38)/

2. Поочередно подвешивая к пружине три разных груза (на грузах указаны их массы  $m_i$ , где  $i=1,2,3$  – номер груза), определить длину  $l_i$  растянутой пружины в положении равновесия.

3. Для каждого подвешенного груза по формуле (80) вычислить коэффициент упругости пружины  $k_i = m_i g / (l_i - l_0)$ , определенный статическим методом и найти его среднее значение  $\langle k_{\text{стат}} \rangle$ . Данные занести в таблицу 1.

4. Подвесив каждый груз к этой же пружине, вывести маятник из положения равновесия, сместив вниз на 2-3 мм, и отпустить. Секундомером измерить время  $t_i$  полных  $n = 10$  колебаний (начинать отсчет при прохождении грузом верхнего или нижнего положения). Найти период колебаний  $T_i = t_i/n$ . Опыт с каждым грузом повторить 3 раза и найти среднее значение периода колебаний  $\langle T_i \rangle$  для каждого груза с номером  $i=1,2,3$ . Данные занести в таблицу 2.

Таблица 1.

	$m_i$ , кг	$l_i$ , м	$k_i$ , Н/м
$i = 1$			
$i = 2$			
$i = 3$			
$l_0 = \dots\dots\dots$ м		$\langle k_{\text{стат}} \rangle = \dots\dots\dots$ Н/м	

5. Согласно формуле (81), определить значения коэффициента упругости  $k_i$  для разных грузов, полученные динамическим способом. Найти их среднее значение  $\langle k_{\text{дин}} \rangle$  и сравнить его со значением  $\langle k_{\text{стат}} \rangle$  из таблицы 1.

6. Построить график зависимости  $\langle T \rangle^2$  от массы грузов  $m$ .

7. Опыт проделать с пружинным маятником, груз с массой  $m_1$  которого помещен в сосуд с водой (рис.39). Вывести груз из положения равновесия, например на  $A_0 = 20$  мм (это начальная амплитуда колебаний на рис.41), и, отпустив его, **одновременно** включить секундомер. Определить время  $t_1$ , за которое груз совершит  $n_1 = 20$  полных колебаний, а также амплитуду  $A_n$  после  $n_1$  колебаний. Опыт выполнить 3 раза и найти среднее значение периода  $\langle T_1 \rangle$  и амплитуды  $n_1$ -го колебания  $\langle A_n \rangle$ .

8. Вычислить логарифмический декремент затухания  $\langle \theta \rangle = \frac{1}{n_1} \ln \frac{A_0}{\langle A_n \rangle}$ ; коэффициент затухания  $\beta = \frac{\theta}{\langle T_1 \rangle}$  и коэффициент вязкого трения  $\eta = 2m_1\beta$ . Данные измерений и вычислений занести в таблицу 3.

$m_1 = \dots\dots$  кг,  $n_1 = \dots\dots$ ,  $A_0 = \dots\dots$  мм

Таблица 3.

$A_n$ , мм	$t_1$ , с	$T_1$ , с	$\langle T_1 \rangle$ , с	$\langle A_n \rangle$ , мм	$\langle \theta \rangle$	$\beta$ , с <sup>-1</sup>	$\eta$ , кг/с

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 10

1. Какие колебания называются гармоническими, и каковы необходимые условия возникновения гармонических колебаний в механической системе?
2. Когда маятник совершает собственные затухающие колебания, и чем они отличаются от незатухающих гармонических колебаний?
3. От каких параметров зависит сила вязкого трения, и в каком случае её надо учитывать?
4. Какие величины называются коэффициентом вязкого трения и коэффициентом затухания колебаний? Как они вычисляются в работе?

5. Запишите уравнение движения пружинного маятника и получите с его помощью динамические уравнения собственных незатухающих и затухающих колебаний. Приведите решения этих уравнений.
6. Какие величины называются амплитудой, фазой и начальной фазой затухающих и незатухающих собственных колебаний?
7. Пружинный маятник с массой  $m$  на пружинке с жёсткостью  $k$ , совершающий незатухающие гармонические колебания, имеет в начальный момент времени  $t = 0$  координату  $x = x_0$  и скорость  $v = v_0$ . Чему равна амплитуда и начальная фаза этих колебаний?
8. В каком случае пружинный маятник с массой  $m$  и коэффициентом жёсткости  $k$  будет совершать в жидкости аperiодическое движение, если коэффициент вязкого трения при его движении равен  $\eta$ ?
9. Получите формулу периода колебаний пружинного маятника в вязкой жидкости. Как изменяется его величина с ростом вязкости?
10. Какая величина называется логарифмическим декрементом затухания колебаний, как она связана с периодом колебаний и каким образом она вычисляется в данной работе?
11. Объясните метод, используемый при определении коэффициента жёсткости пружины статическим и динамическим способом.

#### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986.- §§ 50, 53, 58.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.9 §1,3.

### Работа №13. Определение показателя адиабаты методом Клемана и Дезорма

Цель работы: определить величину показателя адиабаты воздуха экспериментальным методом и сравнить её с предсказанием термодинамической теории газов.

#### Теоретическое описание

Среди происходящих с газами процессов часто встречается и очень важен адиабатический процесс, протекающий без передачи тепла. Чтобы получить его уравнение, воспользуемся первым началом термодинамики: теплота, сообщаемая системе (газу), идет на изменение её внутренней энергии и на совершение системой работы над внешними силами:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Газ (воздух) с достаточной точностью можно считать идеальным. Если  $m$  – масса газа, а  $\mu$  – его молярная масса,  $p$  – давление,  $V$  – объём, а  $T$  – температура, измеряемая в градусах Кельвина, то внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры,  $U = \frac{m}{\mu} C_v T$ , а совершаемая газом работа  $\delta A = p dV$ . Здесь  $C_v$  – молярная теплоёмкость идеального газа при изохорическом процессе, когда не меняется объём газа.

Известно, что  $C_v = iR/2$ , где  $R = 8,314$  Дж/К·моль – универсальная газовая постоянная,  $i$  – число степеней свободы молекулы газа. Передаваемую газу теплоту удобно выразить через молярную теплоёмкость процесса  $C$ :  $\frac{m}{\mu} C = \frac{\delta Q}{dT}$

(приведенная величина равна количеству теплоты, которую надо сообщить системе, чтобы повысить ее температуру на 1К). Величина теплоемкости зависит от способа, которым системе сообщается теплота. Если  $C = \text{const}$ , то процесс называется политропическим.

В результате для идеального газа первое начало термодинамики запишется в виде

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C dT = \frac{m}{\mu} C_v dT + p dV. \quad (84)$$

Воспользуемся теперь уравнением состояния идеального газа

$$pV = (m/\mu) \cdot RT. \quad (85)$$

Вычисляя дифференциал  $(m/\mu) \cdot R dT = d(pV) = p dV + V dp$ , исключаем  $dT$  из уравнения (2.84), в котором для адиабатического процесса, идущего без передачи тепла, надо принять  $\delta Q = 0$ . Получаем уравнение, связывающее давление и объём газа:

$$(C_v + R) p dV = C_p p dV = -C_v V dp. \quad (86)$$

Здесь подставлена величина молярной теплоёмкости изобарического процесса, при котором не меняется давление газа:

$$C_p = C_v + R = \frac{i+2}{2} R \quad (\text{эта связь называется уравнением Майера}).$$

Отношение теплоёмкостей при постоянном давлении и постоянном объёме называется показателем адиабаты

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}. \quad (87)$$

Подставляя эту величину в (86), разделим переменные и проинтегрируем:  $\gamma \int \frac{dV}{V} = - \int \frac{dp}{p}$ , получая  $\gamma \ln V = - \ln p + \text{const}$ . Это – уравнение адиабатического процесса для идеального газа или уравнение Пуассона, которое

обычно записывается в виде:

$$pV^\gamma = \text{const} . \quad (88)$$

Используя уравнение состояния (85), можно записать уравнение Пуассона через другие термодинамические переменные:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad \text{или} \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const} . \quad (89)$$



Цель данной работы – экспериментальное определение величины  $\gamma$  для воздуха, который является смесью многих газов – двухатомных  $N_2$ ,  $O_2$ , трехатомных  $CO_2$ ,  $H_2O$  и т.п. Идеальный газ – это совокупность не взаимодействующих друг с другом на расстоянии молекул, имеющих очень малый размер. Размером одноатомной молекулы пренебрегают, считая ее материальной точкой, способной двигаться в трех независимых направлениях, т.е. имеющей  $i = 3$  степени свободы. Двухатомные и многоатомные молекулы имеют дополнительные вращательные степени свободы, показанные на рис.42.

Так как доля многоатомных и одноатомных газов в воздухе мала, то можно ожидать, что величина  $\gamma$  для воздуха будет близка к соответствующему значению для двухатомных газов:  $\gamma \approx (5+2)/5 = 1,4$ .

В работе используется установка, изображенная на рис.43. Она состоит из большого стеклянного баллона Б, соединяемого через кран К или с насосом Н, или с атмосферой. Манометр М служит для измерения разностей давлений газа в баллоне и в атмосфере.

Повернем кран К в положение I, соединяя баллон с насосом, и начнем накачивать воздух в баллон. Так как этот процесс происходит достаточно медленно, то за счет теплообмена через стеклянные стенки баллона успевает установиться тепловое равновесие. Температура воздуха внутри баллона после накачивания будет равна комнатной температуре  $T_1$ . Давление воздуха внутри баллона возрастет до величины

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1 , \quad (90)$$

где  $p_0$  – давление воздуха в окружающей атмосфере, а  $\rho g h_1$  – разность гидростатических давлений жидкости с плотностью  $\rho$  в левой и правой трубках U-образного манометра (рис.43).

Вытащим теперь пробку-затвор из крана К, соединяя баллон с атмосферой. Воздух, расширяясь, **очень быстро** выходит через отверстие, теплообмен **не успевает произойти** и процесс можно считать адиабатическим. Так как  $\gamma > 1$ , то, согласно (88) и (89), при быстром адиабатическом расширении газа и его давление, и температура уменьшаются: воздух в баллоне будет охлаждаться до температуры ниже комнатной.

В момент, когда давление воздуха в сосуде сравнивается с атмосферным ( $p' = p_0$ , выравниваются уровни жидкости в манометре), пробку крана плотно закрывают в положении II, перекрывая выход газа из баллона (рис.43). За счет теплообмена через стеклянные стенки закрытого баллона начинается медленное изохорическое нагревание охлажденного воздуха в нем. При этом давление в баллоне растет, и уровни жидкости в манометре постепенно расходятся до тех пор, пока температура внутри баллона не станет равной комнатной:  $T_2 = T_1$ . В этот момент давление воздуха в баллоне станет равным

$$p_2 = p_0 + \rho g h_2 \quad (91)$$

Процессы, протекающие в системе, изображены на рис.44. В момент окончания адиабатного расширения в баллоне останется часть воздуха с массой  $m_1$ , занимавшая первоначально объем  $V_1$ , меньший объема баллона  $V_B$ . В момент окончания изохорического нагревания температура воздуха в баллоне сравнивается с комнатной:  $T_2 = T_1$ .

Запишем для газа, остающегося в баллоне, уравнения адиабатического (89) и изохорического процессов,  $T_1 p_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T' p_0^{(1-\gamma)/\gamma}$  и  $\frac{p_0}{T'} = \frac{p_2}{T_1} = \frac{p_2}{T_1}$ , а затем устраним неизвестное отношение температур

$\frac{T'}{T_1} = \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} = \frac{p_0}{p_2}$ . Логарифмируя это уравнение, находим  $\frac{1-\gamma}{\gamma} \ln \left( \frac{p_1}{p_0} \right) = \ln \left( \frac{p_0}{p_2} \right)$ , откуда

$\gamma = \frac{\ln(p_1 / p_0)}{\ln(p_1 / p_2)}$ . Подставляем сюда формулы (90) и (91):

$$\gamma = \frac{\ln(p_1 / p_0)}{\ln(p_1 / p_0) - \ln(p_2 / p_0)} = \frac{\ln \left( 1 + \frac{\rho g h_1}{p_0} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{\rho g h_1}{p_0} \right) - \ln \left( 1 + \frac{\rho g h_2}{p_0} \right)} . \quad (92)$$

Уровни жидкости (воды с плотностью  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ) раздвигаются в манометре М на рис.43 всего на  $h \approx 10 \div 20 \text{ см}$ , и избыточное давление газа  $\rho g h \approx 10^3 \text{ Па}$  много меньше атмосферного давления  $p_0 \approx 10^5 \text{ Па}$ . Поэтому величина  $x = \frac{\rho g h}{p_0} \approx 10^{-2} \ll 1$ , и в формуле (92) можно разложить все логарифмы в ряд, оставляя слагаемые только первого

порядка малости:  $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots \approx x$ . Тогда соотношение (92) даёт конечную формулу для вычисления по-

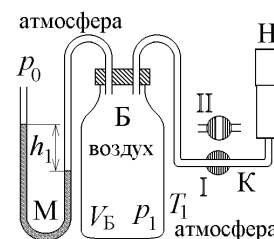


Рис.43

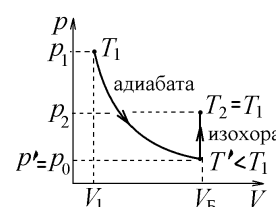


Рис.44

казателя адиабаты:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2} . \quad (93)$$

Точность его определения в данном эксперименте не слишком высока, и поэтому возникают отклонения от теоретически ожидаемого значения  $\gamma_{\text{эксп}} < \gamma_{\text{теор}} \approx 1,4$ . Это связано не только с тем, что свойства реального воздуха немного отличаются от свойств идеального газа, и состоит он не только из двухатомных молекул. Ошибка главным образом связана с несовершенством используемого оборудования. При установке пробки крана К в положение II (рис.43) остаются крохотные щели, и воздух понемногу продолжает вытекать из баллона при нагревании. Поэтому уровень  $h_2$  оказывается немного меньшим того уровня, который установился бы при идеально закрытом баллоне. Величина  $\gamma$ , измеренная на такой установке в соответствии с формулой (93), тоже окажется немного меньше истинной.

#### Порядок выполнения работы

1. Установить пробку крана К так, чтобы баллон Б, который находится под столом, сообщался с насосом Н (в положение I на рис.43).

2. Осторожно накачать воздух в баллон. Когда разность уровней жидкости в коленях манометра достигнет 10÷15 см, прекратить накачивание и повернуть пробку крана К в положение II, чтобы сосуд не сообщался с атмосферой. Пробка крана должна плотно прилегать к его стенкам и не давать утечки воздуха. Не забывайте об этом до конца эксперимента.

3. Через некоторое время, когда давление в баллоне окончательно установится и разность уровней в манометре перестанет уменьшаться, измерить разность  $h_1$  уровней жидкости в левом и правом коленях манометра.

4. Повернуть пробку крана, давая воздуху в сосуде расширяться наружу. Разность уровней жидкостей в манометре резко уменьшится двумя, следующими друг за другом скачками. Как только при втором скачке уровни жидкостей станут одинаковыми, ( $h_1 = 0$ ) пробку следует **немедленно и плотно** повернуть в кране К в положение II, закрывая баллон.

5. После того, как баллон будет закрыт пробкой, уровни жидкости в манометре снова начнут расходиться. Следует подождать, когда давление окончательно установится и разность уровней в манометре перестанет увеличиваться. Затем записать установившуюся разность уровней  $h_2$  воды в обоих коленях манометра.

6. Опыт повторить не менее  $n = 9$  раз для разных значений начальной величины  $h_1$ , лежащих в пределах 10÷15 см. Для каждого опыта вычислить показатель адиабаты  $\gamma_i$  по формуле (93)  $\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$ , а затем определить его среднее значение  $\langle \gamma \rangle$ . Все измеренные и вычисленные величины заносить в таблицу 1.

Таблица 1

$h_1$ , см									
$h_2$ , см									
$\gamma_i$									
$\langle \gamma \rangle =$	$\Delta\gamma =$					$\gamma_{\text{теор}} =$			

7. Определить погрешность полученного значения показателя адиабаты

$$\Delta\gamma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\gamma_i - \langle \gamma \rangle)^2}, \text{ где } n = 9 - \text{число измерений.}$$

8. Записать ответ в виде  $\gamma = \langle \gamma \rangle \pm \Delta\gamma$ :  $\gamma = \dots \pm \dots$

8. По формуле  $\gamma_{\text{теор}} = \frac{i+2}{i}$  вычислить теоретическое значение показателя адиабаты, принимая для воздуха  $i = 5$ , и сравнить полученный результат с  $\langle \gamma \rangle$ .

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 13

1. Сформулируйте I-е начало термодинамики и запишите его для идеального газа. Какими формулами определяются входящие в него работа и внутренняя энергия идеального газа?
2. Какой газ можно считать идеальным? Каким уравнением описывается его состояние, и какие величины входят в это уравнение?
3. Какой процесс называется изохорическим, изобарическим, изотермическим и адиабатическим? Будут ли эти процессы политропическими? Запишите уравнения этих процессов.
4. Дайте определение теплоемкости. Почему для разных процессов величина теплоемкости идеального газа различна? Как связаны теплоемкости изобарического и изохорического процесса?
5. Выведите уравнение Пуассона (88) для адиабатического процесса и получите из него уравнения (89).
6. Какая величина называется показателем адиабаты? Чему она равна для гелия He? Для кислорода O<sub>2</sub>? Для углекислого газа CO<sub>2</sub>?
7. Что происходит с внутренней энергией идеального газа, если он расширяется (или сжимается) а) изобарически? б) изотермически? в) адиабатически?
8. Влажность воздуха начинает возрастать. Что при этом происходит с его плотностью и показателем адиабаты? Почему?

9. Какие процессы происходят с воздухом в баллоне Б на рис.43 при выполнении работы: а) при накачивании воздуха? б) при открывании крана К? в) при его последующем закрывании? Почему именно эти процессы?
10. В какой момент следует закрыть кран при выполнении работы?
11. Почему после закрывания крана давление воздуха в сосуде начинает расти, и по какой причине этот рост останавливается?
12. Сделайте и объясните вывод уравнений (92) и (93) для определения показателя адиабаты  $\gamma$ .
13. Почему можно измерять давление по разности высот уровней жидкости в U-образной трубке манометра?
14. Какой должна быть величина  $\gamma$  теоретически, и по каким причинам вычисляемый в работе результат может отличаться от этого значения?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1973.- §§ 94-98.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.1 §§ 4-9.

## Работа №14. Определение коэффициента поверхностного натяжения воды методом отрыва кольца

Цель работы: на опыте определить коэффициент поверхностного натяжения воды при комнатной температуре.

### Теоретическое описание

На каждую молекулу жидкости действуют силы притяжения соседних молекул, образуя суммарную силу  $\vec{F}_{\text{мол}}$ . Для молекул "1", находящихся в глубине жидкости и полностью окруженных соседними молекулами, эта сила равна нулю (рис.45). Вблизи поверхности жидкости, для молекул "2", это окружение не полное, и возникают ненулевые силы  $\vec{F}_{\text{мол}}$ , стремящиеся втянуть эти молекулы вглубь жидкости. Такие молекулы образуют поверхностный слой конечной толщины, пропорциональной радиусу межмолекулярного взаимодействия.

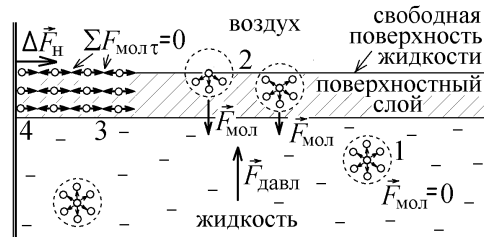


Рис.45

Чтобы молекула оказалась в поверхностном слое, ей надо совершить работу против сил  $\vec{F}_{\text{мол}}$  и увеличить свою потенциальную энергию. Суммарная дополнительная потенциальная энергия молекул из поверхностного слоя образует поверхностную энергию  $E_{\text{пов}}$  свободной поверхности жидкости (это поверхность, которая может свободно деформироваться, например – поверхность воды, налитой в стакан). Такая энергия пропорциональна площади  $S$  свободной поверхности:

$$E_{\text{пов}} = \sigma S. \quad (94)$$

Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  называется коэффициентом поверхностного натяжения и зависит от свойств двух разделенных общей поверхностью сред (на рис.45 это жидкость и воздух).

Сумма сил  $\sum \vec{F}_{\text{мол}}$  может создавать давление внутри жидкости, и уравновешена силами давления  $\vec{F}_{\text{давл}}$ , которые направлены перпендикулярно к свободной поверхности жидкости. На границе это давление равно атмосферному, и под плоской поверхностью жидкости с плотностью  $\rho$  давление будет равно сумме атмосферного и гидростатического давления:

$$p_{\text{жидк}} = p_{\text{атм}} + \rho gh. \quad (95)$$

Как видно из рис.45, для молекул "3" в поверхностном слое, которые окружены соседями со всех сторон, уравновешены касательные проекции межмолекулярных сил:  $\sum F_{\text{мол} \tau} = 0$ . Не равна нулю такая сумма для молекул "4", находящихся на краю свободной поверхности и окруженных соседними молекулами только с одной стороны. Она создаёт силу поверхностного натяжения

$$\Delta F_n = \sum F_{\text{мол} \tau} = \sigma \Delta l. \quad (96)$$

Эта сила: а) всегда приложена к контуру, ограничивающему свободную поверхность и направлена перпендикулярно к этому контуру; б) кроме того, она направлена по касательной к свободной поверхности; в) стремится уменьшить площадь свободной поверхности; г) пропорциональна длине  $\Delta l$  участка контура, ограничивающего свободную поверхность, на который она действует.

Работа против силы поверхностного натяжения идёт на увеличение поверхностной энергии. На рис.46 площадь поверхности увеличивается на  $\Delta S = \Delta l \Delta x$ , и внешняя сила  $F$ , равная силе поверхностного натяжения, совершает работу  $\Delta A_{\text{п}} = \Delta F_n \cdot \Delta x = \sigma \Delta l \Delta x = \sigma \Delta S = \Delta E_{\text{пов}}$ .



Рис.46

Таким образом, можно дать два определения коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$ :

- 1) он численно равен силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего свободную поверхность;
- 2) он численно равен работе, которую надо совершить, чтобы увеличить площадь свободной поверхности раздела сред на единицу.

На границе жидкости, налитой в сосуд, встречаются три поверхности: жидкость-воздух, жидкость-стенка, стенка-воздух (рис.47). Деформироваться и изгибаться может только свободная поверхность между жидкостью и воздухом. Поверхность стенки не свободна, но её молекулы также действуют на граничащие с ними молекулы жидкости, создавая силу  $\Delta \vec{F}_{\text{ст}}$ , приложенную, как и сила  $\Delta \vec{F}_n$ , к элементу  $\Delta l$  границы раздела сред в точке А (этот элемент перпендикулярен плоскости



Рис.2.47

рис.47). Сумма всех сил, действующих на элемент  $\Delta l$  должна быть равна нулю. Поверхность жидкости в месте касания со стенкой сосуда начинает искривляться, образуя угол  $\theta$  со стенкой. Этот угол называется краевым, а искривленный участок жидкости – мениском. Если угол  $0 \leq \theta < 90^\circ$ , как показано на рис.47, то говорят, что жидкость смачивает стенку. Если  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  (рис.48), то наблюдается явление несмачивания. Форма образующегося мениска зависит от свойств соприкасающихся сред. Например, если стенки сосуда смазать жиром, то налитая в него вода не будет их смачивать (рис.48).



Рис.48

Заметим, что под искривлённым участком поверхности жидкости изменяется давление (95). Под выпуклой поверхностью (рис.48) оно растёт, а под вогнутой (рис.47) – уменьшается на величину  $\Delta p = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны поверхности.

Для определения коэффициента поверхностного натяжения воды, налитой в чашку, в неё опускают кольцо с наружным диаметром  $D_1$  и с внутренним диаметром  $D_2$ , подвешенное на пружине с коэффициентом жёсткости  $k$ , висящей на кронштейне (рис.49,б).

Предварительно пружину следует проградировать, отводя чашку с водой в сторону, последовательно, по одному, добавляя на подвешенное кольцо маленькие грузы с массами  $\Delta m$  и измеряя удлинение пружины  $n$  в зависимости от суммарной массы грузов  $m_{гр} = \sum \Delta m$ , лежащих на кольце (рис.49,а). Измерение производят по линейке, отмечая на ней горизонтальное положение края кольца (рис.49,а). Если  $n_0$  – длина пружины без грузов ( $m_{гр} = 0$ ), то сила тяжести

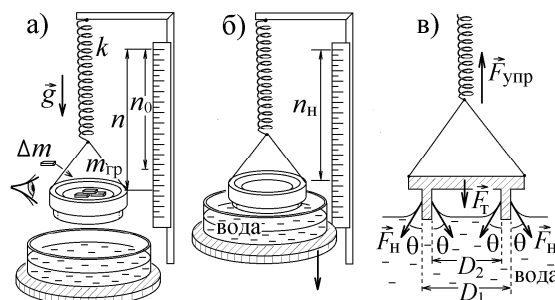


Рис.49

грузов уравновешена силой упругости растянутой пружины:  $F = m_{гр}g = k(n - n_0)$ .

По вычисленным значениям силы  $F$  и измеренным значениям длины  $n$  строится градуировочный график (рис.50). Так как массы грузов-разновесов измеряются в миллиграммах, то вычисленные значения силы тяжести  $F = m_{гр}g$  на этом графике удобно откладывать во внесистемных единицах, помня, что 1 мГ силы равен  $9,81 \cdot 10^{-6}$  Н.

После этого надо убрать все грузы-разновесы и поднять чашку с дистиллированной водой так, чтобы в воду погрузилось только кольцо. Оно должно быть тщательно протёрто, и его нельзя после этого трогать пальцами, чтобы не нанести на него слой жира, который приведёт к несмачиванию стенок кольца (рис.48), что исказит результат.

Чашку с водой медленно опускают вниз, и она увлекает за собой кольцо, растягивающее пружину (рис.49,б). Это происходит из-за того, что на кольцо с массой  $m_k$  действуют показанные на рис.49,в и уравновешивающие друг друга сила тяжести  $F_T = m_k g$ , сила упругости растягиваемой пружины  $F_{упр} = k\Delta n$  и сила поверхностного натяжения  $F_H = \sigma\pi(D_1 + D_2)$ , приложенная согласно (96) к двум кольцевым контурам с диаметрами  $D_1$  и  $D_2$ , ограничивающим свободную поверхность воды в месте её контакта со стенками кольца. Так как вода смачивает стенки кольца, то сила  $F_H$  направлена под краевым углом  $\theta$  к вертикали (рис.49,в). Поэтому

$$F_{упр} - m_k g = k(n - n_0) = F_H = \sigma\pi(D_1 + D_2) \cos \theta. \quad (97)$$

С ростом длины пружины  $n$  растёт величина  $\cos \theta$  в правой части (97) и уменьшается краевой угол  $\theta$ . Так как  $\cos \theta \leq 1$ , то в момент, когда длина пружины становится равной  $n = n_H$ , а краевой угол  $\theta = 0$ , кольцо отрывается от воды. Соотношение (97) принимает вид  $F_H = k(n_H - n_0) = \sigma\pi(D_1 + D_2)$ .

Измерив несколько раз величину  $n_H$  в момент отрыва кольца, и вычислив среднее значение  $\langle n_H \rangle$ , по градуировочному графику (рис.50) определяем величину  $F_H$  (в Н) и вычисляем коэффициент поверхностного натяжения воды:

$$\sigma = \frac{F_H}{\pi(D_1 + D_2)} \quad (98)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Штангенциркулем измерить наружный  $D_1$  и внутренний  $D_2$  диаметры кольца в пяти местах. Данные занести в таблицу 1.

2. Отвести нижнюю чашку с водой в сторону. Подвесить к пружине плоскую чашку, нижняя часть которой образует кольцо, и по шкале (линейке) определить положение  $n_0$  верхнего края подвешенной чашки (кольца) в ненагруженном состоянии ( $F = 0$ , рис.49,а). Смотреть на шкалу нужно строго горизонтально вдоль верхнего края чашки (рис.49,а). Об этом не следует забывать до конца эксперимента.

3. Взять одну гирьку (груз, цифры на котором указывают вес груза в миллиграммах силы), поместить её в центр чашки с кольцом, как показано на рис.49,а, и определить по шкале положение  $n$  её верхнего края.

4. Увеличивая нагрузку  $F = mg$  (последовательно добавляя по одной гирьке, не забывайте подсчитывать каждый раз общую сумму нагрузки в миллиграммах), определять по шкале положение  $n$  верхнего края чашки с кольцом. Данные измерений занести в таблицу 2.

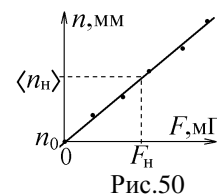


Рис.50

5. Снять все гирьки с чашки.

6. Поднять сосуд (нижнюю чашку) с водой до тех пор, пока поверхность воды не коснется нижнего края кольца. Следить за тем, чтобы этот край только смачивался, но не опускался вглубь воды, чтобы вода не коснулась плоской поверхности над кольцом. Затем, очень медленно и осторожно опуская сосуд, уловить равновесие (система находится в покое) **перед отрывом кольца**, и заметить по шкале положение  $n_n$  верхнего края чашки с кольцом (рис.49,б). Измерения проделать не менее 5 раз и найти среднее арифметическое значение  $\langle n_n \rangle$ . Данные занести в таблицу 1.

7. Осторожно снять кольцо с пружины и положить на подставку.

8. Построить график градуировки пружины  $n(F)$ , принимая за начало координат значение  $n_0$ . Вид графика представлен на рис.50.

9. Зная растяжение пружины  $\langle n_n \rangle$  под действием силы поверхностного натяжения, по построенному графику определить ее значение  $F_n$  в миллиграммах силы, а затем перевести в ньютоны.

10. Переведя все величины в систему СИ, по формуле (98) вычислить коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{F_n}{\pi(\langle D_1 \rangle + \langle D_2 \rangle)}.$$

Таблица 1

Номер опыта	$D_1$ , м	$D_2$ , м	$n_n$ , мм
1			
2			
3			
4			
5			
Средние значения	$\langle D_1 \rangle = \dots\dots\dots$ м	$\langle D_2 \rangle = \dots\dots\dots$ м	$\langle n_n \rangle = \dots\dots$ мм

Таблица 2

$m$ , мг												
$F = mg$ , мГ												
$F = mg$ , Н												
$n$ , мм												
$F_n = \dots\dots\dots$ Н	$\sigma = \dots\dots\dots$ Н/м											

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 14

- По какой причине образуется поверхностный слой у жидкой среды и чем определяется его толщина? Имеется ли такой слой у идеального газа? У твердого тела?
- Что такое свободная поверхность жидкости и контур, ограничивающий свободную поверхность? Покажите их для воды, налитой в стакан.
- Чему равна поверхностная энергия свободной поверхности воды, налитой в стакан с диаметром  $D$ ?
- Чему равна сила поверхностного натяжения для воды, налитой в стакан? По какой причине она возникает? К чему она приложена и куда направлена?
- Дайте два определения коэффициента поверхностного натяжения. В каких единицах он измеряется?
- Масса молекулы мыла больше, чем у молекулы воды, поэтому кусок мыла тонет в воде. По какой причине мыльная плёнка всплывает на её поверхность?
- Какую работу надо совершить, чтобы, как показано на рис.А, растянуть на ширину  $\Delta x$  рамку с натянутой на неё тонкой мыльной плёнкой, имеющей коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ ?
- Что называется краевым углом? Что такое мениск, и по каким причинам он образуется на краю поверхности жидкости?
- Какое явление называется смачиванием и несмачиванием?
- С какой целью в данной работе делается градуировочный график (рис.50), и как этот график используется для определения  $\sigma$ ?
- Сделайте и объясните вывод расчётной формулы (98).
- При опускании чашки с водой на рис.49,б кольцо на пружине жесткости  $k$  сместилось вниз на расстояние  $\Delta l$ . Чему будет равен при этом краевой угол  $\theta$ ? Как ведет себя этот угол при дальнейшем опускании чашки? В какой момент кольцо отрывается от воды?
- По каким причинам найденная в работе величина коэффициента поверхностного натяжения воды может отличаться от истинной? Почему кольцо надо тщательно протирать перед проведением измерений? Как несмачивание кольца водой повлияет на результат?

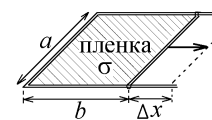


Рис.А

#### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989.- §§ 92, 93, 94.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.7 §2.





ся с постоянной установившейся скоростью

$$v_{\text{уст}} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{6\pi\eta r} V = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{6\pi\eta r} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{9} \frac{(\rho_2 - \rho_1)gr^2}{\eta}. \quad (102)$$

На небольшом участке от поверхности жидкости до риски скорость успевает установиться. Поэтому установившуюся скорость падения шарика определяют, измеряя секундомером время его падения от нанесенной на сосуд риски до дна сосуда (рис.54):  $v_{\text{уст}} = l/t$ .

По измеренной таким образом скорости, согласно (102), можно определить величину коэффициента динамической вязкости исследуемого раствора глицерина:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{(\rho_2 - \rho_1)gr^2}{v_{\text{уст}}}. \quad (103)$$

Заметим, что вязкость  $\eta$  уменьшается с ростом температуры.

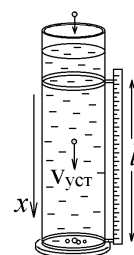


Рис.54

Точнее характер движения шарика можно определить, записав уравнение (101) в виде  $\frac{dv}{dt} = a - bv$ , где

$$a = \frac{(\rho_2 - \rho_1)Vg}{m} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{\rho_2}, \quad b = \frac{6\pi\eta r}{m} = \frac{6\pi\eta r}{\rho_2 V} = \frac{9\eta}{2\rho_2 r^2}.$$

Разделяя переменные, делая замену  $y = a - bv$  и считая, что в начальный момент времени  $t = 0$  скорость шарика равна  $v_0 = 0$ , интегрируем обе части полученного соотношения:

$$\int_0^v \frac{dv}{a - bv} = -\frac{1}{b} \int_a^{a-bv} \frac{dy}{y} = \int_0^t dt. \text{ Получим } -\frac{1}{b} \ln\left(\frac{a-bv}{a}\right) = t, \text{ откуда } \frac{a-bv}{a} = e^{-bt} \text{ и } v = \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}).$$

Экспонента быстро уменьшается со временем, и скорость шарика стремится к установившемуся значению  $v_{\text{уст}} = a/b$ . График зависимости скорости от времени показан на рис.55.

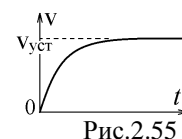


Рис.2.55

#### Порядок выполнения работы

1. Измерить микрометром диаметр  $d$  шарика в миллиметрах (мм) и определить его радиус  $r$  в метрах (м).
2. Осторожно отпустить шарик по центру сосуда непосредственно над поверхностью исследуемой жидкости и определить с помощью секундомера время  $t$  прохождения шарика между металлическими кольцевыми метками на сосудах (см.рис.54). Верхняя метка должна находиться не менее десяти сантиметров от поверхности жидкости.

3. Определить по линейке расстояние  $l$  между метками и вычислить установившуюся скорость шарика  $v_{\text{уст}} = l/t$  (в м/с).

4. По формуле (103) вычислить коэффициент динамической вязкости  $\eta$  в системе СИ (в Па·с). Учесть, что плотность исследуемой жидкости, налитой в сосуд  $\rho_1 = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  (глицерин), а плотность материала, из которого изготовлены шарики,  $\rho_2 = 11,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  (свинец).

5. Результаты опытов и расчетов занести в таблицу 1.

6. Повторить выполнение пунктов 1- 5 еще для четырех шариков.

Таблица 1.

№	$d$ , мм	$r$ , м	$l$ , м	$t$ , с	$v_{\text{уст}}$ , м/с	$\eta_i$ , Па·с	$\Delta\eta_i$ , Па·с	$(\Delta\eta_i)^2$ , Па <sup>2</sup> ·с <sup>2</sup>
1								
2								
3								
4								
5								

7. Рассчитать среднее значение коэффициента динамической вязкости:  $\langle\eta\rangle = \dots$

8. Определить случайные отклонения  $\Delta\eta_i = \eta_i - \langle\eta\rangle$  для каждого измерения и среднее квадратичное отклонение

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta\eta_i)^2}. \text{ Вычислить погрешность } \Delta\eta \text{ результата измерений: } \Delta\eta = S/\sqrt{n} = \dots$$

9. Записать результат в виде:  $\eta = (\langle\eta\rangle \pm \Delta\eta) \text{ Па·с}$   $\eta = (\dots \pm \dots) \text{ Па·с}$

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 15

1. По какой причине возникает вязкость жидкости? Как она проявляется?
2. Как образуется пограничный слой и чем обусловлены его границы?
3. Какое течение жидкости называется ламинарным? Какая сила со стороны жидкости действует при этом на обтекаемое тело? По какой формуле она вычисляется, и от каких параметров зависит?
4. Какая величина называется коэффициентом динамической вязкости?
5. Какая сила называется силой Стокса? В каких случаях она действует и как направлена?

6. Какое течение называется турбулентным? Что при таком движении происходит с пограничным слоем? Какая сила со стороны жидкости действует на движущееся в ней тело при турбулентном обтекании?
7. Сформулируйте критерий Рейнольдса и объясните, как при помощи этого критерия определить характер движения жидкости и действующую со стороны жидкости силу.
8. На рисунке укажите направления всех сил, действующих на падающий в вязкой жидкости шарик, и запишите их выражения. Меняется ли со временем величина этих сил?
9. Запишите уравнение движения (2-й закон Ньютона) для падающего в жидкости шарика и определите с его помощью установившуюся скорость движения шарика.
10. Почему путь  $l$ , пройденный шариком, надо отсчитывать не от поверхности жидкости, а от риски, находящейся ниже?
11. Выведите расчетную формулу (103) для коэффициента динамической вязкости.
12. По измеренной скорости падения одного из шариков и вычисленной вязкости  $\eta$  проверьте выполнение условия  $Re < Re_{кр}$  критерия Рейнольдса. Будет ли в этом случае на шарик действовать сила Стокса?
13. Две свинцовые дробинки 1 и 2 с разными радиусами  $r_1$  и  $r_2 > r_1$  сбросили без начальной скорости в вязкую жидкость. Нарисуйте графики зависимости скоростей этих шариков от времени падения  $t$  и сравните эти графики. Какой шарик быстрее упадет на дно сосуда и почему?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989.- §§ 78,79.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.5 §5,6.

## Работа №16. Определение длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха

**Цель работы:** ознакомиться с одним из методов определения микропараметров (средней длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха) через термодинамические параметры, исследовать процесс течения газа по капилляру.

### Теоретическое описание

При столкновении молекул газа сближаются их электронные оболочки, и силы кулоновского взаимодействия расталкивают молекулы (рис.56,а). Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром молекулы**  $d$ . Круг радиуса  $d$  с центром в молекуле имеет площадь  $\sigma = \pi d^2$ , которую называют **эффективным сечением молекулы**. Попадая в пределы этого круга, другие молекулы рассеиваются, отклоняются на молекуле-мишени (рис.56,б).

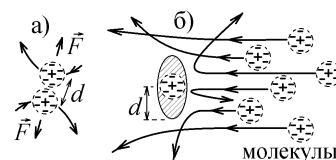


Рис.56

С ростом температуры растёт кинетическая энергия сталкивающихся молекул, пропорциональная температуре газа  $E_{кин} \sim T$ . Молекулы могут сблизиться на меньшее расстояние  $d$ . Но потенциальная энергия кулоновского отталкивания возрастает при сближении молекул настолько быстро (рис.57), что можно считать, что эффективный диаметр молекул практически не зависит от температуры:  $d = const$ .

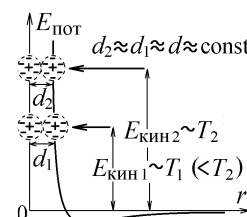


Рис.57

Среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя последовательными соударениями с другими молекулами газа называется **средней длиной свободного пробега молекулы**  $\lambda$ . Эта величина связана с концентрацией молекул газа  $n$  (числом молекул в единице объёма) соотношением

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}. \quad (104)$$

Величина  $\lambda$  определяется в данной работе по скорости втекания газа (воздуха) из атмосферы в сосуд через капилляр радиуса  $r$  (рис.58). Из-за микроскопической шероховатости стенок капилляра происходит **адгезия** (прилипание) молекул газа к поверхности стенок. Слой газа, непосредственно соприкасающийся со стенкой капилляра, неподвижен, а в центре капилляра газ движется с максимальной скоростью  $v_{max}$ . Разность скоростей слоёв газа приводит к процессу переноса импульса от центральной оси капилляра к его стенкам. Величина потока импульса, равная импульсу, переносимому молекулами газа за единицу времени через поперечную площадь  $S$ , в соответствии со вторым законом Ньютона равна величине **силы вязкого** или **внутреннего трения**

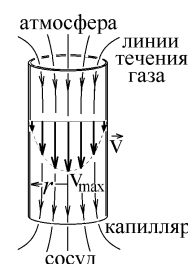


Рис.58

$$J_p = \frac{dp}{dt} = F_{тр} = \eta |grad v| S, \quad (105)$$

где коэффициент  $\eta$  называется **коэффициентом динамической вязкости** или просто **вязкостью** газа. Эта сила, действуя на газ, направлена против скорости газа в капилляре и замедляет его движение по капилляру.

Лабораторная установка показана на рис.59. В пробке, плотно закрывающей сосуд с водой, находится капилляр длины  $l$ , соединяющий воздух в сосуде с атмосферой. Внизу находится трубка, плотно закрытая краном "К", через которую вода может вытекать из сосуда. Первоначально давление  $p_0$  воздуха в сосуде равно давлению  $p_{атм}$  атмосферы снаружи. Давление жидкости внутри трубки, в сечении крана "К", складывается из давления воздуха в сосуде и гидростатического давления столба воды, имеющей плотность  $\rho_{воды}$  и высоту  $h$ , отсчитываемую от поверхности воды до крана (рис.59):  $p_0 + \rho_{воды}gh > p_{атм}$ . Поэтому если кран "К" открыть, то вода начинает под давлением вытекать из сосуда по трубке сплошной струей.

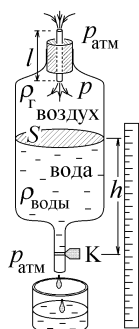


Рис.59

Объём воды в сосуде уменьшается, но вытекающий по капилляру воздух не успевает заполнить этот объём из-за малого радиуса капилляра. Давление  $p$  воздуха внутри сосуда уменьшается, и когда давление воды в сечении крана сравняется с атмосферным давлением снаружи,

$$p + \rho_{\text{воды}}gh = p_{\text{атм}}, \quad (106)$$

вода начнёт вытекать из трубки отдельными каплями. В этот момент надо измерить начальное значение высоты  $h_1$ .

Чтобы давление (106) не изменялось, объём капель вытекшей воды должен быть равен объёму воздуха, протекающего по капилляру.

Для вычисления этого объёма, выделим в капилляре воздушный цилиндр длины  $l$  с радиусом  $x$  и поперечным сечением  $S' = \pi x^2$  (рис.60). Согласно (105) на его боковую поверхность  $S_{\text{бок}} = 2\pi xl$  действует тормозящая сила вязкого трения:  $F_{\text{тр}} = -\eta \frac{dv}{dx} \cdot S_{\text{бок}}$ , где  $\frac{dv}{dx} < 0$ .

При установившемся течении центр масс такого воздушного цилиндра движется с постоянной скоростью, и сила  $F_{\text{тр}}$  уравнивается разностью сил давления на основания цилиндра:  $F_{\text{тр}} = (p_{\text{атм}} - p)S'$ . Отсюда, с учетом (105) и

$$(106), \text{ получаем дифференциальное уравнение } 2\eta l \frac{dv}{dx} = -\rho_{\text{воды}}gh \cdot x.$$

Разделяя в нем переменные, интегрируем, учитывая, что у стенок капилляра, при  $x = r$ , скорость движения воздуха  $v = 0$ :

$$\int_0^v dv = -\frac{\rho_{\text{воды}}gh}{2\eta l} \int_r^x x dx, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{\rho_{\text{воды}}gh}{4\eta l} (r^2 - x^2) \quad (107)$$

(скорости слоёв воздуха в капилляре меняются по параболическому закону). Разобьём теперь поперечное сечение капилляра на бесконечно узкие кольца радиуса  $x$  с толщиной  $dx$  и с площадью  $dS' = 2\pi x dx$ . За время  $\tau$  через эту площадь со скоростью  $v$  протечет объём газа  $dV = dS' \cdot v \tau$ , а объём воздуха, протекающего за время  $\tau$  через все сечение капилляра будет равен

$$V = \int_0^r v \tau \cdot 2\pi x dx = \frac{\pi \rho_{\text{воды}}gh \tau}{2\eta l} \int_0^r (r^2 - x^2) x dx = \frac{\pi \rho_{\text{воды}}gh r^4}{8\eta l} \tau \quad (108)$$

(эта формула называется формулой Пуазейля).

При плотно закрытой пробке капли вытекают из сосуда очень медленно. За время  $\tau$ , измеряемое секундомером, уровень воды в сосуде с площадью сечения  $S$  на рис.59 понизится незначительно, от уровня  $h_1$  до  $h_2$ , где  $h_1 - h_2 \ll h$ . Поэтому в формулу (108) можно подставить среднее значение  $h = (h_1 + h_2)/2$ . Приравняв объём вытекшей воды  $V = (h_1 - h_2)S$  и объём воздуха, попавшего в сосуд в соответствии с формулой Пуазейля (108), найдем расчётную формулу для коэффициента вязкости воздуха:

$$\eta = \frac{\pi r^4 \rho_{\text{воды}} g (h_1 + h_2) \tau}{16 l S (h_1 - h_2)}. \quad (109)$$

Заметим, что этот результат справедлив только при ламинарном течении воздуха по капилляру, когда слои газа движутся вдоль нигде не прерывающихся и плавно огибающих препятствия линий, как показано на рис.58. Проверить, выполнен ли ламинарный характер течения, можно при помощи критерия Рейнольдса: безразмерный параметр Рейнольдса  $Re$  не должен превышать критического значения  $Re_{\text{кр}}$ . Если  $Re \geq Re_{\text{кр}}$ , то возникают турбулентные вихри (рис.53,б), и полученные формулы (108) и (109) не справедливы.

В данной работе в случае течения газа (воздуха) с плотностью  $\rho_{\text{газа}}$  по цилиндрическому капилляру, параметр

$$\text{Рейнольдса вычисляется по формуле } Re = \frac{\rho_{\text{газа}} \rho_{\text{воды}} g (h_1 + h_2) r^3}{8\eta^2 l}, \text{ а } Re_{\text{кр}} = 2000 - 20000. \quad (110)$$

Для вычисления средней длины свободного пробега  $\lambda$  используем формулу для вязкости газа, получаемую при анализе явлений переноса:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \rho_{\text{газа}} \langle v \rangle. \quad (111)$$

Подставляя в (111) формулу для средней скорости молекул газа  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$  и выражение для плотности газа

$\rho_{\text{газа}} = \frac{m_{\text{газа}}}{V} = \frac{p \mu}{RT}$ , полученное из уравнения состояния, находим следующую расчётную формулу для  $\lambda$ :

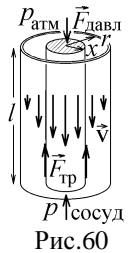
$$\lambda = \frac{3\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi RT}{8\mu}}. \quad (112)$$

Другая форма записи уравнения состояния газа позволяет выразить концентрацию его молекул как

$$n = p/kT, \quad (113)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Из формул (104) и (113) находим расчётную формулу для эффективного диаметра молекулы:

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2} \pi \lambda p}}. \quad (114)$$



### Порядок выполнения работы

1. Открыть кран К. Дождавшись, когда вода начнет вытекать каплями, включить секундомер и одновременно заметить положение уровня воды  $h_1$  в сосуде по закрепленной сбоку линейке (см.рис.59).
2. Когда уровень воды в сосуде, **вытекающей через нижнюю трубку отдельными каплями**, уменьшится приблизительно на 1 см, одновременно закрыть кран и остановить секундомер.
3. Записать время вытекания  $\tau$  и новый уровень  $h_2$  воды. Расстояния  $h_1$  и  $h_2$  должны быть измерены от поверхности жидкости до крана К (рис.61).
4. Измерить термометром температуру  $t$  °С, найти термодинамическую температуру  $T = (t^\circ + 273)$ , К, барометром измерить атмосферное давление  $p$ .

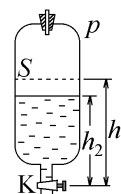


Рис.61

5. Вычислить коэффициент динамической вязкости воздуха  $\eta$  по формуле (109).
6. Вычислить среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  молекул воздуха по формуле (112).
7. Вычислить эффективный диаметр молекул воздуха  $d$  по формуле (114).

Во всех этих формулах  $r$  – радиус капилляра,  $l$  – длина капилляра,  $S$  – площадь сечения сосуда с водой. Их величины приведены на установке.  $\rho_{\text{воды}} = 1000 \text{ кг/м}^3$  – плотность воды,  $R = 8,31 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$  – универсальная газовая постоянная,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$  – постоянная Больцмана,  $\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$  – молярная масса воздуха,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

8. Данные измерений и вычислений занести в таблицу:

$h_1$ , м	$h_2$ , м	$\tau$ , с	$T$ , К	$p$ , Па	$\eta$ , Па·с	$\lambda$ , м	$d$ , м

### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 16

1. Какие величины называются эффективным диаметром  $d$  и средней длиной свободного пробега  $\lambda$  молекулы? Как эти величины зависят от температуры и давления?
2. Газ совершает изобарический (или изотермический) процесс, при котором его температура  $T$  (или давление  $p$ ) увеличиваются в два раза. Что при этом происходит с величинами  $d$  и  $\lambda$ ?
3. Какая величина называется коэффициентом динамической вязкости газа  $\eta$ ? Как величина  $\eta_{\text{газа}}$  зависит от давления  $p$  и температуры  $T$ ?
4. Какие явления называются явлениями переноса? Приведите примеры таких явлений.
4. Чем вызвано появление вязкого (внутреннего) трения? Как направлена и чему равна сила вязкого трения?
5. Объясните вывод формулы Пуазейля (108). При каком условии она справедлива, и чем является величина  $V$  в этой формуле?
6. При открывании крана “К” на установке (рис.59) вода сначала вытекает из сосуда струей, а потом – отдельными каплями. Почему? Чему равно при этом давление воздуха внутри сосуда?
7. Через капилляр в сосуд втекает воздух с объемом  $V_{\text{возд}} = 1 \text{ см}^3$ . Сколько капель воды выльется при этом из сосуда, если каждую каплю можно считать шариком с радиусом 1 мм?
8. Сделайте и объясните вывод расчетных формул (109), (112) и (113) для величин  $\eta$ ,  $\lambda$  и  $d$ .
9. Сравните вычисленные величины  $\eta$ ,  $\lambda$  и  $d$  для воздуха с экспериментальными данными для этих величин при температуре 20°C, которые можно найти в Интернете. Чем могут быть вызваны отклонения от правильных значений?
10. Какое течение газа называется ламинарным? Как проверить условие ламинарности с помощью критерия Рейнольдса? Сделайте эту проверку, проведя вычисления с помощью формулы (110).

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989.- §§ 62, 78-80.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.5 §1,3,5,6.

### Работа №21. Исследование электрического поля проводника с током

**Цель работы:** изучение свойств электрических полей в проводящей жидкости, получение графического изображения поля с помощью эквипотенциальных поверхностей и силовых линий.

#### Теоретическое описание

Пространство в кювете между двумя металлическими электродами (анодом и катодом) залито слабопроводящей жидкостью с малой удельной проводимостью  $\sigma$ . На электроды подано напряжение  $U = \phi_a - \phi_k = \mathcal{E} - Ir$ , и между ними возникает электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$  (рис.62). Линии напряженности  $\vec{E}$  (силовые линии поля) начинаются на положительно заряженном электроде (аноде) и заканчиваются на отрицательно заряженном катоде. Вдоль них, в жидкости протекает, электрический ток с плотностью  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Жидкость между проводниками является однородным проводником (в нём нет источников сторонней ЭДС). В таком случае поле  $\vec{E}$  является электростатическим потенциальным полем, создаваемым разностью потенциалов  $\Delta\phi$ .

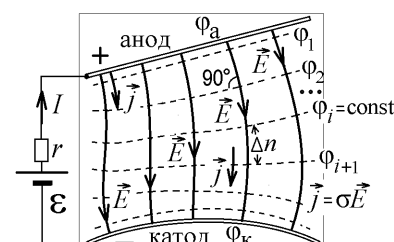


Рис.62

Напомним, что разность потенциалов определяет изменение потенциальной энергии заряда  $q$ , находящегося в электрическом поле:  $\Delta W = q\Delta\phi$ . Сила, действующая на положительный заряд единичной величины, будет напряженностью поля  $\vec{E} = \vec{F}/q = -\text{grad } W/q$ , а энергия такого заряда – потенциалом электрического поля  $\phi = W/q$ . Связь напряженности и потенциала  $\boxed{\vec{E} = -\text{grad } \phi}$ . Градиент любого скалярного потенциала  $\phi$  вычисляется по формуле  $\text{grad } \phi \equiv \vec{\nabla}\phi = \vec{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$ . Проекции вектора напряженности  $E_x = -\partial\phi/\partial x$ ;  $E_y = -\partial\phi/\partial y$ ;  $E_z = -\partial\phi/\partial z$ . Величина напряженности  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$ .

Потенциальным называется поле, для которого в каждой точке однозначно определена величина потенциала  $\phi$ , и для которого можно определить потенциальную энергию  $E_{\text{пот}}$ . Силы, вызываемые такими полями консервативны, т.е. могут быть определены соотношением  $\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{пот}}$ . Условие потенциальности электростатического поля выражается теоремой о циркуляции: циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю:  $\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  (рис.63).



Рис.63

Линии  $\vec{E}$  потенциального электростатического поля начинаются и заканчиваются на электрических зарядах, или уходят в бесконечность. Они не могут образовать замкнутую линию.

Поверхности, во всех точках которых потенциал одинаков,  $\phi = \text{const}$ , называются эквипотенциальными поверхностями (на рис.62 они показаны штриховыми линиями). Линии  $\vec{E}$  электростатического поля обязательно перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, и, как видно из рис.62, их надо рисовать изогнутыми, составляющими угол  $90^\circ$  с каждой поверхностью  $\phi = \text{const}$ . Вектор  $\text{grad } \phi$  направлен в сторону увеличения потенциала, а линии  $\vec{E}$  – в сторону уменьшения потенциала (рис.64). Чем гуще (плотнее) расположены линии  $\vec{E}$ , тем больше величина напряженности  $E$ .

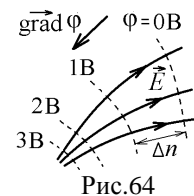


Рис.64

Величину напряженности можно приближенно вычислить по формуле

$$E = \Delta\phi / \Delta n, \quad (115)$$

где  $\Delta\phi$  – разность потенциалов между двумя близко расположенными эквипотенциальными поверхностями, а  $\Delta n$  – расстояние между ними по нормали (рис.64). Этот отрезок совпадает с отрезком силовой линии (на рис.62  $\Delta\phi = \phi_{i+1} - \phi_i$ ). Величина  $E$  различна в разных точках силовой линии и увеличивается, если линии  $\vec{E}$  сближаются друг к другу.

#### Порядок выполнения работы

1. Перерисовать с установки **в натуральную величину** координатные линейки и электроды на листе миллиметровой бумаги, который в виде графика, который прилагается к отчету о выполнении работы.

2. Определить потенциал анода  $\phi_A$ , и записать его величину.

3. Найти эквипотенциальную поверхность со значением  $\phi_1 = 0,8\phi_A$ . Для этого следует поместить острие зонда в плоский сосуд с жидкостью над одной из вертикальных линий у миллиметровой бумаги, расположенной под прозрачным дном сосуда, и, перемещая его вдоль этой линии, найти координаты точки, в которой потенциал имеет значение  $\phi_1$ . Отметить эту точку на Вашем графике (рис.65). Помещая зонд последовательно над второй, над третьей и т.д. вертикальными линиями миллиметровой бумаги и перемещая зонд вдоль них, найти точки с тем же потенциалом  $\phi_1$ .

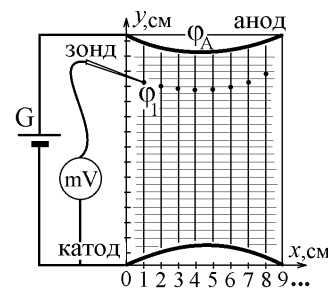


Рис.65

4. Соединив на своем рисунке точки с потенциалом  $\phi_1$ , вы получите первую из искомых эквипотенциальных поверхностей (на плоском листе она будет эквипотенциальной линией).

5. Аналогичные измерения проделать для других значений потенциалов, например,  $\phi_2 = 0,6\phi_A$ ,  $\phi_3 = 0,5\phi_A$ ,  $\phi_4 = 0,4\phi_A$ ,  $\phi_5 = 0,2\phi_A$ . Желательно выбрать их так, чтобы расстояния между эквипотенциальными линиями были приблизительно одинаковыми. На графике должно быть нарисовано не менее пяти эквипотенциальных линий.

6. Аккуратно, соблюдая взаимную ортогональность, нарисовать на бумаге систему силовых линий (не менее пяти), указав стрелками их направление, как показано на рис.62.

7. Вычислить по формуле (115) значения напряженности  $E$  во всех точках пересечения одной из силовой линии с эквипотенциальной поверхностью.

#### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 21

1. Какие поля называются потенциальными? Почему потенциально электростатическое поле и как записать условие его потенциальности?
2. Каков физический смысл потенциала? Разности потенциалов?
3. Как определяется и какой физический смысл имеет вектор напряженности  $\vec{E}$  электростатического поля? Как он связан с потенциалом?
4. Как вычислить градиент потенциала, его направление и его величину?





9. Рассчитайте среднее значение удельного сопротивления  $\langle \rho \rangle$ .

10. Определите случайные отклонения  $\Delta \rho_i = \rho_i - \langle \rho \rangle$  для каждого измерения  $i = 1, 2, 3$  и среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta \rho_i)^2}$ . Вычислите погрешность  $\Delta \rho$  результата измерений:  $\Delta \rho = S/\sqrt{3}$ , а также относительную погрешность  $E = \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} \cdot 100\%$ . Результаты вычислений занести в таблицу 1.

11. Записать результат в виде:  $\rho = (\langle \rho \rangle \pm \Delta \rho)$  Ом·м:  $\rho = (\dots \pm \dots)$  Ом·м

#### Определение сопротивления гальванометра с помощью моста Томсона.

1. Схема моста Томсона показана на рис.70. Для включения такой схемы необходимо отжать клавишу S2 (положение – мост)

2. Переключатель S1, разрывающий диагональ моста, поставьте в нижнее положение; отожмите клавишу S3, при этом в плечо моста подключается первый резистор  $R_{01}$ .

3. Регулятором R (рис.71) установите стрелку вольтметра так, чтобы она не зашкаливала.

4. Поставьте переключатель S1 в верхнее положение, при этом показание вольтметра изменится; передвигая по проводу подвижный кронштейн 5 (рис.71), добейтесь первоначального показания вольтметра (как и при нижнем положении переключателя S1), т.е. уравновесьте мост.

5. Проверьте равновесие моста переводом переключателя S1 в нижнее и вновь в верхнее положение. Стрелка вольтметра при этом не должна изменять своего положения.

6. Запишите значение сопротивления подключенного резистора  $R_{01}$  и длину проводника  $l_1$  от основания до риски на подвижном кронштейне в таблицу 2.

7. Верните переключатель S1 в нижнее положение, разрывая диагональ моста. Нажмите клавишу S3, тем самым подключая в плечо моста второй резистор  $R_{02}$ . Переведите переключатель S1 в верхнее положение, замыкая диагональ моста. Показание вольтметра изменится. Снова уравновесьте мост передвижением подвижного кронштейна. Проверьте равновесие моста переводом переключателя S1 в нижнее и вновь в верхнее положение. Стрелка вольтметра при этом не должна изменять своего положения.

8. Запишите значение сопротивления подключенного резистора  $R_{02}$  и новую длину проводника  $l_1$  от основания до риски на подвижном кронштейне в таблицу 2.

9. Повторите пункты 2–8 при двух других значениях напряжения, изменяя его регулятором R.

10. Сопротивление гальванометра вычислите по формуле  $R_x = R_0 \frac{l_1}{l - l_1}$ , где  $l = 51$  см – длина всего провода.

9. Рассчитайте среднее значение сопротивления  $\langle R_x \rangle$ .

11. Определить случайные отклонения  $\Delta R_{xi} = R_{xi} - \langle R_x \rangle$  для каждого измерения  $i = 1 - 6$  и среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta R_{xi})^2}$ . Вычислите погрешность  $\Delta R_x$  результата измерений:  $\Delta R_x = S/\sqrt{6}$ , а также относительную погрешность  $E = \frac{\Delta R_x}{\langle R_x \rangle} \cdot 100\%$ . Результаты вычислений занести в таблицу 1.

11. Записать результат в виде:  $R_x = (\langle R_x \rangle \pm \Delta R_x)$  Ом·м:  $R_x = (\dots \pm \dots)$  Ом·м

Измерения и окончательный результат занесите в таблицу 2

Таблица 2.

№ п/п	$R_0$ , Ом	$l_1$ , см	$R_{xi}$ , Ом	$\langle R_x \rangle$ , Ом	$\Delta R_{xi}$ , Ом	$\Delta R_x$ , Ом	E, %

#### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 22

1. Объясните механизм появления электрического тока в металлах. Как движутся свободные электроны в металлическом проводнике, подключенном к источнику напряжения? Почему мала скорость их направленного движения?

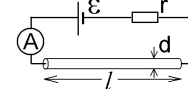
2. По какой причине возникает электрическое сопротивление? Какую величину называют удельным сопротивлением? От чего она зависит?

3. Как вычислить сопротивление однородного участка проводника, зная его размеры?

4. Сформулируйте закон Ома для однородного участка проводника в обычной и в локальной форме.

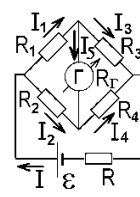


5. Проволока подключена к источнику постоянной ЭДС  $\varepsilon$  с внутренним сопротивлением  $r$ . Длину  $l$  проволоки увеличили в 4 раза. Как надо изменить, диаметр  $d$  проволоки, чтобы текущий по проволоке ток не изменился?



6. Сформулируйте правила Кирхгофа. Объясните, как ими пользоваться.

7. Запишите систему уравнений правил Кирхгофа для определения токов в неуровновешенной мостовой схеме, изображенной на рис.А.



8. Сделайте вывод условия равновесия мостовой схемы.

9. Чем отличаются мостовые схемы Уитстона и Томсона? В каких случаях они применяются? Можно ли использовать схему Томсона вместо схемы Уитстона?

10. Определите величину и направление тока, протекающего через сопротивление  $R$  на рис.Б, где  $\varepsilon_1 = 10$  В,  $\varepsilon_2 = 5$  В,  $R = 10$  Ом, а внутренние сопротивления обоих источников ЭДС равны  $r = 1$  Ом.

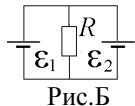


Рис.Б

11. Запишите систему уравнений (правил Кирхгофа) для определения токов, протекающих в разветвленной цепи, изображенной на рис.В.

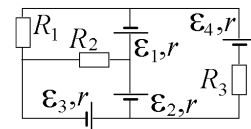


Рис.В

### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 31-33, 35,36.
- Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.5 §§ 1-7.

## Работа №23. Релаксационные колебания

**Цель работы:** исследование характера релаксационных колебаний в схеме с газоразрядной лампой и определение их параметров.

### Теоретическое описание

Газоразрядная лампа, изображенная на рис.72, заполнена неоном. При среднем положении ключа  $K$  к ней подключен реостат с общим сопротивлением  $R$ , по которому течет ток  $I_1 = \varepsilon / (R + r)$ , созданный источником постоянной ЭДС. На лампу подается напряжение  $U$  с части реостата, имеющей сопротивление  $R_1$  (рис.72). Передвигая движок реостата вправо, увеличиваем величину сопротивления  $R_1$  и напряжения  $U = I_1 R_1$ . Нейтральный газ – достаточно хороший диэлектрик, и ток в лампе практически отсутствует.

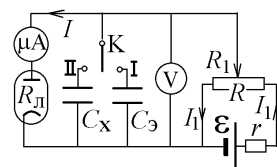


Рис.72

Но когда напряжение  $U$  достигает большой величины, работа по ускорению электрона, вылетевшего с анода, превышает энергию ионизации атома неона,  $A = eU > E_{\text{ионизации}}$ . Налетающий электрон выбивает электрон из атома. Далее два электрона ускоряются, выбивают еще два электрона и т.п. Число электронов, попадающих на анод, и ионов, перемещающихся к катоду, растет лавинообразно (рис.73). Поэтому резко растет ток  $I$ , протекающий через лампу и резко уменьшается её сопротивление  $R_{\text{л}} = U / I$ . Лампа “зажигается”. Помимо ионизации происходит процесс возбуждения атомов, которые начинают испускать световые фотоны. Газ светится.

Если теперь уменьшать напряжение  $U$ , то в какой-то момент энергии электронов не хватает для ионизации, и лампа “гаснет”. Зажечь лампу всегда труднее: необходима большая энергия для вылета электрона из холодного катода, и необходимо создать в лампе большое число свободных электронов и ионов. В “горящей” лампе их много, катод нагрет большим током  $I$ , и поэтому

напряжение зажигания  $U_3$  всегда больше напряжения гашения  $U_г$ .

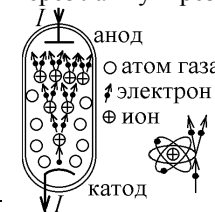


Рис.73

Ключом  $K$  подключим в цепь конденсатор с ёмкостью  $C$ . Если лампа не горит, то её сопротивление  $R_{\text{л}} \gg R_1$ . Конденсатор начинает заряжаться. Пусть конденсатор подсоединен к источнику ЭДС через сопротивление  $R$  (рис.74,а). Правило Кирхгофа для этого контура  $U_C + IR = \varepsilon$ . Подставляем  $I = dq/dt$ ,  $U_C = q/C$ , разделяем переменные и интегрируем полученное уравнение

$$\int_0^q \frac{dq}{q - \varepsilon C} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt, \text{ что даёт } \ln\left(\frac{\varepsilon C - q}{\varepsilon C}\right) = -\frac{t}{RC}. \text{ Отсюда следует, что заряд и напряже-}$$

ние на конденсаторе растут со временем экспоненциально:  $q(t) = CU_C(t) = \varepsilon C(1 - \exp(-t/RC))$ .

Наша схема включения конденсатора более сложна (рис.74,б). Правила Кирхгофа для неё имеют вид

$$\begin{cases} I + I_1 = I_2; \\ I_2(R - R_1 + r) + U_C = \varepsilon; \\ U_C - I_1 R_1 = 0. \end{cases}$$

Исключая токи  $I_1$  и  $I_2$ , приходим к уравнению  $I = \frac{dq}{dt} = \alpha - \beta q$ , где  $\alpha = \frac{\varepsilon}{R - R_1 + r}$ ,  $\beta = \frac{R + r}{CR_1(R - R_1 + r)}$ .

Как и раньше, разделяем переменные и интегрируем,  $\int \frac{dq}{\alpha - \beta q} = \int dt$  (\*),

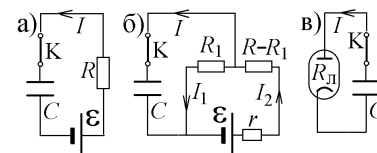


Рис.74



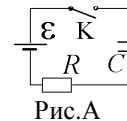
## 5. Результаты занесите в таблицу 2.

Таблица 2.

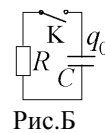
$t_3, \text{с}$	$t_x, \text{с}$	$T_3, \text{с}$	$T_x, \text{с}$	$C_3, \text{мкФ}$	$C_x, \text{мкФ}$

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 23

1. Первоначально конденсатор с ёмкостью  $C$  в изображенной на рис.А цепи был не заряжен. Ключ  $K$  замкнули, подсоединяя конденсатор к источнику постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$  через сопротивление  $R$ . Используя правило Кирхгофа, запишите уравнение зарядки конденсатора, решите его, находя зависимость напряжения на обкладках конденсатора  $U_C$  от времени  $t$ . Нарисуйте график зависимости  $U_C = U_C(t)$ .



2. Конденсатор с ёмкостью  $C$  в изображенной на рис.Б цепи имел заряд  $q_0$ . Ключ  $K$  замкнули. Используя правило Кирхгофа, вычислите закон изменения заряда на конденсаторе от времени и нарисуйте график зависимости  $q = q(t)$ .



3. Какую роль играет в данной работе заполненная неоновая лампочка? Почему в момент зажигания она начинает светиться? Как изменяются параметры цепи в момент зажигания и в момент гашения лампочки? Как процесс ионизации газа в лампочке влияет на протекающий через неё ток? Как меняется сопротивление лампы при её зажигании и гашении?

4. Почему при замыкании ключа  $K$  на рис.72 лампочка начинает мигать? Что при этом происходит с напряжением на обкладках конденсатора? Какая величина испытывает релаксационные колебания, и по какой причине?

5. Почему напряжение зажигания  $U_3$  газонаполненной лампы больше, чем напряжение её гашения  $U_Г$ ? Почему при обратном соотношении  $U_Г > U_3$  релаксационные колебания возникнуть не могут?

6. В электрической цепи для изучения релаксационных колебаний конденсатор ёмкостью  $C_1 = 3600 \text{ пФ}$  заменяют конденсатором с ёмкостью  $C_2 = 900 \text{ пФ}$ . Что произойдет при этом с периодом релаксационных колебаний?

7. Сделайте вывод расчетной формулы  $C_x = C_3 T_x / T_3$ .

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 24,25, 33, 35, 36, 84-88.

2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.4 §§1,2, гл.5 §§1,5-7.

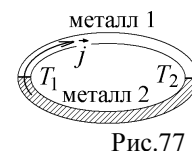
**Работа №24. Термоэлектрические явления**

Цель работы: ознакомление с термоэлектрическими явлениями, градуировка термопары и определение удельной термоэлектродвижущей силы.

Теоретическое описание

Исследуемая в работе термопара – это замкнутая цепь из проводников, изготовленных из **разных** металлов (рис.77). Если контакты (спай) проводников поддерживать при разных температурах  $T_1 \neq T_2$ , то в цепи возникает термоЭДС  $\mathcal{E}_{\text{термо}}$  и протекает термоэлектрический ток  $\vec{j}$ . Это – эффект Зеебека. Величина термоЭДС пропорциональна разности температур:  $\mathcal{E}_{\text{термо}} = \alpha(T)(T_1 - T_2)$ , где

$\alpha(T)$  – коэффициент, называемый удельной термоЭДС – это величина термоЭДС при разности температур двух спаев в  $\Delta T = 1 \text{ К}$ .



Вывод расчетной формулы. Получить зависимость  $\mathcal{E}_{\text{термо}}$  от разности температур  $T_1 - T_2$  достаточно просто, если считать газ свободных электронов в металле идеальным газом. Весь перешедший из одного металла в другой заряд, т.е. перешедшие электроны могут распределиться только по поверхности металла. Внутри объема плотность заряда остается равной нулю и концентрации электронов  $n_1$  и  $n_2$  не меняются. При появлении термоэлектрического тока через спай I, нагретый до температуры  $T_1$  за какое-то время переносится заряд  $-eN$ , т.е.  $N$  электронов, занимавших в металле 1 объем  $V_1 = N/n_1$  переходят в металл 2, где занимают объем  $V_2 = N/n_2$  (рис.78). Происходит изотермическое изменение объема электронного газа. Работа, совершаемая над газом при изотермическом процессе  $A_1 = \nu RT_1 \ln(V_2/V_1) = Nk_B T_1 \ln(n_1/n_2)$ , где  $k_B$  – постоянная Больцмана. При переходе такого же числа электронов



через второй спай II при температуре  $T_2$  будет совершена работа  $A_2 = Nk_B T_2 \ln(n_2/n_1)$ . Суммарная работа над электронным газом будет работой термоЭДС (по определению ЭДС  $\mathcal{E}$  равна работе, совершаемой над положительным зарядом единичной величины):  $eN\mathcal{E}_{\text{термо}} = A_1 + A_2 = Nk_B(T_1 - T_2) \ln(n_1/n_2)$ . Отсюда

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \frac{k_B}{e} \ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \cdot (T_1 - T_2) = \alpha(T) \cdot (T_1 - T_2), \text{ где } e - \text{величина заряда электрона.}$$

В действительности полученная формула дает лишь **качественное** объяснение зависимости термоЭДС от температур спаев термопары. Электронный газ в металле не является классическим газом, подчиняющимся распределению Максвелла-Больцмана. Правильное объяснение контактных термоэлектрических явлений может быть получено только в квантовой теории.

На поверхности любого металла образуется двойной электрический слой, связанный с тем, что распределение плотности свободных электронов не совпадает с распределением плотности положительных ионов. Толщина этого слоя  $d$  не превышает нескольких межатомных расстояний, и внутри слоя возникает электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}_{\text{сл}}$ , препятствующее вылету свободных электронов с зарядом  $-e$  из металла (рис.79). Чтобы электрон хотя бы с нулевой скоростью покинул металл, ему надо преодолеть запирающее поле, совершив работу  $A_{\text{вых}} = eE_{\text{сл}} \cdot d$ . Такая минимальная энергия, которую надо сообщить электрону, для вылета, называется работой выхода электрона из металла. Энергия электрона  $E_{\text{м}}$  внутри металла меньше энергии электрона  $E_{\text{в}}$  вне металла, в вакууме, на величину работы выхода:  $A_{\text{вых}} = E_{\text{в}} - E_{\text{м}}$ .

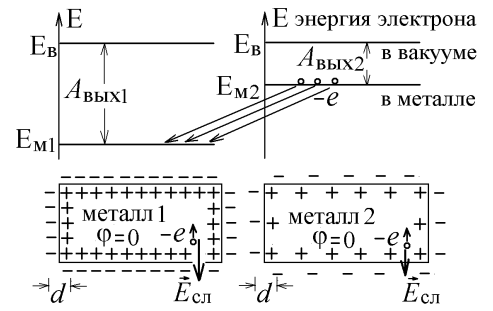


Рис.79

Концентрации  $n_1$  и  $n_2$  электронов и величины работы выхода  $A_1$  и  $A_2$  в разных металлах различны, причем оба металла на рис.79 не заряжены и имеют одинаковый потенциал. Если их соединить (спаять), то энергии электронного газа в общем проводнике выравниваются из-за того, что электроны будут переходить из металла с меньшей работой выхода, где их энергия больше, в металл с большей работой выхода, заряжая металл с большей работой выхода отрицательно, а металл с меньшей работой выхода — положительно (рис.2.79). Электроны переносят заряд, который распределяется по поверхности металлов, в том числе по поверхности их соприкосновения (спая, рис.2.80). Внутри объема плотность заряда остается равной нулю, и концентрации электронов  $n_1$  и  $n_2$  не меняются. Если первоначально потенциал обоих металлов был равен нулю, то теперь они приобретают потенциалы  $\phi_1 < \phi_2$  и между ними создается контактная разность потенциалов, пропорциональная разности работ выхода:

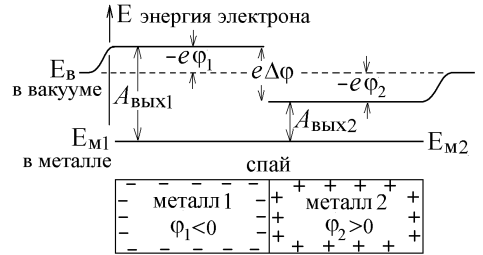


Рис.80

$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = (A_{\text{вых}1} - A_{\text{вых}2})/e$ , которую называют внешней контактной разностью потенциалов.

Если два спая термопары имеют одинаковую температуру, то в замкнутой цепи контактные разности потенциалов, играющие роль ЭДС, уравновешивают друг друга, и ток в термопаре отсутствует (рис.81,а). Если температуры спаев разные, то имеется три причины возникновения термоЭДС.

1) Величина работы выхода слабо зависит от температуры металла. Величина разности работ выхода растет с ростом температуры, и контактные разности потенциалов спаев, нагретых до разных температур, различны (рис.81,б). В цепи возникнет эффективная ЭДС  $\varepsilon = \Delta\phi_1(T_1) - \Delta\phi_2(T_2)$ , пропорциональная разности температур спаев и создающая ток проводимости  $\vec{j}_{\text{пров}}$ .

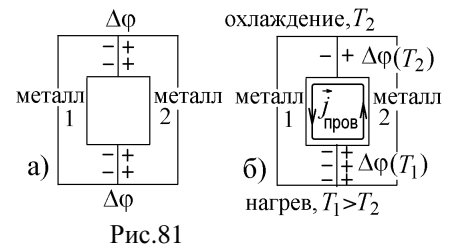


Рис.81

2) При нагревании металла возрастает концентрация свободных электронов, способных направленно перемещаться по проводнику и создавать ток. Диффузионные потоки  $\vec{j}_{\text{дифф}}$ , стремящиеся выровнять концентрацию таких электронов по разные стороны спая, растут с ростом температуры и не будут скомпенсированы при разных температурах спаев (рис.2.18), приводя к накоплению заряда. Чтобы этот заряд вблизи контактов цепи не рос, возникает ток проводимости с плотностью  $\vec{j}_{\text{пров}}$ , направление которого показано на рис.82 (так как электроны заряжены отрицательно, то ток  $\vec{j}_{\text{пров}}$  перемещает их в направлении, обратном направлению диффузионного потока  $\vec{j}_{\text{дифф}}$ ).

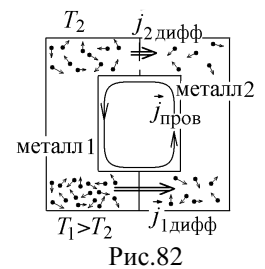


Рис.82

3) Колебания атомов решетки металла представляют в виде газа квазичастиц-фононов, на которых рассеиваются движущиеся в металле электроны. Поток фононов, пропорциональный градиенту температуры и направленный к холодному спаю увлекает электроны за собой. Это приводит к увеличению термоэлектрического тока.

Все эти механизмы возникновения явления термоэлектричества могут быть правильно описаны только в квантовой теории металлов. Их суммарное действие приводит к появлению достаточно большой термоЭДС. Так удельная термоЭДС пары Pd-Ag равна 86 мкВ/К. Термопары используются, например, в качестве источника тока в геотермальных электростанциях, или для подзарядки аккумуляторов подводных лодок.

Обратным явлением Зеебека будет эффект Пельтье: если в замкнутую цепь из двух разнородных проводников включить внешний источник ЭДС (рис.83), то вызванный этим источником ток охлаждает один из контактов между проводниками и нагревает другой (в зависимости от направления тока и характеристик металлов). В рассмотренном выше случае металл 2 заряжен положительно, а металл 1 — отрицательно (рис.80). Переходя из металла 1 в металл 2, электроны будут уменьшать энергию взаимодействия с электрическим полем на величину  $e\Delta\phi$ , отдавая её области вблизи спая и нагревая её (рис.83). По той же причине переходя обратно в металл 1, электрон забирает эту энергию, охлаждая второй спай.

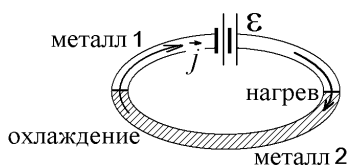


Рис.83

### Порядок выполнения работы

1. Определите по термометру “тер” на установке (рис.84) комнатную температуру  $t_{\text{комн}}$ , одинаковую для спаев а, б и с при выключенном нагревателе R.

2. Включите установку в сеть. Нагревая рабочий спай термопары, через каждые  $5^\circ\text{C}$  измеряйте по вольтметру величину термоЭДС  $\varepsilon'_T$ . Нагревание производите до  $80^\circ\text{C}$ . Результаты измерений занесите в таблицу.

3. При достижении  $80^\circ\text{C}$  выключите установку и продолжите измерение термоЭДС  $\varepsilon''_T$  при естественном остывании рабочего спае, фиксируя её значение при тех же значениях температуры, какие были взяты при нагревании, но в обратном порядке вплоть до комнатной температуры. Данные занесите в таблицу.

4. Для каждого значения температуры вычислите среднее значение термоЭДС

$$\varepsilon_T = \frac{1}{2}(\varepsilon'_T + \varepsilon''_T) \quad \text{и постройте график зависимости}$$

$\varepsilon_T$  от разности измеренной и комнатной температур  $\Delta t = t - t_{\text{комн}}$  (рис.85)

5. По формуле  $\alpha = \frac{\varepsilon_{T2} - \varepsilon_{T1}}{\Delta t_2 - \Delta t_1}$  вычислите

$t, ^\circ\text{C}$	$\Delta t, ^\circ\text{C}$	$\varepsilon'_T, \text{мВ}$	$\varepsilon''_T, \text{мВ}$	$\varepsilon_T, \text{мВ}$
...				
$t_{\text{комн}} = \dots ^\circ\text{C}$		$\alpha = \dots \text{мВ/К}$		

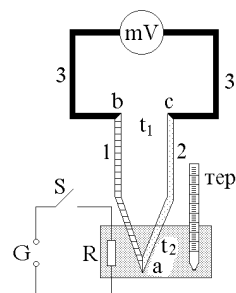


Рис.84

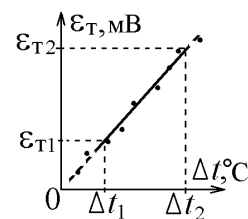


Рис.85

те величину удельной термоЭДС  $\alpha$ , используя прямолинейный участок построенного графика. Участок графика должен содержать несколько экспериментальных точек.

### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 24

1. Что представляет собой термопара? В чем суть эффекта Зеебека?
2. Каков физический смысл удельной термоЭДС, измеряемой в данной работе?
3. Что надо сделать с термопарой, чтобы увеличить возникающую в ней термоЭДС? Где применяются термопары?
4. Что удерживает газ свободных электронов в металле? Какая величина называется работой выхода электрона из металла? Напряжение какой величины надо приложить к металлу, чтобы вырвать из него электрон?
5. Имеются два металла 1 и 2 с разной работой выхода электрона ( $A_1 < A_2$ ). Какой из металлов при их контакте окажется заряженным положительно, а какой – отрицательно и почему?
6. Почему при соединении разных металлов образуется контактная разность потенциалов? Чему равна её величина?
7. Какие физические причины приводят к появлению термоЭДС в замкнутой цепи из двух разнородных металлов? Каковы механизмы появления термоЭДС?
8. Почему при одинаковой температуре спаев электрический ток в термопаре не течет, а при разной температуре – появляется? Чем обусловлено направление этого тока?
9. В чем заключается явление Пельтье?
10. Нарисуйте замкнутую цепь из двух разнородных металлических проводников 1 и 2, в которую включен источник внешней ЭДС (рис.83). Укажите, какой из спаев будет нагреваться, а какой охлаждаться и по какой причине, если работа выхода электрона из первого металла меньше, чем из второго ( $A_1 < A_2$ )?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 74-77.
2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.6 §§1-3.

## Работа №25. Определение удельного заряда электрона методом магнетрона

**Цель работы:** измерить удельный заряд электрона с помощью магнетрона.

### Теоретическое описание

В данной установке магнетрон – это вакуумный диод с катодом и анодом, сделанными в виде длинных цилиндров с общей осью и радиусами  $r_k$  и  $r_a$  (рис.86). Вокруг анода равномерно намотана обмотка (катушка) из  $n$  витков, приходящихся на единицу длины. Когда по катушке протекает ток  $I$ , величина которого регулируется потенциометром  $R$  (потенциометр – это резистор с регулируемым сопротивлением), то вдоль оси катушки, в пространстве между катодом и анодом, создается магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ .

На электроны, вылетающие с катода практически с нулевой скоростью, будет действовать электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , линии которого направлены по радиусам от положительно заряженного анода к отрицательно заряженному катоду, как показано на рис.87, где изображено поперечное сечение магнетрона.

В случае отсутствия магнитного поля  $\vec{B} = 0$  электроны летят против линий  $\vec{E}$  (траектория 1), попадая на анод и создавая анодный ток  $I_A$ , величина которого определяется падением напряжения  $U$  (разностью потенциалов между катодом и анодом).

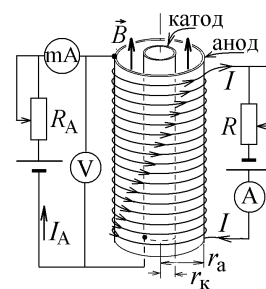


Рис.86

При появлении магнитного поля  $\vec{B}$  на электроны с зарядом  $-e$  кроме электрической составляющей  $\vec{F}_{эл} = -e\vec{E}$  будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца  $\vec{F}_{магн} = -e[\vec{v}, \vec{B}]$ . Эта сила отклоняет электроны в сторону (рис.87), меняя направление их скорости  $\vec{v}$ . При небольшой величине  $\vec{B}$  все вылетающие с катода электроны по-прежнему попадут на анод (траектория 2), и величина анодного тока не изменится.

При увеличении индукции магнитного поля до критического значения  $B_{кр}$  траектория 3 электрона изгибается настолько, что только касается анода (рис.87). С этого момента анодный ток начинает уменьшаться, так как при большем значении  $\vec{B}$  траектории электронов искривляются так, что электроны не попадают на анод (траектории 4 на рис.87).

Если длина катушки с током  $I$  бесконечна, то в таком соленоиде создается индукция магнитного поля  $B = \mu_0 I n$ , где  $n = N/l$  – число витков, приходящихся на единицу длины. При достижении критического значения  $I_{кр}$  анодный ток должен резко уменьшиться до нуля (все электроны перестают попадать на анод). В действительности, длина катушки конечна, и величина индукции уменьшается на её краях (рис.88). Если в бесконечном соленоиде индукция поля равна  $B_{кр}$ , то половина соленоида создаст половину этого поля. На краю полубесконечной катушки поле равно  $B_{кр}/2$ . Если в центре конечной катушки магнетрона поле достигло величины  $B > B_{кр}$ , и электроны перестают попадать на анод, то на её краях  $B < B_{кр}$ , и вылетевшие с катода электроны всё еще достигают анода. Начиная с точки 3, величина анодного тока уменьшается постепенно, по мере того, как с ростом  $B$  все меньшее число электронов на краях магнетрона перестает попадать на анод.

**Вывод расчетной формулы.** В скрещенных полях  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  траектория электронов не будет окружностью. Удобно перейти в цилиндрическую систему координат, в которой ось  $z$  совпадает с осью магнетрона, а  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  – взаимно перпендикулярные единичные орты системы координат (рис.89). Вылетевший из катода с нулевой скоростью электрон с зарядом  $-e$  движется в плоскости, перпендикулярной оси  $z$  и приобретает скорость  $\vec{v} = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta$ . Момент импульса

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}] = m \cdot \det \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ r & 0 & 0 \\ v_r & v_\theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z m r v_\theta \text{ меняется под действием момента силы Лоренца}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}, -e\vec{E} - e[\vec{v}, \vec{B}]] = -e[\vec{r}, [\vec{v}, \vec{B}]] \text{ (векторы } \vec{r} \text{ и } -e\vec{E} \text{ параллельны). Раскрывая двойное векторное}$$

произведение по правилу  $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})$ , учтём, что  $(\vec{r} \cdot \vec{B}) = 0$  (скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов). Поэтому  $\vec{M} = \vec{e}_z \cdot e B r v_r$ , где  $v_r = dr/dt$ .

Подставив полученные выражения в уравнение динамики  $d\vec{L}/dt = \vec{M}$ , получим уравнение

$$\frac{d}{dt}(m r v_\theta) = B e r \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{B e r^2}{2} \right). \text{ Интегрируем обе части этого уравнения, считая, что электрон движется по траектории 3, прибли-}$$

жается к аноду по касательной и не имеет в этой точке радиальной проекции скорости ( $v_r = 0$  и  $v = v_\theta$ ):

$$\int_{r_k}^{r_a} d \left( \frac{B e r^2}{2} \right) = B e \left( \frac{r_a^2 - r_k^2}{2} \right) = m r_a v. \text{ Долетев от катода до анода, электрон будет ускорен разностью потенциалов } U_A \text{ между ано-}$$

дом и катодом и приобретёт энергию  $eU_A = \frac{mv^2}{2}$ , откуда  $v = \sqrt{\frac{2eU_A}{m}} = \frac{Be(r_a^2 - r_k^2)}{2mr_a}$ . Считая, что анодный ток в магнетроне начинает уменьшаться при достижении критической величины индукции в центре катушки,

$$B = B_{кр} = \mu_0 I_{кр} n, \quad (117)$$

находим из полученного уравнения величину удельного заряда электрона (отношения его

$$\text{заряда к массе):} \quad \frac{e}{m} = \frac{8U_A r_a^2}{B_{кр}^2 (r_a^2 - r_k^2)^2}. \quad (118)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь со схемой электрической цепи на рис.90. Определите цену деления каждого измерительного прибора.

2. Ручки потенциометров ПА и П поверните против часовой стрелки до упора, установив нулевые значения.

3. Включите установку в сеть. Ручкой потенциометра ПА установите анодное напряжение  $U_{A1}$  и поддерживайте его постоянным до конца снятия од-

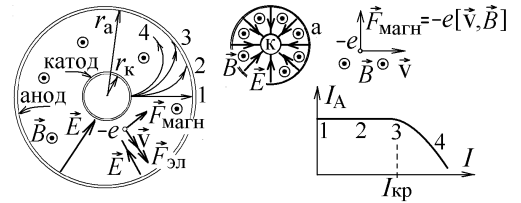


Рис.87

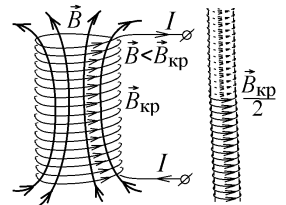


Рис.88

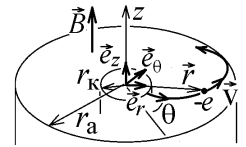


Рис.89

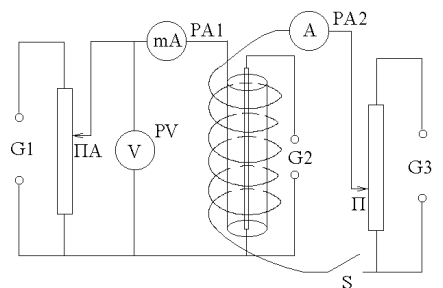


Рис.90

ной характеристики.

4. Снимите так называемую сбросовую характеристику магнетрона  $I_A = f(I)$ , т.е. зависимость величины анодного тока  $I_A$  от тока катушки  $I$ . Для этого, удерживая кнопку  $S$  в нажатом состоянии, медленно увеличивайте ток  $I$  в катушке с помощью ручки потенциометра  $\Pi$  и заносите в таблицу значения тока  $I$  и соответствующие им значения анодного тока  $I_A$ . Снимите не менее 10 значений тока для установленного анодного напряжения  $U_{A1}$ .

5. Аналогичные сбросовые характеристики снимите для двух других значений анодного напряжения  $U_{A2}$  и  $U_{A3}$ . Рекомендуемые величины  $U_{A1}$ ,  $U_{A2}$  и  $U_{A3}$  указаны на лабораторной установке. Все результаты измерений занесите в таблицу.

6. Приведите установку в исходное состояние и отключите от сети.

7. По измеренным данным постройте графики трех сбросовых характеристик в одних координатных осях.

8. На графике каждой характеристики найдите точку сброса анодного тока  $I_A$  и соответствующее ей критическое значение тока в катушке  $I_{кр}$ . Критический ток можно определить как ток катушки, при котором ток анода начинает резко уменьшаться. При измерениях анодный ток вначале начинает уменьшаться не слишком значительно и сбросовые характеристики выглядят так, как показано на рис.91. На этом рисунке показано как с помощью двух прямых асимптотических линий определить положение точки  $I_{кр}$ .

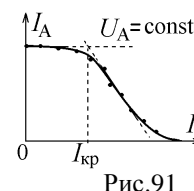


Рис.91

9. По формуле (117) вычислите значение критической индукции магнитного поля катушки  $I_{кр}$ , а затем по формуле (118) рассчитайте величину удельного заряда электрона  $e/m$  для каждого из трех опытов с разными значениями  $U_A$ . и найдите его среднее значение.  $\langle e/m \rangle$ .

10. Определите случайные отклонения  $\Delta(e/m) = e/m - \langle e/m \rangle$  для каждого измерения  $i = 1, 2, 3$  и среднее квадратичное отклонение

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta e/m)^2}. \text{ Вычислите погрешность}$$

$\Delta e/m$  результата измерений:  $\Delta e/m = S/\sqrt{3}$ . Результаты вычислений занести в таблицу.

11. Записать результат в виде  $(e/m)_{\text{эсп}} = (\langle e/m \rangle \pm \Delta e/m)$ , Кл/кг и сравнить его с табличным значением отношения величины заряда электрона  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл к его массе  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  Кг.

№ п/п	$U_{A1} = \dots \text{ В}$		$U_{A2} = \dots \text{ В}$		$U_{A3} = \dots \text{ В}$	
	$I, \text{ А}$	$I_A, \text{ мкА}$	$I, \text{ А}$	$I_A, \text{ мкА}$	$I, \text{ А}$	$I_A, \text{ мкА}$
1						
...						
10						
$I_{\text{кр}}, \text{ А}$						
$B_{\text{кр}}, \text{ Тл}$						
$e/m, \text{ Кл/кг}$						
<div><div><math>(e/m)_{\text{эксп}} = \dots \pm \dots \text{ Кл/кг}</math> (экспериментальное)</div><div><math>(e/m)_{\text{табл}} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}</math> (табличное)</div></div>						

### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 25

1. На электрической схеме установки покажите замкнутую цепь, по которой течет ток  $I$  катушки (соленоида), и цепь, по которой течет анодный ток  $I_A$ . Укажите приборы, которые измеряют эти токи.

2. С какой целью магнетрон окружен витками соленоида? Что меняется при увеличении тока  $I$ , текущего по этим виткам?

3. Какова величина и направление вектора индукции магнитного поля, создаваемого в магнетроне? Как можно изменить эту величину?

4. Напишите выражение силы Лоренца, которая действует на электрон, движущийся в скрещенных электрическом и магнитном полях. Укажите направление электрической и магнитной составляющих этой силы.

5. Направление тока  $I$ , текущего по виткам намотанной на цилиндрический анод катушки, указано на рис.А. Укажите и объясните правильную траекторию движения одного из электронов, создающих анодный ток.

6. Что называется удельным зарядом электрона, как вычислить его величину и чему она должна быть равна?

7. Укажите соответствие траекторий электронов, вылетающих из катода на левом рис.Б, и точек графика зависимости анодного тока  $I_A$  от тока  $I$ , протекающего по виткам катушки (правый рис.Б).

8. Объясните поведение графиков зависимости  $I_A = I_A(I)$ : почему при увеличении тока  $I$  величина  $I_A$  вначале не меняется? на каком основании определяют критическое значение тока  $I_{кр}$ ? почему после достижения критической величины  $I$  анодный ток уменьшается постепенно, а не падает скачком до нуля? почему величина  $I_A$  возрастает с ростом напряжения  $U_A$ ?

9. Сделайте и объясните вывод расчетной формулы для вычисления удельного заряда электрона в данной работе.

10. Может ли электрон в скрещенных однородных электрическом  $\vec{E}$  и магнитном  $\vec{B}$  полях двигаться с постоянной по величине и направлению скоростью? Если да, то при каких условиях, и чему равна минимальная величина такой скорости?

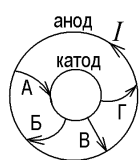


Рис.А

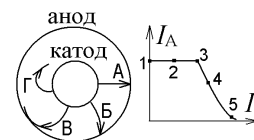


Рис.Б

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 38, 39, 47, 64-66.
2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.7 §§2,5,8,9.

## Работа №26. Магнитное поле Земли

Цель работы: измерение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли методом тангенс-гальванометра.

### Теоретическое описание

Плоскость компаса совпадает с горизонтальной плоскостью. Индукция магнитного поля Земли будет суммой горизонтальной и вертикальной составляющих  $\vec{B}_3 = \vec{B}_{гор} + \vec{B}_{верт}$  (рис.92).

В северном полушарии вертикальная составляющая  $\vec{B}_{верт}$  направлена вниз, перпендикулярна плоскости компаса и не действует на его магнитную стрелку, которая направлена вдоль горизонтальной составляющей  $\vec{B}_{гор}$  (рис.92,а). В этом же направлении ориентируют плоскость катушки тангенс-гальванометра из  $N$  витков (стрелка компаса – в его центре).

Если по катушке пропустить ток  $I$ , то в центре витка радиуса  $R$  будет создано магнитное поле тока с индукцией  $B_I = \mu_0 I / (2R)$  (это выражение можно получить с помощью закона Био-Савара). В катушке из  $N$  витков суммарная индукция магнитного поля тока перпендикулярна плоскости катушки, равна  $B_k = \mu_0 NI / (2R)$  и отклоняет стрелку компаса на угол  $\alpha$  относительно горизонтальной линии магнитного меридиана (рис.92,б,в). Стрелка установится в горизонтальной плоскости вдоль результирующего вектора  $\vec{B}_{рез} = \vec{B}_{гор} + \vec{B}_k$ . Измерив тангенс угла отклонения стрелки компаса  $\alpha$ :  $\text{tg } \alpha = B_k / B_{гор}$  (рис.92,в) легко найти горизонтальную составляющую индукции магнитного поля Земли в месте нахождения компаса:

$$B_{гор} = \frac{\mu_0 IN}{2R \text{tg } \alpha}. \quad (119)$$

Чем больше величина тока  $I$  в катушке, тем больше угол отклонения стрелки.

Источником постоянного магнитного поля являются движущиеся электрические заряды или токи любой природы, например, токи намагничивания в магнитных средах (рис.93). Линии индукции  $\vec{B}$  охватывают линии тока и **всегда замкнуты**.

Поэтому магнитное поле называют **вихревым**, в отличие от **потенциального** электростатического поля, линии напряженности  $\vec{E}$  которого начинаются или заканчиваются на электрических зарядах. Помните однако, что и электростатическое, и постоянное магнитное поле являются составляющими единого электромагнитного поля, описываемого уравнениями Максвелла. Постоянное магнитное поле в одной инерциальной системе отсчета превращается в электростатическое поле в другой системе отсчета и наоборот.

Индукцию магнитного поля  $\vec{B}$  можно рассматривать как векторную характеристику, определяющую величину силы, действующей на движущийся в магнитном поле заряд  $q$  (магнитная составляющая силы Лоренца) или на элемент тока  $Id\vec{l}$  (сила Ампера, рис.94). Величина магнитного поля пропорциональна величине его индукции.

### Объяснение природы магнитного поля Земли.

Геомагнитное поле не постоянно и на 95% создается в земном ядре, имеющем радиус  $R_{я} \approx 2900$  км. Внешняя часть ядра состоит из расплавленного при очень большом давлении жидкого железа с температурой  $\sim 4600$  К, в котором создаются конвекционные потоки жидкости. Эти потоки все время распадаются на отдельные гигантские вихри, вместе с которыми движутся “вмороженные” в них линии



Рис.95

индукции  $\vec{B}$ , созданные токами заряженных ионов и электронов. Вихри жидкости при турбулентном движении перекручиваются, разделяются, накладываются друг на друга. При этом, как показано на рис.95, складываются линии  $\vec{B}$ , усиливая, ослабляя или даже меняя направление результирующего магнитного поля. Подобные процессы изучает **магнитная гидродинамика**.

В результате вне земного ядра создается результирующее магнитное поле, которое на 80% совпадает с полем **магнитного диполя** с огромным магнитным моментом

$p_m = 8,3 \cdot 10^{22}$  А·м (рис.96). Положение этого диполя меняется с медленным изменением вихревого движения электроносущей жидкости в ядре Земли. Центр диполя смещен приблизительно на 300-400 км от центра Земли, а его ось не совпадает с осью вращения Земли и пересекает поверхность Земли в точках, которые называются **геомагнитными полюсами** (рис.96). В настоящее время южный геомагнитный полюс Земли находится вблизи северного полюса и постепенно перемещается со средней скоростью 10 км/год от северного побережья Канады к Сибири.

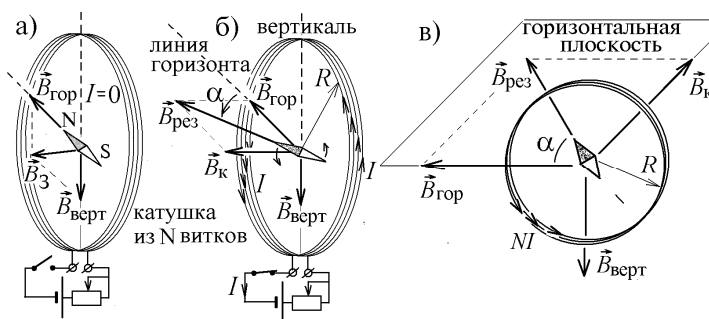


Рис.92

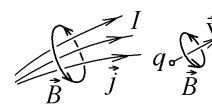


Рис.93

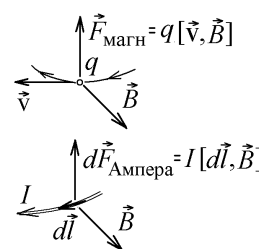


Рис.94



Дрейф магнитных полюсов связан не только с изменением токов в ядре Земли, но и с тем, что величины угловых скоростей вращения земного ядра, мантии и твердой оболочки (литосферы) не совпадают. Поэтому земная кора понемногу смещается относительно оси вращения Земли и оси магнитного диполя. 600 миллионов лет назад континенты (участки земной коры), которые сейчас находятся вблизи экватора, находились на полюсах Земли. Там же (немного южнее современного экватора) находился, например, северный магнитный полюс.

Известно, что магнитное поле Земли тысячи раз меняло направление магнитных полюсов, постепенно, раз в  $10^6$  лет, уменьшаясь до нуля, а затем возникая в противоположном направлении. При этом в течении  $10^3 - 10^4$  лет Земля оказывалась без защитного магнитного поля, предотвращающего её поверхность от попадания сильных потоков космических лучей. Объяснить это можно только переменой направления токов в ядре Земли (рис.95).

В настоящее время индукция  $\vec{B}$  поля Земли максимальна на магнитных полюсах ( $\sim 65$  мкТл) и минимальна вблизи экватора ( $\sim 35$  мкТл). Горизонтальная составляющая  $\vec{B}_{\text{гор}}$ , наоборот, максимальна на экваторе, где линии  $\vec{B}$  почти горизонтальны, и  $\vec{B}_{\text{гор}} = 0$  на магнитных полюсах, где линии  $\vec{B}$  направлены по вертикали к поверхности Земли (рис.96). В районе Тулы  $\vec{B}_{\text{гор}} \approx 25$  мкТл.

Однако, в земной коре много намагниченных ферромагнитных руд, которые создают аномальное магнитное поле ( $\sim 4\%$  магнитного поля Земли). Эти источники магнитного поля находятся вблизи земной поверхности и могут заметно изменить форму и направление линии  $\vec{B}$ , вдоль которой ориентируется стрелка компаса (рис.2.29). Так в районе Курской магнитной аномалии линии  $\vec{B}$  направлены так же вертикально, как и на магнитном полюсе.

Заметное влияние на стрелку компаса оказывают также ионосферные токи, вызванные потоком солнечных космических лучей (потоком протонов, попадающих в магнитное поле Земли). В период сильных магнитных бурь (возмущений магнитного поля Земли, вызванных солнечной активностью), величина  $B_{\text{Земли}}$  может измениться на  $\sim 1 \div 2$  мкТл, что вблизи полярного круга, где мала величина  $\vec{B}_{\text{гор}}$ , вызовет отклонения стрелки магнитного компаса на  $10-20^\circ$  (за сутки положение магнитного полюса Земли может описать круг диаметром в сотню километров).

#### Порядок выполнения работы

1. Не включая источник тока, установите тангенс-гальванометр в плоскости магнитного меридиана. При этом стрелка компаса должна быть направлена по диаметру тангенс-гальванометра (вдоль плоскости витков, рис.92,а). Обратите внимание на то, чтобы северный конец стрелки указывал на нулевое значение компаса.

2. Установите регулятор потенциометра (или реостата) на минимальный ток через тангенс-гальванометр и затем включите источник тока.

3. Изменяя регулятором потенциометра ток через равные интервалы, определяйте угол отклонения  $\alpha$  стрелки (рис.92,б). Необходимо некоторое время, чтобы стрелка компаса успокоилась и перестала колебаться. Записывайте величины тока  $I$  и углы отклонения от первоначального положения северного  $\alpha_1$  и южного  $\alpha_2$  полюсов стрелки в таблицу. Измерить надо не менее 5 значений тока (и соответствующие им углы).

**Внимание:** отклонение любого полюса стрелки есть разность начального и конечного показания компаса и не может превысить  $90^\circ$ .

4. Измените направление тока в гальванометре с помощью переключателя на установке. Прodelайте пункт 3, устанавливая те же значения токов и фиксируя углы отклонения от первоначального положения северного  $\alpha_3$  и южного  $\alpha_4$  полюсов стрелки. Стрелка будет отклоняться от первоначального положения в другую сторону. Дублирование измерений делается для того, чтобы исключить систематическую погрешность, связанную с неточной установкой катушки в плоскости магнитного меридиана, а также с определением самой этой плоскости. Данные занесите в таблицу.

№ п/п	$I$ , мА	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	$\alpha_3, ^\circ$	$\alpha_4, ^\circ$	$\langle \alpha \rangle, ^\circ$	$\text{tg} \langle \alpha \rangle$	$B_{\text{гор}}, \text{ мкТл}$	$\Delta B_{\text{гор}}, \text{ мкТл}$	$E$
1										
2										
3										
4										
5										
$N = \dots$ витков		$R = \dots$ м		$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$		$\langle B_{\text{гор}} \rangle = \dots \text{ мкТл};$		$(\Delta B_{\text{гор}})_{\text{max}} = \dots \text{ мкТл}$		

5. Определите среднее значение угла  $\langle \alpha \rangle$  для каждого значения тока  $I$  по формуле  $\langle \alpha \rangle = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) / 4$ .

6. По формуле (119) надо вычислить  $B_{\text{гор}}$  для каждого значения тока, подставляя вместо  $\alpha$  среднее значение этого угла  $\langle \alpha \rangle$ . Величины  $R$  и  $N$  указаны на установке.

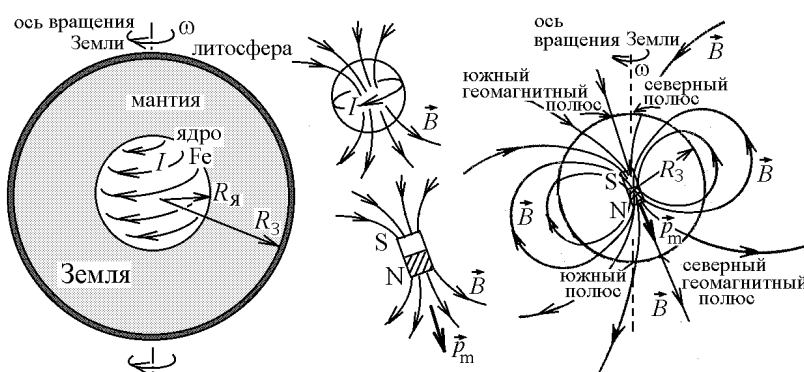


Рис.96



Рис.97

7. По вычисленным значениям  $B_{\text{гор}}$  найдите среднее значение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли  $\langle B_{\text{гор}} \rangle$

8. Определите относительную  $E$  и абсолютную  $\Delta B_{\text{гор}}$  погрешности по формулам

$$E = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha}, \quad \Delta B_{\text{гор}} = B_{\text{гор}} \cdot E,$$

в которых  $\Delta I$ ,  $\Delta R$  и  $\Delta\alpha$  определяются как половина деления прибора, с помощью которого были измерены величины  $I$ ,  $R$  и  $\alpha$ , причем  $\Delta\alpha$  **надо выразить в радианах**. Если значение какой-либо величины уже указано в описании установки, например  $R$ , то абсолютная погрешность этой величины определяется как половина единицы последнего разряда. Пример:  $R=20,15$  см. Единица последнего разряда - это одна сотая. Таким образом,  $\Delta R = 0,01/2 = 0,005$  см.

9. Определите наибольшее значение абсолютной погрешности  $(\Delta B_{\text{гор}})_{\text{max}}$  и запишите результат измерений в виде  $B_{\text{гор}} = \langle B_{\text{гор}} \rangle \pm (\Delta B_{\text{гор}})_{\text{max}}$  мкТл, т.е.  $B_{\text{гор}} = \dots \pm \dots$  мкТл.

Сравните полученное значение  $B_{\text{гор}}$  с истинным, которое в районе Тулы равно  $B_{\text{гор}} \approx 25$  мкТл.

### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 26

1. Что является источником постоянного магнитного поля? Чем постоянное магнитное поле отличается от электростатического поля и почему оно называется вихревым?
2. Дайте определение вектора индукции магнитного поля.
3. Сформулируйте закон Био-Савара и получите с его помощью формулу для величины индукции магнитного поля в центре и на оси тангенс-гальванометра с током  $I$ ,  $N$  витков которого имеют радиус  $R$ .
4. Нарисуйте линии индукции магнитного поля, созданного током, текущим по тангенс-гальванометру. Будут ли они замкнутыми и почему?
5. С какой силой или моментом силы магнитное поле Земли действует на движущуюся заряженную частицу? на прямолинейный проводник с током? на круговой виток с током? на стрелку магнитного компаса?
6. Покажите на экспериментальной установке направление вертикальной и горизонтальной составляющих вектора индукции магнитного поля Земли, а также направление вектора индукции магнитного поля, созданного током, текущим по виткам тангенс-гальванометра. В какую сторону будет поворачиваться стрелка компаса при увеличении или уменьшении тока?
7. Плоскость витков катушки тангенс-гальванометра параллельна вектору  $\vec{B}_T$  горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли (рис.А).  $I$  – ток в катушке,  $N$  – число витков в катушке,  $r$  – их радиус. При каком условии стрелка компаса в центре катушки повернута на угол  $\alpha = 45^\circ$  относительно плоскости витков?
8. Прямой бесконечный ток  $I$  течёт вдоль вертикальной оси  $z$ . Горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли направлена вдоль оси  $y$  (рис.Б). Укажите в какой точке и на каком расстоянии от тока  $I$  вектор индукции суммарного магнитного поля тока и магнитного поля Земли будет направлен вертикально.
9. Сделайте вывод расчетной формулы (119) для определения величины горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли.

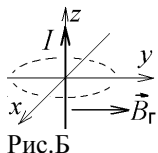


Рис.Б

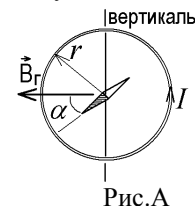


Рис.А

10. Какие причины приводят к появлению магнитного поля Земли? Как направлены линии индукции геомагнитного поля в северном и южном полушарии?
11. Почему магнитный компас нельзя использовать вблизи геомагнитных полюсов Земли? Направлена ли стрелка компаса на северный полюс?
12. Что должно происходить с величиной горизонтальной составляющей магнитного поля Земли в зависимости от географической широты? Почему в разных точках Земли на одной широте и в разное время стрелка компаса может не показывать на геомагнитный полюс?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 39-42, 48.
2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.7 §§5,8,9, гл.8 §§1,2.

### Работа №27. Исследование магнитного поля соленоида

**Цель работы:** экспериментальное определение значений магнитной индукции на оси соленоида и сравнение их с расчетными значениями.

#### Теоретическое описание

С помощью теоремы о циркуляции легко вычислить поле внутри бесконечного соленоида, по виткам которого течет ток  $I$ . Прямые линии индукции  $\vec{B}_\infty$  внутри соленоида уходят в бесконечность, и охватывая  $N$  витков соленоида прямоугольным контуром длины  $l$ , изображенным штриховой линией на рис.98,а, получаем  $\oint \vec{B} d\vec{l} = B_\infty l = \mu_0 IN$  или  $B_\infty = \mu_0 IN / l$ .

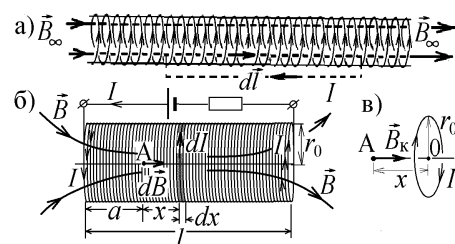


Рис.98

В исследуемом соленоиде конечной длины  $l$  с радиусом витков  $r_0$  линии индукции  $\vec{B}$  изогнуты (рис.98,б), и удобного для интегрирования по теореме о циркуляции замкнутого контура нет. Для вычисления  $B$  на оси такого соленоида, имеющего  $N$  витков с током  $I$ , воспользуемся законом Био-Савара. Определим индукцию  $B$  в точке А, находящейся на расстоянии  $a$  от края соленоида. Разобьём боковую поверхность соленоида на узкие кольцевые полоски ширины  $dx$  на расстоянии  $x$  от точки А. По всем  $N$  виткам на боковой поверхности протекает ток  $NI$ , а по такой полоске течет ток  $dI = NI \cdot dx/l$ , пропорциональный её ширине.

С помощью закона Био-Савара легко показать, что на оси кругового витка радиуса  $r_0$  с током  $I$  на расстоянии  $x$  от центра 0 витка (рис.98,в) создается магнитное поле с индукцией  $B_k = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + x^2)^{3/2}}$ . Аналогично, кольцевой ток  $dI$

создаст в точке А поле  $dB = \frac{\mu_0 dI}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + x^2)^{3/2}}$ . Суммируя вклады всех полосок, т.е. вычисляя интеграл, находим рас-

четную формулу для теоретически вычисленной величины индукции магнитного поля на оси конечного соленоида длины  $l$  на расстоянии  $a$  от его края:

$$B_{\text{теор}} = \int_{x=-a}^{x=l-a} dB = \frac{\mu_0 NI r_0^2}{2l} \int_{-a}^{l-a} \frac{dx}{(r_0^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{2l} \left( \frac{l-a}{\sqrt{r_0^2 + (l-a)^2}} + \frac{a}{\sqrt{r_0^2 + a^2}} \right). \quad (120)$$

Кроме этого, величина индукции определяется в данной лабораторной работе экспериментально с помощью баллистического гальванометра.

Схема эксперимента изображена на рис.99.

По оси соленоида длины  $l$  и радиуса  $r_0$ , состоящего из  $N$  витков, перемещается маленькая измерительная катушка  $K_{\text{и}}$  из  $N_{\text{и}}$  витков с площадью  $S_{\text{и}}$  и с индуктивностью  $L_{\text{и}}$ , расстояние  $a$  которой от края соленоида определяют по положению совмещенного с катушкой указателя. Кнопкой  $S$  соленоид подключают к источнику постоянного тока, и по его виткам начинает течь ток  $I$ , создающий на оси соленоида магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . Возникающая в соленоиде ЭДС самоиндукции препятствует мгновенному появлению этого тока. Он нарастает до установившегося значения некоторое время  $\tau$ , в течение которого меняется поле  $B$ , а в измерительной катушке  $K_{\text{и}}$  возрастает магнитный поток  $\Phi_{\text{и}} = BN_{\text{и}}S_{\text{и}}$ .

Измерительная катушка соединена с рамкой баллистического гальванометра, и образует замкнутую цепь с сопротивлением  $R$ . В такой цепи возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{и}} = -d\Phi_{\text{и}}/dt$  и появляется меняющийся ток  $I_{\text{и}}$ , что приводит к появлению ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_{\text{с}} = -L_{\text{и}}dI_{\text{и}}/dt$ . Интегрируя по времени уравнение правила Кирхгофа,

$$-I_{\text{и}}R = \mathcal{E}_{\text{и}} + \mathcal{E}_{\text{с}} = -\frac{d\Phi_{\text{и}}}{dt} - L_{\text{и}}\frac{dI_{\text{и}}}{dt}, \text{ получаем } -R \int_0^{\tau} I_{\text{и}} dt = -\int d\Phi_{\text{и}} - L_{\text{и}} \int dI_{\text{и}} = -BN_{\text{и}}S_{\text{и}}. \text{ Здесь } \int_0^{\tau} I_{\text{и}} dt = q - \text{заряд, протекший}$$

через измерительную катушку за время установления поля  $B$  в соленоиде. Ток  $I_{\text{и}}$  в момент  $\tau$  прекращается, так как величина  $\Phi_{\text{и}}$  достигает постоянной установившейся величины, и исчезает ЭДС индукции, приводившая к появлению тока.

$$\text{Поэтому } I_{\text{и}}(\tau) = I_{\text{и}}(0) = 0 \text{ и } \int_0^{\tau} dI_{\text{и}} = 0.$$

Таким образом, протекший по измерительной катушке заряд  $q$  пропорционален установившейся величине индукции магнитного поля в том месте, где она находится:  $q = BN_{\text{и}}S_{\text{и}}/R$ .

Индукционный ток  $I_{\text{и}}$  протекает по подвешенной на нити прямоугольной рамке баллистического гальванометра с площадью  $S_{\text{р}}$ , имеющей  $N_{\text{р}}$  витков и большой момент инерции  $I_{\text{р}}$  (рис.99). Постоянный магнит и железный цилиндр  $F$ , который охватывают витки рамки, создают магнитное поле с индукцией  $B_{\text{м}}$ , линии которого радиальны, и при повороте рамки на любой угол  $\theta$  параллельны плоскости рамки "Пл" (рис.99). При протекании тока  $I_{\text{и}}$ , рамка имеет магнитный момент  $p_{\text{м}} = I_{\text{и}}N_{\text{р}}S_{\text{р}}$ , и на неё действует момент сил  $M = [\vec{p}_{\text{м}}, \vec{B}_{\text{м}}] = I_{\text{и}}N_{\text{р}}S_{\text{р}}B_{\text{м}} \sin 90^\circ$ . Согласно уравнению динамики вращательного движения,  $I_{\text{р}} \frac{d\omega}{dt} = M$ . Рамка приходит во вращение, приобретая за время  $\tau$  угловую скорость

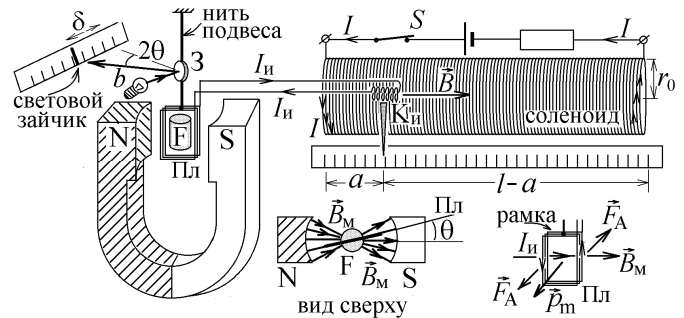


Рис.99

$$\omega = \int_0^{\tau} \frac{M}{I_p} dt = \frac{N_p S_p B_m}{I_p} \int_0^{\tau} I_n dt = \frac{N_p S_p B_m}{I_p} q.$$

Чтобы закрутить нить подвеса на угол  $\theta$ , к ней надо приложить момент силы, пропорциональный углу закручивания:  $M_{кр} = K\theta$ , где  $K = \text{const}$ . Полученная рамкой кинетическая энергия вращательного движения превращается в ра-

боту момента силы:

$$\frac{I_p \omega^2}{2} = \int M_{кр} d\theta = K \int \theta d\theta = \frac{K\theta^2}{2}.$$

На нити подвеса укреплено крошечное зеркальце 3 (рис.99), которое вместе с нитью повернется на угол  $\theta = \omega \cdot \sqrt{I_p/K}$ . Луч лампочки отражается от зеркальца и создает световой зайчик на шкале, находящейся на удалении  $b$ .

При повороте зеркальца на малый угол  $\theta$ , зайчик сместится по шкале на расстояние  $\delta = b \cdot 2\theta$ . Учитывая все полученные результаты, видим, что экспериментально определенная величина индукции магнитного поля на оси соленоида в том месте, где находится измерительная катушка  $K_n$ , пропорциональна отклонению зайчика:

$$B_{\text{экс}} = k\delta, \text{ где } k = \frac{R\sqrt{KI_p}}{2bN_p N_n S_p S_n B_m}. \quad (121)$$

Современные приборы, измеряющие малые изменения тока или напряжения, основаны на принципе измерения протекшего по цепи заряда и обладают намного большей чувствительностью и точностью.

#### Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь с установкой и включите ее в сеть (220 В).
2. Ручкой на установке поместите измерительную катушку  $K_n$  у одного из концов соленоида, определив ее положение  $a$  (расстояние от края соленоида до точки, в которой определяется значение магнитной индукции) с помощью указателя на шкале (линейке, см.рис.99).
3. Нажмите на кнопку  $S$  и измерьте отклонение светового зайчика  $\delta$  по шкале гальванометра. Не отпуская кнопку, определите силу тока в соленоиде по миллиамперметру.
4. Такие же измерения расстояния  $a$  и отклонения зайчика  $\delta$  проделайте для других положений катушки  $K_n$ , перемещая ее каждый раз на 1 см вдоль оси соленоида до упора. Занесите данные в таблицу.

5. По формуле (121) найдите экспериментальные значения магнитной индукции, воспользовавшись значением  $k$ , указанным на установке.

6. Для тех же значений  $a$  рассчитайте по формуле (120) теоретически вычисленные значения индукции маг-

нитного поля  $B_{\text{теор}} = \frac{\mu_0 NI}{2l} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2),$

где  $\cos \beta_1 = \frac{a}{\sqrt{r_0^2 + a^2}}, \cos \beta_2 = \frac{l-a}{\sqrt{r_0^2 + (l-a)^2}}.$  Данные вы-

числений занести в таблицу. Значения  $N$  и  $l$  даны на установке.

8. По значениям  $B_{\text{экс}}$ , определенным на опыте, и  $B_{\text{теор}}$ , вычисленным теоретически, постройте графики  $B_{\text{экс}} = f_1(a)$  и  $B_{\text{теор}} = f_2(a)$  в одних координатных осях (на одном листе). Сравните построенные графики.

#### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 27

1. Нарисуйте линии индукции магнитного поля, созданного током, текущим по виткам катушки-соленоида с учетом направления этого тока. Будут ли эти линии замкнутыми и почему?
2. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора магнитной индукции и с её помощью определите величину индукции магнитного поля внутри бесконечно длинного соленоида с током  $I$ , у которого на длину  $l$  приходится  $N$  витков.
3. Сформулируйте закон Био-Савара и с его помощью получите выражение величины индукции магнитного поля на оси кругового витка с током.
4. Сделайте вывод расчетной формулы для величины индукции магнитного поля на оси соленоида конечной длины  $l$  с радиусом витков  $r$ .
5. Определите величину отношения индукции магнитного поля в центре соленоида (при  $a = l/2$ ) и на его краях (при  $a = 0$  или  $l$ ). Совпадает ли эта величина с той, что следует из построенного Вами графика?
6. Объясните принцип работы баллистического гальванометра, используемого в данной работе.
7. В чем состоит явление электромагнитной индукции? Сформулируйте закон Фарадея для определения ЭДС электромагнитной индукции и с его помощью объясните, почему заряд, протекающий по измерительной катушке, пропорционален величине индукции магнитного поля, в которую её вносят. Почему размер измерительной катушки должен быть малым?
8. Почему при включении тока в соленоиде поворачивается зеркальце, создающее световой “зайчик”? Почему вращающий зеркальце момент сил пропорционален измеряемой индукции магнитного поля?

$a$ , м	$\delta$ , дел	$B_{\text{экс}}$ , Тл	$\cos \beta_1$	$\cos \beta_2$	$B_{\text{теор}}$ , Тл
0					
0,01					
....					
$a = l$					
$N = \dots$ витков; $l = \dots$ м; $k = \dots$ Тл/дел; $I = \dots$ А.					

9. Почему световой “зайчик” сразу же возвращается в исходное положение, если нажать кнопку включения тока в соленоиде и не отпускать её?
10. Сделайте вывод формулы зависимости смещения  $\delta$  “зайчика” от величины индукции  $B$ . От каких параметров установки зависит коэффициент пропорциональности  $k$  между этими величинами?
11. Каким способом проще всего увеличить смещение  $\delta$  “зайчика”, не меняя силу тока в соленоиде и параметры измерительной катушки?
12. Почему баллистические гальванометры, измеряющие величину тока по величине протекающего заряда более точны, чем обычные амперметры?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 39-42, 48, 55-57, 59, 62.
2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.7 §§5,8,9, гл.8 §§1,2.
3. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Электромагнетизм и оптика,- изд. ТулГУ. 2010, гл.I §§ 3-5.

## Работа №28. Определение индуктивности тороида с ферритовым магнитопроводом

**Цель работы:** изучение зависимости индуктивности тороида от силы тока.

### Теоретическое описание

Электрическая схема установки изображена на рис.100. На тороидальный сердечник намотка из  $N$  витков тонкого провода, по которому течет ток  $I$  от подключенного источника переменной ЭДС с амплитудой  $\mathcal{E}_0$  и циклической частотой  $\omega$ . Величину тока меняют, изменяя сопротивление потенциометра  $R$ . Если  $L$  – индуктивность такой тороидальной катушки, а  $R_k$  – её омическое (активное) сопротивление, то с учетом ЭДС самоиндукции правило Кирхгофа для изображенной на рис.100 замкнутой цепи имеет вид  $I(R + R_k) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) - L \cdot dI/dt$ . Решение этого уравнения вынужденных колебаний известно. Амплитуда вынужденных колебаний тока в цепи связана с амплитудой ЭДС через полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{(\omega L)^2 + (R + R_k)^2}, \text{ т.е. } I = I_0 \sin(\omega t + \alpha) = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} \sin(\omega t + \alpha).$$

Сопротивление  $\omega L$  называют индуктивным сопротивлением.

Можно найти падение напряжения на контактах тороидальной катушки:  $U = IR_k + L dI/dt$ . Подстановка дает

$$U = I_0 R_k \sin(\omega t + \alpha) + I_0 \omega L \cos(\omega t + \alpha) \text{ или } U = I_0 \sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2} (\cos \theta \cdot \sin(\omega t + \alpha) + \sin \theta \cdot \cos(\omega t + \alpha)), \text{ где}$$

$$\cos \theta = \frac{R_k}{\sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2}}, \sin \theta = \frac{\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2}}, \text{ т.е. } U = I_0 \sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2} \cos(\omega t + \alpha - \theta) = U_0$$

Амперметр и вольтметр измеряют не амплитудные, а действующие или эффективные величины тока и напряжения  $I = I_0/\sqrt{2}$ ,  $U = U_0/\sqrt{2}$ . Это величины **постоянного** тока, который оказывает такое же действие, как и переменный ток с амплитудами  $I_0$ ,  $U_0$ . Их отношение равно отношению амплитуд:  $U/I = U_0/I_0 = \sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2}$ . В данной работе сопротивление провода, намотанного на тороидальный сердечник, считается пренебрежимо малым,  $R_k \approx 0$ , что позволяет определить индуктивность катушки по измеренным показаниям амперметра и вольтметра:

$$L = \frac{U}{I\omega}. \quad (122)$$

Чтобы вычислить индуктивность  $L$ , воспользуемся теоремой о циркуляции вектора индукции  $\vec{B}$  магнитного поля, линии которого внутри соленоида образуют замкнутые окружности (рис.100). Приняв такую окружность радиуса  $r$  за контур интегрирования, получим  $\oint \vec{B} d\vec{l} = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 IN$  (контур охватывает  $N$  витков с током  $I$ ). Величина маг-

нитного поля  $B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}$  зависит от расстояния  $r$  до центра  $O$  тороида. Поэтому магнитный поток через площадь  $S_B$

одного витка (рис.101) можно только приблизительно записать в виде  $\Phi_1 = BS_B$ . Поток через все  $N$

витков связан с индуктивностью катушки:  $\Phi = NBS_B \approx LI$ . Отсюда  $L \approx \frac{\mu_0 S_B N^2}{2\pi r}$ . Результат вычисле-

ния  $L$  по этой формуле, где  $r$  – радиус оси тороида, тем точнее, чем меньше поперечное сечение  $S_B$  сердечника. В данной работе определяется зависимость индуктивности  $L$  от величины магнитной проницаемости  $\mu$  феррита, из которого изготовлен сердечник.

Правильно объяснить магнитные свойства любого магнетика – ферромагнетика, парамагнетика или диамагнетика – можно только с помощью законов квантовой физики. В частности, феррит – это магнитно-упорядоченная среда, в которой магнитные моменты атомов выстраиваются строго вдоль одного направления под действием обменных сил квантовой природы, не имеющих аналога в классической физике. Ферриты отличаются от ферромагнетиков тем, что магнитные моменты атомов разного сорта направлены в разные стороны (рис.102, феррит  $Mn_2O_3$ ).

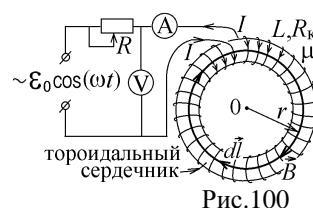


Рис.100

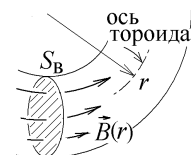


Рис.101

При изменении магнитного поля в ферритах не возникают токи Фуко, поскольку ферриты не проводят электрический ток. По этой причине ферриты используются в качестве материала для изготовления сердечников трансформаторов, поскольку из-за большой величины магнитной проницаемости  $\mu$  позволяют создать большое магнитное поле, а в случае переменных токов не нагреваются, так как в них не происходит потеря энергии на выделение джоулева тепла, которое обязательно выделялось бы при затухании индукционных токов Фуко в проводящей ферромагнитной среде.

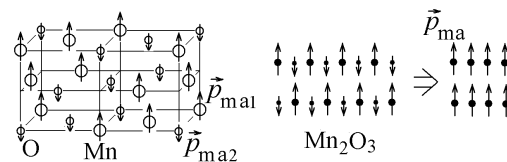


Рис.102

Магнитные моменты разных атомов  $\vec{p}_{ma}$  значительно отличаются по величине. Магнитные моменты групп соседних атомов, как и в ферромагнетиках, будут направлены в одну сторону (рис.102). Это приводит к появлению огромного магнитного момента  $\vec{p}_m = \sum \vec{p}_{ma}$  всего феррита (рис.103,а). Поэтому феррит делится на домены – участки кристаллической решетки с размером  $d \sim 10^{-4} \div 10^{-6}$  м, в которых магнитные моменты атомов под действием обменных сил ориентированы параллельно, но в соседних доменах их направления противоположны (рис.103,б). В результате индукция магнитного поля  $\vec{B}$  в феррите сильно уменьшена и практически равна нулю, если феррит не намагничен.

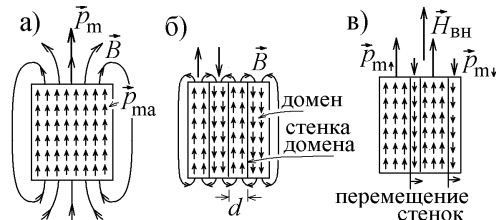


Рис.103

Без ферритового сердечника текущий по катушке ток  $I$  создаёт внутри неё, в воздушном пространстве, поле с индукцией  $B_I = \mu_0 IN / (2\pi r)$ . Магнитные моменты доменов в ферритовом сердечнике имеют в этом поле энергию  $W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}_I$ . Домены, ориентированные по полю, имеют меньшую энергию  $W_{\uparrow} = -p_{m\uparrow} B_I \cos 0^\circ = -p_{m\uparrow} B_I$ , чем домены, ориентированные против поля,  $W_{\downarrow} = -p_{m\downarrow} B_I \cos 180^\circ = +p_{m\downarrow} B_I$ . Домены с меньшей энергией начинают расти, а домены с большей энергией – уменьшаться в размерах. При этом атомы феррита не смещаются, а направления их магнитных моментов  $\vec{p}_{ma}$  слоями меняют направление (рис.103,в). Происходит перемещение стенок (границ) доменов. Не скомпенсированные магнитные моменты доменов создают дополнительное магнитное поле  $\vec{B}_d$ , которое складывается с магнитным полем тока:  $\vec{B} = \vec{B}_d + \vec{B}_I$ .

Дополнительное поле, созданное магнитными моментами атомов среды характеризуют вектором намагниченности  $\vec{J} = \sum_{\text{ед } V} \vec{p}_{ma}$  – это сумма магнитных моментов атомов в единице объёма среды. В ферромагнетиках и ферритах

$\vec{B} = \vec{B}_I + \mu_0 \vec{J}$ , но между векторами  $\vec{B}_I$  и  $\vec{J}$  нет линейной зависимости. С ростом поля  $B_I$  скорость переориентации доменов вначале растёт, достигает максимума при  $B_I = B_K$  (соответствующее значение напряженности  $H_K = B_K / \mu_0$  называется коэрцитивной силой), а при больших величинах  $B_I$  все домены будут переориентированы по направлению поля  $\vec{B}_I$  (насыщение). Зависимость индукции поля  $B$  в феррите от величины  $B_I$  станет линейной (рис.104,а). Такая зависимость называется кривой намагничивания Столетова.

Считая, что поле в среде возрастает пропорционально величине магнитной проницаемости  $\mu$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{B}_I$ , получаем зависимость  $\mu$  феррита от величины магнитного поля тока или от величины тока  $I$ , пропускаемого по виткам катушки (рис.104,б). При больших величинах  $I$   $\mu \rightarrow 1$ , т.е. феррит ведет себя как парамагнетик. Так как  $L \sim \mu$ , то экспериментально определяемый график  $L = L(I)$ , если пренебречь сопротивлением провода катушки  $R_K \approx 0$ , должен иметь ту же форму, что и график  $\mu = \mu(I)$  (рис.104,в).

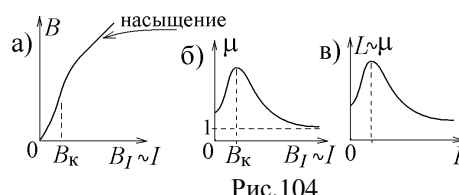


Рис. 104

#### Порядок выполнения работы

1. Разберитесь в электрической схеме установки (рис.100). Определите цену деления каждого из измерительных приборов.

2. Включите установку в сеть.

3. Изменяя напряжение на тороиде с помощью потенциометра  $R$ , измерьте зависимость тока  $I$  от напряжения  $U$  (не менее 10 значений). Для замыкания цепи на установке служит кнопка  $S$ . Занесите полученные величины в таблицу.

4. Выключить установку из сети. Получите подпись преподавателя после завершения эксперимента.

5. По формуле (122) подсчитайте эквивалентную индуктивность тороида при всех снятых значениях тока и напряжения. Результаты занести в таблицу.

7. Постройте график зависимости  $L = f(I)$ .

#### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 28

1. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора магнитной индукции и с её помощью определите величину индукции  $B$  магнитного поля внутри тороидальной катушки с ферритовым сердечником. Одинакова ли величина  $B$  во всех точках сердечника?

	$I, A$	$U, B$	$L, Гн$
1			
2			
.....			
10			

2. Какая величина называется индуктивностью? В каких единицах она измеряется? Как связать индуктивность тороидальной катушки с величиной индукции магнитного поля внутри неё?
3. Какая величина называется магнитной проницаемостью ферритового сердечника? К какому значению она стремится, если феррит поместить в очень сильное магнитное поле?
4. Получите формулу индуктивности катушки. Почему в данной работе важна её зависимость от магнитной проницаемости сердечника?
5. Почему амперметр и вольтметр в данной работе измеряют не истинные, а эффективные (действующие) значения тока  $I$  и напряжения  $U$ ? Какая величина называется эффективным значением тока (напряжения)?
6. Запишите правило Кирхгофа для цепи, в которой катушка подключена к источнику переменной ЭДС, и получите с его помощью расчетную формулу (122).
7. Почему сердечник катушки изготовлен из феррита, а не из стали с большим значением магнитной проницаемости?
8. Почему феррит самопроизвольно делится на домены? Что такое домен?
9. Какая величина называется вектором намагниченности?
10. Сердечник из феррита находится во внешнем магнитном поле  $B_I$ , созданном током, текущим по катушке. Как найти индукцию магнитного поля в феррите? Почему она не меняется прямо пропорционально  $B_I$ ?
11. Объясните, как намагничивается феррит при увеличении тока  $I$  в катушке? Что происходит с доменами? Когда возникает насыщение? Что такое кривая намагничивания Столетова?
12. Объясните вид экспериментального графика  $L = L(I)$ , получаемого в данной работе. По какой причине индуктивность катушки зависит от тока  $I$ ? Каким получится график зависимости, если убрать сердечник?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 42-44, 50, 54, 55, 56, 59.
2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.7 §9, гл.9 §§4,6.
3. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Электромагнетизм и оптика,- изд. ТулГУ. 2010, гл.I §§ 3,4-5.
4. Колмаков Ю. Н., Левин Д.М., Семин В.А. Основы физики конденсированных сред и физики микромира: Ч.1, - изд. ТулГУ. 2014, §§7.3-7.6.

## Работа №29. Исследование электрических затухающих колебаний с помощью осциллографа

Цель работы: ознакомление с методом получения затухающих электрических колебаний и определение параметров колебательного контура с помощью осциллографа.

### Теоретическое описание

Электрическая схема установки приведена на рис.105. Генератор создает импульсы напряжения  $U_{\text{и}}$  практически прямоугольной формы, которые с периодом  $T_{\text{и}}$  подаются на конденсатор электрического колебательного контура, подключенный тумблером  $K_1$ . Длительность импульса  $\tau$  очень мала ( $\tau \ll T_{\text{и}}$ , см.

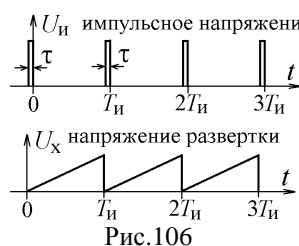


Рис.106

рис.106), но за это время конденсатор с ёмкостью  $C$  успевает зарядиться, и на его обкладках оказывается заряд  $q_0 = CU_0$ . Затем конденсатор разряжается и в цепи колебательного контура возникает переменный ток. На клеммы вертикальной развертки “Y” осциллографа подается напряжение  $U_y$ , создаваемое на концах катушки с индуктивностью  $L_0$  (см.рис.105). Получим зависимость этого напряжения от времени.

Вывод расчетной формулы. Электрический колебательный контур – это цепь, обладающая ёмкостью  $C$ , индуктивностью  $L$  и омическим сопротивлением  $R$  (рис.107). Генератор импульсов подключается к этой цепи только на время зарядки конденсатора. Остальное время ( $T_{\text{и}} - \tau$ ) в цепи контура имеется единственная ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_c$  в катушке  $L$ . Правило Кирхгофа для такого контура  $U_R + U_C = \mathcal{E}_c$ . После подстановки выражений для падения напряжения на сопротивлении  $U_R = IR$ , на конденсаторе  $U_C = q/C$ , для ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_c = -L di/dt$ , а также определения тока  $I = dq/dt$ , получаем уравнение собственных затухающих колебаний заряда на конденсаторе:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \beta = \frac{R}{2L}. \quad (123)$$

Параметр  $\beta$  называют коэффициентом затухания колебаний.

Решение этого уравнения имеет вид  $q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t)$  (при  $t = 0$  заряд на конденсаторе максимален и равен

$q_0$ ).  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$  – циклическая частота затухающих колебаний. Их период  $T = 2\pi/\omega$ , а также скорость затухания колебаний зависит от величин ёмкости конденсаторов и сопротивлений резисторов, подключаемых тумблерами  $K_1$  и  $K_2$  (рис.105). В частности, при очень большой величине сопротивления  $R$  или большой величине ёмкости  $C$ , ко-

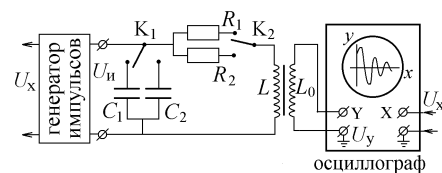


Рис.105

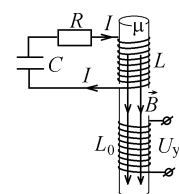


Рис.107

гда  $\omega_0^2 \leq \beta^2$ , или  $R \geq R_{кр} = 2\sqrt{L/C}$ , колебания возникать не могут (величина сопротивления  $R_{кр}$  называется критической).

Ток в цепи выразится как  $I(t) = dq/dt = -\beta q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t) - \omega q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t)$ . Вводя обозначения

$$\sin \alpha = -\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}, \quad \text{учтем, что } \sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0, \text{ и } \cos(\theta + \alpha) = \sin \alpha \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta. \text{ Получаем}$$

$I(t) = q_0 \omega_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$  - колебания тока в цепи контура опережает по фазе колебания напряжения  $U_C = q(t)/C$  на конденсаторе на величину  $\alpha$ .

В катушке индуктивности  $L$  создается магнитное поле с индукцией, величина которой пропорциональна величине тока, протекающего по виткам катушки,  $B \sim I(t)$ . Линии индукции пронизывают витки другой катушки с индуктивностью  $L_0$ , и создают в ней переменный магнитный поток, также пропорциональный величине тока  $\Phi_0 \sim B \sim I(t)$ .

Падение напряжения на концах катушки  $L_0$ , если пренебречь омическим сопротивлением её витков, будет равно ЭДС взаимной индукции  $\mathcal{E}_{вз} = -d\Phi_0/dt = -L_{вз} dI/dt$ , где  $L_{вз}$  - коэффициент взаимной индуктивности. Изменение тока в одном замкнутом контуре приводит к появлению ЭДС в другом, соседнем замкнутом контуре. Величину индуктивной связи между катушками (величину коэффициента  $L_{вз}$ ) обычно увеличивают, наматывая витки катушек на общий ферритовый сердечник с большой величиной магнитной проницаемости  $\mu$  (рис.107).

Подставляя полученное выше выражение для тока  $I(t)$ , находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{вз} &= L_{вз} q_0 \omega_0 (\beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + \omega e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha)) = \\ &= L_{вз} q_0 \omega_0^2 e^{-\beta t} (\cos \alpha \cos(\omega t + \alpha) - \sin \alpha \sin(\omega t + \alpha)) = L_{вз} q_0 \omega_0^2 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \pi + 2\alpha). \end{aligned}$$

Напряжение, подаваемое на клеммы вертикальной развертки “Y”,  $U_y = \mathcal{E}_{вз} = \frac{U_{y0} e^{-\beta t}}{\text{амплитуда}} \cos(\omega t + \delta)$ , где  $U_{y0} = L_{вз} q_0 \omega_0^2$  (рис.108), меняется со временем по тому же закону, что и колебания

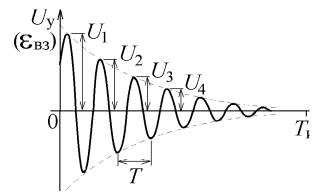


Рис.108

заряда на конденсаторе, но сдвинуто по фазе на  $\delta = \pi + 2\alpha$ . На клеммы горизонтальной развертки “X” осциллографа подается пилообразное напряжение  $U_x$ , период изменения которого совпадает с периодом появления импульсов  $T_H$  (рис.106). За это время колебания напряжения  $U_y$ , происходящие с меньшим периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = 2\pi / \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (124)$$

успевают затухнуть, и на экране осциллографа видна картина, показанная на рис.108.

Горизонтальная ось развертки калибрована в единицах времени, указанных на панели осциллографа, что позволяет определить временной интервал  $T$  между двумя соседними максимумами графика (рис.108), т.е. экспериментально определяемый период затухающих колебаний.

Затухание колебаний характеризуют величиной логарифмического декремента затухания  $\theta$  - это натуральный логарифм отношения амплитуды колебаний в момент времени  $t$  к амплитуде через период:

$$\theta = \ln \left( \frac{U_{y0} e^{-\beta t}}{U_{y0} e^{-\beta t} e^{-\beta T}} \right) = \ln(e^{+\beta T}) = \beta T. \text{ Подставляя (123) и (124) находим, что } \theta = \pi / \sqrt{\frac{L}{CR^2} - \frac{1}{4}} \quad (125)$$

Но можно воспользоваться другой формулой для вычисления  $\theta$ . Через каждый период амплитуда колебаний уменьшается в  $e^{\beta T}$  раз:  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_2}{U_3} = \dots = \frac{U_{n-1}}{U_n} = e^{\beta T}$  (величины амплитуд  $U_n$  показаны на рис.108). Отсюда

$$\frac{U_1}{U_n} = \frac{e^{\beta T} \cdot e^{\beta T} \cdot \dots \cdot e^{\beta T}}{n-1 \text{ раз}} = e^{(n-1)\beta T}. \text{ Получили другую формулу для вычисления } \theta:$$

$$\theta = \frac{1}{n-1} \ln \left( \frac{U_1}{U_n} \right). \quad (126)$$

Однако, в радиотехнике используют другую величину, обратную к  $\theta$  и также характеризующую быстроту затухания электрических колебаний - добротность контура

$$Q = \pi / \theta. \quad (127)$$

Эта величина пропорциональна отношению запасенной в контуре энергии к энергии, теряемой за период  $T$  в виде джоулева тепла, выделяющегося на активном сопротивлении  $R$ . Чем выше добротность  $Q$  колебательного контура, тем медленнее затухают в нём электрические колебания. В приёмных радиотехнических устройствах контуры с большой добротностью используют для выделения и усиления электромагнитных сигналов с определенной частотой  $\omega$ , соответствующей резонансу колебаний.

Подставляя в определение добротности формулу (125), находим теоретическую расчетную формулу для вычис-



ления добротности:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - \frac{1}{4}}. \quad (128)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с электрической схемой установки.  
2. Подключить в контур конденсатор с ёмкостью  $C = C_1$  и резистор с сопротивлением  $R = R_1$  (рис.105). Включить установку в сеть. Включить осциллограф. Добиться на экране осциллографа изображения затухающих колебаний (рис.108).

3. Измерить величину периода колебаний  $T$  в делениях, нанесенных на экране осциллографа вдоль горизонтальной оси (это расстояние между соседними максимумами или минимумами кривой, рис.108). На панели осциллографа найти регулятор горизонтальной (временной) развертки, указывающий на цену одного деления в единицах времени (ms или  $\mu$ s). Умножив величину  $T$  в делениях на цену одного деления получить экспериментально определенную величину периода колебаний  $T_{\text{эксп}}$ .

4. Перерисовать кривую изображения затухающих колебаний (рис.108) с экрана осциллографа на лист миллиметровой бумаге в масштабе 1:1, тщательно соблюдая все размеры (или вначале сфотографировать кривую на экране, а затем распечатать полученную фотографию на компьютере).

5. Подключить в контур конденсатор с ёмкостью  $C = C_2$  и резистор с сопротивлением  $R = R_2$ . Величины ёмкостей и сопротивлений, а также величина индуктивности  $L$  указаны на установке, занести их в таблицу 1. Добиться на экране осциллографа нового изображения затухающих колебаний.

Таблица 1

$C$ , мкФ	$L$ , Гн	$R$ , Ом	$\omega_0$ , с <sup>-1</sup>	$\beta$ , с <sup>-1</sup>	$T_{\text{теор}}$ , с	$\theta_{\text{теор}}$	$Q_{\text{теор}}$

6. Повторить выполнение пунктов 3 и 4, получая новый график и новое значение  $T_{\text{эксп}}$ .

7. Выключить питание осциллографа и выключить установку.

8. По нарисованным на двух графиках кривым измерить линейкой амплитудные значения  $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots$  в миллиметрах (эти значения отсчитываются от горизонтальной оси, соответствующей значению  $U = 0$ , к которой будут сходиться колебания, и которую надо нанести на графике). Занести их в таблицу 2.

Таблица 2.

$C$ , мкФ	$L$ , Гн	$R$ , Ом	$n$	$U_1$ , мм	$U_n$ , мм	$\theta$	$\langle \theta \rangle = \theta_{\text{эксп}}$	$T_{\text{эксп}}$ , с	$Q_{\text{эксп}}$
			2						
			3						
			4						
			2						
			3						
			4						

9. По формуле (126) вычислить логарифмический декремент затухания  $\theta$  для  $n = 1, 2, 3$  (не менее трех раз для каждого из двух графиков).

10. Рассчитать его среднее значение, полученное в эксперименте  $\langle \theta \rangle = \theta_{\text{эксп}}$ . По формуле (127) вычислить добротность контура, найденную экспериментальным методом  $Q_{\text{эксп}} = \pi / \langle \theta \rangle$ . Результаты вычислений занести в таблицу 2.

11. По формулам (123), (124), (125) и (128) вычислить расчетные значения частоты  $\omega_0$ , коэффициента затухания  $\beta$ , периода колебаний  $T_{\text{теор}}$ , логарифмического декремента  $\theta_{\text{теор}}$  и добротности  $Q_{\text{теор}}$  для каждого из двух опытов. Результаты вычислений занести в таблицу 1.

12. Сравнить величины  $T$ ,  $\theta$  и  $Q$ , полученные экспериментальным методом (таблица 2) и вычисленных по теоретическим формулам (таблица 1).

#### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 29

- Какая цепь называется электрическим колебательным контуром?
- Запишите правило Кирхгофа для замкнутой цепи, содержащей конденсатор с ёмкостью  $C$ , катушку с индуктивностью  $L$  и резистор  $R$  и приведите его к дифференциальному уравнению собственных затухающих колебаний заряда на конденсаторе.
- Запишите выражения для коэффициента затухания, циклической частоты и периода таких колебаний. Как они зависят от параметров  $C$ ,  $L$  и  $R$ ?
- Что происходит с величиной периода (частоты) собственных колебаний при увеличении сопротивления  $R$ ? при увеличении ёмкости  $C$ ?
- Чему равно критическое сопротивление контура  $R_{\text{кр}}$ ? Что происходит с колебаниями при  $R \geq R_{\text{кр}}$ ?
- Запишите выражение зависимости колебаний заряда  $q$  на конденсаторе и падения напряжения  $U_C$  на его обкладках от времени.

7. Получите зависимость величины тока  $I$  в контуре от времени. Чему равен сдвиг фаз между колебаниями  $U_C$  и  $I$ ?
8. Как изменяются со временем амплитуды колебаний  $U_C$  и  $I$ ?
9. Какая величина называется логарифмическим декрементом затухания колебаний  $\theta$ ? Выразите величину  $\theta$  через параметры  $C$ ,  $L$  и  $R$ .
10. В электрическом колебательном контуре сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$  увеличили в два раза. Во сколько раз надо изменить ёмкость  $C$ , чтобы логарифмический декремент затухания колебаний не изменился?
11. Как вычислить добротность колебательного контура? Что характеризует величина добротности?
12. Как определяется величина ЭДС взаимной индукции? Какова роль этой ЭДС в данной работе?
13. Объясните, как возникает картина затухающих колебаний на экране осциллографа? Какова роль генератора прямоугольных импульсов?
14. Объясните, как определить величину логарифмического декремента затухания  $\theta$  по картине, наблюдаемой на экране?
15. Каким образом по данной картине можно определить величину периода затухающих колебаний?
16. Период собственных затухающих колебаний в электрическом колебательном контуре  $T = 2$  мс. За время  $\Delta t = 10$  мс амплитуда таких колебаний уменьшается в  $e = 2,71828$  раз. Чему равен логарифмический декремент затухания колебаний?
17. В контуре с заданными параметрами  $C$  и  $R$  изменяют индуктивность  $L$ . При каком значении  $L$  циклическая частота собственных колебаний имеет максимальную величину? Чему равна  $\omega_{\max}$ ?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 59, 62, 99, 100.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Электромагнетизм и оптика,- изд. ТулГУ. 2010, гл.1 §§4,5, гл.3 §2.

## Работа №30. Определение характеристик колебательного контура методом резонанса

**Цель работы:** экспериментальное исследование особенностей явления резонанса в электрическом колебательном контуре, условий его возникновения и определение основных характеристик колебательного контура методом резонанса.

### Теоретическое описание

Электрическая схема лабораторной установки показана на рис.109. Источник переменной ЭДС с амплитудой  $\mathcal{E}_0$  и циклической частотой  $\omega$  включен в цепь электрического колебательного контура, состоящую из катушки с индуктивностью  $L$ , конденсатора с переменной ёмкостью  $C$  и резистора с сопротивлением  $R$ .

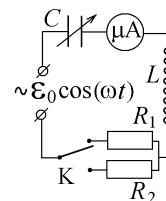


Рис.109

Правило Кирхгофа для такой замкнутой цепи имеет вид  $U_R + U_C = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ , где  $U_R = IR$  – падение напряжения на резисторе,  $U_C = q/C$  – падение напряжения на конденсаторе с зарядом  $q$ ,  $\mathcal{E}_c = -L dI/dt$  – ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке. Подставляя выражение тока  $I = dq/dt$ , созданного изменением заряда на конденсаторе, получаем уравнение вынужденных электрических колебаний

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos(\omega t), \quad \text{где } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \beta = \frac{R}{2L}.$$

Подставляя в это уравнение выражение для установившихся колебаний заряда, происходящих с частотой внешней ЭДС и с амплитудой  $A$ , не зависящей от времени,  $q = A \cos(\omega t - \varphi)$ , приходим к равенству

$$\begin{aligned} A\omega^2 (-\cos(\omega t - \varphi)) + 2\beta A\omega (-\sin(\omega t - \varphi)) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) &= \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos(\omega t) \\ = \cos(\omega t - \varphi + \pi) &= \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) \end{aligned}$$

Три колебания с одинаковой частотой  $\omega$  и разными начальными фазами в левой части этого уравнения складываем методом векторной диаграммы (рис.110), получая в результате сложения вектор, соответствующий правой части. Из прямоугольного треугольника на этом рисунке следует,

что  $A^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta A\omega)^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{L^2}$ ;  $\tan \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ . Отсюда видно, что амплитуда вынужденных колебаний заряда на конденсаторе зависит от частоты переменной ЭДС:

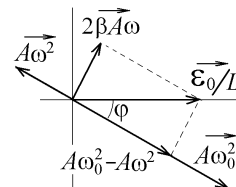


Рис.110

$$A(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Такая же зависимость от частоты  $\omega$  будет у амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе  $U_C = q/C$  (рис.111,а).

Находя ток в цепи,  $I = dq/dt = -A\omega \sin(\omega t - \varphi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$ , видим, что колебания тока опережают колебания напряжения  $U_C$  по фазе на  $\pi/2$ . Амплитуда тока  $I_0(\omega) = A(\omega)\omega = \frac{\mathcal{E}_0}{\frac{L}{\omega} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}}$

также зависит от частоты  $\omega$  (рис.111,б). Её связывают с амплитудой ЭДС внешнего источника формулой, аналогичной закону Ома в цепи постоянного тока:  $I_0 = \mathcal{E}_0 / Z$ , где величину

$$Z(\omega) = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}$$

называют полным сопротивлением цепи переменному току. Записанная формула связывает амплитуды тока и ЭДС. Сопротивление  $X_C = 1/\omega C$  называется ёмкостным сопротивлением, а  $X_L = \omega L$  - индуктивным сопротивлением (эти сопротивления называют реактивными).

Амплитуды падения напряжения на конденсаторе  $U_{C0} = q_{\max}/C = X_C I_0$  и на катушке индуктивности (если  $R_{\text{катушки}} = 0$ ),  $U_{L0} = |-L di/dt|_{\max} = X_L I_0$  связаны с амплитудой тока  $I_0$  реактивными сопротивлениями. Но, поскольку колебания  $U_C$  и  $U_L$  сдвинуты по фазе относительно колебаний тока на величину  $\pi/2$ , то средняя мощность тока для них равна нулю. Например,  $P_C = \frac{1}{T} \int_0^T U_C I dt \sim \int_0^T \cos(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi) dt = 0$ . При протекании переменного тока на реактивных сопротивлениях не выделяется джоулево тепло.

На обычном омическом сопротивлении  $R$  резистора, которое называется активным сопротивлением, выделяется

средняя мощность  $P_R = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 R \cos^2(\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} I_0^2 R$ . Амперметр в цепи (рис.109) измеряет не амплитудное, а эффективное или действующее значение тока  $I_{\text{эфф}} = I_0/\sqrt{2}$ . Это величина такого постоянного тока, который вы-

деляет в цепи ту же мощность, что и переменный ток с амплитудой  $I_0$ .

Из рис.111 видно, что при некоторой частоте внешней ЭДС наблюдается явление резонанса – резкое увеличение амплитуды тока в цепи или амплитуды напряжения на конденсаторе. Такая частота называется резонансной частотой  $\omega_{\text{рез}}$  и определяется из условия максимума. Для напряжения на конденсаторе амплитуда  $U_{C0} = A(\omega)/C$  максимальна

при минимальном значении знаменателя:  $\frac{d}{d\omega} \left( \left( \omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right) = 0$ , что дает  $\omega_{\text{рез}U_C} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$  – резонансная частота для амплитуды заряда или напряжения на конденсаторе. Амплитуда тока максимальна, если  $\frac{1}{C\omega} - L\omega = 0$ , т.е.  $\omega_{\text{рез}I} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансная частота для амплитуды тока в цепи.

Обычно резонанс используется в контурах с очень малым коэффициентом затухания  $\beta \ll \omega_0$ , для которых  $\omega_{\text{рез}U_C} \approx \omega_{\text{рез}I} = 1/\sqrt{LC}$ . Резонансные свойства колебательного контура определяются двумя характеристиками. Это волновое или характеристическое сопротивление контура  $\rho$  – величина его ёмкостного (или индуктивного) сопротивления при резонансной частоте:  $\rho = X_{C\text{рез}} = X_{L\text{рез}} = L\omega_{\text{рез}I}$ , т.е.  $\rho = \sqrt{L/C}$ .

Другая характеристика – добротность  $Q$  контура. Это – отношение амплитуды напряжения на индуктивности (или на конденсаторе) к амплитуде ЭДС при резонансе:  $Q = \frac{U_{L0}}{\mathcal{E}_0} = \frac{X_L I_0}{\mathcal{E}_0} = \frac{L\omega_{\text{рез}I} I_0}{I_0 R}$ , т.е.  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$ .

Чем больше добротность, тем выше и уже ширина резонансных кривых на рис.111. Ширина  $\Delta\omega$  резонансной кривой на высоте  $0,7 \cdot I_{0\max}$  приблизительно равна  $\Delta\omega \approx \omega_0/Q \approx R/L$  (рис.111,б). В приемных устройствах надо использовать контуры с очень большой добротностью и малым затуханием колебаний, чтобы выделить и усилить сигнал с определенной частотой, попадающей в интервал  $\Delta\omega$ . В технике добротность определяют как величину, пропорциональную отношению запасенной в контуре энергии к энергии, теряемой за период  $T$  в виде джоулева тепла, выделяющегося на

активном сопротивлении  $R$ :  $Q \sim \frac{LI_0^2}{2} \bigg/ \left( \frac{RI_0^2}{2} T \right)$ .

В данной работе источник ЭДС имеет постоянную частоту  $\omega = 2\pi\nu$ , где  $\nu = 50$  Гц. Строится зависимости тока в цепи от переменной ёмкости  $C$  включенного в цепь конденсатора. При выполнении условия резонанса тока  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  или  $C_{\text{рез}} = 1/(\omega^2 L)$  амплитуда тока будет максимальна (рис.112), что позволяет рассчитать:

индуктивность цепи  $L = 1/(C_{\text{рез}} \omega^2)$ , (129)

её волновое сопротивление  $\rho = \sqrt{L/C_{\text{рез}}}$  (130)

и добротность колебательного контура  $Q = \rho/R$ . (131)

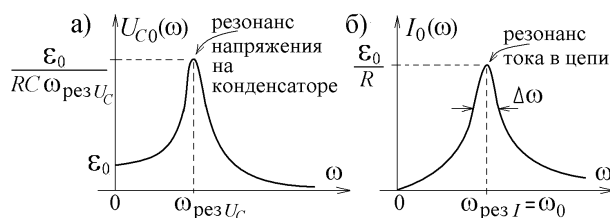


Рис.111

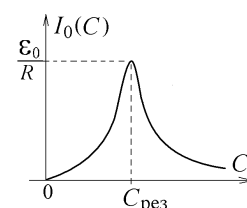


Рис.112

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться со схемой установки (рис.109).
2. Включить установку и переключателем подключить в цепь резистор с сопротивлением  $R_1$  (величины сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  указаны на установке).
3. Снять резонансную кривую, т.е. изменяя значения емкости конденсатора  $C$ , измерять показания микроамперметра, который показывает эффективное значение тока  $I_{эфф}$ , и данные заносить в таблицу 1.
4. Переключателем включить в контур другой резистор с сопротивлением  $R_2$  и снять вторую резонансную кривую, повторяя действия пункта 3.

Таблица 1.

Деления на конденсаторе												
$C$ , пФ												
$I_{эфф}$ , мкА (для $R_1$ )												
$I_{эфф}$ , мкА (для $R_2$ )												

5. По данным таблицы 1 в одних координатных осях (на одном листе) построить два графика резонансных кривых  $I_{эфф} = f(C)$  для двух сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ .

6. По двум резонансным кривым определить значения емкости  $C_{рез}$ , соответствующие максимальному значению тока  $I_{эфф} = I_0 / \sqrt{2}$ .

7. Определить индуктивность контура  $L$  по формуле (129). Резонансная частота для тока в данном случае совпадает с частотой переменного тока в цепи:  $\omega_{рез} = 2\pi\nu_0$ . Частота этого тока  $\nu_0$  указана на установке. При аккуратных измерениях величины рассчитанной индуктивности  $L$  в пределах погрешностей должны совпадать.

8. Рассчитать волновое сопротивление контура  $\rho$  по формуле (130).

9. Рассчитать добротность контура  $Q$  по формуле (131).

10. Все результаты вычислений занести в таблицу 2.

Таблица 2.

$C_{рез}$ , пФ	$\omega_{рез}$ , с <sup>-1</sup>	$L$ , Гн	$R$ , Ом	$\rho$ , Ом	$Q$

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 30

1. Какая цепь называется электрическим колебательным контуром?
2. Нарисуйте замкнутую цепь, содержащую конденсатор с ёмкостью  $C$ , катушку с индуктивностью  $L$ , резистор  $R$  и источник тока с переменной ЭДС  $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ . Запишите правило Кирхгофа с учетом ЭДС самоиндукции в катушке и приведите его к дифференциальному уравнению вынужденных электрических колебаний.
3. Какова амплитуда и частота вынужденных колебаний? С помощью метода векторной диаграммы получите выражения для амплитуды напряжения  $U_C$  на конденсаторе и амплитуды силы тока  $I$  в цепи.
4. Какова разность фаз между вынужденными колебаниями  $U_C$  и  $I$ ?
5. Какие величины называются индуктивным, ёмкостным, активным и полным сопротивлением цепи переменному току?
6. Какая величина называется эффективным (действующим) значением тока (напряжения)? На каких элементах цепи выделяется эффективная мощность?
7. Какое явление называется резонансом? Что такое резонансная частота и как её вычислить?
8. Резонанс какой величины наблюдается в данной работе?
9. Найти резонансную частоту для колебаний заряда на конденсаторе.
10. Найти резонансную частоту для колебаний силы тока в цепи.
11. Частоту внешнего источника ЭДС постепенно увеличивают. Резонанс какой величины,  $U_C$  или  $I$ , наступит раньше?
12. Какая величина называется волновым сопротивлением контура? Как её вычислить?
13. Какая величина называется добротностью электрического колебательного контура?
14. Что происходит с кривой амплитудно-частотной характеристики тока (рис.2.43,б) при увеличении активного сопротивления  $R$  цепи?
15. Почему в радиоприемниках надо использовать приемный контур с высокой добротностью?

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 59, 100, 101.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Электромагнетизм и оптика,- изд. ТулГУ. 2010, гл.1 §4, гл.3 §§2-4.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савельев И.В. Курс физики : учеб. пособие для вузов : в 3 т.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика/ И. В. Савельев . — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург, Москва, Краснодар : Лань, 2008.— 352 с. — ISBN 978-5-8114-0685-2 (Том 1).
- Савельев И.В. Курс физики. В 3-х тт. Т.1. Механика. Молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ — Электрон.текстовые данные. — СПб, М.: Лань, 2017. — 356 с. — Режим доступа: [https://e.lanbook.com/book/95163#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/95163#book_name).— ЭБС “Лань”, по паролю.
2. Савельев И.В. Курс физики : учеб. пособие для вузов : в 3 т.: Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика / И. В. Савельев . — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург, Москва, Краснодар : Лань, 2008 .— 468 с. — ISBN 978-5-8114-0686-9 (Том 2).
- Савельев И.В. Курс физики. В 3-х тт. Т.2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ — Электрон.текстовые данные. — СПб, М.: Лань, 2018. — 468 с. — Режим доступа: [https://e.lanbook.com/book/100927#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/100927#book_name).— ЭБС “Лань”, по паролю.
3. Чертов А.Г., Воробьев А.А., под ред. Общая физика (для бакалавров) [Электронный ресурс]: учебное пособие/— Электрон.текстовые данные. —М.: КноРус, 2016. — 800 с. — ISBN 978-5-406-05760-5 —Режим доступа: <https://www.book.ru/book/922169>.— ЭБС “BOOK.ru”, по паролю.
4. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности : лекции по физике : учеб. пособие [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2010.— 180 с. — ISBN 5-7679-0213-5. — Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014112718061265516800007818>. – ЭБС “БиблиоТех”, по паролю.
5. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика. Лекции по физике : учеб. пособие [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2008 .— 139 с. : ил.— ISBN 978-5-7679-1221-6. .- Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014112810265189549100005390>. – ЭБС “БиблиоТех”, по паролю.
6. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм : лекции по физике [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2008 .— 140 с. — ISBN 5-7679-0186-4. .- Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014112810334538607700008298>. – ЭБС “БиблиоТех”, по паролю.
7. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Электромагнетизм и оптика : лекции по физике [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула, 2010 .— 130 с. : ил .— ISBN 5-7679-0187-2. .- Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014112810384275951700003447>. – ЭБС “БиблиоТех”, по паролю.

## ВВЕДЕНИЕ

Рабочие программы предусматривают обязательное выполнение шести лабораторных работ по физике во втором семестре обучения и шести лабораторных работ в третьем семестре обучения. Эти работы выполняются по индивидуальному графику, имеющемуся в каждой лаборатории кафедры физики. Без выполнения шести работ и сдачи оформленного согласно приложенным образцам отчета по проделанным измерениям и полученным результатам студент не допускается к экзамену по физике.

Каждый сданный отчет по одной работе оценивается в 2 балла текущей аттестации. Студент имеет право ответить на вопросы и тесты, обосновывающие теорию и методику выполняемой работы. Успешная сдача такого теоретического минимума по каждой работе оценивается также в 2 балла текущей аттестации.

Далее приведены теоретические обоснования всех лабораторных работ, выполняемых в лабораторном практикуме кафедры физики ТулГУ по различным темам курса физики, изучаемым согласно рабочим программам. Изложены минимальные сведения, необходимые для защиты выполненных лабораторных работ и успешного ответа на контрольные вопросы. В каждой работе указан порядок выполнения экспериментальных измерений, их обработки и оформления отчетов. Эти сведения можно также найти на сайте кафедры физики: (<http://physics.tsu.tula.ru/>).

## Работа №1. Исследование косого удара о наклонную плоскость

**Цель работы:** исследовать траекторию движения шара после удара о плоскость; определить коэффициент восстановления скорости шара.

### Теоретическое описание

Лабораторная установка изображена на рис. 1. Двумя держателями “Д” закрепляют стальную наклонную плоскость и бункер “С”, куда помещают маленький стальной шарик  $m$ . Угол  $\alpha$  наклона плоскости к горизонту определяют, измерив расстояния  $h_1$  и  $h_2$  от плоскости до опоры в двух точках и расстояние  $l$  между этими точками. Тогда  $\sin \alpha = (h_2 - h_1)/l$  (рис.1).

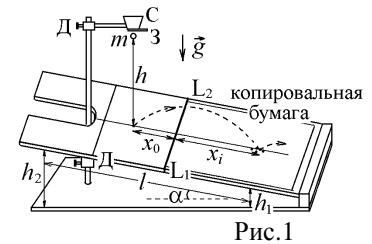


Рис.1

На стальную плоскость кладут полоску чистой бумаги, на которой отмечена линия  $L_1L_2$ , и закрепляют бумагу скобой. Положение этой линии отмечают риску в точке  $L_1$  на стальной поверхности. Сверху помещают листок копировальной бумаги **слева** от этой линии. Если открыть заслонку “З”, то, падая с высоты  $h$  из жёстко закреплённого бункера, шарик будет падать на копировальную бумагу практически в одну точку, расстояние  $x_0$  от которой до линии  $L_1L_2$  измеряют по полуценной на бумаге отметке.

В работе исследуется удар стального шарика о стальную поверхность. Поэтому бумажную полоску перегибают по линии  $L_1L_2$  и снова кладут на стальную поверхность **справа**, накрывая листком копировальной бумаги и закрепляя скобой так, чтобы линия  $L_1L_2$  совпала с отмеченной риской  $L_1$ . Теперь шарик будет отскакивать от стали и, как обсуждается ниже, будет попадать на бумагу с разбросом, создавая отметки на разных расстояниях  $x_i$  от линии  $L_1L_2$  (рис.2.1). По этим отметкам можно найти среднее расстояние  $x = x_0 + \langle x_i \rangle$  между двумя точками попадания шарика на наклонную плоскость.

Удар называется абсолютно упругим, если после удара механическая энергия сталкивающихся тел не изменяется. В данном случае при абсолютно упругом ударе шарик должен отскочить от плоскости с той же по величине скоростью, с которой он падал на неё. Напомним, что полная механическая энергия, состоящая из кинетической и потенциальной энергии, сохраняется,  $E_{\text{мех}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \text{const}$ , если все действующие в системе силы консервативны, т.е. их работа, равная изменению кинетической энергии, равна убыли потенциальной энергии системы:  $A_{\text{конс}} = \int \vec{F}_{\text{конс}} d\vec{r} = -\Delta E_{\text{пот}} = \Delta E_{\text{кин}}$ . Такой силой является сила упругости. Кинетическая энергия сталкивающихся тел переходит в потенциальную энергию упругого взаимодействия и наоборот.

При абсолютно неупругом ударе сталкивающиеся тела слипаются и движутся как одно целое. При этом часть механической энергии превращается в тепло или в энергию неупругих деформаций. Изменение механической энергии равно работе неконсервативных сил, действующих в системе:  $\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{неконс}}$ . Примером неконсервативной силы будет сила трения.

В реальных столкновениях слипания тел не происходит, но суммарная механическая энергия соударяющихся тел уменьшается. Эту потерю характеризуют коэффициентом восстановления скорости. Пусть сталкиваются два тела, летевшие со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . Линия, перпендикулярная к общей касательной к поверхностям сталкивающихся тел в точке соприкосновения называется линией удара  $n$  (рис.2). Разность проекций скоростей на эту линию будет относительной скоростью сближения тел  $|\vec{v}_{1n} - \vec{v}_{2n}|$ . Сразу после столкновения скорости разлетающихся тел  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  и относительная скорость их разлёта  $|\vec{u}_{1n} - \vec{u}_{2n}|$  уменьшаются. Коэффициентом восстановления скорости называется величина

$$k_c = |\vec{u}_{1n} - \vec{u}_{2n}| / |\vec{v}_{1n} - \vec{v}_{2n}| < 1.$$

В данной работе одно из тел (стальная плоскость) неподвижно, и коэффициент  $k_c$  определяется как отношение проекций скоростей шарика на нормаль  $n$  к плоскости сразу после соударения (рис.3,в) и до соударения (рис.3,а):  $k_c = |u_n/v_n|$ .

В момент наибольшего сближения шарика с плоскостью его нормальная проекция скорости будет равна нулю (рис.3,б). И шарик, и плоскость деформируются (изменяют свою форму) и возникает нормальная сила реакции (сила упругости  $\vec{F}_{\text{упр}}$ ), которая будет отталкивать шарик от плоскости, сообщая ему новую скорость  $\vec{u}_n$ . При этом деформация происходит и в

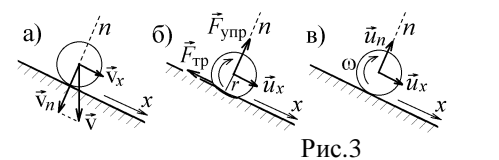


Рис.3

касательном направлении, приводя к появлению силы, которую обычно называют силой трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (рис.3,б). Эта сила не успевает изменить касательную проекцию скорости шарика, так как удар происходит очень быстро, а центр масс шарика может смещаться вдоль плоскости. Но при этом создаётся момент сил трения  $\vec{M}_{\text{тр}} = [\vec{r}, \vec{F}_{\text{тр}}]$ , который раскручивает шарик, сообщая ему угловую скорость  $\omega$ . После 2-3 ударов шарик перестаёт отскакивать и начинает катиться по наклонной плоскости, а касательная проекция скорости шарика после удара практически не изменяется:  $u_x = v_x$ .

Для расчета выберем оси координат, в которых ось  $x$  направлена вдоль наклонной плоскости, под углом  $\alpha$  к горизонту, а ось  $y$  – по нормали к плоскости (рис.4). При падении с высоты  $h$  потенци-

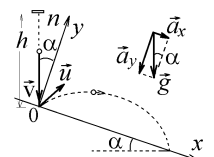


Рис.4

альная энергия шарика превращается в кинетическую:  $mgh = mv^2/2$ , т.е. шарик подлетает к плоскости со скоростью

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (1)$$

После отскока проекция его скорости на ось  $x$  не меняется,  $u_x = v_x = v \sin \alpha$ , а проекция  $u_y = u_n = k_c v_n = k_c v \cos \alpha$  будет меньше величины  $v_n$ , поскольку часть механической энергии шарика превратилась в тепловую энергию и энергию неупругой деформации тел.

В выбранных осях шарик движется с постоянным ускорением, имеющим проекции  $a_x = g \sin \alpha$  и  $a_y = -g \cos \alpha$  ( $g$  – ускорение свободного падения). В момент повторного падения шарика на плоскость уравнения кинематики имеют вид:

$$x = u_x t + a_x t^2/2 = v \sin \alpha \cdot t + g \sin \alpha \cdot t^2/2, \quad (2)$$

$$y = 0 = u_y t + a_y t^2/2 = k_c v \cos \alpha \cdot t - g \cos \alpha \cdot t^2/2. \quad (3)$$

Из уравнения (3) получим  $t = 2k_c v/g$  и, подставляя в (2), находим  $x = 2v^2 \sin \alpha (k_c^2 + k_c)/g$ . С учетом (1) приходим к

$$\text{уравнению } k_c^2 + k_c - \frac{x}{4h \sin \alpha} = 0, \text{ имеющему решение } k_c = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{x}{h \sin \alpha}} - 1 \right). \quad (4)$$

Опыты показывают, что при соударении тел из стали  $k_c \approx 0,55$ .

#### Порядок выполнения работы

1. Перемещением муфты А установить произвольный наклон плоскости (примерно 10-15°). Измерить высоты  $h_1$  и  $h_2$ , длину наклонной плоскости  $l$  между линиями  $L_1$  и  $L_2$  (см.рис.1) и определить величину  $\sin \alpha = (h_2 - h_1)/l$ .

*Примечание.* Можно произвольно изменять длину наклонной плоскости  $l$ , изменяя при этом другие высоты  $h_1$  и  $h_2$ .

2. Перемещением муфты В установить произвольную высоту  $h$  (17–20 см) бункера С над наклонной плоскостью. Отцентрировать установку бункера так, чтобы шарик после отскока ударился еще один раз о наклонную плоскость в направлении ее продольной оси.

3. Положить на наклонную плоскость узкую полоску бумаги краем вдоль черты  $L_1$ , накрыть сверху копировальной бумагой и закрепить оба листа скобой. При проведении эксперимента скобу не трогать.

4. Поместить шарик в бункер С в слегка открытое отверстие (это позволит более точно фиксировать начальное положение шарика). Затем медленно открыть заслонку, дав шарiku провалиться. Ударившись о плоскость, шарик отскочит и оставит след на бумаге.

5. Обозначить точку удара на бумаге точкой 1. Отогнуть от линии  $L_1$  и полоску бумаги и копировальную бумагу таким образом, чтобы повторное падение шарика из бункера пришлось на металлическую поверхность; отскочив от нее, шарик второй раз ударится о поверхность и оставит след на бумаге. Эту точку обозначить цифрой 1'.

6. Повторить опыт при отогнутой бумаге 9 раз, отмечая следы от повторных ударов соответственно 1', 2', ..., 9'.

7. Снять листы с плоскости, определить расстояния  $x_i$  между точками 1-1', 1-2', 1-3', ..., 1-9' и занести в табл.1.

8. Вычислить среднее значение  $\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9}{9}$ .

9. Определить случайные отклонения  $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$  каждого измерения расстояния, среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta x_i)^2}$ . Вычислить погрешность  $\Delta x$  результата измерений:  $\Delta x = \frac{S}{\sqrt{n}}$  ( $n$  – количество точек).

Таблица 1

$x_i$ , мм	$\Delta x_i$ , мм	$(\Delta x_i)^2$ , мм <sup>2</sup>

10. Вычислить среднее значение коэффициента восстановления скорости по формуле (4)  $\langle k_c \rangle = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\langle x \rangle}{h \sin \alpha}} - 1 \right)$ . Принимаем

радиус шарика  $r \ll h$ .

11. Вычислить абсолютную  $\Delta k$  и относительную  $E$  погрешности:  $\Delta k_c = \frac{\Delta x}{4(2\langle k_c \rangle + 1)h \sin \alpha}$ ;  $E = \frac{\Delta k_c}{\langle k_c \rangle} 100\%$ . (5)

12. Результаты измерений и расчетов записать в табл.1 и 2.

Таблица 2

$l$ , мм	$h$ , мм	$h_1$ , мм	$h_2$ , мм	$\sin \alpha$	$\langle x \rangle$ , мм	$S$ , мм	$\Delta x$ , мм	$\langle k_c \rangle$	$\Delta k_c$	$E$ , %

13. Записать результат в виде:  $k_c = \langle k_c \rangle \pm \Delta k_c = \dots \pm \dots$

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 1

1. Что называется коэффициентом восстановления скорости?

2. Опишите методику определения этого коэффициента в данной работе. Зачем надо фиксировать линию  $L_1 L_2$  на установке?



3. Какое соударение называется абсолютно упругим, а какое - абсолютно неупругим? Наблюдаются ли эти соударения в данной работе?
4. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии. Когда этот закон выполняется, а когда нарушается в данной работе?
5. Опишите этапы соударения шарика со стальной плоскостью на рис.3. Почему нормальная проекция скорости шарика при ударе меняет свою величину, а касательная проекция его скорости практически не меняется?
6. Во что превращается часть механической энергии соударяющихся тел? Как определить эту часть при нормальном падении шарика на плоскость, если известен коэффициент восстановления скорости  $k_c$ ?
7. С помощью рис.4 и уравнений кинематики сделайте все этапы получения расчётной формулы (4).

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - гл. III, §19, 24, 25, 27
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл. I §8, гл. 3 §3,6, гл. 6 §4.

## Работа №2. Упругий удар шаров

**Цель работы:** ознакомиться с явлением удара на примере соударения шаров, рассчитать коэффициент восстановления энергии, проверить выполнение закона сохранения импульса.

### Теоретическое описание

В работе исследуется соударение двух небольших металлических шаров, подвешенных на невесомых нитях длины  $l$ . В положении равновесия шары находятся в нижней точке и касаются друг друга. Их положения  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  определяются по круговой шкале, на которой деления нанесены в градусах. Один из шаров отводят на угол  $\Delta\alpha$ . Тогда  $\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha_1$  - новое положение шара, отмечаемое по шкале. При этом, как видно из рис.5, он поднимается на высоту

$$h = l(1 - \cos \Delta\alpha_1) = l \cdot 2 \sin^2 (\Delta\alpha_1/2). \quad (6)$$

После того, как поднятый шар будет отпущен, он движется вниз и соударяется со вторым шаром, висющим неподвижно. Скорость  $v$  налетающего шара в момент удара можно определить из закона сохранения механической энергии (потенциальная энергия переходит в кинетическую):  $mgh = mv^2/2$ , откуда

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (7)$$

Дальнейшее движение шаров после удара можно определить с помощью законов сохранения. Закон сохранения импульса всегда выполнен в замкнутой (или изолированной) системе, на которую не действуют внешние силы или действием таких сил можно пренебречь. Это следует из уравнения движения (2-го закона Ньютона), записанного в виде

$\frac{d\vec{p}_{\text{системы}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ , откуда импульс  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ . В нашем случае силы тяжести  $m\vec{g}$  и натяжения нити  $\vec{N}$  уравновешены только в нижней точке, в которой происходит удар.

Но закон сохранения импульса часто можно применить и в незамкнутой системе, в которой  $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$ , но взаимодействие происходит очень быстро, за время  $\Delta t \rightarrow 0$  (удар, взрыв). Тогда изменение импульса  $\Delta \vec{p}_{\text{системы}} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \Delta t \rightarrow 0$  пренебрежимо мало и можно считать, что  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ . В нашем случае выполнены оба этих условия.

Сразу после центрального удара шары движутся со скоростями  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ , направленными вдоль горизонтальной линии удара (рис.2), проходящей через центры масс шаров. Эти скорости направлены в одну сторону, если масса налетающего шара  $m_1$  больше массы  $m_2$  шара, висевшего неподвижно. Если  $m_1 < m_2$ , то шары разлетаются в разные стороны, как показано на рис. 6. В таком случае, когда меньший шар налетает со скоростью  $v$  на неподвижный большой шар, закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось имеет вид

$$m_1 v = -m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (8)$$

После удара нити подвеса разлетающихся шаров  $m_1$  и  $m_2$  отклонятся на максимальные углы  $\Delta\alpha_2$  и  $\Delta\beta_2$ , а шары поднимутся на высоту  $h_1$  и  $h_2$  соответственно (рис. 6). Связь скорости  $v$ , с которой шар  $m_1$  подлетает к точке удара, с углом  $\Delta\alpha_1$  первоначального отклонения нити его подвеса (рис.5) следует из соотношений (6) и (7):

$$v = 2\sqrt{gl} \sin(\Delta\alpha_1/2). \quad (9)$$

Аналогичными соотношениями связаны углы  $\Delta\alpha_2$  и  $\Delta\beta_2$  со скоростями разлёта шаров на рис. 6:

$$u_1 = 2\sqrt{gl} \sin(\Delta\alpha_2/2), \quad u_2 = 2\sqrt{gl} \sin(\Delta\beta_2/2). \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим соотношение

$$m_1 \sin(\Delta\alpha_1/2) = -m_1 \sin(\Delta\alpha_2/2) + m_2 \sin(\Delta\beta_2/2), \quad (11)$$

позволяющее экспериментально проверить выполнение закона сохранения импульса при ударе шаров по измеренным углам отклонения их нитей подвеса.

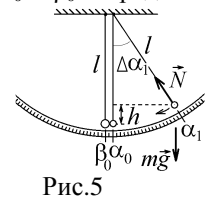


Рис.5

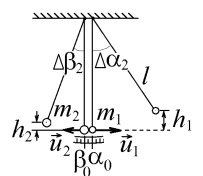


Рис.6

Закон сохранения полной механической энергии будет выполняться в том случае, когда все действующие в системе силы консервативны. В этом случае происходит абсолютно упругий удар: шары при столкновении упруго сжимаются и часть их кинетической энергии превращается в потенциальную энергию упругой деформации. В момент наибольшего сближения (деформации) шары движутся с одной скоростью, а потом начинают разлетаться, восстанавливая свою форму. Потенциальная энергия упругой деформации превращается в кинетическую энергию шаров, разлетающихся со скоростями  $u_1$  и  $u_2$ . В таком случае для проводимого эксперимента закон сохранения механической энергии можно записать в виде  $\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$  и решать его совместно с законом сохранения импульса (8).

При абсолютно неупругом ударе шары слипаются и движутся далее с одной скоростью  $u$ . Часть механической энергии затрачивается на работу диссипативных сил внутреннего трения, которая превращается в энергию остаточной деформации и выделяется в результате в виде тепла  $Q$ . Законы сохранения импульса и энергии в этом случае примут вид

$$m_1 v = (m_1 + m_2) u \quad \text{и} \quad \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + Q.$$

В случае реального центрального соударения металлических шаров, исследуемого в работе, шары не слипаются, но действующие диссипативные силы внутреннего трения уменьшают механическую энергию системы. Это уменьшение характеризуют величиной коэффициента восстановления кинетической энергии  $k_3$  – отношения кинетической энергии шаров после удара к их энергии до удара. С учетом (9) и (10) величину этого коэффициента можно вычислить по формуле

$$k_3 = \frac{m_1 u_1^2 / 2 + m_2 u_2^2 / 2}{m_1 v^2 / 2} = \frac{m_1 \sin^2(\Delta\alpha_2/2) + m_2 \sin^2(\Delta\beta_2/2)}{m_1 \sin^2(\Delta\alpha_1/2)}. \quad (12)$$

Предоставив шарам раскачиваться и совершать удары, можно убедиться, что постепенно скорости и амплитуды движения шаров будут затухать, и со временем шары неподвижно повиснут в положении равновесия. Вся кинетическая энергия будет израсходована на работу диссипативных сил.

#### Порядок выполнения работы

1. Записать начальные положения  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ , соответствующие точкам пересечения нитей бифилярных подвесов с линией деления шкалы, когда шары неподвижны. Здесь и в дальнейшем обозначение " $\alpha$ " относится к шару А с меньшей массой  $m_1$ , а " $\beta$ " – к шару В с меньшей массой  $m_2$ .

2. Отклонить шар А на угол  $\alpha_1$  от  $10^\circ$  до  $15^\circ$  и отпустить без начальной скорости. Произвести отсчет первого отброса обоих шаров  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  (так как сразу практически невозможно взять два отсчета, то поступают так: сначала берут отсчет для одного шара, затем производят повторный удар из того же положения шара А и берут отсчет для второго шара). Удар из данного положения производят не менее 10 раз, чтобы для каждого шара получить не менее пяти значений отбросов нитей после удара ( $\alpha_2$  и  $\beta_2$ ). Найти среднее  $\langle\alpha_2\rangle$  и  $\langle\beta_2\rangle$ .

3. Опыт проделать для двух других значений  $\alpha_1$ . (от  $20^\circ$  до  $25^\circ$ , от  $30^\circ$  до  $35^\circ$ ). Заполнить таблицу 1.

4. Проверить закон сохранения импульса (8). Для этого определить начальные и конечные отклонения шаров  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ ,  $\Delta\alpha_2 = \langle\alpha_2\rangle - \alpha_0$  и  $\Delta\beta_2 = \langle\beta_2\rangle - \beta_0$  (рис.6) и рассчитать величины левой и правой части уравнения (11):

$\xi_1 = m_1 \sin(\Delta\alpha_1/2)$  и  $\xi_2 = -m_1 \sin(\Delta\alpha_2/2) + m_2 \sin(\Delta\beta_2/2)$ . Результаты занести в таблицу 2, и по формуле  $\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1} \cdot 100\%$

рассчитать на сколько процентов отличаются величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

5. Вычислить коэффициент восстановления энергии  $k_3$  по формуле (12).

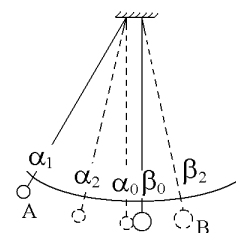


Таблица 1.

$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$				$\langle\alpha_2\rangle, ^\circ$	$\beta_2, ^\circ$				$\langle\beta_2\rangle, ^\circ$

$\alpha_0, ^\circ = \dots$

$\beta_0, ^\circ = \dots$

Таблица 2.

$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0, ^\circ$	$\Delta\alpha_2 = \langle\alpha_2\rangle - \alpha_0, ^\circ$	$\Delta\beta_2 = \langle\beta_2\rangle - \beta_0, ^\circ$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1} \cdot 100\%$	$k_3$

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 2

1. Сформулируйте закон сохранения импульса системы и условия его выполнения.
2. Какая система называется замкнутой, и будет ли замкнутой система соударяющихся шаров?
3. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии системы и условия его выполнения.

4. Какая величина называется коэффициентом восстановления энергии и может ли она быть большей или равной единице?
5. По какой причине сохраняется импульс шаров после удара, хотя их механическая энергия уменьшается? Верно ли это утверждение?
6. Какой удар называется абсолютно упругим и абсолютно неупругим? Каким ударом будет соударение шаров в проводимом эксперименте?

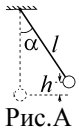


Рис.А

7. Получите связь между углом отклонения нити подвеса и высотой подъема шара  $h$  (рис.А).
8. Шар с массой  $m_1$  поднимают на высоту  $h = 9$  см и отпускают без начальной скорости. Он испытывает центральное соударение с шаром массы  $m_2$ , висевшим неподвижно на нити той же длины (рис.Б). Запишите выражения закона сохранения энергии и закона сохранения импульса в случае абсолютно упругого удара. Определите с помощью этих соотношений максимальную высоту подъема шаров  $m_2$  и  $m_1$  после удара в случае, когда  $m_2 = m_1$  и в случае, когда  $m_2 = m_1/2$ .

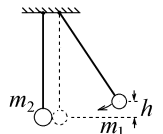


Рис.Б

9. При условиях, изображенных на рис.2 происходит абсолютно неупругое соударение шаров. Определите величину коэффициента восстановления кинетической энергии в случаях  $m_2 = m_1$  и  $m_2 = 2m_1$ .
10. Сделайте вывод соотношений (11) и (12). Объясните, каким образом в данной работе проверяется выполнение закона сохранения импульса.

### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1970.- §§23, 27-30.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §3,6; гл.5 §1,5; гл.6 §1,2.

## Работа №3а. Определение скорости пули с помощью баллистического маятника

**Цель работы:** использовать законы сохранения импульса и механической энергии для измерения скорости пули баллистическим методом.

### Теоретическое описание

Баллистический маятник представляет из себя тяжёлый пустотелый цилиндр, заполненный пластилином и подвешенный на нитях. Подобные устройства используются в баллистике для определения скорости быстро летящих предметов (снарядов, пуль), застревающих в маятнике, но при этом в момент удара не возникает сил, препятствующих его движению. По углу отклонения баллистического маятника с застрявшей в нём пулей определяют скорость пули до удара.

Летающая горизонтально со скоростью  $v$  пуля массы  $m_1$  застревает в пластине, заполняющей неподвижно висевший цилиндр маятника массы  $m_2$ . Это **абсолютно неупругий удар**, после которого маятник с застрявшей в нём пулей начинает двигаться со скоростью  $u$  (рис.7).

При таком ударе механическая энергия системы пуля-маятник не сохраняется. Закон сохранения полной механической энергии выполняется, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы, которую можно найти из соотношения

отношения  $A_{\text{тр}} = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_2 + m_1) u^2}{2}$  (разность кинетических энергий тел до и после удара). Большая часть этой работы идёт на нагревание тел.

Закон сохранения импульса справедлив в замкнутой (или изолированной) системе, на которую не действуют внешние силы или действием таких сил можно пренебречь. Это следует из уравнения 2-го закона Ньютона, записанного

в виде  $\frac{d\vec{p}_{\text{системы}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ , откуда импульс  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ . Но закон сохранения импульса часто можно применить

и в незамкнутой системе, в которой  $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$ , но взаимодействие происходит очень быстро, за время  $\Delta t \rightarrow 0$  (удар, взрыв). Тогда изменение импульса  $\Delta \vec{p}_{\text{системы}} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \Delta t \rightarrow 0$  пренебрежимо мало, и можно считать, что  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ .

В данной работе, строго говоря, удар происходит не мгновенно. Пуля некоторое время  $\tau$  продолжает движение в пластине, а маятник за это время отклоняется от положения равновесия, так что внешние силы тяжести и натяжения нитей не уравновешены. Однако время  $\tau \ll T$ , где  $T$  – период колебаний маятника, равный  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , так как баллистический маятник на двух невесомых нитях движется после удара поступательно (все его точки движутся с одинаковыми скоростями по одинаковым траекториям). Такой маятник является не физическим, а математическим. За малое время  $\tau$  импульс не успевает измениться и закон его сохранения при ударе можно записать в виде

$$m_1 v = (m_2 + m_1) u. \quad (13)$$

Для математического маятника не надо учитывать кинетическую энергию вращательного движения вокруг оси подвеса. Центр масс маятника поднимается на высоту  $h$ , и кинетическая энергия поступательного движения переходит в потенциальную энергию консервативной силы тяжести:  $(m_2 + m_1) u^2 / 2 = (m_2 + m_1) gh$ , откуда

$$u = \sqrt{2gh}. \quad (14)$$

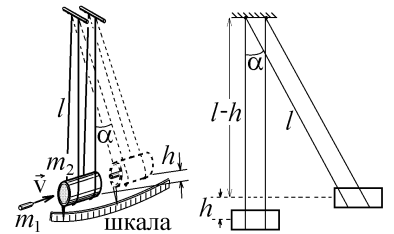


Рис.7

Высоту подъёма определяют по углу  $\alpha$  отклонения нитей подвеса, измеряемому по круговой шкале (рис.7). Масса баллистического маятника намного больше массы пули, поэтому маятник отклоняется на малый угол, для которого  $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$  (угол измеряется в радианах). Если расстояние от оси подвеса до центра маятника равно  $l$ , то

$$h = l(1 - \cos \alpha) = l \cdot 2 \sin^2(\alpha/2) \approx l\alpha^2/2. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и (13), находим скорость пули до удара:

$$v = \frac{m_2 + m_1}{m_1} 2\sqrt{gl} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx \frac{m_2 + m_1}{m_1} \alpha \sqrt{gl}. \quad (16)$$

#### Порядок выполнения работы

1. В таблицу 1 занести значения массы пули  $m_1$ , массы маятника  $m_2$ , длины нити  $l$  и их погрешности (величины  $m_1$  и  $m_2$  в граммах указаны на пуле и цилиндре). Записать в таблицу значения погрешностей измерения этих величин.

Погрешность длины нити  $l$  определяется, как половина цены деления линейки, с помощью которой измерена длина. Погрешность масс  $m_1$  и  $m_2$  определяется, как половина единицы последнего разряда числа, указанного на пуле и цилиндре. Например  $m_1 = 30,3$  г. Последний разряд это десятые. Тогда  $\Delta m_1 = \frac{0,1}{2} = 0,05$  г.

Таблица 1.

$m_1$ , кг	$\Delta m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$\Delta m_2$ , кг	$l$ , м	$\Delta l$ , м

2. Вставить пулю в ствол пружинного пистолета.

3. Нажимая на спуск, произвести выстрел и отсчитать по шкале угол  $\alpha$  отклонения маятника от вертикального положения (см. рис.7).

4. Значение угла отклонения записать в таблицу 2.

Таблица 2.

$\alpha_i^\circ$									
$\Delta \alpha_i^\circ$									
$(\Delta \alpha_i^\circ)^2$									
$\langle \alpha \rangle^\circ = \dots\dots\dots$		$S = \dots\dots\dots$			$\Delta \alpha^\circ = \dots\dots\dots$				

5. Измерения провести не менее  $n = 9$  раз. Вычислить среднее значение угла отклонения  $\langle \alpha \rangle^\circ = \sum_{i=1}^n \alpha_i^\circ / n$ ; случайные отклонения каждого измерения  $\Delta \alpha_i^\circ = \alpha_i^\circ - \langle \alpha \rangle^\circ$ ; среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta \alpha_i^\circ)^2}$ , где  $n$  – число измерений; погрешность результата измерений  $\Delta \alpha^\circ = S / \sqrt{n}$ . Результаты занести в таблицу 2.

6. По формуле (16)  $\langle v \rangle = \frac{m_1 + m_2}{m_1} 2\sqrt{gl} \sin\left(\frac{\langle \alpha \rangle}{2}\right)$  определить среднее значение скорости пули.

7. Относительную и абсолютную погрешности результата рассчитать по формулам

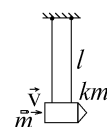
$$E = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1 + \Delta m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \alpha^\circ}{\langle \alpha \rangle^\circ}\right)^2}, \quad \Delta v = E < v > \text{ и записать в таблицу 3.}$$

Таблица 3.

$\langle v \rangle$ , м/с	$\Delta v$ , м/с	$E$ , %

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 3а

1. При каких условиях выполняются законы сохранения импульса и полной механической энергии системы? Почему при столкновении пули с баллистическим маятником можно использовать закон сохранения импульса и нельзя использовать закон сохранения механической энергии системы “пуля-маятник”?
2. Какая система называется замкнутой и будет ли замкнутой система “пуля-маятник”?
3. Какие силы называются консервативными и диссипативными?
4. Что происходит с кинетической энергией системы “пуля-маятник” в момент удара? Какой это удар? При каком ударе она будет сохраняться?
5. Будет ли сохраняться импульс и механическая энергия системы “пуля-маятник” при её движении после удара?
6. Чем баллистический маятник отличается от физического? Каким выражением определяется период его колебания и почему?
7. Пуля с массой  $m$ , летевшая со скоростью  $v$ , врезается в баллистический маятник с массой  $m' = km$ , висевший неподвижно (см. рисунок). Во сколько раз изменится механическая энергия этой системы после удара, и на какую высоту поднимется центр масс маятника с застрявшей в нём пулей?
8. Сделайте и объясните вывод расчетной формулы (16) для скорости пули.



### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§5, 16, 21, 22, 24, 25.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §3,6; гл.5 §1,4,5; гл.6 §1,2.

## Работа №36. Измерение скорости пули с помощью физического маятника

**Цель работы:** использовать законы сохранения импульса и механической энергии для измерения скорости пули с помощью физического маятника.

### Теоретическое описание

В данной работе физический маятник представляет собой пустотелый цилиндр с массой  $m_{\text{ц}}$ , заполненный пластилином и закрепленный на длинном стержне с массой  $m_{\text{с}}$  и длиной  $l$ . Стержень может вращаться на подшипнике с массой  $m_{\text{под}}$  вокруг неподвижной закрепленной горизонтальной оси О (рис.8). Летящая со скоростью  $v$  пуля с массой  $m_{\text{п}}$  застревает в пластилине и маятник вместе с застрявшей в нём пулей начинает вращаться вокруг оси О с угловой скоростью  $\omega$ .

В момент удара, длящегося время  $\tau$ , со стороны закреплённой оси на маятник действует большая внешняя сила реакции  $\vec{F}_{\text{реак}}$ , изменяющая импульс системы на величину  $\Delta \vec{p} = \vec{F}_{\text{реак}} \cdot \tau$ . Однако линия действия этой силы, как и линия действия силы тяжести  $(m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + m_{\text{с}}) \vec{g}$ , проходит через

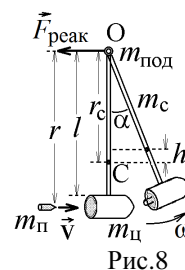


Рис.8

ось О (в момент удара маятник висит неподвижно). Моменты этих сил относительно оси О равны нулю, и можно воспользоваться законом сохранения момента импульса, который справедлив, если сумма моментов внешних сил равна нулю или действием таких моментов сил можно пренебречь. Это следует из основного уравнения динамики вращательного движения, записанного в виде  $d\vec{L}_{\text{системы}}/dt = \sum \vec{M}_{\text{внеш}} = 0$ , откуда момент импульса  $\vec{L}_{\text{системы}} = \text{const}$ .

В данной работе, строго говоря, удар происходит не мгновенно. Пуля некоторое время  $\tau$  продолжает движение в пластилине, а маятник за это время отклоняется от положения равновесия, так что центр его масс С слегка отклоняется от вертикали, проходящей через ось подвеса О. Возникает момент силы тяжести, но время удара  $\tau \ll T$ , где  $T$  – период колебаний маятника. За это малое время момент импульса системы пуля-маятник не успевает измениться. До удара он был равен моменту импульса пули  $L_{\text{пули}} = m_{\text{п}} v \cdot r$ , где  $r$  – плечо, т.е. кратчайшее расстояние от линии скорости  $\vec{v}$  до оси О (рис.8). После удара маятник и застрявшая в нем пуля имеют общий момент инерции  $I$ , начинают вращаться с угловой скоростью  $\omega$ , и закон сохранения момента импульса запишется как

$$m_{\text{п}} v \cdot r = I \omega \quad (17)$$

до удара                      после удара

Момент инерции системы пуля-маятник складывается из моментов инерции её частей. Цилиндр вместе с пулей имеет небольшой размер по сравнению с расстоянием  $l$  до оси подвеса, поэтому, их общий момент инерции мало отличается от момента инерции материальной точки с массой  $m_{\text{ц}} + m_{\text{п}}$ , находящейся на расстоянии  $r$  от оси вращения:

$I_{\text{ц}} + I_{\text{п}} = (m_{\text{ц}} + m_{\text{п}}) r^2$ . Подшипник имеет очень малый размер, и его моментом инерции можно пренебречь. Момент инерции стержня относительно оси О, проходящей через его край, равен  $I_{\text{с}} = m_{\text{с}} r^2 / 3$ .

Общий момент инерции системы будет равен

$$I = I_{\text{ц}} + I_{\text{п}} + I_{\text{с}} = \left( m_{\text{ц}} + m_{\text{п}} + \frac{m_{\text{с}}}{3} \right) r^2. \quad (18)$$

После удара пуля движется вместе с маятником. Это абсолютно неупругий удар, при котором механическая энергия системы пуля-маятник не сохраняется. Закон сохранения полной механической энергии выполняется, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластилине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы,

которую можно найти из соотношения  $A_{\text{тр}} = \frac{m_{\text{п}} v^2}{2} - \frac{I \omega^2}{2}$  (разность кинетической энергии поступательного движения пули до удара и кинетической энергии вращающегося маятника после удара). Большая часть работы силы трения идёт на нагревание тел.

Возникающий при отклонении маятника от положения равновесия момент сил тяжести  $\vec{M} = [\vec{r}_{\text{с}}, \sum m_i \vec{g}]$  начинает тормозить вращение. Расстояние  $r_{\text{с}}$  от оси подвеса до центра масс С системы пуля-маятник можно найти из определения радиус-вектора центра масс системы материальных тел с массами  $m_i$ , координаты центров масс которых имеют радиусы  $\vec{r}_i$ :

$$\vec{r}_{\text{с}} = \sum m_i \vec{r}_i / \sum m_i. \quad (19)$$

Для системы пуля-маятник с общей массой  $m = m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + m_{\text{с}} + m_{\text{под}}$ , формула (19), как видно из рис.8, даёт

$$r_{\text{с}} = \left( m_{\text{п}} r + m_{\text{ц}} r + m_{\text{с}} \frac{l}{2} \right) / m. \quad (20)$$

Кинетическая энергия вращательного движения переходит в потенциальную энергию силы тяжести, которая определяется по высоте  $h$  подъёма центра масс:

$$I \omega^2 / 2 = m g h. \quad (21)$$

Эту высоту можно определить по углу отклонения маятника от положения равновесия  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ , измеряемому по круговой шкале (рис. 9):

$$h = r_c (1 - \cos \alpha) = r_c \cdot 2 \sin^2 (\alpha/2). \quad (22)$$

Выразив  $\omega$  из уравнения (21) и подставляя в (17), получим с учётом (22) скорость пули до соударения с маятником:

$$v = \frac{I\omega}{m_{\text{п}}r} = \frac{\sqrt{2Igh}}{m_{\text{п}}r} \quad \text{или} \quad v = \frac{2\sin(\alpha/2)}{m_{\text{п}}r} \sqrt{2Igr_c}. \quad (23)$$

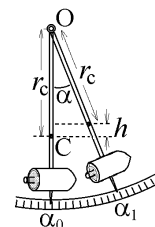
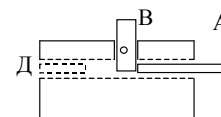


Рис.9

#### Порядок выполнения работы

1. Зарядить пружинную пушку. Для этого оттянуть назад ударный стержень, взявшись за выступ А. Стержень оттягивать до тех пор, пока другой рукой не удастся поставить выступ В в вертикальное положение, в котором он удерживает стержень и пружину в сжатом состоянии. Затем в дуло Д пушки заложить пулю (левый край пули совместить с торцом Д).



2. Записать начальное положение  $\alpha_0$  острия стержня при неподвижном цилиндре (рис.9). Цена наименьшего деления шкалы 10' (угловых минут).

3. Повернуть выступ В на себя (приведя в горизонтальное положение), отсчитать положение острия  $\alpha_1$  при максимальном отклонении маятника (рис.9)

4. Вычислить угол отклонения маятника  $\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$ . Опыт повторить 5 раз (выстрел производить только по неподвижному маятнику). Найти средний угол отклонения  $\langle \alpha \rangle^\circ$  (в угловых градусах).

5. Вычислить массу всей системы "пуля-маятник" по формуле  $m = m_{\text{п}} + m_{\text{ц}} + m_{\text{с}} + m_{\text{под}}$ , где  $m_{\text{п}}$  – масса пули,  $m_{\text{ц}}$  – масса цилиндра,  $m_{\text{с}}$  – масса стержня,  $m_{\text{под}}$  – масса подшипника. На пуле указана величина её массы, остальные массы указаны на установке. Расстояние  $r$  от точки подвеса до центра цилиндра измеряется линейкой.

6. Найти величину момента инерции  $I$  всей системы по формуле (18).

7. Определить положение центра масс С системы "пуля-маятник"  $r_c$  относительно точки подвеса О (см. рис.9) по формуле (20).

8. Среднюю скорость  $\langle v \rangle$  пули перед ударом в маятник рассчитать по формуле (23):  $\langle v \rangle = \frac{2 \sin \langle \alpha \rangle}{m_{\text{п}}r} \sqrt{Imgr_c}$ .

9. Данные всех измерений и вычислений занести в таблицы 1 и 2.

Таблица 1.

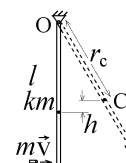
$m_{\text{под}}$ , кг	$m_{\text{с}}$ , кг	$l$ , м	$m_{\text{ц}}$ , кг	$r$ , м	$m_{\text{п}}$ , кг	$\alpha_0^\circ$	$m$ , кг	$I$ , кг·м <sup>2</sup>	$r_c$ , м

Таблица 2.

Номер опыта						$\langle \alpha \rangle^\circ$	$\langle v \rangle$ , м/с
$\alpha_1^\circ$							
$\alpha^\circ = \alpha_1 - \alpha_0$							

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 3б

- Почему в данной работе можно использовать закон сохранения момента импульса и нельзя применить закон сохранения импульса?
- Какая система называется замкнутой и будет ли замкнутой система "пуля-маятник"?
- Дайте определение момента силы и момента импульса. По каким формулам определяются эти величины в данной работе? Почему при движении маятника надо учитывать момент силы тяжести и не надо учитывать момент силы реакции в оси подвеса?
- Какая величина называется моментом инерции? Как вычислить момент инерции системы "пуля-маятник"?
- Сформулируйте законы сохранения момента импульса и полной механической энергии системы. Будет ли сохраняться механическая энергия системы "пуля-маятник" до и после удара, и если нет – то по какой причине?
- Какие силы называются консервативными, а какие диссипативными?
- Что происходит с кинетической энергией системы "пуля-маятник" в момент удара? Какой это удар? При каком ударе она будет сохраняться?
- Будет ли сохраняться момент импульса и механическая энергия системы "пуля-маятник" при её движении после удара?
- Пуля с массой  $m$ , летевшая со скоростью  $v$ , врезается в нижний конец неподвижно висевшего тонкого стержня длины  $l$  с массой  $m' = km$  и застревает в нём (см. рисунок). Найти: а) расстояние  $r_c$  от оси подвеса О до центра масс С стержня с застрявшей пулей; б) высоту  $h$  подъёма центра масс С после удара; в) работу сил трения, совершенную в момент удара; г) во сколько раз изменится механическая энергия этой системы после удара.
- Сделайте и объясните вывод расчетной формулы (23) для скорости пули.



#### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§ 21, 24, 26, 27, 32, 34.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.4 §1-3; гл.5 §2,6,7; гл.7 §2-5.

## Работа №3в. Измерение скорости пули с помощью вращающейся платформы

**Цель работы:** использовать закон сохранения проекции момента импульса для определения скорости пули при выстреле.

### Теоретическое описание

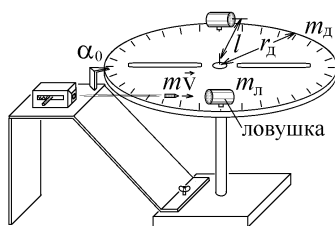


Рис.10

На горизонтально расположенной платформе-диске с массой  $m_d$  и радиусом  $r_d$  закреплены две симметрично расположенные и заполненные пластилином ловушки с массами  $m_l$  (рис.10). Пуля с массой  $m$  выстреливается из пружинного пистолета со скоростью  $v$ . Винтами пистолет и ловушки закрепляют так, чтобы пуля летела по оси ловушки (рис.10).

Попадая в ловушку, пуля прилипает к пластилину, и диск вместе с ловушками и прилипшей пулей начинает вращаться с угловой скоростью, вектор которой  $\vec{\omega}$  направлен по оси вращения диска. Направление этого вектора можно определить по движению вращающегося в ту же сторону винта (правило винта, рис.11).

Вертикально направленная сила тяжести создаёт момент сил  $\vec{M}_{mg} = [\vec{r}, m\vec{g}]$ , направление которого легче определить по правилу левой руки, как показано на рис.11: четыре пальца левой руки направлены вдоль первого вектора  $\vec{r}$ , второй вектор  $m\vec{g}$  входит в ладонь, большой палец показывает направление векторного произведения  $\vec{M}_{mg}$ .

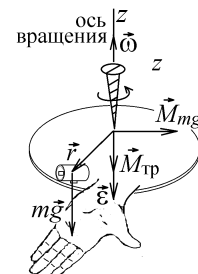


Рис.11

Этот вектор направлен перпендикулярно оси вращения  $z$  и не может изменить величину проекции  $L_z$  на эту ось момента импульса системы пуля-платформа, равную  $L_z = I\omega$ , где  $I$  – момент инерции системы относительно оси вращения. Однако в подшипнике оси создаётся постоянный момент сил трения  $\vec{M}_{тр}$ , направленный против вектора  $\vec{\omega}$ , и тормозящий вращение.

Замкнутой (изолированной) системой будет называться система, на которую не действуют внешние силы и моменты внешних сил, или действием этих моментов можно пренебречь. В такой системе всегда выполняется закон сохранения момента импульса. В данном случае из-за наличия  $\vec{M}_{тр}$  система не замкнута, и уравнение динамики вращательного движения в проекции на ось  $z$ ,  $dL_z/dt = I\epsilon = -M_{тр}$  приводит к уменьшению величины  $L_z = I\omega$ .

Однако соударение происходит очень быстро, за время  $\tau = \Delta t \rightarrow 0$ , и можно считать, что  $\Delta L_z = -M_{тр} \cdot \tau \rightarrow 0$ . Проекция на ось  $z$  момента импульса пули равна  $\vec{L}_{пули} = [\vec{r}, m\vec{v}]$ , где  $r = l$  – расстояние от центра ловушки до оси. Она не успевает измениться, и можно записать закон сохранения момента импульса в момент удара:

$$\begin{matrix} m\vec{v} \cdot l & = & I\omega \\ \text{до удара} & \text{после удара} \end{matrix} \quad (24)$$

Момент инерции системы пуля-платформа складывается из моментов инерции диска  $I_d = m_d r_d^2 / 2$ , маленькой пули  $I_{п} = ml^2$  и двух ловушек, размерами которых тоже можно пренебречь,  $I_{л} = 2m_l l^2$ . В результате:

$$I = \frac{m_d r_d^2}{2} + 2m_l l^2 + ml^2 \quad (25)$$

(если при проведении работы окажется, что ловушки имеют разные массы и разные расстояния до оси вращения, то в формуле (25) надо заменить  $2m_l l^2 \rightarrow m_{л1} l_1^2 + m_{л2} l_2^2$ ).

При попадании пули в ловушку происходит абсолютно неупругий удар, при котором механическая энергия системы не сохраняется. Закон сохранения полной механической энергии выполняется, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластилине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы, которую можно найти как разность кинетической энергии поступательного движения пули до удара и кинетической энергии вращающейся

платформы после удара:  $A_{тр} = \frac{m_{п} v^2}{2} - \frac{I\omega^2}{2}$ . Большая часть работы силы трения идёт на нагревание тел.

Момент сил трения тормозит вращение платформы, и она остановится спустя время  $t$  после удара, повернувшись на угол  $\phi$ , измеряемый по круговой шкале, нанесенной на край платформы. Для равнозамедленного вращения, происходящего с постоянным угловым ускорением  $\epsilon$  и с начальной угловой скоростью  $\omega$ , можно записать два кинематических соотношения:

$$0 = \omega - \epsilon t \quad \text{и} \quad \phi = \omega t - \frac{\epsilon t^2}{2} \quad (26)$$

Исключая отсюда переменную  $t$ , получаем

$$\omega = \sqrt{2\epsilon\phi} \quad (27)$$

Чтобы определить величину углового ускорения  $\epsilon$ , входящего в это выражение, надо слегка толкнуть рукой диск платформы, одновременно включив секундомер, и измерить время  $t$  до полной остановки вращения платформы на угол  $\alpha$ . Тогда, исключая из равенств (26) неизвестную начальную угловую скорость  $\omega$ , получим известное кинематическое

выражение  $\alpha = \varepsilon t^2/2$  или  $\varepsilon = 2\alpha/t^2$ .

Окончательно из формул (24), (25) и (27) находим величину скорости пули до удара:

$$v = \frac{I}{ml} \sqrt{2\varepsilon\varphi}. \quad (28)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Массы диска  $m_d$ , ловушки  $m_l$  и пули  $m$  указаны на установке или на самих телах.
2. Установить ловушки симметрично на произвольном расстоянии  $l$  от оси вращения диска (платформы), закрепить их (отверстием, заполненным пластилином в сторону пистолета). Измерить линейкой расстояние  $l$  от оси вращения до центра ловушки (рис.10).
3. Толкнуть диск рукой и включить секундомер. Определить на какой угол  $\alpha$  повернется диск и какое время  $t$  проходит до его остановки (рис.10). Опыт проделать  $n = 9$  раз, определяя каждый раз углы  $\alpha_i$  и времена  $t_i$ .
4. Из-за действия постоянного момента сил трения в оси вращения диск (платформа) движется равнозамедленно.

По формуле  $\varepsilon_i = \frac{2\langle\alpha_i\rangle}{\langle t_i\rangle^2}$  вычислить величину углового ускорения в каждом из опытов, а затем найти среднее значение уг-

лового ускорения платформы, вызванного трением в оси:  $\langle\varepsilon\rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i / n$ .

5. Зарядить пружинный пистолет и повернуть его так, чтобы при выстреле пуля попала в ловушку, которая должна быть ориентирована по касательной к траектории движения вылетающей из пистолета пули.

6. Произвести выстрел. Определить угол поворота  $\varphi$  диска до остановки. Опыт повторить  $n = 9$  раз, определяя каждый раз величину угла  $\varphi_i^0$ , затем вычислить среднее значение  $\langle\varphi\rangle^0 = \sum_{i=1}^n \varphi_i^0 / n$ . Величину этого угла, измеренного в

градусах надо перевести в радианы по формуле  $\langle\varphi\rangle = 3,142 \cdot \langle\varphi_i^0\rangle / 360^\circ$ .

7. Определить момент инерции  $I$  диска с ловушками и пулей по формуле (25).

8. Определить скорость пули по формуле (28):  $\langle v \rangle = \frac{I}{ml} \sqrt{2\langle\varepsilon\rangle\langle\varphi\rangle}$ .

9. Данные всех измерений и вычислений занести в таблицы 1-3.

Таблица 1.

$m$ , кг	$m_d$ , кг	$m_l$ , кг	$r_d$ , м	$l$ , м

Таблица 3.

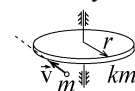
$I$ , кг·м <sup>2</sup>	$\langle v \rangle$ , м/с

Таблица 2.

$\alpha_i^0$	$t_i$ , с	$\varepsilon_i$ , рад/с <sup>2</sup>	$\varphi_i^0$
		$\langle\varepsilon\rangle = \dots\dots$ рад/с <sup>2</sup>	$\langle\varphi\rangle^0 = \dots\dots^\circ$ $\langle\varphi\rangle = \dots\dots$ рад

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 36

1. Какая система называется замкнутой и будет ли замкнутой система “пуля-платформа”?
2. Дайте определение момента силы и момента импульса. По каким формулам они определяются в данной работе и как определить направление этих векторных величин?
3. Какая величина называется моментом инерции? Как вычислить момент инерции системы “пуля-платформа” после удара?
4. Сформулируйте закон сохранения момента импульса. Будет ли сохраняться его величина во время удара, и если да – то как записать уравнение этого закона для системы “пуля-платформа”?
5. Какие силы называются консервативными, а какие диссипативными?
6. Сформулируйте закон сохранения и изменения полной механической энергии системы. Что происходит с кинетической энергией системы “пуля-платформа” при ударе? При каком ударе она сохраняется?
7. Будет ли сохраняться момент импульса и механическая энергия системы “пуля-платформа” при её движении после удара?
8. Маленький пластилиновый шарик с массой  $m$  летел по касательной к ободу тонкого неподвижного диска с массой  $m' = km$  и с радиусом  $r$  и прилип к нему (см. рисунок). Совершив равнозамедленно один полный обо-





рот вокруг закрепленной оси симметрии, диск остановился. Найти: а) величину углового ускорения диска с прилипшим шариком во время его вращения; б) величину момента сил трения в оси диска; в) работу сил трения, совершенную в момент удара; г) во сколько раз изменится механическая энергия этой системы после удара.

9. Сделайте и объясните вывод расчетной формулы (28) для скорости пули.

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§ 21, 24, 27, 32, 33, 34.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.4 §1-3; гл.5 §2,6,7; гл.7 §2-5.

## Работа №4. Изучение вращательного движения

**Цель работы:** с помощью маятника Обербека изучить зависимость углового ускорения тела, вращающегося относительно неподвижной оси, от результирующего момента действующих на него сил; определить момент инерции вращающегося маятника и действующий в его оси момент сил трения.

### Теоретическое описание

Для изучения законов динамики вращательного движения используется **маятник Обербека** – на шкив небольшого радиуса  $r$  намотана невесомая нить, к которой прикреплён груз массы  $m$ . Шкив может вращаться вокруг горизонтальной закрепленной оси  $O$ . Для создания большого момента инерции шкив соединён с двумя перпендикулярными массивными стержнями, на которых могут быть закреплены симметрично расположенные грузы массы  $m_1$  (рис.12).

Маятником такое устройство называется потому, что, опускаясь, груз  $m$  раскручивает шкив со стержнями. Когда нить размотается полностью, система продолжит вращение, наматывая нить на шкив до полной остановки груза  $m$ . Потом груз снова начнёт опускаться, вращая шкив в противоположную сторону и т.д. Система периодически вращается то в одну, то в другую сторону, аналогично колебаниям маятника.

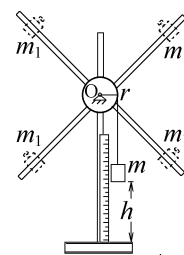


Рис.12

В данной работе нить имеет большую длину и, падая вниз с высоты  $h$  с ускорением  $\bar{a}$  без начальной скорости, груз  $m$  упадёт на подставку за время  $t$ , измеряемое секундомером. Простое кинематическое соотношение  $h = at^2/2$  позволяет по измеренным величинам  $h$  и  $t$  определить величину ускорения груза  $m$ , совершающего поступательное движение, и углового ускорения вращающегося шкива:

$$\varepsilon = a/r = 2h/t^2 r. \quad (29)$$

Силы, действующие при этом на шкив и на груз, показаны на рис.13. Уравнение динамики поступательного движения груза  $m$  запишется, как  $ma = mg - T$  и позволяет найти силу натяжения нити:

$$T = m(g - a) = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right). \quad (30)$$

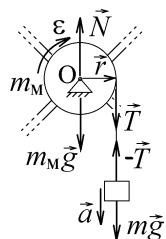


Рис.13

Центр масс шкива находится на его оси и неподвижен. Поэтому действующие на шкив с общей массой  $m_M$  сила тяжести  $m_M \bar{g}$ , сила натяжения нити  $\vec{T}$  и сила реакции в точке опоры  $\vec{N}$  уравновешены:

$m_M g + T - N = 0$ . При этом линии действия сил  $m_M \bar{g}$  и  $\vec{N}$  проходят через ось вращения  $O$  (рис.13) и не создают вращающих моментов сил. Шкив будет вращаться под действием силы натяжения нити, создающей момент силы  $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{T}]$ . Этот вектор направлен вдоль оси вращения шкива, как и вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$ . Это можно определить, например, используя “правило левой руки” (см. рис.11). Величину вращающего шкив момента сил согласно (30) можно вычислить по формуле

$$M = Tr = mr\left(g - \frac{2h}{t^2}\right). \quad (31)$$

В оси вращения при этом действует момент сил трения  $\vec{M}_{тр}$ , направленный в противоположную сторону и тормозящий вращение. Основное уравнение динамики вращательного движения маятника в проекции на ось вращения запишется в виде  $I\varepsilon = M - M_{тр}$ , где  $I$  - момент инерции маятника (шкива с прикрепленными к нему стержнями). Зависимость углового ускорения  $\varepsilon$  от вращающего маятник момента сил  $M$  линейна, если момент сил трения не зависит от скорости вращения:

$$\varepsilon = (M - M_{тр})/I. \quad (32)$$

Меняя массу  $m$  подвешенного к нити груза, измеряем время его падения с высоты  $h$ , и по формулам (29) и (31) вычисляем несколько значений углового ускорения  $\varepsilon$  при разных величинах  $M$ . По этим значениям строим график линейной зависимости  $\varepsilon = \varepsilon(M)$  (рис.14).

По этому графику, согласно (32), можно определить момент инерции маятника Обербека  $I = \frac{\Delta M}{\Delta \varepsilon}$  и величину постоянного момента сил трения  $M_{тр}$ , отмеченного на рис.14. Для этого оси графика должны начинаться в точке  $\varepsilon = 0$ .

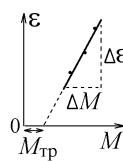
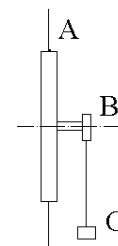


Рис.14

### Порядок выполнения работы

1. Вращая маятник за стержни А, намотать нить на шкив В и поднять груз С массой  $m$ , указанной на нем, на максимально возможную высоту  $h$  и измерить ее линейкой (см. рис.12).

2. Измерить время падения груза. Для этого, придерживая одной рукой маятник за любой из стержней, другой коснуться головки секундомера. Одновременно нажать головку секундомера и отпустить стержень маятника. В момент удара груза о подставку снова нажать на головку секундомера, остановив его. По секундомеру отсчитать время  $t$  падения груза. Опыт повторить 5 раз, поднимая груз на одну и ту же высоту  $h$ . Определить среднее время  $\langle t \rangle$  падения груза. По формулам (31) и (29) подсчитать вращаю-



щий момент  $M = m \left( g - \frac{2h}{\langle t \rangle^2} \right) r$  и угловое ускорение вращения  $\epsilon = \frac{2h}{\langle t \rangle^2} r$ . Здесь  $r = 2$  см – радиус шкива В,

на который намотана нить.

3. Те же самые измерения и расчеты проделать, добавляя к висящему на нити грузу грузы-довески (масса каждого довеска указана на нем).

4. Данные измерений и вычислений занести в таблицу.

5. По трем вычисленным точкам  $\epsilon$  и  $M$  построить график зависимости  $\epsilon(M)$ , аналогичный приведенному на рис.14.

6. По графику определить:

а) момент инерции крестовины  $I = \frac{\Delta M}{\Delta \epsilon} = \dots, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ ;

б) момент силы трения в оси вращения  $M_{\text{тр}} = \dots \text{Н} \cdot \text{м}$ .

$m$ , кг	$t$ , с	$\langle t \rangle$ , с	$\epsilon$ , с <sup>-2</sup>	$M$ , Н·м

### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 4

1. Как устроен маятник Обербека и почему он называется маятником?

2. Дайте определение векторов углового ускорения и момента сил. Как определить направление этих векторов? Куда направлены векторы  $\vec{\epsilon}$ ,  $\vec{M}$  и  $\vec{M}_{\text{тр}}$  на рисунках 12 или 13?

3. Запишите уравнения, описывающие поступательное движение подвешенного груза и вращательного движения шкива с крестовиной.

4. Как связаны ускорение  $a$  груза  $m$  и угловое ускорение шкива  $\epsilon$ ?

5. Каким образом в данной работе определяются величины углового ускорения  $\epsilon$  и вращающего момента сил  $M$ ?

6. Почему на вращение шкива с крестовиной не оказывают влияние действующие на них сила тяжести и сила реакции в оси подвеса?

7. Каким образом в данной работе определяются величины момента инерции маятника и момента сил трения в его оси?

8. При массе подвешенного на нити груза  $m \leq m_0$  он будет висеть, не опускаясь вниз. Найдите величину массы  $m_0$ , считая момент сил трения в оси постоянным.

9. Диск (цилиндр) с массой  $m' = km$  и с радиусом  $r$  может вращаться без трения вокруг горизонтальной закрепленной оси симметрии О (рис.А). К намотанной на него невесомой нити прикреплен груз массы  $m$ . Записав уравнения динамики, определите величину ускорения груза  $a$ .  $g$  – ускорение свободного падения.



Рис.А

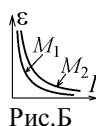


Рис.Б

10. В опыте на рис.12 меняют момент инерции  $I$  крестовины, меняя массу прикрепляемых к ней грузов  $m_1$ . На рис.Б показаны два графика зависимости её углового ускорения от величины  $I$  при двух постоянных вращающих моментах сил  $M_1$  и  $M_2$ . Какой из этих моментов больше и почему?

### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989. - §§ 26, 31, 32.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.4 §1-3; гл.7 §1-5.

### Работа №5. Определение моментов инерции методом колебаний

**Цель работы:** экспериментальное определение моментов инерции однородного стержня относительно двух параллельных осей; проверка теоремы Штейнера.

#### Теоретическое описание

Моментом инерции материальной точки называется произведение её массы  $m$  на квадрат расстояния  $r$  до оси вращения. Разбивая физическое тело на маленькие участки, которые можно считать материальными точками, складываем их моменты инерции, получая величину момента инерции тела относительно данной оси вращения  $I_{\text{физ.тела}} = \sum m_i r_i^2$  (рис.15). Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Чем больше величина  $I$ , тем труднее заставить вращаться массивное тело, если оно покоилось, или затормозить, если оно вращалось.



Рис.15

Если известен момент инерции тела  $I_C$  относительно оси вращения, проходящей через центр масс  $C$ , то вычислить момент инерции  $I_A$  этого тела с массой  $m$  относительно любой другой параллельной оси вращения  $A$ , находящейся на расстоянии  $d$ , можно с помощью теоремы Штейнера:

$$I_A = I_C + md^2. \quad (33)$$

В данной работе выполнение теоремы Штейнера проверяется на примере тонкого стержня с массой  $m$  и длиной  $l$  (рис.15). Чтобы найти момент инерции  $I_C$ , разбиваем стержень на крошечные участки длиной  $dx$  с массой  $dm = dx \cdot m/l$ . Момент инерции такого участка (материальной точки) относительно оси  $C$ , как видно из рис.16, равен  $dI_C = dm \cdot x^2$ . Момент инерции тонкого стержня относительно перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр масс, будет равен сумме (интегралу), взятой по всей длине стержня:

$$I_C = \int dI_C = \int_{-l/2}^{+l/2} dx \frac{m}{l} \cdot x^2 = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-l/2}^{x=l/2} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (34)$$

Тогда момент инерции относительно параллельной оси  $A$ , проходящей через край стержня, согласно (33) должен быть равен

$$I_A = I_C + m(l/2)^2 = \frac{1}{3} ml^2. \quad (35)$$

Для проверки теоремы Штейнера (35) моменты инерции  $I_A$  и  $I_C$  определяются экспериментально методом малых колебаний, которые происходят по гармоническому закону. Вначале стержень длины  $l$  подвешивают на двух нитях длины  $b$  в горизонтальном положении (рис.17,а) и поворачивают в горизонтальной плоскости на **малый** угол  $\varphi_0 \approx 4^\circ$ . Если угол мал, то нити подвеса отклоняются от вертикали на малый угол  $\theta_0$ , а край стержня отклоняется от первоначального положения на малое расстояние  $\Delta x$  практически в горизонтальной плоскости. Это расстояние, как дугу окружности, можно выразить через малые углы, которые надо взять в радианах:

$\Delta x \approx b\theta_0$  и  $\Delta x \approx (l/2) \cdot \varphi_0$  (рис.17,а), что даёт связь между углами:

$$\varphi_0 = 2b\theta_0/l. \quad (36)$$

При таком повороте центр масс  $C$  стержня поднимается на высоту  $h_C$ . Если стержень аккуратно отпустить, он будет совершать малые колебания в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси  $C$ , проходящей через центр масс, с периодом  $T_C$ , циклической частотой  $\omega_C = 2\pi/T_C$  и начальной амплитудой  $\varphi_0$ . Если нити подвеса идеальны и не деформируются при отклонении, то колебания будут гармоническими:  $\varphi = \varphi_0 \cos \omega_C t$ . В действительности из-за деформации этих нитей и возникающих в точках подвеса диссипативных сил трения колебания постепенно затухают. Можно считать, что только при первых 5-15 колебаниях их амплитуда не успевает заметно измениться, и можно использовать формулу незатухающих гармонических колебаний.

Величина угловой скорости вращения стержня  $\omega = d\varphi/dt$  будет максимальной при  $\varphi = 0$ , когда стержень опустится:  $\omega_{\max} = \varphi_0 \omega_C = 2\pi\varphi_0/T_C$ . При этом потенциальная энергия стержня, поднятого на высоту  $h_C$ , перейдёт в кинетическую энергию его вращения:

$$mgh_C = I_C \omega_{\max}^2 / 2 = 2\pi^2 \varphi_0^2 I_C / T_C^2. \quad (37)$$

Высоту подъёма центра масс стержня можно найти, посмотрев на него сбоку (рис.17,б). При малом угле поворота  $\theta \approx \theta_0$  и

$$h_C = b(1 - \cos \theta_0) = b \cdot 2 \sin^2 (\theta_0/2) \approx b\theta_0^2/2. \quad (38)$$

Подставляя (38) и (36) в (37) получаем формулу для момента инерции  $I_C$ , записанную через период малых колебаний вокруг оси  $C$ :

$$I_C = \frac{mgl^2}{16\pi^2 b} T_C^2. \quad (39)$$

Теперь подвесим стержень за колечко на его краю и заставим совершать **малые** колебания в вертикальной плоскости вокруг оси подвеса  $A$  (рис.18). Это – физический маятник. Если пренебречь малым моментом сил трения в оси, можно считать, что его первые 5-15 колебаний будут гармоническими колебаниями  $\theta = \theta_0 \cos \omega_A t$  с амплитудой  $\theta_0$ : циклической частотой  $\omega_A = 2\pi/T_A$  и периодом  $T_A = 2\pi\sqrt{I_A/mgd}$  (период колебаний физического маятника, где  $d = l/2$  – расстояние от центра масс до оси подвеса).

При отклонении стержня на максимальный угол  $\theta_0$  центр его масс  $C$  поднимается на высоту

$$h_C = \frac{l}{2}(1 - \cos \theta_0) = \frac{l}{2} \cdot 2 \sin^2 (\theta_0/2) \approx \frac{l}{4} \theta_0^2, \quad (40)$$

а стержень приобретает потенциальную энергию  $mgh_C$ , которая определяется положением центра масс. В нижней точке эта энергия переходит в кинетическую энергию вращательного движения с максимальной угловой скоростью  $\omega_{\max} = |d\theta/dt|_{\max} = \theta_0 \omega_A = 2\pi\theta_0/T_A$ :

$$mgh_C = I_A \omega_{\max}^2 / 2 = 2\pi^2 \theta_0^2 I_A / T_A^2. \quad (41)$$

Подставляя (40) в (41), получаем формулу для момента инерции  $I_A$ , записанную через период малых колебаний относи-

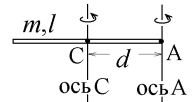


Рис.2.15

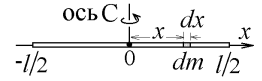


Рис.2.16

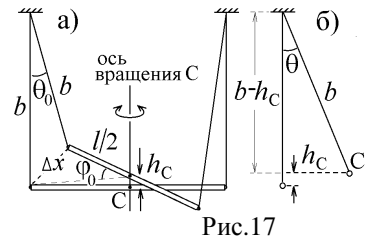


Рис.17

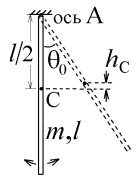


Рис.18

тельно оси А:

$$I_A = \frac{mgl}{8\pi^2} T_A^2. \quad (42)$$

Проверка выполнения теоремы Штейнера в данной работе заключается в проверке соотношения (33):

$$I_A - I_C = ml^2/4, \quad (43)$$

где величины  $I_A$  и  $I_C$  вычисляются с помощью формул (42) и (39).

#### Порядок выполнения работы

1. Подвесить стержень на нитях строго горизонтально, расположив его между направляющими планки.  
2. Взяться за правую направляющую, подвести к стержню и повернуть его на угол  $4^\circ$ . Затем резко развернуть направляющую планку от стержня, предоставив ему возможность совершать крутильные колебания относительно оси С, как показано на рис.17,а.

3. Измерить секундомером время  $t_C$  полных  $n$  колебаний ( $n = 10$ , отсчет времени начинать при прохождении колеблющегося стержня любого крайнего положения). Рассчитать период колебаний  $T_{Ci} = \frac{t_{Ci}}{n}$ . Опыт повторить 9 раз и определить среднее значение периода  $\langle T_C \rangle$ .

4. Линейкой измерить  $l$  – расстояние между точками подвеса стержня и  $b$  – длину нитей подвеса (рис.17,а). Масса стержня (в граммах) указана на нем.

5. Подвесить стержень за конец А и заставить колебаться в вертикальной плоскости. Угол отклонения не должен превышать  $4^\circ$ . (см. рис.18).

6. Измерить время  $t_A$   $n=10$  полных колебаний стержня и вычислить период колебаний  $T_{Ai} = \frac{t_{Ai}}{n}$ . Опыт повторить 9 раз и определить среднее значение периода  $\langle T_A \rangle$ .

7. По формулам (39) и (42) и вычислить моменты инерции стержня относительно перпендикулярных ему, но параллельных друг другу осей, проходящих через центр масс  $I_C = \frac{mgl^2}{16\pi^2 b} \langle T_C \rangle^2$  и через край стержня  $I_A = \frac{mgl}{8\pi^2} \langle T_A \rangle^2$ .

8. Случайные отклонения каждого измерения периодов равны соответственно,  $\Delta T_{Ci} = T_{Ci} - \langle T_C \rangle$  и  $\Delta T_{Ai} = T_{Ai} - \langle T_A \rangle$ , а средние квадратичные отклонения:  $S_C = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_{Ci})^2}$ ,  $S_A = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_{Ai})^2}$ . Погрешности результатов измерения периодов  $\Delta T_C = S_C / \sqrt{n}$ ,  $\Delta T_A = S_A / \sqrt{n}$ .

9. Рассчитать относительные и абсолютные погрешности по формулам

$$E_C = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_C}{\langle T_C \rangle}\right)^2}; \quad E_A = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T_A}{\langle T_A \rangle}\right)^2}; \quad \Delta I_C = E_C \cdot I_C; \quad \Delta I_A = E_A \cdot I_A.$$

10. Вычислить величины  $I_A - I_C$  и  $ml^2/4$  и сравнить их значения, которые должны совпасть согласно (43).

11. Данные измерений и вычислений занести в таблицы 1-4.

Таблица 1.

$n$	$t_{Ci}, \text{с}$	$T_{Ci}, \text{с}$	$\Delta T_{Ci}, \text{с}$	$(\Delta T_{Ci})^2, \text{с}^2$
$\langle T_C \rangle = \dots\dots, \text{с}; \quad S_C = \dots\dots, \text{с}; \quad \Delta T_C = \dots\dots, \text{с};$				

Таблица 2.

$n$	$t_{Ai}, \text{с}$	$T_{Ai}, \text{с}$	$\Delta T_{Ai}, \text{с}$	$(\Delta T_{Ai})^2, \text{с}^2$
$\langle T_A \rangle = \dots\dots, \text{с}; \quad S_A = \dots\dots, \text{с}; \quad \Delta T_A = \dots\dots, \text{с};$				

Таблица 3.

$m, \text{кг}$	$\Delta m, \text{кг}$	$l, \text{м}$	$\Delta l, \text{м}$	$b, \text{м}$	$\Delta b, \text{м}$

Таблица 4.

$I_C, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\Delta I_C, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$I_A, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\Delta I_A, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$I_A - I_C, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$m \frac{l^2}{4}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$

### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 5

1. Дайте определение и объясните физический смысл момента инерции материальной точки и физического тела.
2. Каким образом вычислить момент инерции тела относительно оси симметрии, проходящей через центр масс? Сделайте этот вывод для тонкого стержня, для тонкого кольца, для сплошного диска.
3. Сформулируйте теорему Штейнера. Каким образом эта теорема проверяется в данной работе?
4. Из одинаковых тонких жестяных деталей в виде эллипса сделали, разрезав их на части, и раздвинув на одинаковые расстояния от оси вращения, четыре плоские фигуры (рис.А). Расставьте моменты инерции  $I_i$  этих фигур в порядке возрастания их величин и объясните свой ответ.
5. Тонкий стержень массы  $m$  и длины  $l$  имеет момент инерции  $I_C = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  относительно перпендикулярной оси С, проходящей через его центр (рис.Б). Чему равен его момент инерции относительно параллельной оси В, находящейся на расстоянии  $l/4$ ?
6. Два одинаковых тонких стержня с массой  $m$  и длиной  $l$  каждый приварены концами под прямым углом друг к другу. Найдите момент инерции этого угольника относительно перпендикулярной оси А, показанной на рис.В.
7. Получите связь между максимальной угловой скоростью стержня и амплитудой его колебаний. Как эта скорость связана с изменением высоты центра масс колеблющегося стержня?
8. Проделайте и объясните вывод соотношений (39) и (42).

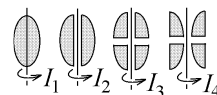
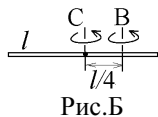


Рис.А

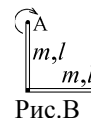


Рис.В

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - §§ 39, 41, 54.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.5 §5; гл.7 §2-4; гл.9 §1,2.

### Работа №6. Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности методом катающегося шарика

**Цель работы:** изучить законы движения катающегося по сферической вогнутой поверхности шарика, рассмотреть условия возникновения его гармонических колебаний и определить радиус кривизны поверхности.

#### Теоретическое описание

Используемый в работе метод определения радиуса кривизны основан на измерении периода малых колебаний шарика, катающегося по исследуемой вогнутой поверхности. При качении без проскальзывания скорость точки А шарика, касающейся неподвижной поверхности, равна нулю. Поэтому длина дуги ВС, которую опишет точка В на поверхности катающегося шарика радиуса  $r$ , равна длине дуги АС вогнутой поверхности радиуса  $R$  (рис.19):  $s_{AC} = R\varphi = s_{BC} = r\theta$ . Углы  $\theta$  и  $\varphi$ , указанные на рис.19 и измеренные в радианах связаны соотношением

$$\theta = R\varphi/r. \quad (44)$$

На рис.20 показано, как меняется направление полного ускорения центра масс шарика  $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ , складывающегося из тангенциального  $\vec{a}_\tau$  и нормального  $\vec{a}_n$  ускорений. В верхней точке подъема А скорость шарика и его нормальное ускорение  $a_n = v^2/R$  равны нулю, а ускорение шарика равно его тангенциальному ускорению. В нижней точке траектории В скорость шарика максимальна и её производная в точке максимума, т.е. тангенциальное ускорение, равна нулю:  $a_\tau = dv/dt = 0$ . В промежуточных точках траектории вектор  $\vec{a}$  поворачивается, как показано на рис.20.

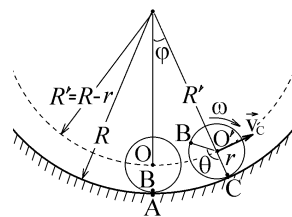


Рис.19

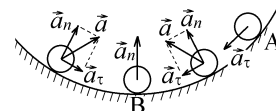


Рис.20

Силы тяжести  $m\vec{g}$ , нормальной реакции  $\vec{N}$  и сила трения сцепления  $\vec{F}_{тр}$ , действующие на шарик, показаны на рис.21. Скорость центра масс шарика  $v_C = ds/dt$  направлена вправо, увеличивая проходимый им путь  $s = OO' = R'\varphi$ . Тангенциальное ускорение направлено противоположно. Его проекция на касательное к траектории направление будет равна

$$a_\tau = -\frac{d^2s}{dt^2} = -(R-r)\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (45)$$

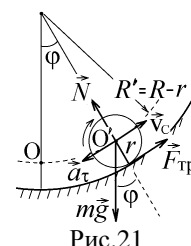


Рис.21

Проекция векторов угловой скорости и углового ускорения шарика также имеют разные знаки и связаны с углом поворота шарика вокруг своей оси:  $\omega = d\theta/dt$ ,  $\varepsilon = -d^2\theta/dt^2$ . Учитывая (45) и (44), находим связь тангенциального и углового ускорения шарика при качении по сферической поверхности:

$$a_\tau = -R' \cdot \frac{r}{R} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{R-r}{R} r \varepsilon. \quad (46)$$

Запишем уравнение динамики поступательного движения центра масс шарика в проекции на касательное направление, а также уравнение динамики вращательного движения шарика вокруг своей оси, в котором торможение вращения происходит из-за действия момента силы трения сцепления, а момент инерции шарика  $I_C = 2mr^2/5$  (рис.21):

$$ma_\tau = mg \sin \varphi - F_{тр}; \quad I_C \varepsilon = F_{тр} \cdot r. \quad (47)$$

Последовательно исключаем из этих уравнений неизвестную  $F_{тр}$ , затем подставляем  $\varepsilon$  из (46), затем – выражение для

$$a_{\tau} \text{ из (45). Получим уравнение } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{5g}{7R-5r} \sin \varphi = 0. \quad (48)$$

Это уравнение совпадает с динамическим уравнением незатухающих собственных гармонических колебаний

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (49)$$

в том случае, когда  $\sin \varphi \approx \varphi$ , т.е. угол отклонения шарика от положения равновесия должен быть малым:  $\varphi \leq 5^\circ - 10^\circ$ . Уравнение (49) имеет решение в виде  $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ .

Напомним, что физическое тело будет совершать гармонические колебания, если на него действует сила или момент силы, пропорциональные смещению от положения равновесия и стремящиеся вернуть тело в положение равновесия. Именно такой момент сил возвращает шарик в нижнюю точку траектории, стремясь уменьшить угол  $\varphi$ . Из соотношений (45)–(47) можно найти его величину, пропорциональную величине  $\varphi$  при малых углах:  $M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot r \approx \frac{2mrR}{7R-5r} g \cdot \varphi$ .

Из-за наличия момента сил трения реальные колебания шарика при проведении опыта будут затухать, и использовать приближение гармонических колебаний можно только с оговоркой, что их амплитуда за время колебаний изменяется мало. Поэтому для определения периода следует измерять время не более  $N = 4-5$  полных колебаний, хотя для более точного измерения его величины  $T = t/N$  желательно измерить секундомером время как можно большего числа колебаний.

Циклическая частота незатухающих малых колебаний катающегося по сферической поверхности шарика следует из сравнения уравнений (48) и (49):  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{5g}{7R-5r}}$ . Из этого соотношения получаем расчётную формулу для величины радиуса вогнутой поверхности, выраженного через измеряемый секундомером период колебаний  $T_0$ :

$$R = \frac{5}{7} g \frac{T_0^2}{4\pi^2} + \frac{5}{7} r. \quad (50)$$

Это выражение может дать неточный результат из-за двух причин:

- 1) реальный период колебаний  $T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  зависит от коэффициента затухания  $\beta$ , который был принят равным нулю;
- 2) при колебаниях шарик отклоняется от положения на большой угол, для которого не выполнено условие  $\sin \varphi \approx \varphi$ .

#### Порядок выполнения работы

1. С помощью микрометра измерить диаметр  $d$  шарика  $n_1 = 5$  раз в разных местах. Занести данные в таблицу 1.
2. Вывести шарик из положения равновесия так, чтобы угол отклонения  $\varphi$  (см.рис.19) был мал. Определить время  $t$  пяти ( $n_1 = 5$ ) полных колебаний шарика. Опыт провести  $n = 9$  раз, определяя период колебаний  $T_i = t_i / n$ . Занести данные в таблицу 2.

3. Вычислить средние значения диаметра  $\langle d \rangle$  и радиуса шарика  $\langle r \rangle = \langle d \rangle / 2$ , а также периода колебаний  $\langle T \rangle$ .

4. Определить случайные отклонения  $\Delta T_i = T_i - \langle T \rangle$  каждого измерения периода, а также среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta T_i)^2}$ . Вычислить погрешность  $\Delta T$  результата измерений:  $\Delta T = S / \sqrt{n}$ .

5. Аналогично вычислить погрешность измерения диаметра и радиуса  $\Delta d = \sqrt{\frac{1}{n_1(n_1-1)} \sum (d_i - \langle d \rangle)^2}$  и  $\Delta r = \Delta d / 2$ .

6. По формуле (50) вычислить радиус кривизны поверхности  $\langle R \rangle = \frac{5}{7} g \frac{\langle T \rangle^2}{4\pi^2} + \frac{5}{7} \langle r \rangle$ .

7. Найти абсолютную  $\Delta R$  и относительную  $E$  погрешности в определении радиуса кривизны вогнутой поверхности  $R$  по формулам  $\Delta R = \frac{2 \langle R \rangle \Delta T}{\langle T \rangle} + \Delta r$  и  $E = \frac{\Delta R}{\langle R \rangle} \times 100\%$ .

8. Данные измерений и вычислений занести в таблицы 1-3.

Таблица 1.

$d$ , м	$\langle d \rangle$ , м	$\langle r \rangle$ , м

Таблица 3.

$S$ , с	$\Delta T$ , с	$\Delta r$ , м	$R$ , м	$\Delta R$ , м	$E$ , %

Таблица 2.

$t_i$ , с	$n_1$	$T_i$ , с	$\Delta T_i$ , с	$(\Delta T_i)^2$ , с
$\langle T \rangle = \dots\dots\dots$				

### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 6

1. По каким формулам рассчитываются тангенциальное, нормальное, полное и угловое ускорение шарика?
2. Маленький шарик совершает колебания, катаясь по вогнутой поверхности между точками А и В (рис.А). В каких точках угловая скорость и угловое ускорение шарика будут равны нулю? В каких точках они будут максимальны и почему?
3. В каких точках траектории шарика на рис.А его тангенциальное и нормальное ускорения будут равны нулю? Может ли вектор полного ускорения шарика быть направлен параллельно или перпендикулярно вектору ускорения свободного падения  $\vec{g}$ ?
4. Как связаны величины тангенциального  $a_t$  и нормального  $a_n$  ускорения шарика с величинами угловой скорости  $\omega$  и углового ускорения  $\varepsilon$ ?
5. Какой будет связь между  $a_t$  и  $\varepsilon$  в данной работе и почему?
6. Шарик катится по плоской поверхности со скоростью  $v$  без проскальзывания. Какими будут величины скоростей точек А, В и С на его поверхности (рис.Б)?
7. Укажите все силы и моменты сил, действующие на катящийся шарик, и запишите уравнения динамики его поступательного и вращательного движения.
8. При каком условии шарик будет совершать гармонические колебания? Почему угол отклонения шарика от положения равновесия должен быть мал?
9. Прodelайте и объясните вывод формул (46) – (47). Получите расчетную формулу (50).
10. Используя эти формулы, получите выражение для силы трения сцепления  $F_{тр}$ , действующей на шарик.
11. В нижней точке вогнутой поверхности катящийся без проскальзывания шарик с массой  $m$  и с радиусом  $r$  имеет скорость  $v$ . На какую максимальную высоту  $h$  может подняться вверх его центр масс (рис.В)?
12. По каким причинам полученная в работе величина радиуса кривизны поверхности может отличаться от истинного значения?

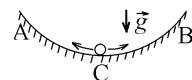


Рис.А

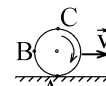


Рис.Б

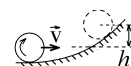


Рис.В

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - §§ 4, 24, 41-43, 53.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.7 §1-5; гл.9 §1,2;

### Работа №6а. Определение момента инерции методом крутильных колебаний

**Цель работы:** изучить метод крутильных колебаний, используемый для расчета момента инерции тел разной формы. Сравнить экспериментально полученные значения моментов инерции этих тел с теоретическими расчетами.

#### Теоретическое описание

К краям неподвижного верхнего диска Д с радиусом  $r$  на трёх симметрично расположенных нитях длины  $l$  подвешена круговая платформа радиуса  $R$  (трифилярный подвес, рис.22). В центр платформы помещают тело массы  $m$ , момент инерции которого необходимо измерить. При закручивании нитей на малый угол платформа будет совершать малые колебания с периодом  $T$  в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси симметрии  $OO'$ , одновременно поднимаясь и опускаясь с периодом  $T_{верт} = T/2$ .

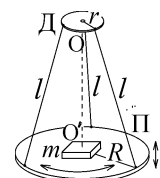


Рис.22

Определим высоту  $h$  подъема платформы при её закручивании в горизонтальной плоскости на малый угол  $\varphi$ . Совместим начало координат 0 с центром платформы. В положении равновесия расстояние

$$z = OO' \text{ было равно } z = CA = \sqrt{BA^2 - BC^2} = \sqrt{l^2 - (R-r)^2} \quad (51)$$

(см. рис.23,а). После поворота платформы на угол  $\varphi$  это расстояние стало равным

$z' = AC' = \sqrt{B'A^2 - B'C'^2}$ , где  $B'A = BA = l$  – длина нити, а расстояние  $B'C'$  можно найти из треугольника  $B'C'O$  со сторонами  $B'O = R$ ,  $C'O = r$  и углом  $\varphi$  между ними по теореме косинусов (см. рис.23,б):

$B'C'^2 = B'O^2 + C'O^2 - 2B'O \cdot C'O \cdot \cos \varphi = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi$ . Тогда

$$z' = AC' = \sqrt{l^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \varphi}. \quad (52)$$

Из соотношений (52) и (51) следует, что  $z'^2 = z^2 - 2Rr(1 - \cos \varphi) = z^2 - 2Rr \cdot 2 \sin^2(\varphi/2)$ . Если угол поворота мал, то

$$\sin(\varphi/2) \approx \varphi/2 \text{ и } z' = \sqrt{z^2 - Rr\varphi^2} = z\sqrt{1 - Rr\varphi^2/z^2}. \quad (53)$$

Воспользуемся теперь формулой разложения в ряд Тейлора  $(1 \pm \varepsilon)^\alpha \approx 1 \pm \alpha\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ . В нашем случае малой величиной будет  $\varepsilon = \frac{Rr\varphi^2}{z^2} \ll 1$ , и из формулы (53) следует  $z' \approx z \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{Rr\varphi^2}{z^2} \right)$ .

$$\text{Высота подъема платформы, как видно из рис.23,б, будет равна } h = z - z' = \frac{Rr\varphi^2}{2z} = \frac{Rr\varphi^2}{2\sqrt{l^2 - (R-r)^2}}. \quad (54)$$

Напомним, что физическое тело совершает гармонические колебания, если на него действует сила или момент

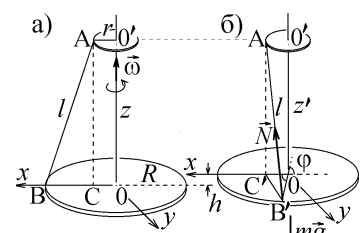


Рис.23

силы, пропорциональные смещению от положения равновесия и стремящиеся вернуть тело в положение равновесия.

При повороте платформы на малый угол  $\varphi$  против часовой стрелки, как показано на рис.24, нить отклоняется на значительно меньший угол  $\theta$ , пропорциональный углу  $\varphi$ . Появляющаяся горизонтальная проекция силы натяжения нити  $\vec{N}$  создаёт момент сил  $\vec{M} = [\vec{R}, \vec{N}]$ , который стремится повернуть платформу в противоположном направлении, вернуть её в положение равновесия, причём величина этого момента пропорциональна углу  $\varphi$ :  $M = N_{\text{гор}} R = N \sin \theta \cdot R \sim \varphi$ .

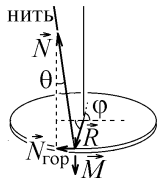


Рис.24

Поэтому платформа будет совершать малые гармонические колебания с циклической частотой  $\omega_0 = 2\pi/T$ :  $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ . Её угловая скорость  $\omega = d\varphi/dt = \varphi_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$  максимальна, когда вращающаяся платформа проходит положение равновесия и угол её поворота  $\varphi = 0$ :  $\omega_{\text{max}} = \varphi_0 \omega_0 = 2\pi\varphi_0/T$ , (55)

где  $\varphi_0$  – максимальный угол закручивания платформы, когда она поднимается на максимальную высоту  $h$ .

Полная механическая энергия системы, складывающаяся из её потенциальной и кинетической энергии, сохраняется, если все действующие в системе силы консервативны. Такими силами будут сила тяжести  $m\vec{g}$  и упругие силы натяжения нитей  $\vec{N}$ , если пренебречь их деформацией и возникающими в точках подвеса диссипативными силами трения. В этом случае кинетическая энергия вращательного движения платформы с общей массой  $m_{\text{общ}}$  и моментом инерции  $I$  в нижней точке будет переходить в потенциальную энергию силы тяжести в верхней точке её подъёма:

$$I \omega_{\text{max}}^2 / 2 = m_{\text{общ}} g h_{\text{max}}, \quad (56)$$

(максимальная высота подъёма  $h_{\text{max}}$  соответствует амплитуде  $\varphi_0$ ).

Силы натяжения практически перпендикулярны к перемещениям точек крепления нитей (рис.24) и совершают настолько малую работу, что её можно не учитывать по сравнению с работой силы тяжести.

Подставляя в (56) соотношения (54) и (55) и сокращая в обеих частях равенства величину  $\varphi_0^2$ , выражаем момент инерции платформы с лежащим на ней грузом через период  $T$  малых крутильных колебаний:

$$I = \frac{m_{\text{общ}} g R r}{\sqrt{l^2 + (R-r)^2}} \frac{T^2}{4\pi^2}. \quad (57)$$

Моменты инерции тел, вращающихся относительно общей оси, складываются. Чтобы экспериментально определить момент инерции тела с массой  $m$ , помещённого на платформу с массой  $m_{\text{пл}}$  (рис.22), сначала измеряют период колебаний  $T_1$  пустой платформы, а затем период колебаний  $T_2$  платформы с грузом и, согласно (57) вычисляют экспериментально определённый момент инерции лежащего на платформе тела:

$$I_{\text{эсп}} = \frac{g R r}{4\pi^2 \sqrt{l^2 + (R-r)^2}} ((m_{\text{пл}} + m) T_2^2 - m_{\text{пл}} T_1^2). \quad (58)$$

В действительности из-за деформации нитей подвеса и возникающих в точках подвеса диссипативных сил трения крутильные колебания постепенно затухают. Однако при первых 10-25 колебаниях их амплитуда  $\varphi_0$  не успевает заметно измениться, и можно использовать формулу незатухающих гармонических колебаний (55).

Экспериментально определённый момент инерции физических тел (плоских пластинок, которые кладут на платформу так, чтобы центр их масс совпадал с осью симметрии платформы (с осью вращения)) сравнивают с величиной момента инерции  $I_C$ , вычисленного теоретически.

Для такого вычисления исследуемое тело разбивают на очень малые участки, которые можно считать материальными точками с массой  $m_i$ , находящимися на расстоянии  $r_i$  от оси вращения. Момент инерции тела складывается из моментов инерции составляющих его материальных точек:  $I_{\text{физ.тела}} = \sum m_i r_i^2$  (рис.15). Эта величина является мерой инертности физического тела. Чем больше величина  $I$ , тем труднее заставить вращаться массивное тело, если оно покоилось, или затормозить, если оно вращалось.

Моменты инерции тел симметричной формы в виде плоских пластинок легко вычислить, если разбить их на малые элементы – тонкие полоски длины  $l$  или тонкие кольца с радиусом  $r$  и с массой  $dm$ . Моменты инерции этих элементов относительно оси симметрии, проходящей через их центр масс  $C$ , приведены на рис.25.

Используем также теорему Штейнера: если известен момент инерции тела  $I_C$  относительно оси вращения, проходящей через центр масс  $C$ , то момент инерции  $I_A$  этого тела с массой  $m$  относительно любой другой параллельной оси вращения  $A$ , находящейся на расстоянии  $d$ , будет равен

$$I_A = I_C + m d^2. \quad (59)$$

Для примера вычислим момент инерции тонкой пластинки в виде равностороннего треугольника с массой  $m$  и стороной  $a$  (рис.26). Проводим ось  $x$  вдоль высоты  $h = \sqrt{3}a/2$  этого треугольника и разбиваем его на полоски толщины  $dx$  и длины  $y = 2x/\sqrt{3}$ , перпендикулярные оси  $x$  и находящиеся на расстоянии  $x$  от перпендикулярной к пластинке оси вращения  $A$ , проходящей через вершину треугольника. Масса этой полоски пропорциональна её площади:  $dm = \frac{dS}{S_A} m = \frac{y dx}{ha/2} m = \frac{8x dx}{3a^2} m$ . В соответствии с теоремой Штейнера и рис.25 момент инерции этой полоски относительно оси  $A$  равен

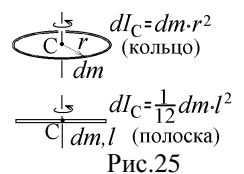


Рис.25

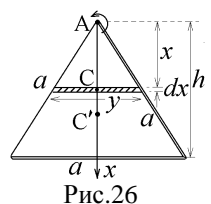


Рис.26



$dI_A = dI_C + dm \cdot x^2 = \frac{1}{12} dm \cdot y^2 + dm \cdot x^2 = \frac{80}{27} \frac{x^3 dx}{a^2} m$ . Суммарный момент инерции пластинки относительно оси вращения А получим, складывая моменты инерции всех составляющих её полосок (интегрируя по  $x$ ):

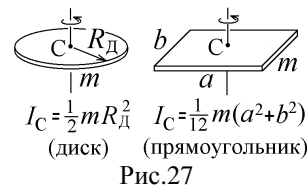
$$I_A = \int_{x=0}^{x=h} dI_A = \frac{80m}{27a^2} \int_0^h x^3 dx = \frac{80m}{27a^2} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{5}{12} ma^2.$$

Параллельная ось  $C'$ , проходящая через центр масс  $C'$  равностороннего треугольника, находится на расстоянии  $AC' = 2h/3 = a/\sqrt{3}$  (рис.26). Согласно теореме Штейнера (59), момент инерции пластинки относительно этой оси её симметрии равен

$$I_{C'} = I_A - m \cdot AC'^2 = ma^2/12. \quad (60)$$

Аналогичным образом можно вычислить моменты инерции плоского диска радиуса  $R_d$  и прямоугольной пластинки с размерами  $a \times b$  (рис.27).

Вычисленные величины моментов инерции пластинок сравниваются с величинами, полученными экспериментальным способом согласно формуле (58).



#### Порядок выполнения работы

1. Измерить линейкой радиусы верхнего и нижнего дисков  $R$  и  $r$ , а также длину нити  $l$ . Занести данные в таблицу 1.

2. Резко повернуть рукой верхний диск Д до упора и отпустить (см. рис.22). При этом нижний диск-платформа П должен совершать крутильные колебания, а верхний диск Д должен остаться в покое из-за трения в оси.

3. С помощью секундомера определить время  $t_1$  полных  $n = 20$  колебаний ненагруженного диска. Опыт повторить три раза. Вычислить среднее значение этого времени  $\langle t_1 \rangle$  и среднее значение периода колебаний  $\langle T_1 \rangle = \langle t_1 \rangle / n$ . Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 1.

Таблица 1.

$m_{пл}$ , кг	$R$ , м	$r$ , м	$l$ , м	$t_1$ , с	$\langle t_1 \rangle$ , с	$\langle T_1 \rangle$ , с

4. Положить на нижний диск первое исследуемое тело так, чтобы центры масс тела и диска были на одной оси. Величина массы нижнего диска-платформы  $m_{пл}$  и массы  $m$  всех исследуемых тел указаны на установке или нанесены на этих телах.

5. Определить время  $t_2$  полных  $n = 20$  колебаний нагруженного диска. Опыт повторить три раза. Вычислить среднее значение  $\langle t_2 \rangle$  и среднее значение периода колебаний  $\langle T_2 \rangle = \langle t_2 \rangle / n$ . Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 2.

6. Используя полученные данные, вычислить момент инерции  $I_{эсп}$  исследуемого тела по формуле (58) и занести полученный результат в таблицу 2.

7. Измерить размеры каждого исследуемого тела. По приведенной в таблице 3 для данной формы тела формуле вычислить теоретический момент инерции  $I_{теор}$  этого тела относительно той же оси, что и при эксперименте. Занести полученный результат в таблицу 2.

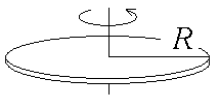
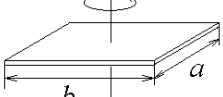
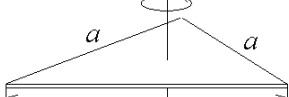
8. Сравнить теоретическое  $I_{теор}$  и экспериментальное  $I_{эсп}$  значения момента инерции. Для этого вычислить относительное отклонение этих величин по формуле  $E = \frac{\Delta I}{I_{теор}} \cdot 100\%$ , где  $\Delta I = |I_{эсп} - I_{теор}|$ .

9. Повторить аналогичные измерения и вычисления с пункта 4 по пункт 8 для двух других тел, приведенных в таблице 3. Результаты занести в таблицу 2.

Таблица 2.

Вид тела и его размеры	$m$ , кг	$t_2$ , с	$\langle t_2 \rangle$ , с	$\langle T_2 \rangle$ , с	$I_{эсп}$ , кг·м <sup>2</sup>	$I_{теор}$ , кг·м <sup>2</sup>	$\Delta I =  I_{эсп} - I_{теор} $ , кг·м <sup>2</sup>	$E = \frac{\Delta I}{I_{теор}} \cdot 100\%$
диск $R_d =$ м								
Прямоугольник $a =$ м $b =$ м								
Треугольник $a =$ м								

Таблица 3. Моменты инерции плоских тел относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно их плоскости.

	диск радиуса $R_d$	прямоугольник	равносторонний треугольник
Исследуемое тело			
Вычисленный момент инерции $I_{\text{теор}}$	$I_{\text{диск}} = \frac{1}{2} m R_d^2$	$I_{\text{прямо}} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$	$I_{\text{треуг}} = \frac{1}{12} m a^2$

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 6а

1. Дайте определение и объясните физический смысл момента инерции материальной точки и физического тела.
2. Сформулируйте теорему Штейнера.
3. Из одинаковых тонких жестяных деталей в виде ромба сделали, разрезав их на части, и раздвинув на одинаковые расстояния от оси вращения, четыре плоские фигуры (рис.А). Расставьте моменты инерции  $I_i$  этих фигур в порядке возрастания их величин и объясните свой ответ.
4. Два одинаковых тонких стержня с массой  $m$  и длиной  $l$  каждый приварены концами под прямым углом друг к другу. Найдите момент инерции этого угольника относительно перпендикулярной оси А, показанной на рис.Б.
5. Как вычислить момент инерции относительно оси симметрии, проходящей через центр масс плоской пластины? Проведите этот вывод и получите расчетные формулы для моментов инерции плоской прямоугольной пластины и диска, приведенные на рис.27.
6. Получите расчетную формулу для момента инерции пластины в форме равностороннего треугольника относительно оси, лежащей в плоскости пластины и проходящей через одну из его сторон (рис.В).
7. Объясните метод крутильных колебаний, которым в данной работе экспериментально определяются моменты инерции исследуемых пластин. Как надо размещать пластины на платформе?
8. По каким причинам угол отклонения платформы от положения равновесия должен быть малым? В каком случае платформа будет совершать гармонические колебания?
9. Как максимальная угловая скорость платформы связана с амплитудой колебаний и с высотой подъема платформы?
10. Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии и объясните, каким образом его можно использовать в данной работе.
11. Проведите и объясните вывод формул (54) и (57).
12. Объясните возможные причины несоответствия величин моментов инерции, получаемых в данной работе экспериментальным способом и с помощью теоретических формул.

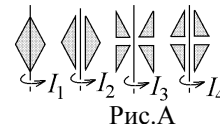


Рис.А

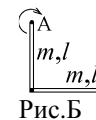


Рис.Б

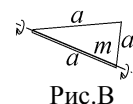


Рис.В

#### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986. - §§ 39, 41, 54.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности, - изд. ТулГУ. 2010, - гл.7 §1-5; гл.9 §1,2.

#### Работа №7. Определение коэффициента трения качения для различных материалов

**Цель работы:** определить величину коэффициента трения качения для различных пар металлических поверхностей; определить момент инерции физического тела несимметричной формы методом колебаний.

#### Теоретическое описание

По горизонтальной поверхности, образованной пластинками из разных металлов, которые можно менять, насаживая или снимая их со штырей, может свободно кататься тяжёлый маятник массы  $m$  (рис.28). Маятник образован двумя цилиндрами с радиусами  $R$  и  $r$ , параллельные оси которых не совпадают. По пластинкам катается цилиндр с меньшим радиусом  $r$ , под которым образуется пятно контакта – область, где цилиндр и пластинка прижаты друг к другу, а их материал деформирован.

Рассмотрим вначале качение любого круглого тела, например – цилиндра с радиусом  $r$ . Когда цилиндр покоится, давление в области контакта распределено симметрично (рис.29,а), а возникающая сила нормальной реакции опоры  $\vec{N}$  проходит через ось цилиндра. Если же цилиндр начинает катиться вправо со скоростью  $v$ , то происходит перераспределение давления, возникает крохотный валик из сжимаемого материала, препятствующий качению цилиндра (рис.29,б). Качение без проскальзывания означает поворот цилиндра относительно горизонтальной мгновенной оси вращения, проходящей через точку приложения силы реакции опоры  $\vec{F}_p$ .

Эта точка смещена на расстояние  $\delta$  относительно вертикали, проходящей через ось катящегося цилиндра. Силу  $\vec{F}_p$  можно разложить на две проекции:  $\vec{N}$  – сила нормальной реакции и  $\vec{F}_{тр}$  – сила трения качения или сила трения сцепления (рис.29,б). При повороте цилиндра с радиусом  $r$  на угол  $\Delta\phi$  вокруг оси О он переместится вдоль горизонтальной опоры на расстояние  $\Delta x = r \cdot \Delta\phi$ , а сила  $\vec{F}_{тр}$ , направленная про-

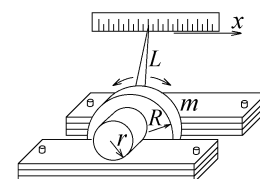


Рис.28

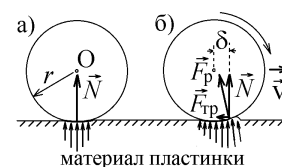


Рис.29

тив скорости  $\vec{v}$ , совершит работу, уменьшающую кинетическую энергию поступательного движения на величину:

$$\Delta\left(mv^2/2\right) = -F_{\text{тр}}\Delta x = -\vec{F}_{\text{тр}}r\Delta\varphi. \quad (61)$$

Работа момента силы равна произведению момента силы на угол поворота:  $dA = M \cdot d\varphi$ . Силы  $\vec{F}_{\text{тр}}$  и  $\vec{N}$  стремятся вращать цилиндр в разных направлениях вокруг оси О. Моменты этих сил, равные произведению силы на плечо, направлены в разные стороны. Их работа будет изменять кинетическую энергию вращательного движения маятника с моментом инерции  $I_0$  вокруг оси О:

$$\Delta\left(I_0\omega^2/2\right) = F_{\text{тр}}r \cdot \Delta\varphi - N\delta \cdot \Delta\varphi. \quad (62)$$

Расстояние  $\delta$  (плечо силы  $\vec{N}$  относительно оси катящегося тела О) называется коэффициентом трения качения (измеряется этот коэффициент в единицах длины и при качении металлического тела по металлу лежит в пределах 0,1-0,8 мм). Для металлических тел коэффициент  $\delta$  практически не зависит от скорости  $v$  и определяется только упругими свойствами металла.

Полная механическая энергия системы складывается из её потенциальной и кинетической энергии поступательного и вращательного движения. Она сохраняется, если все действующие в системе силы консервативны. В нашем случае, складывая уравнения (61) и (62), видим, что суммарная работа силы трения сцепления  $F_{\text{тр}}$  и момента этой силы равна нулю. На замедление скорости катящегося тела она не влияет. Механическая энергия катящегося цилиндра уменьшается на величину, равную работе момента силы нормальной реакции, который называется моментом трения качения:

$$-\Delta E_{\text{мех}} = -\Delta\left(mv^2/2 + I_0\omega^2/2\right) = N\delta \cdot \Delta\varphi. \quad (63)$$

Эта энергия идёт на работу по сжатию материала опоры под давлением катящегося тела, на формирование валика перед катящимся телом, на преодоление мостиков сцепления (участков, где из-за микронеровностей на поверхностях соприкосновения цилиндра и опоры возникают настолько большие давления, что между их молекулами возникают силы межмолекулярного притяжения, и они в этих местах "сцепляются" друг с другом).

Рассмотрим теперь движение маятника, изображенного на рис.28. Так как ось большого цилиндра радиуса  $R$  находится ниже оси О меньшего, катающегося по пластинкам цилиндра, то их общий центр масс С находится на расстоянии  $OC = l$  от оси О (рис.30,а). При повороте маятника на малый угол  $\varphi$ , для которого  $\sin \varphi \approx \varphi$ , центр масс поднимется на высоту  $h = l - l \cos \varphi = 2l \sin^2(\varphi/2) \approx l\varphi^2/2$ , а маятник приобретает потенциальную энергию  $E_{\text{пот}} = mgh = mgl\varphi^2/2$ .

В точке максимального отклонения от положения равновесия маятник останавливается, и вся его механическая энергия равна потенциальной. Пусть  $\varphi_0$  – начальный угол отклонения маятника от положения равновесия, а  $\varphi_1$  – максимальный угол отклонения после первого колебания. Тогда потеря механической энергии за время первого колебания равна  $\Delta E = mgl(\varphi_0^2 - \varphi_1^2)/2$ . Эта величина согласно (63) равна величине работы момента трения качения, которая не зависит от того, в какую сторону отклоняется маятник. Он остановится, совершив поворот на угол  $\varphi_{1/2}$ , а затем вернётся, отклонившись на угол  $\varphi_1$  (рис.30,б). Суммарный угол поворота за время первого колебания  $\Delta\varphi = \varphi_0 + 2\varphi_{1/2} + \varphi_1$ .

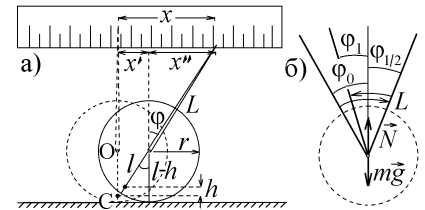


Рис.30

Для малых углов можно считать, что  $\varphi_{1/2} \approx (\varphi_0 + \varphi_1)/2$  и  $\Delta\varphi \approx 2(\varphi_0 + \varphi_1)$ . Соотношение (63) примет вид

$$\Delta E = mgl(\varphi_0^2 - \varphi_1^2)/2 = A_{\text{тр}} = N\delta \cdot 2(\varphi_0 + \varphi_1), \quad (64)$$

а так как сила нормальной реакции уравновешена силой тяжести,  $N = mg$ , то из (64) следует, что для малых углов  $\delta = l(\varphi_0 - \varphi_1)/4$ .

После второго колебания максимальный угол отклонения окажется равным  $\varphi_2$ , и те же расчеты дадут величину  $\delta = l(\varphi_1 - \varphi_2)/4$  и т.п. После  $n$ -го колебания имеем  $\delta = l(\varphi_{n-1} - \varphi_n)/4$ . Складывая все эти величины, находим

$$n\delta = \frac{l(\varphi_0 - \varphi_n)}{4} \quad \text{или} \quad \delta = \frac{l(\varphi_0 - \varphi_n)}{4n}. \quad (65)$$

Вместо углов поворота смещение маятника в данной работе измеряется показанием стрелки указателя длины  $L$  на линейке. Стрелка закреплена на оси катающегося цилиндра. При его повороте на угол  $\varphi$  ось цилиндра сместится на длину дуги  $x' = r\varphi$ , а конец стрелки сместится на расстояние  $x'' = L \sin \varphi \approx L\varphi$  (рис.30,а). Суммарное смещение стрелки, измеряемое на линейке,  $x = x' + x'' = (r + L)\varphi$  пропорционально углу  $\varphi$ . Отклонив стрелку вместе с маятником на расстояние  $x_0$ , маятник отпускают и измеряют отклонение стрелки  $x_n$  после  $n$ -го колебания. Тогда, согласно (65) коэффициент трения качения можно вычислить по формуле

$$\delta = \frac{l(x_0 - x_n)}{4n(r + L)}. \quad (66)$$

Запишем теперь систему уравнений динамики поступательного и вращательного движения для маятника, катящегося без проскальзывания с ускорением  $a$  и угловым ускорением  $\varepsilon = a/r$  относительно оси симметрии О (рис.31):

$$\begin{cases} ma = m\epsilon r = -F_{\text{тр}}; \\ I_0\epsilon = r \cdot F_{\text{тр}} - mg \cdot l \sin \varphi - N \cdot \delta. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений переменную  $F_{\text{тр}}$  и подставляя  $N = mg$ ,  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\epsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ,

получаем уравнение  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I_0 + mr^2} \varphi = -\frac{mg\delta}{I_0 + mr^2}$ . Это уравнение совпадает с динамическим

уравнением гармонических колебаний  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = \text{const}$ , в котором циклическая частота  $\omega_0$  связана с периодом колебаний  $T = t/n$ , который определяют, производя с помощью секундомера измерение времени  $n$  колебаний маятника.

Так как  $\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{mgl}{I_0 + mr^2}$ , то измерив период колебаний, можно найти величину момента инерции маятника

$$\text{ка относительно оси О:} \quad I_0 = \frac{mgl}{4\pi^2} T^2 - mr^2 \quad (67)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Поставить тяжёлое тело (маятник) из двух цилиндров с несовпадающими осями на металлические пластинки из одного металла, как показано на рис.28, так, чтобы оно не касалось стенок прореза, а стрелка  $L$  показывала ноль на миллиметровой шкале-линейке).

2. Отклонить маятник из положения равновесия, чтобы конец стрелки  $L$  (см. рис.30,а) оказался в точке с координатой  $x = x_0 = 40$  мм на миллиметровой шкале (это начальная амплитуда колебаний). Отпустить маятник, и измерить время  $t$  его  $n$  полных колебаний ( $n = 10$ ), а также величину  $x = x_n$  максимального отклонения стрелки после  $n$ -го колебания (амплитуду  $n$ -го колебания). Вычислить величину периода колебаний по формуле  $T = t/n$ . Повторить измерения 5 раз (начальная амплитуда  $x_0$  должна быть одинаковой). Результаты измерений занести в таблицу и вычислить средние значения  $\langle x_n \rangle$  и  $\langle T \rangle$ .

3. Измерения повторить для пластинок из двух других металлов и результаты также занести в таблицу.

4. Для каждой пары контактирующих металлов (цилиндр-пластинка) по формуле (66) определить величину коэффициента трения качения  $\delta = \frac{l(x_0 - \langle x_n \rangle)}{4n(r + L)}$ . Величина расстояния  $l$  от оси опорного катающегося цилиндра до центра

масс системы С (рис.30,а или рис.31), а также величина радиуса  $r$  опорного цилиндра приведены на установке. Расстояние  $r + L$  надо измерить линейкой – это расстояние от винта, которым стрелка прикреплена к оси опорного цилиндра до точки её пересечения с миллиметровой шкалой, по которой определяется расстояние  $x$  (рис.30,а).

5. По формуле (67)  $I = \frac{mgl}{4\pi^2} \langle T \rangle^2 - mr^2$  вычислить момент инерции маятника относительно оси О опорного цилиндра радиуса  $r$  в трех случаях, когда он катается по пластинкам из разных металлов (масса  $m$  маятника приведена на установке).

6. Сравнить полученные значения  $I$  (в пределах погрешностей измерения и вычислений они должны совпадать). Вычислить среднее значение  $\langle I \rangle$ . Все результаты занести в таблицу.

Таблица результатов измерения и вычислений

$m = \dots\dots \text{ кг}$				$r = \dots\dots \text{ м}$				$l = \dots\dots \text{ м}$				$r + L = \dots\dots \text{ м}$				$x_0 = \dots\dots \text{ м}$							
Название материала																							
1. ....						2. ....						3. ....											
$t, \text{ с}$		$n$		$T, \text{ с}$		$x_n, \text{ м}$		$t, \text{ с}$		$n$		$T, \text{ с}$		$x_n, \text{ м}$		$t, \text{ с}$		$n$		$T, \text{ с}$		$x_n, \text{ м}$	
$\langle T \rangle = \dots\dots\dots \text{ с}$				$\langle x_n \rangle = \dots\dots\dots \text{ м}$				$\langle T \rangle = \dots\dots\dots \text{ с}$				$\langle x_n \rangle = \dots\dots\dots \text{ м}$				$\langle T \rangle = \dots\dots\dots \text{ с}$				$\langle x_n \rangle = \dots\dots\dots \text{ м}$			
$\delta = \dots\dots\dots \text{ м}$				$I = \dots\dots\dots \text{ кг} \cdot \text{м}^2$				$\delta = \dots\dots\dots \text{ м}$				$I = \dots\dots\dots \text{ кг} \cdot \text{м}^2$				$\delta = \dots\dots\dots \text{ м}$				$I = \dots\dots\dots \text{ кг} \cdot \text{м}^2$			
$\langle I \rangle = \dots\dots\dots \text{ кг} \cdot \text{м}^2$																							

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 7

- В чем отличие механизма трения качения и трения скольжения? Одинаковы ли силы трения скольжения и трения сцепления?
- Что называется коэффициентом трения качения? От чего зависит величина этого коэффициента?

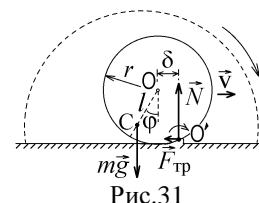


Рис.31

- Почему неконсервативная сила трения сцепления, действующая на катящееся без проскальзывания тело, не изменяет скорости его качения? Почему это тело замедляет своё движение и останавливается?
- Дайте определение момента силы и работы момента силы.
- Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии системы. По какой причине в данной работе уменьшается полная механическая энергия движущегося маятника? Что при этом происходит с маятником и опорной пластиной?
- Получите связь между высотой подъёма центра масс маятника и углом  $\varphi$  его отклонения от положения равновесия.
- Как показание конца стрелки на линейке связано с углом поворота маятника?
- Проделайте и объясните вывод расчетной формулы (66) для  $\delta$ .
- Сформулируйте условие возникновения гармонических колебаний.
- Запишите уравнения динамики поступательного и вращательного движения и, сделав вывод, получите с их помощью выражение для циклической частоты  $\omega_0$  и момента инерции  $I_0$  исследуемого в работе маятника (формула (67)).

#### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986.- §§ 21, 24, 53, 54.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §3,6; гл.7 §2-5; гл.9 §1,3.

### Работа №8. Определение силы трения скольжения

**Цель работы:** используя законы сохранения импульса и изменения механической энергии, экспериментально определить величину силы трения скольжения, а также величину коэффициента трения скольжения.

#### Теоретическое описание

При соприкосновении тел между их поверхностями образуются пятна касания размером  $\Delta \sim 1-50$  мкм, в которых микронеровности, шероховатости соприкасающихся тел плотно прижаты друг к другу. Эти размеры сильно зависят от свойств материала контактирующих тел и от величины прижимающих их сил. В пятнах касания возникают силы, сцепляющие молекулы двух прижатых поверхностей (явление адгезии).

Если на одно из тел подействовать внешней силой  $F_{\tau}$ , касательной к соприкасающимся поверхностям, а величина этой силы меньше некоторого предельного значения  $F_{\max}$ , то пятна контакта сместятся на несколько микрометров, их границы чуть изменятся, но тела друг относительно друга практически не сдвинутся (рис.32). В пятнах касания возникнут силы, препятствующие их смещению. Суммарная величина таких сил сцепления микронеровностей называется **силой трения покоя**  $F_{\text{трпок}} = F_{\tau}$ . Она уравнивает внешнюю силу и может принимать любое значение от 0 до  $F_{\max}$  (относительная скорость тел  $v=0$ ).

Если внешняя сила  $F_{\tau}$  превысит критическое значение  $F_{\max}$ , тела начинают двигаться, скользить друг относительно друга со скоростью  $v$ . Пятна контакта передвигаются по поверхности контактирующих тел, исчезают и возникают в тех точках, где начинают соприкасаться микронеровности, выступы на поверхностях. Сумма сил их сцепления образует **силу трения скольжения**  $F_{\text{трск}}$ , препятствующую смещению тел, но уже не уравнивающую внешнюю силу  $F_{\tau}$  и направленную против скорости движения тела.

Сила  $F_{\text{трск}}$  практически не зависит от скорости  $v$  и от площади соприкасающихся поверхностей (она зависит только от суммарной площади возникающих пятен касания, которая пропорциональна силе нормального давления  $\vec{N}$ , действующей на движущееся тело). Небольшой рост этой силы при больших скоростях  $v$ , показанный на рис.32, связан с появлением пластической деформации материала и началу превращения силы сухого трения (без смазки) в силу вязкого трения. Сила трения неконсервативна, её работа идёт на остаточную деформацию поверхностей и на нагревание тел.

Величина силы трения скольжения вычисляется по формуле

$$F_{\text{трск}} = \mu N,$$

где  $\mu$  – **коэффициент трения скольжения**, зависящий от природы соприкасающихся поверхностей. Такая зависимость  $F_{\text{тр}}$ , показанная на рис.32 называется **законом Амонтона-Кулона**.

В данной работе пулю с массой  $m_1$  помещают в пружинный пистолет, плотно прижимая к затвору с массой  $m_3$ , соединённому с пружиной, имеющей коэффициент жёсткости  $k$ . Предварительно затвор отводят на расстояние  $x$ , сжимая пружину на эту длину (рис.33). В момент выстрела вся потенциальная энергия сжатой пружины превратится в кинетическую энергию пули и затвора (трением деталей при растягивании пружины можно пренебречь):

$$kx^2/2 = (m_1 + m_3)v^2/2, \quad (68)$$

где  $k$  – коэффициент жёсткости пружины, указанный на установке.

Соединённый с пружиной затвор остаётся в пистолете, а пуля, вылетающая со скоростью  $v$ , попадает в висящее на горизонтальном стержне тело массы  $m_2$  и застревает в заполняющем его пластилине. Такой удар, после которого тело с застрявшей в нём пулей начинает двигаться со скоростью  $u$ , называется **абсолютно неупругим**. Величину скорости  $u$  можно определить с помощью законов сохранения.

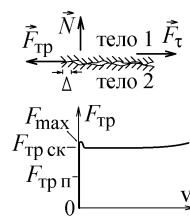


Рис.32

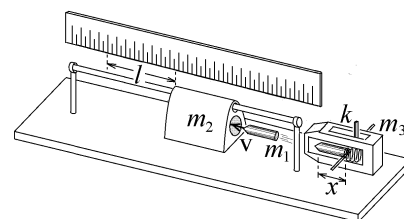


Рис.33

Закон сохранения импульса справедлив в замкнутой (или изолированной) системе, на которую не действуют внешние силы или действием таких сил можно пренебречь. Это следует из уравнения 2-го закона Ньютона, записанного в виде  $\frac{d\vec{p}_{\text{системы}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ , откуда импульс  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ . Но закон сохранения импульса часто можно применить и в незамкнутой системе, в которой  $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$ , но взаимодействие происходит очень быстро, за время  $\Delta t \rightarrow 0$  (удар, взрыв). Тогда изменение импульса  $\Delta \vec{p}_{\text{системы}} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \Delta t \rightarrow 0$  пренебрежимо мало, и можно считать, что  $\vec{p}_{\text{системы}} = \text{const}$ .

Считая, что пуля застревает в пластине практически мгновенно, можем записать закон сохранения импульса при ударе:

$$m_1 v = (m_2 + m_1) u. \quad (69)$$

Механическая энергия системы пуля-маятник при неупругом ударе не сохраняется. Закон сохранения полной механической энергии выполнен, если все силы, действующие в системе консервативны. В данном случае на пулю действует диссипативная (неконсервативная) сила трения, тормозящая пулю в пластине. Изменение механической энергии при ударе будет равно работе этой силы, которую можно найти из соотношения  $A_{\text{тр}} = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_2 + m_1) u^2}{2}$  (разность кинетических энергий до и после удара). Значительная часть работы силы трения идёт на нагревание тел.

После удара механическая энергия также не сохраняется, так как на начавшее скользить по стержню тело действует постоянная неконсервативная сила трения скольжения, равная  $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu (m_2 + m_1) g$ .

Вся кинетическая энергия скользящего тела расходуется на работу силы трения скольжения и, пройдя расстояние  $l$ , измеряемое по линейке (рис.33), тело с застрявшей в нём пулей останавливается:

$$A_{\text{тр}} = \int F_{\text{тр}} dx = F_{\text{тр}} \cdot l = \mu (m_2 + m_1) g \cdot l = \frac{(m_2 + m_1) u^2}{2}. \quad (70)$$

Исключая из уравнений (68), (69) и (70) переменные  $v$  и  $u$ , находим величину силы трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \frac{m_1^2 k x^2}{2l(m_2 + m_1)(m_1 + m_3)}. \text{ Массой затвора и пружины для данной установки можно пренебречь по сравнению с массой пули и считать, что } m_3 \approx 0. \text{ Поэтому}$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{m_1 k x^2}{2l(m_2 + m_1)} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{m_1 k x^2}{2lg(m_2 + m_1)}. \quad (71)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Прижать затвор к недеформированной пружине и заметить его положение (расстояние до края пружинного пистолета). Затем отвести затвор пистолета в крайнее положение, как показано на рис.33 (его фиксирование происходит автоматически), и снова заметить его положение. Разность этих положений, измеряемых линейкой, будет смещением затвора, которое соответствует сжатию  $x$  пружины. Занести измеренное смещение  $x$  в таблицу 2. Поместить пулю в ствол пружинного пистолета, прижав её к затвору.

2. Переместить подвешенный на горизонтальном направляющем стержне цилиндр с массой  $m_2$  к стволу пистолета до упора (рис.33).

3. Нажатием на спуск произвести выстрел. По шкале линейки измерить перемещение  $l$  цилиндра с застрявшей в нём пулей и записать значение в таблицу 1.

4. Опыт повторить 5 раз, найти среднее значение  $\langle l \rangle$ .

5. По формулам (71) вычислить величину силы трения скольжения  $\langle F_{\text{тр}} \rangle = \frac{m_1 k x^2}{2\langle l \rangle(m_2 + m_1)}$ , а также коэффициент

трения скольжения  $\langle \mu \rangle = \frac{m_1 k x^2}{2\langle l \rangle g (m_2 + m_1)}$ , где  $m_1$  – масса пули,  $m_2$  – масса цилиндра,  $k$  – коэффициент упругости пружины указаны на установке.

Результаты измерений и вычислений записать в таблицах 1 и 2.

Таблица 1.

$l$ , м					
---------	--	--	--	--	--

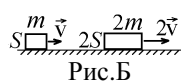
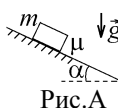
Таблица 2.

$x$ , м	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$k$ , Н/м	$\langle l \rangle$ , м	$\langle F_{\text{тр}} \rangle$ , Н	$\langle \mu \rangle$

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 8

1. По каким причинам возникают силы трения скольжения и сила трения покоя? В чем различие этих сил?
2. Какая величина называется коэффициентом трения скольжения?
3. Зависит ли величина силы трения скольжения от массы и от скорости движущегося тела?

4. На плоскости находится тело массы  $m$ . Коэффициент трения скольжения равен  $\mu$  (рис.А). При каком наибольшем угле наклона  $\alpha$  тело ещё не будет скользить? Чему равна максимальная величина  $F_{\text{тр}}^{\text{макс}}$  силы трения покоя?



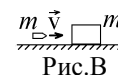
5. По горизонтальной плоскости скользят два плоских тела из одинакового материала, массы, площади и скорости которых отличаются в два раза (рис.Б). Во сколько раз отличаются действующие на них силы трения?

6. Сформулируйте закон сохранения и изменения импульса. Как этот закон используется в данной работе, и по какой причине его можно использовать?

7. Какие силы называются консервативными и неконсервативными? Приведите примеры таких сил.

8. Сформулируйте закон сохранения или изменения полной механической энергии. Как этот закон используется в данной работе?

9. Пуля с массой  $m$ , летевшая со скоростью  $v$ , врезается и застревает в неподвижно стоявшем на горизонтальной плоскости теле с массой  $m' = km$  (рис.В). Коэффициент трения скольжения равен  $\mu$ . Определите путь, пройденный после этого телом  $m'$  до остановки, а также величину потерь механической энергии в момент удара. В каком случае эти потери будут больше – при  $m' > m$  или при  $m' < m$ ?



10. Сделайте и объясните вывод расчетных формул (71).

### Литература

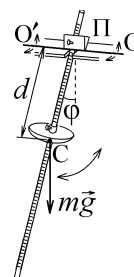
1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986.- §§ 15, 20-22, 24, 27.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.3 §1-3,6; гл.5 §1,5.

## Работа №9. Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника

**Цель работы:** экспериментально определить ускорение свободного падения с помощью физического маятника.

### Теоретическое описание

**Физическим маятником** называется любое массивное тело, совершающее колебания в поле сил тяжести вокруг горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс  $C$ . В данной работе таким маятником является длинный металлический стержень, вблизи центра которого для увеличения периода колебаний закреплен массивный груз в виде металлической чечевицы (рис.34). На стержне винтом закрепляется маленькая опорная призма “П”, которую можно смещать по стержню, меняя расстояние  $d$  до центра масс маятника  $C$ . Маятник подвешивают в вертикальном положении, ставя призму “П” на горизонтальную опору, отводят от вертикали на небольшой угол  $\varphi$  и отпускают. После этого маятник будет совершать колебания вокруг горизонтальной оси подвеса  $OO'$  (рис.34).



Уравнение динамики вращательного движения маятника в проекции на ось вращения имеет вид:  $I_0 \cdot d^2\varphi/dt^2 = M$ , где проекция момента силы тяжести  $M = -mg \cdot d \sin \varphi$  (плечом силы тяжести будет расстояние  $d \sin \varphi$ ). Этот момент стремится уменьшить угол  $\varphi$  и вернуть маятник в вертикальное положение равновесия.

Получаем уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{I_0} \sin \varphi = 0, \quad (72)$$

где  $I_0$  – момент инерции маятника относительно оси  $OO'$ .

Условием возникновения гармонических колебаний будет действие на физическое тело силы или момента силы, пропорциональных смещению от положения равновесия и стремящихся вернуть тело в положение равновесия. В нашем случае таким моментом будет момент силы тяжести при условии малых колебаний ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ). В этом случае уравнение

(72) превращается в динамическое уравнение незатухающих собственных гармонических колебаний  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0$ ,

имеющее решение в виде  $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , где циклическая частота и период колебаний физического маятника определяются формулами

$$\omega_0 = \omega_{\text{физ маят}} = \sqrt{\frac{mgd}{I_0}}, \quad T_{\text{физ маят}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{физ маят}}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgd}}. \quad (73)$$

Здесь  $I_0$  – момент инерции маятника относительно оси подвеса,  $d$  – расстояние от оси подвеса до центра масс маятника,  $m$  – его масса.

Только при **малых** углах отклонения маятника от положения равновесия,  $\varphi \leq 5^\circ - 6^\circ$ , период его колебаний не будет зависеть от амплитуды. Для более точного измерения периода определяют время большого числа  $n$  полных колебаний. Тогда  $T = t/n$ . Из-за трения призмы “П” об опору колебания будут затухающими. Поэтому удаётся измерить время  $n = 10 - 20$  колебаний, а формула (73) задаёт их период с некоторой погрешностью, что сказывается на полученных результатах.

Частным случаем физического маятника является **математический маятник** – грузик массы  $m$ , пренебрежимо малого размера, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длины  $l$  (рис.35,б). В этом случае  $I_0 = ml^2$ ,  $d = l$ , а период **малых** колебаний математического маятника  $T_{\text{мат маят}} = 2\pi\sqrt{l/g}$ . Период колебаний физического маятника совпадает

с периодом колебаний математического маятника, длина которого равна

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_0}{md} . \quad (74)$$

Эта длина называется приведенной длиной физического маятника. На расстоянии  $l_{\text{пр}}$  от оси подвеса  $O$  на линии, проходящей через центр масс  $C$ , находится точка  $O_K$  – центр качаний (рис.35,а). Это точка, в которой надо сосредоточить всю массу физического маятника, чтобы период малых колебаний получившегося математического маятника был равен периоду физического маятника, колеблющегося относительно оси подвеса  $O$ :  $T_O = T_{O_K}$ . Точки  $O$  и  $O_K$  называют сопряженными.

Момент инерции тела  $I_0$  относительно произвольной оси  $O$  равен моменту инерции  $I_C$  этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс  $C$ , сложенному с произведением массы тела  $m$  на квадрат рас-

стояния  $d$  между осями:  $I_0 = I_C + md^2$  (это – теорема Штейнера). Согласно (73), имеем  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + md^2}{mgd}}$ .

Это – квадратное уравнение, из которого следует, что маятник будет иметь одинаковый период колебаний  $T_1 = T_2$  и одинаковую приведенную длину при двух разных расстояниях  $d_1$  и  $d_2$  от оси подвеса до центра масс (рис.35):

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_C + md_1^2}{md_1} = \frac{I_C + md_2^2}{md_2} . \quad (75)$$

Зависимость периода колебаний от расстояния  $d$  показана на рис.36. Приводя соотношение (75) к общему знаменателю, и сокращая общий множитель  $d_1 - d_2$ , получим  $I_C = md_1d_2$  и

$$l_{\text{пр}} = d_1 + d_2 . \quad (76)$$

Так как  $d_2$  – расстояние от оси подвеса до центра масс, то можно, перевернув маятник, который называют оборотным, взять точку подвеса в центре качания на расстоянии  $d_2$  ниже центра масс, как показано на рис.35,а. Но можно подвесить маятник на том же расстоянии выше центра масс, как показано на рис.35,в. Правая часть

соотношения (75) от этого не изменится, как и период колебаний, равный  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{d_1 + d_2}{g}}$ . Отсюда находим ве-

личину ускорения свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2(d_1 + d_2)}{T^2} . \quad (77)$$

При использовании оборотного маятника вычисленная величина  $g$  будет более точной, так как расстояние  $d_1 + d_2$  можно определить, измеряя расстояния от краёв стержня на рис.34, длина которого известна. На данной установке маятник подвешивается с одной стороны от центра масс, и необходимо точно знать его положение. Для этого груз (чечевица) закрепляется посередине стержня, и расстояния  $d_1$  и  $d_2$  отсчитываются от середины стержня, где будет находиться центр масс  $C$  (рис.34). Любое смещение груза приведет к ошибке в определении  $g$ .

#### Порядок выполнения работы

1. Опорную призму укрепить винтом на конце стержня так, чтобы ребро, на которое она будет опираться на опору, было на уровне ближайшей риски стержня (рис.34).

2. Измерить расстояние  $d$  от ребра призмы до центра масс маятника  $C$ , который в данной работе практически совпадает с центром закрепленной на середине стержня чечевицы. Для дальнейшего определения этого расстояния можно использовать риски, нанесенные на стержень через каждый сантиметр.

3. Ребром опорной призмы установить маятник на подставку посередине прорези перпендикулярно ей и отклонить на угол  $4^\circ$  (коснитесь грузом стены, см.рис.34).

4. Секундомером измерить время  $t$  полных  $n = 10$  колебаний маятника (включать секундомер и начинать отсчет времени следует при прохождении маятником любого крайнего положения). Вычислить период колебаний  $T = t/n$ .

5. Перемещая опорную призму через каждые три сантиметра к центру стержня, т.е. меняя расстояние  $d$ , измерять время 10 колебаний и величину периода. Получить значения 15 периодов.

6. По полученным данным построить график зависимости периода колебаний  $T$  от расстояния  $d$ , аналогичный изображенному на рис.36.

7. Для произвольного значения периода  $T = T_1$  провести прямую, параллельную оси абсцисс, которая даст две точки пересечения с кривой:  $d_1$  и  $d_2$  (рис.36). При этом  $l_{\text{пр}1} = d_1 + d_2$  – приведенная длина маятника при выбранном периоде колебаний.

8. Ускорение свободного падения определить по формуле (77)  $g = \frac{4\pi^2 l_{\text{пр}1}}{T_1^2}$ .

9. Аналогично подсчитать величину  $g_i$  еще четыре раза, взяв другие значения периода  $T_i$  и определяя соответствующие им величины  $l_{\text{пр}i}$  по построенному графику.

10. Найти среднее значение  $\langle g \rangle$ .

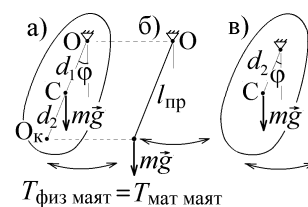


Рис.35

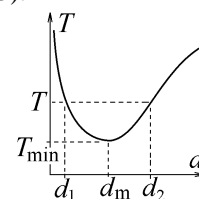


Рис.36





движения такого маятника  $m \frac{dv_x}{dt} = F_{\text{упр } x} = -kx$  можно записать в общей форме динамического уравнения собственных незатухающих гармонических колебаний, справедливой при действии любой квазиупругой силы:  $d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0$ , где введено обозначение  $\omega_0^2 = k/m$ .

Подстановкой нетрудно убедиться, что решением этого уравнения является функция  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , описывающая колебания с циклической частотой  $\omega_0$ . Период незатухающих колебаний пружинного маятника (рис.2.37) зависит от его массы и от жесткости пружины:

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (78)$$

Величину постоянной амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\varphi_0$  можно найти из начальных условий для смещения и скорости маятника в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$x(t=0) = A \cos \varphi_0; \quad v_x(t=0) = dx/dt = -A\omega_0 \sin \varphi_0. \quad (79)$$

В первом упражнении коэффициент жёсткости пружинки определяется статическим методом. Для этого по линейке определяют длину  $l_0$  свободно висющей на опоре пружинки, а затем к ней по очереди подвешивают 3-5 разных грузов с заданными массами  $m_i$ , измеряя длину  $l_i$  растянутой пружинки (рис.38). Сила тяжести уравновешена силой упругости:  $m_i g = k(l_i - l_0)$ , откуда

$$k = m_i g / (l_i - l_0). \quad (80)$$

Вычисленные по формуле (80) значения  $k$  усредняют, получая величину  $k_{\text{стат}}$ .

Во втором упражнении величину  $k$  определяют динамическим методом, заставляя подвешенные по очереди грузики  $m_i$  совершать вертикальные гармонические колебания с малой амплитудой (рис.37). Секундомером измеряют время  $n = 10$  полных колебаний и определяют их периоды  $T_i = t_i/n$ . Для большей точности период колебаний каждого грузика  $m_i$  определяют 3-4 раза, находя его среднее значение  $\langle T_i \rangle$ . По формуле (78) находят значение  $k$  для каждого грузика:

$$k_i = 4\pi^2 m_i / \langle T_i \rangle^2, \quad (81)$$

а затем усредняют эти значения:  $k_{\text{дин}} = \langle k_i \rangle$ . Если измерения периодов проведены аккуратно, величины  $k_{\text{стат}}$  и  $k_{\text{дин}}$  должны совпасть с точностью до погрешностей.

В третьем упражнении исследуются собственные затухающие колебания пружинного маятника, для чего грузик на пружинке опускают в сосуд с жидкостью, обладающей вязкостью (рис.39). При не очень больших скоростях на движущийся грузик действует замедляющая движение диссипативная сила вязкого трения, пропорциональная скорости тела:  $\vec{F}_{\text{тр}} = -\eta \vec{v}$ , где  $\eta$  – коэффициент вязкого трения. С учетом этой силы уравнение движения

$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{упр } x} + F_{\text{тр } x} = -kx - \eta \frac{dx}{dt}$  можно записать в виде динамического уравнения собственных затухающих колебаний,  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ , где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\beta = \frac{\eta}{2m}$  – коэффициент затухания колебаний. В случае малой вязкости, когда  $\beta < \omega_0$ , его решением будет

$$x(t) = \underset{\text{амплитуда}}{A_0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (82)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – циклическая частота,  $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – период затухающих колебаний, который возрастает с ростом вязкости  $\eta$ .

В случае большого сопротивления среды, когда  $\beta \geq \omega_0$ , колебания не возникают, несмотря на присутствие квазиупругой силы. Движение маятника в такой вязкой жидкости будет апериодическим (рис.40).

Амплитуда затухающих колебаний  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ , убывает со временем тем быстрее, чем больше величина  $\beta$ . Затухание колебаний характеризуют также величиной логарифмического декремента затухания  $\theta$ . Это натуральный логарифм отношения амплитуды в момент времени  $t$  к амплитуде через период:  $\theta = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T$ .

Логарифмический декремент можно вычислить другим способом:

$$\theta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{A_0}{A_n} \right), \quad (83)$$

где величины амплитуд  $A_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , меняющиеся через каждый период, показаны на рис.41.

При выполнении работы грузик в жидкости отводят от положения равновесия на расстояние  $A_0$  и отпускают, одновременно включая секундомер. После того, как маятник совершит  $n$  полных колебаний, секундо-

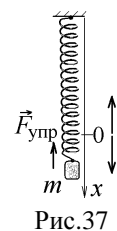


Рис.37

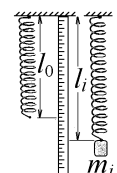


Рис.38

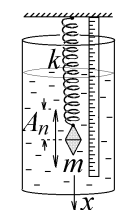


Рис.39

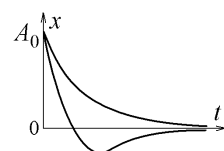


Рис.40

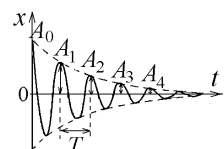


Рис.41

мер, измеривший время  $t$ , выключают и одновременно по линейке (рис.39) определяют амплитуду  $A_n$   $n$ -го колебания. Эти измерения повторяют 3-4 раза для одинаковых значений  $A_0$ , каждый раз определяя период колебания  $T = t/n$ , а затем находя среднее значение периода  $\langle T \rangle$  и среднее значение  $\langle A_n \rangle$ .

Теперь по формуле (83) можно определить величину логарифмического декремента затухания  $\theta$ , величину коэффициента затухания колебаний  $\beta = \frac{\theta}{\langle T \rangle}$  и величину коэффициента вязкого трения  $\eta = 2m\beta$ .

#### Порядок выполнения работы

1. Определить по линейке длину  $l_0$  нерастянутой пружины, подвешенной на кронштейне (рис.38)/

2. Поочередно подвешивая к пружине три разных груза (на грузах указаны их массы  $m_i$ , где  $i=1,2,3$  – номер груза), определить длину  $l_i$  растянутой пружины в положении равновесия.

3. Для каждого подвешенного груза по формуле (80) вычислить коэффициент упругости пружины  $k_i = m_i g / (l_i - l_0)$ , определенный статическим методом и найти его среднее значение  $\langle k_{\text{стат}} \rangle$ . Данные занести в таблицу 1.

4. Подвесив каждый груз к этой же пружине, вывести маятник из положения равновесия, сместив вниз на 2-3 мм, и отпустить. Секундомером измерить время  $t_i$  полных  $n = 10$  колебаний (начинать отсчет при прохождении грузом верхнего или нижнего положения). Найти период колебаний  $T_i = t_i/n$ . Опыт с каждым грузом повторить 3 раза и найти среднее значение периода колебаний  $\langle T_i \rangle$  для каждого груза с номером  $i=1,2,3$ . Данные занести в таблицу 2.

Таблица 1.

	$m_i$ , кг	$l_i$ , м	$k_i$ , Н/м
$i = 1$			
$i = 2$			
$i = 3$			
$l_0 = \dots\dots\dots$ м		$\langle k_{\text{стат}} \rangle = \dots\dots\dots$ Н/м	

5. Согласно формуле (81), определить значения коэффициента упругости  $k_i$  для разных грузов, полученные динамическим способом. Найти их среднее значение  $\langle k_{\text{дин}} \rangle$  и сравнить его со значением  $\langle k_{\text{стат}} \rangle$  из таблицы 1.

6. Построить график зависимости  $\langle T \rangle^2$  от массы грузов  $m$ .

7. Опыт проделать с пружинным маятником, груз с массой  $m_1$  которого помещен в сосуд с водой (рис.39). Вывести груз из положения равновесия, например на  $A_0 = 20$  мм (это начальная амплитуда колебаний на рис.41), и, отпустив его, **одновременно** включить секундомер. Определить время  $t_1$ , за которое груз совершит  $n_1 = 20$  полных колебаний, а также амплитуду  $A_n$  после  $n_1$  колебаний. Опыт выполнить 3 раза и найти среднее значение периода  $\langle T_1 \rangle$  и амплитуды  $n_1$ -го колебания  $\langle A_n \rangle$ .

8. Вычислить логарифмический декремент затухания  $\langle \theta \rangle = \frac{1}{n_1} \ln \frac{A_0}{\langle A_n \rangle}$ ; коэффициент затухания  $\beta = \frac{\theta}{\langle T_1 \rangle}$  и коэффициент вязкого трения  $\eta = 2m_1\beta$ . Данные измерений и вычислений занести в таблицу 3.

$m_1 = \dots\dots$  кг,  $n_1 = \dots\dots$ ,  $A_0 = \dots\dots$  мм

Таблица 3.

$A_n$ , мм	$t_1$ , с	$T_1$ , с	$\langle T_1 \rangle$ , с	$\langle A_n \rangle$ , мм	$\langle \theta \rangle$	$\beta$ , с <sup>-1</sup>	$\eta$ , кг/с

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 10

1. Какие колебания называются гармоническими, и каковы необходимые условия возникновения гармонических колебаний в механической системе?
2. Когда маятник совершает собственные затухающие колебания, и чем они отличаются от незатухающих гармонических колебаний?
3. От каких параметров зависит сила вязкого трения, и в каком случае её надо учитывать?
4. Какие величины называются коэффициентом вязкого трения и коэффициентом затухания колебаний? Как они вычисляются в работе?

5. Запишите уравнение движения пружинного маятника и получите с его помощью динамические уравнения собственных незатухающих и затухающих колебаний. Приведите решения этих уравнений.
6. Какие величины называются амплитудой, фазой и начальной фазой затухающих и незатухающих собственных колебаний?
7. Пружинный маятник с массой  $m$  на пружинке с жёсткостью  $k$ , совершающий незатухающие гармонические колебания, имеет в начальный момент времени  $t = 0$  координату  $x = x_0$  и скорость  $v = v_0$ . Чему равна амплитуда и начальная фаза этих колебаний?
8. В каком случае пружинный маятник с массой  $m$  и коэффициентом жёсткости  $k$  будет совершать в жидкости аperiодическое движение, если коэффициент вязкого трения при его движении равен  $\eta$ ?
9. Получите формулу периода колебаний пружинного маятника в вязкой жидкости. Как изменяется его величина с ростом вязкости?
10. Какая величина называется логарифмическим декрементом затухания колебаний, как она связана с периодом колебаний и каким образом она вычисляется в данной работе?
11. Объясните метод, используемый при определении коэффициента жёсткости пружины статическим и динамическим способом.

#### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1986.- §§ 50, 53, 58.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности,- изд. ТулГУ. 2010, - гл.9 §1,3.

### Работа №13. Определение показателя адиабаты методом Клемана и Дезорма

Цель работы: определить величину показателя адиабаты воздуха экспериментальным методом и сравнить её с предсказанием термодинамической теории газов.

#### Теоретическое описание

Среди происходящих с газами процессов часто встречается и очень важен адиабатический процесс, протекающий без передачи тепла. Чтобы получить его уравнение, воспользуемся первым началом термодинамики: теплота, сообщаемая системе (газу), идет на изменение её внутренней энергии и на совершение системой работы над внешними силами:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Газ (воздух) с достаточной точностью можно считать идеальным. Если  $m$  – масса газа, а  $\mu$  – его молярная масса,  $p$  – давление,  $V$  – объём, а  $T$  – температура, измеряемая в градусах Кельвина, то внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры,  $U = \frac{m}{\mu} C_v T$ , а совершаемая газом работа  $\delta A = p dV$ . Здесь  $C_v$  – молярная теплоёмкость идеального газа при изохорическом процессе, когда не меняется объём газа.

Известно, что  $C_v = iR/2$ , где  $R = 8,314$  Дж/К·моль – универсальная газовая постоянная,  $i$  – число степеней свободы молекулы газа. Передаваемую газу теплоту удобно выразить через молярную теплоёмкость процесса  $C$ :  $\frac{m}{\mu} C = \frac{\delta Q}{dT}$

(приведенная величина равна количеству теплоты, которую надо сообщить системе, чтобы повысить ее температуру на 1К). Величина теплоемкости зависит от способа, которым системе сообщается теплота. Если  $C = \text{const}$ , то процесс называется политропическим.

В результате для идеального газа первое начало термодинамики запишется в виде

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C dT = \frac{m}{\mu} C_v dT + p dV. \quad (84)$$

Воспользуемся теперь уравнением состояния идеального газа

$$pV = (m/\mu) \cdot RT. \quad (85)$$

Вычисляя дифференциал  $(m/\mu) \cdot R dT = d(pV) = p dV + V dp$ , исключаем  $dT$  из уравнения (2.84), в котором для адиабатического процесса, идущего без передачи тепла, надо принять  $\delta Q = 0$ . Получаем уравнение, связывающее давление и объём газа:

$$(C_v + R) p dV = C_p p dV = -C_v V dp. \quad (86)$$

Здесь подставлена величина молярной теплоёмкости изобарического процесса, при котором не меняется давление газа:

$$C_p = C_v + R = \frac{i+2}{2} R \quad (\text{эта связь называется уравнением Майера}).$$

Отношение теплоёмкостей при постоянном давлении и постоянном объёме называется показателем адиабаты

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}. \quad (87)$$

Подставляя эту величину в (86), разделим переменные и проинтегрируем:  $\gamma \int \frac{dV}{V} = - \int \frac{dp}{p}$ , получая  $\gamma \ln V = - \ln p + \text{const}$ . Это – уравнение адиабатического процесса для идеального газа или уравнение Пуассона, которое

обычно записывается в виде:

$$pV^\gamma = \text{const} . \quad (88)$$

Используя уравнение состояния (85), можно записать уравнение Пуассона через другие термодинамические переменные:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad \text{или} \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const} . \quad (89)$$

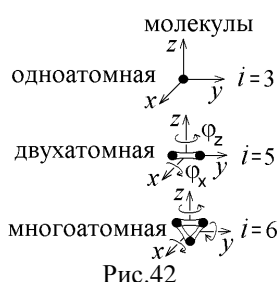


Рис.42

Цель данной работы – экспериментальное определение величины  $\gamma$  для воздуха, который является смесью многих газов – двухатомных  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ , трехатомных  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  и т.п. Идеальный газ – это совокупность не взаимодействующих друг с другом на расстоянии молекул, имеющих очень малый размер. Размером одноатомной молекулы пренебрегают, считая ее материальной точкой, способной двигаться в трех независимых направлениях, т.е. имеющей  $i = 3$  степени свободы. Двухатомные и многоатомные молекулы имеют дополнительные вращательные степени свободы, показанные на рис.42.

Так как доля многоатомных и одноатомных газов в воздухе мала, то можно ожидать, что величина  $\gamma$  для воздуха будет близка к соответствующему значению для двухатомных газов:  $\gamma \approx (5+2)/5 = 1,4$ .

В работе используется установка, изображенная на рис.43. Она состоит из большого стеклянного баллона Б, соединяемого через кран К или с насосом Н, или с атмосферой. Манометр М служит для измерения разностей давлений газа в баллоне и в атмосфере.

Повернем кран К в положение I, соединяя баллон с насосом, и начнем накачивать воздух в баллон. Так как этот процесс происходит достаточно медленно, то за счет теплообмена через стеклянные стенки баллона успевает установиться тепловое равновесие. Температура воздуха внутри баллона после накачивания будет равна комнатной температуре  $T_1$ . Давление воздуха внутри баллона возрастет до величины

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1 , \quad (90)$$

где  $p_0$  – давление воздуха в окружающей атмосфере, а  $\rho g h_1$  – разность гидростатических давлений жидкости с плотностью  $\rho$  в левой и правой трубках U-образного манометра (рис.43).

Вытащим теперь пробку-затвор из крана К, соединяя баллон с атмосферой. Воздух, расширяясь, **очень быстро** выходит через отверстие, теплообмен **не успевает произойти** и процесс можно считать адиабатическим. Так как  $\gamma > 1$ , то, согласно (88) и (89), при быстром адиабатическом расширении газа и его давление, и температура уменьшаются: воздух в баллоне будет охлаждаться до температуры ниже комнатной.

В момент, когда давление воздуха в сосуде сравнивается с атмосферным ( $p' = p_0$ , выравниваются уровни жидкости в манометре), пробку крана плотно закрывают в положении II, перекрывая выход газа из баллона (рис.43). За счет теплообмена через стеклянные стенки закрытого баллона начинается медленное изохорическое нагревание охлажденного воздуха в нем. При этом давление в баллоне растет, и уровни жидкости в манометре постепенно расходятся до тех пор, пока температура внутри баллона не станет равной комнатной:  $T_2 = T_1$ . В этот момент давление воздуха в баллоне станет равным

$$p_2 = p_0 + \rho g h_2 \quad (91)$$

Процессы, протекающие в системе, изображены на рис.44. В момент окончания адиабатного расширения в баллоне останется часть воздуха с массой  $m_1$ , занимавшая первоначально объем  $V_1$ , меньший объема баллона  $V_B$ . В момент окончания изохорического нагревания температура воздуха в баллоне сравнивается с комнатной:  $T_2 = T_1$ .

Запишем для газа, остающегося в баллоне, уравнения адиабатического (89) и изохорического процессов,  $T_1 p_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T' p_0^{(1-\gamma)/\gamma}$  и  $\frac{p_0}{T'} = \frac{p_2}{T_1} = \frac{p_2}{T_1}$ , а затем устраним неизвестное отношение температур

$\frac{T'}{T_1} = \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} = \frac{p_0}{p_2}$ . Логарифмируя это уравнение, находим  $\frac{1-\gamma}{\gamma} \ln \left( \frac{p_1}{p_0} \right) = \ln \left( \frac{p_0}{p_2} \right)$ , откуда

$\gamma = \frac{\ln(p_1 / p_0)}{\ln(p_1 / p_2)}$ . Подставляем сюда формулы (90) и (91):

$$\gamma = \frac{\ln(p_1 / p_0)}{\ln(p_1 / p_0) - \ln(p_2 / p_0)} = \frac{\ln \left( 1 + \frac{\rho g h_1}{p_0} \right)}{\ln \left( 1 + \frac{\rho g h_1}{p_0} \right) - \ln \left( 1 + \frac{\rho g h_2}{p_0} \right)} . \quad (92)$$

Уровни жидкости (воды с плотностью  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ) раздвигаются в манометре М на рис.43 всего на  $h \approx 10 \div 20 \text{ см}$ , и избыточное давление газа  $\rho g h \approx 10^3 \text{ Па}$  много меньше атмосферного давления  $p_0 \approx 10^5 \text{ Па}$ . Поэтому величина  $x = \frac{\rho g h}{p_0} \approx 10^{-2} \ll 1$ , и в формуле (92) можно разложить все логарифмы в ряд, оставляя слагаемые только первого

порядка малости:  $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots \approx x$ . Тогда соотношение (92) даёт конечную формулу для вычисления по-

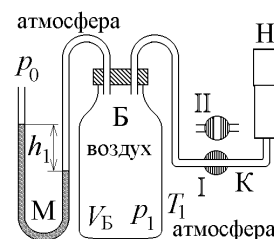


Рис.43

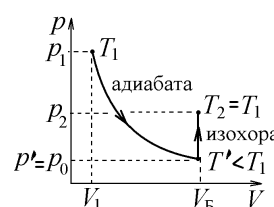


Рис.44

казателя адиабаты:

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2} . \quad (93)$$

Точность его определения в данном эксперименте не слишком высока, и поэтому возникают отклонения от теоретически ожидаемого значения  $\gamma_{\text{эксп}} < \gamma_{\text{теор}} \approx 1,4$ . Это связано не только с тем, что свойства реального воздуха немного отличаются от свойств идеального газа, и состоит он не только из двухатомных молекул. Ошибка главным образом связана с несовершенством используемого оборудования. При установке пробки крана К в положение II (рис.43) остаются крохотные щели, и воздух понемногу продолжает вытекать из баллона при нагревании. Поэтому уровень  $h_2$  оказывается немного меньшим того уровня, который установился бы при идеально закрытом баллоне. Величина  $\gamma$ , измеренная на такой установке в соответствии с формулой (93), тоже окажется немного меньше истинной.

#### Порядок выполнения работы

1. Установить пробку крана К так, чтобы баллон Б, который находится под столом, сообщался с насосом Н (в положение I на рис.43).

2. Осторожно накачать воздух в баллон. Когда разность уровней жидкости в коленях манометра достигнет 10÷15 см, прекратить накачивание и повернуть пробку крана К в положение II, чтобы сосуд не сообщался с атмосферой. Пробка крана должна плотно прилегать к его стенкам и не давать утечки воздуха. Не забывайте об этом до конца эксперимента.

3. Через некоторое время, когда давление в баллоне окончательно установится и разность уровней в манометре перестанет уменьшаться, измерить разность  $h_1$  уровней жидкости в левом и правом коленях манометра.

4. Повернуть пробку крана, давая воздуху в сосуде расширяться наружу. Разность уровней жидкостей в манометре резко уменьшится двумя, следующими друг за другом скачками. Как только при втором скачке уровни жидкостей станут одинаковыми, ( $h_1 = 0$ ) пробку следует **немедленно и плотно** повернуть в кране К в положение II, закрывая баллон.

5. После того, как баллон будет закрыт пробкой, уровни жидкости в манометре снова начнут расходиться. Следует подождать, когда давление окончательно установится и разность уровней в манометре перестанет увеличиваться. Затем записать установившуюся разность уровней  $h_2$  воды в обоих коленях манометра.

6. Опыт повторить не менее  $n = 9$  раз для разных значений начальной величины  $h_1$ , лежащих в пределах 10÷15 см. Для каждого опыта вычислить показатель адиабаты  $\gamma_i$  по формуле (93)  $\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$ , а затем определить его среднее значение  $\langle \gamma \rangle$ . Все измеренные и вычисленные величины заносить в таблицу 1.

Таблица 1

$h_1$ , см									
$h_2$ , см									
$\gamma_i$									
$\langle \gamma \rangle =$	$\Delta\gamma =$					$\gamma_{\text{теор}} =$			

7. Определить погрешность полученного значения показателя адиабаты

$$\Delta\gamma = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\gamma_i - \langle \gamma \rangle)^2}, \text{ где } n = 9 - \text{число измерений.}$$

8. Записать ответ в виде  $\gamma = \langle \gamma \rangle \pm \Delta\gamma$ :  $\gamma = \dots \pm \dots$

8. По формуле  $\gamma_{\text{теор}} = \frac{i+2}{i}$  вычислить теоретическое значение показателя адиабаты, принимая для воздуха  $i = 5$ , и сравнить полученный результат с  $\langle \gamma \rangle$ .

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 13

1. Сформулируйте I-е начало термодинамики и запишите его для идеального газа. Какими формулами определяются входящие в него работа и внутренняя энергия идеального газа?
2. Какой газ можно считать идеальным? Каким уравнением описывается его состояние, и какие величины входят в это уравнение?
3. Какой процесс называется изохорическим, изобарическим, изотермическим и адиабатическим? Будут ли эти процессы политропическими? Запишите уравнения этих процессов.
4. Дайте определение теплоемкости. Почему для разных процессов величина теплоемкости идеального газа различна? Как связаны теплоемкости изобарического и изохорического процесса?
5. Выведите уравнение Пуассона (88) для адиабатического процесса и получите из него уравнения (89).
6. Какая величина называется показателем адиабаты? Чему она равна для гелия He? Для кислорода O<sub>2</sub>? Для углекислого газа CO<sub>2</sub>?
7. Что происходит с внутренней энергией идеального газа, если он расширяется (или сжимается) а) изобарически? б) изотермически? в) адиабатически?
8. Влажность воздуха начинает возрастать. Что при этом происходит с его плотностью и показателем адиабаты? Почему?

9. Какие процессы происходят с воздухом в баллоне Б на рис.43 при выполнении работы: а) при накачивании воздуха? б) при открывании крана К? в) при его последующем закрывании? Почему именно эти процессы?
10. В какой момент следует закрыть кран при выполнении работы?
11. Почему после закрывания крана давление воздуха в сосуде начинает расти, и по какой причине этот рост останавливается?
12. Сделайте и объясните вывод уравнений (92) и (93) для определения показателя адиабаты  $\gamma$ .
13. Почему можно измерять давление по разности высот уровней жидкости в U-образной трубке манометра?
14. Какой должна быть величина  $\gamma$  теоретически, и по каким причинам вычисляемый в работе результат может отличаться от этого значения?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1973.- §§ 94-98.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.1 §§ 4-9.

## Работа №14. Определение коэффициента поверхностного натяжения воды методом отрыва кольца

Цель работы: на опыте определить коэффициент поверхностного натяжения воды при комнатной температуре.

### Теоретическое описание

На каждую молекулу жидкости действуют силы притяжения соседних молекул, образуя суммарную силу  $\vec{F}_{\text{мол}}$ . Для молекул "1", находящихся в глубине жидкости и полностью окруженных соседними молекулами, эта сила равна нулю (рис.45). Вблизи поверхности жидкости, для молекул "2", это окружение не полное, и возникают ненулевые силы  $\vec{F}_{\text{мол}}$ , стремящиеся втянуть эти молекулы вглубь жидкости. Такие молекулы образуют поверхностный слой конечной толщины, пропорциональной радиусу межмолекулярного взаимодействия.

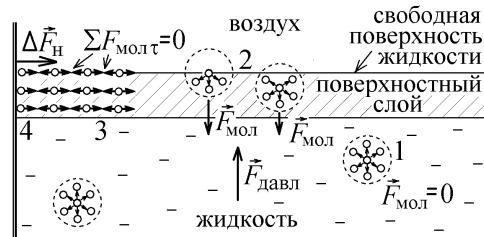


Рис.45

Чтобы молекула оказалась в поверхностном слое, ей надо совершить работу против сил  $\vec{F}_{\text{мол}}$  и увеличить свою потенциальную энергию. Суммарная дополнительная потенциальная энергия молекул из поверхностного слоя образует поверхностную энергию  $E_{\text{пов}}$  свободной поверхности жидкости (это поверхность, которая может свободно деформироваться, например – поверхность воды, налитой в стакан). Такая энергия пропорциональна площади  $S$  свободной поверхности:

$$E_{\text{пов}} = \sigma S. \quad (94)$$

Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  называется коэффициентом поверхностного натяжения и зависит от свойств двух разделенных общей поверхностью сред (на рис.45 это жидкость и воздух).

Сумма сил  $\sum \vec{F}_{\text{мол}}$  может создавать давление внутри жидкости, и уравновешена силами давления  $\vec{F}_{\text{давл}}$ , которые направлены перпендикулярно к свободной поверхности жидкости. На границе это давление равно атмосферному, и под плоской поверхностью жидкости с плотностью  $\rho$  давление будет равно сумме атмосферного и гидростатического давления:

$$p_{\text{жидк}} = p_{\text{атм}} + \rho gh. \quad (95)$$

Как видно из рис.45, для молекул "3" в поверхностном слое, которые окружены соседями со всех сторон, уравновешены касательные проекции межмолекулярных сил:  $\sum F_{\text{мол}\tau} = 0$ . Не равна нулю такая сумма для молекул "4", находящихся на краю свободной поверхности и окруженных соседними молекулами только с одной стороны. Она создаёт силу поверхностного натяжения

$$\Delta F_n = \sum F_{\text{мол}\tau} = \sigma \Delta l. \quad (96)$$

Эта сила: а) всегда приложена к контуру, ограничивающему свободную поверхность и направлена перпендикулярно к этому контуру; б) кроме того, она направлена по касательной к свободной поверхности; в) стремится уменьшить площадь свободной поверхности; г) пропорциональна длине  $\Delta l$  участка контура, ограничивающего свободную поверхность, на который она действует.

Работа против силы поверхностного натяжения идёт на увеличение поверхностной энергии. На рис.46 площадь поверхности увеличивается на  $\Delta S = \Delta l \Delta x$ , и внешняя сила  $F$ , равная силе поверхностного натяжения, совершает работу  $\Delta A_{\text{н}} = \Delta F_n \cdot \Delta x = \sigma \Delta l \Delta x = \sigma \Delta S = \Delta E_{\text{пов}}$ .



Рис.46

Таким образом, можно дать два определения коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$ :

- 1) он численно равен силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего свободную поверхность;
- 2) он численно равен работе, которую надо совершить, чтобы увеличить площадь свободной поверхности раздела сред на единицу.

На границе жидкости, налитой в сосуд, встречаются три поверхности: жидкость-воздух, жидкость-стенка, стенка-воздух (рис.47). Деформироваться и изгибаться может только свободная поверхность между жидкостью и воздухом. Поверхность стенки не свободна, но её молекулы также действуют на граничащие с ними молекулы жидкости, создавая силу  $\Delta \vec{F}_{\text{ст}}$ , приложенную, как и сила  $\Delta \vec{F}_n$ , к элементу  $\Delta l$  границы раздела сред в точке А (этот элемент перпендикулярен плоскости



Рис.2.47

рис.47). Сумма всех сил, действующих на элемент  $\Delta l$  должна быть равна нулю. Поверхность жидкости в месте касания со стенкой сосуда начинает искривляться, образуя угол  $\theta$  со стенкой. Этот угол называется краевым, а искривленный участок жидкости – мениском. Если угол  $0 \leq \theta < 90^\circ$ , как показано на рис.47, то говорят, что жидкость смачивает стенку. Если  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  (рис.48), то наблюдается явление несмачивания. Форма образующегося мениска зависит от свойств соприкасающихся сред. Например, если стенки сосуда смазать жиром, то налитая в него вода не будет их смачивать (рис.48).



Рис.48

Заметим, что под искривлённым участком поверхности жидкости изменяется давление (95). Под выпуклой поверхностью (рис.48) оно растёт, а под вогнутой (рис.47) – уменьшается на величину  $\Delta p = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны поверхности.

Для определения коэффициента поверхностного натяжения воды, налитой в чашку, в неё опускают кольцо с наружным диаметром  $D_1$  и с внутренним диаметром  $D_2$ , подвешенное на пружине с коэффициентом жёсткости  $k$ , висящей на кронштейне (рис.49,б).

Предварительно пружину следует проградировать, отводя чашку с водой в сторону, последовательно, по одному, добавляя на подвешенное кольцо маленькие грузы с массами  $\Delta m$  и измеряя удлинение пружины  $n$  в зависимости от суммарной массы грузов  $m_{гр} = \sum \Delta m$ , лежащих на кольце (рис.49,а). Измерение производят по линейке, отмечая на ней горизонтальное положение края кольца (рис.49,а). Если  $n_0$  – длина пружины без грузов ( $m_{гр} = 0$ ), то сила тяжести

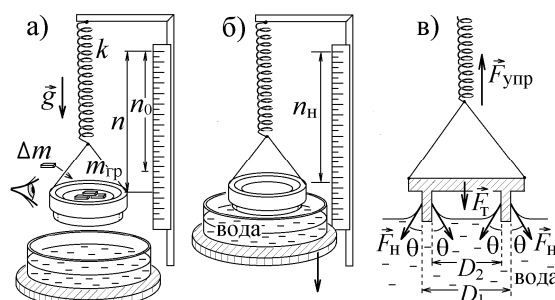


Рис.49

грузов уравновешена силой упругости растянутой пружины:  $F = m_{гр}g = k(n - n_0)$ .

По вычисленным значениям силы  $F$  и измеренным значениям длины  $n$  строится градуировочный график (рис.50). Так как массы грузов-разновесов измеряются в миллиграммах, то вычисленные значения силы тяжести  $F = m_{гр}g$  на этом графике удобно откладывать во внесистемных единицах, помня, что 1 мГ силы равен  $9,81 \cdot 10^{-6}$  Н.

После этого надо убрать все грузы-разновесы и поднять чашку с дистиллированной водой так, чтобы в воду погрузилось только кольцо. Оно должно быть тщательно протёрто, и его нельзя после этого трогать пальцами, чтобы не нанести на него слой жира, который приведёт к несмачиванию стенок кольца (рис.48), что исказит результат.

Чашку с водой медленно опускают вниз, и она увлекает за собой кольцо, растягивающее пружину (рис.49,б). Это происходит из-за того, что на кольцо с массой  $m_k$  действуют показанные на рис.49,в и уравновешивающие друг друга сила тяжести  $F_T = m_k g$ , сила упругости растягиваемой пружины  $F_{упр} = k\Delta n$  и сила поверхностного натяжения  $F_H = \sigma\pi(D_1 + D_2)$ , приложенная согласно (96) к двум кольцевым контурам с диаметрами  $D_1$  и  $D_2$ , ограничивающим свободную поверхность воды в месте её контакта со стенками кольца. Так как вода смачивает стенки кольца, то сила  $F_H$  направлена под краевым углом  $\theta$  к вертикали (рис.49,в). Поэтому

$$F_{упр} - m_k g = k(n - n_0) = F_H = \sigma\pi(D_1 + D_2) \cos \theta. \quad (97)$$

С ростом длины пружины  $n$  растёт величина  $\cos \theta$  в правой части (97) и уменьшается краевой угол  $\theta$ . Так как  $\cos \theta \leq 1$ , то в момент, когда длина пружины становится равной  $n = n_H$ , а краевой угол  $\theta = 0$ , кольцо отрывается от воды. Соотношение (97) принимает вид  $F_H = k(n_H - n_0) = \sigma\pi(D_1 + D_2)$ .

Измерив несколько раз величину  $n_H$  в момент отрыва кольца, и вычислив среднее значение  $\langle n_H \rangle$ , по градуировочному графику (рис.50) определяем величину  $F_H$  (в Н) и вычисляем коэффициент поверхностного натяжения воды:

$$\sigma = \frac{F_H}{\pi(D_1 + D_2)} \quad (98)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Штангенциркулем измерить наружный  $D_1$  и внутренний  $D_2$  диаметры кольца в пяти местах. Данные занести в таблицу 1.

2. Отвести нижнюю чашку с водой в сторону. Подвесить к пружине плоскую чашку, нижняя часть которой образует кольцо, и по шкале (линейке) определить положение  $n_0$  верхнего края подвешенной чашки (кольца) в ненагруженном состоянии ( $F = 0$ , рис.49,а). Смотреть на шкалу нужно строго горизонтально вдоль верхнего края чашки (рис.49,а). Об этом не следует забывать до конца эксперимента.

3. Взять одну гирьку (груз, цифры на котором указывают вес груза в миллиграммах силы), поместить её в центр чашки с кольцом, как показано на рис.49,а, и определить по шкале положение  $n$  её верхнего края.

4. Увеличивая нагрузку  $F = mg$  (последовательно добавляя по одной гирьке, не забывайте подсчитывать каждый раз общую сумму нагрузки в миллиграммах), определять по шкале положение  $n$  верхнего края чашки с кольцом. Данные измерений занести в таблицу 2.

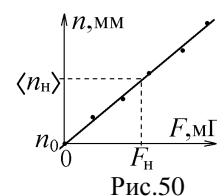


Рис.50



5. Снять все гирьки с чашки.

6. Поднять сосуд (нижнюю чашку) с водой до тех пор, пока поверхность воды не коснется нижнего края кольца. Следить за тем, чтобы этот край только смачивался, но не опускался вглубь воды, чтобы вода не коснулась плоской поверхности над кольцом. Затем, очень медленно и осторожно опуская сосуд, уловить равновесие (система находится в покое) **перед отрывом кольца**, и заметить по шкале положение  $n_n$  верхнего края чашки с кольцом (рис.49,б). Измерения проделать не менее 5 раз и найти среднее арифметическое значение  $\langle n_n \rangle$ . Данные занести в таблицу 1.

7. Осторожно снять кольцо с пружины и положить на подставку.

8. Построить график градуировки пружины  $n(F)$ , принимая за начало координат значение  $n_0$ . Вид графика представлен на рис.50.

9. Зная растяжение пружины  $\langle n_n \rangle$  под действием силы поверхностного натяжения, по построенному графику определить ее значение  $F_n$  в миллиграммах силы, а затем перевести в ньютоны.

10. Переведя все величины в систему СИ, по формуле (98) вычислить коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{F_n}{\pi(\langle D_1 \rangle + \langle D_2 \rangle)}.$$

Таблица 1

Номер опыта	$D_1$ , м	$D_2$ , м	$n_n$ , мм
1			
2			
3			
4			
5			
Средние значения	$\langle D_1 \rangle = \dots\dots\dots$ м	$\langle D_2 \rangle = \dots\dots\dots$ м	$\langle n_n \rangle = \dots\dots$ мм

Таблица 2

$m$ , мг												
$F = mg$ , мГ												
$F = mg$ , Н												
$n$ , мм												
$F_n = \dots\dots\dots$ Н	$\sigma = \dots\dots\dots$ Н/м											

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 14

- По какой причине образуется поверхностный слой у жидкой среды и чем определяется его толщина? Имеется ли такой слой у идеального газа? У твердого тела?
- Что такое свободная поверхность жидкости и контур, ограничивающий свободную поверхность? Покажите их для воды, налитой в стакан.
- Чему равна поверхностная энергия свободной поверхности воды, налитой в стакан с диаметром  $D$ ?
- Чему равна сила поверхностного натяжения для воды, налитой в стакан? По какой причине она возникает? К чему она приложена и куда направлена?
- Дайте два определения коэффициента поверхностного натяжения. В каких единицах он измеряется?
- Масса молекулы мыла больше, чем у молекулы воды, поэтому кусок мыла тонет в воде. По какой причине мыльная плёнка всплывает на её поверхность?
- Какую работу надо совершить, чтобы, как показано на рис.А, растянуть на ширину  $\Delta x$  рамку с натянутой на неё тонкой мыльной плёнкой, имеющей коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ ?
- Что называется краевым углом? Что такое мениск, и по каким причинам он образуется на краю поверхности жидкости?
- Какое явление называется смачиванием и несмачиванием?
- С какой целью в данной работе делается градуировочный график (рис.50), и как этот график используется для определения  $\sigma$ ?
- Сделайте и объясните вывод расчётной формулы (98).
- При опускании чашки с водой на рис.49,б кольцо на пружине жесткости  $k$  сместилось вниз на расстояние  $\Delta l$ . Чему будет равен при этом краевой угол  $\theta$ ? Как ведет себя этот угол при дальнейшем опускании чашки? В какой момент кольцо отрывается от воды?
- По каким причинам найденная в работе величина коэффициента поверхностного натяжения воды может отличаться от истинной? Почему кольцо надо тщательно протирать перед проведением измерений? Как несмачивание кольца водой повлияет на результат?

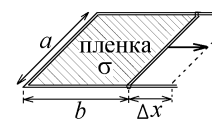


Рис.А

#### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989.- §§ 92, 93, 94.
- Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.7 §2.

## Работа №15. Определение коэффициента вязкости жидкости по методу Стокса

**Цель работы:** ознакомиться с явлением внутреннего трения и определить коэффициент динамической вязкости (коэффициент внутреннего трения) по методу Стокса.

### Теоретическое описание

В работе исследуется падение маленьких металлических шариков, с радиусами  $r$  и плотностью  $\rho_2$  в вязкой жидкости с плотностью  $\rho_1$ . (рис.51). На движущийся шарик с объёмом  $V = 4\pi r^3/3$  действует сила тяжести  $mg = \rho_2 Vg$ , выталкивающая сила Архимеда, равная весу вытесненной жидкости  $F_{\text{арх}} = \rho_1 Vg$ , и сила вязкого трения со стороны жидкости, пропорциональная скорости шарика и направленная против вектора скорости  $\vec{F}_{\text{тр}} = -\text{const} \cdot \vec{v}$ .

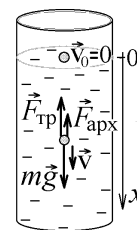


Рис.51

Причина появления вязкого или внутреннего трения в том, что молекулы реальной жидкости взаимодействуют друг с другом и с молекулами движущегося тела. Слои жидкости увлекаются движущимся со скоростью  $v$  телом и вблизи его поверхности имеют ту же скорость  $v$  (рис.52). На удалении скорость жидкости равна нулю.

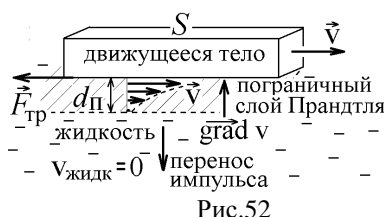


Рис.52

Возле поверхности тела образуется тонкий пограничный слой, в котором скорость слоев жидкости меняется от  $v$  до 0. Этот слой с толщиной  $d_{\text{п}}$  называется пограничным слоем Прандтля. Молекулы разных слоев жидкости внутри слоя Прандтля имеют разный импульс, и при столкновении этих молекул возникает явление переноса импульса. Движущееся тело передаёт свой импульс жидкости, увлекая её за собой с некоторой силой. С такой же по величине силой вязкого трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , направленной противоположно, жидкость будет действовать на тело, тормозя его движение.

Перенос импульса происходит против направления вектора  $\text{grad } v$ , направленного в сторону увеличения модуля скорости  $v$  слоёв жидкости (рис.52). Величина потока импульса (импульс  $\Delta p$ , переносимый за время  $\Delta t$  через поперечную площадь  $S$ ) равна величине силы вязкого трения:  $F_{\text{тр}} = dp/dt = |\eta \text{grad } v \cdot S|$ , где множитель  $\eta$  называется коэффициентом динамической вязкости или просто вязкостью (коэффициентом внутреннего трения) среды. Так как слой Прандтля достаточно узок, то можно считать, что  $|\text{grad } v| \approx (v - 0)/d_{\text{п}} \sim v$  и

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\text{const} \cdot \vec{v}.$$

Величина постоянной в этом выражении зависит от формы и размера движущегося тела и от вязкости жидкости. Для движущегося шарика с радиусом  $r$  сила вязкого трения описывается формулой Стокса:

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r \cdot v. \quad (99)$$

Этой формулой силу вязкого трения можно описать только в случае малых скоростей  $v$ , когда жидкость движется ламинарно, и линии движущейся жидкости нигде не прерываются, плавно огибая препятствие, как показано на рис.53,а, где выбрана система отсчёта, в которой шарик покоится, а жидкость движется со скоростью  $v$ . Заштрихован слой Прандтля.

При возрастании скорости  $v$  происходит срыв пограничного слоя Прандтля, как показано на рис.53,б. За препятствием образуется область, в которой жидкость движется турбулентно, создавая беспорядочные вихри. Сила  $\vec{F}_{\text{сопр}}$ , действующая на движущееся тело при турбулентном обтекании, значительно больше силы вязкого трения и имеет совсем другую природу. Она связана с разностью давлений жидкости с противоположных сторон шарика на рис.53,б. Эта сила называется силой лобового сопротивления и имеет выражение

$$F_{\text{сопр}} = A \frac{\rho v^2}{2} S_{\text{лоб}}, \quad (100)$$

где  $S_{\text{лоб}}$  – площадь лобового сечения,  $\rho$  – плотность жидкости,  $A$  – коэффициент, равный 0,47 для шарика.

Определить характер обтекания можно с помощью критерия Рейнольдса: если безразмерное число Рейнольдса, равное  $Re = \rho v d / \eta$ , где  $d$  – поперечный размер тела (диаметр шарика), меньше некоторого критического значения  $Re_{\text{кр}}$ , то обтекание ламинарно, и действует сила вязкого трения (99). Если же  $Re \geq Re_{\text{кр}}$ , то обтекание турбулентно и использовать формулу (99) нельзя. Для шара  $Re_{\text{кр}} \approx 2,5$ .

По этой причине измерения в данной работе производятся с раствором глицерина, имеющим плотность  $\rho = 1,261 \text{ кг/м}^3$  и большую вязкость  $\eta$ . В таком растворе шарик будет падать медленно, и слои жидкости будут двигаться ламинарно. При падении в воде обтекание шарика было бы турбулентным.

С учетом (99) запишем уравнение движения шарика в вязкой жидкости в проекции на вертикальную ось  $x$  (рис.51):

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_{\text{тр}} - F_{\text{арх}} = \rho_2 Vg - 6\pi\eta r v - \rho_1 Vg. \quad (101)$$

Скорость шарика, а вместе с ней и сила вязкого трения быстро растут, и в вязком глицерине спустя небольшой интервал времени правая часть уравнения (101) становится практически равной нулю. После этого шарик будет двигаться

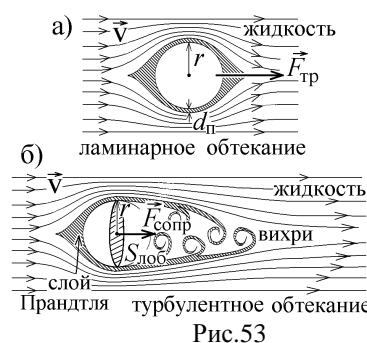


Рис.53

ся с постоянной установившейся скоростью

$$v_{\text{уст}} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{6\pi\eta r} V = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{6\pi\eta r} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{9} \frac{(\rho_2 - \rho_1)gr^2}{\eta}. \quad (102)$$

На небольшом участке от поверхности жидкости до риски скорость успевает установиться. Поэтому установившуюся скорость падения шарика определяют, измеряя секундомером время его падения от нанесенной на сосуд риски до дна сосуда (рис.54):  $v_{\text{уст}} = l/t$ .

По измеренной таким образом скорости, согласно (102), можно определить величину коэффициента динамической вязкости исследуемого раствора глицерина:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{(\rho_2 - \rho_1)gr^2}{v_{\text{уст}}}. \quad (103)$$

Заметим, что вязкость  $\eta$  уменьшается с ростом температуры.

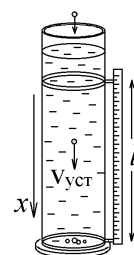


Рис.54

Точнее характер движения шарика можно определить, записав уравнение (101) в виде  $\frac{dv}{dt} = a - bv$ , где

$$a = \frac{(\rho_2 - \rho_1)Vg}{m} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{\rho_2}, \quad b = \frac{6\pi\eta r}{m} = \frac{6\pi\eta r}{\rho_2 V} = \frac{9\eta}{2\rho_2 r^2}.$$

Разделяя переменные, делая замену  $y = a - bv$  и считая, что в начальный момент времени  $t = 0$  скорость шарика равна  $v_0 = 0$ , интегрируем обе части полученного соотношения:

$$\int_0^v \frac{dv}{a - bv} = -\frac{1}{b} \int_a^{a-bv} \frac{dy}{y} = \int_0^t dt. \text{ Получим } -\frac{1}{b} \ln\left(\frac{a-bv}{a}\right) = t, \text{ откуда } \frac{a-bv}{a} = e^{-bt} \text{ и } v = \frac{a}{b}(1 - e^{-bt}).$$

Экспонента быстро уменьшается со временем, и скорость шарика стремится к установившемуся значению  $v_{\text{уст}} = a/b$ . График зависимости скорости от времени показан на рис.55.

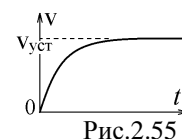


Рис.2.55

#### Порядок выполнения работы

1. Измерить микрометром диаметр  $d$  шарика в миллиметрах (мм) и определить его радиус  $r$  в метрах (м).
2. Осторожно отпустить шарик по центру сосуда непосредственно над поверхностью исследуемой жидкости и определить с помощью секундомера время  $t$  прохождения шарика между металлическими кольцевыми метками на сосудах (см.рис.54). Верхняя метка должна находиться не менее десяти сантиметров от поверхности жидкости.

3. Определить по линейке расстояние  $l$  между метками и вычислить установившуюся скорость шарика  $v_{\text{уст}} = l/t$  (в м/с).

4. По формуле (103) вычислить коэффициент динамической вязкости  $\eta$  в системе СИ (в Па·с). Учесть, что плотность исследуемой жидкости, налитой в сосуд  $\rho_1 = 1,2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> (глицерин), а плотность материала, из которого изготовлены шарики,  $\rho_2 = 11,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> (свинец).

5. Результаты опытов и расчетов занести в таблицу 1.

6. Повторить выполнение пунктов 1- 5 еще для четырех шариков.

Таблица 1.

№	$d$ , мм	$r$ , м	$l$ , м	$t$ , с	$v_{\text{уст}}$ , м/с	$\eta$ , Па·с	$\Delta\eta$ , Па·с	$(\Delta\eta)^2$ , Па <sup>2</sup> ·с <sup>2</sup>
1								
2								
3								
4								
5								

7. Рассчитать среднее значение коэффициента динамической вязкости:  $\langle\eta\rangle = \dots$

8. Определить случайные отклонения  $\Delta\eta_i = \eta_i - \langle\eta\rangle$  для каждого измерения и среднее квадратичное отклонение

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta\eta_i)^2}. \text{ Вычислить погрешность } \Delta\eta \text{ результата измерений: } \Delta\eta = S/\sqrt{n} = \dots$$

9. Записать результат в виде:  $\eta = (\langle\eta\rangle \pm \Delta\eta) \text{ Па·с}$   $\eta = (\dots \pm \dots) \text{ Па·с}$

#### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 15

1. По какой причине возникает вязкость жидкости? Как она проявляется?
2. Как образуется пограничный слой и чем обусловлены его границы?
3. Какое течение жидкости называется ламинарным? Какая сила со стороны жидкости действует при этом на обтекаемое тело? По какой формуле она вычисляется, и от каких параметров зависит?
4. Какая величина называется коэффициентом динамической вязкости?
5. Какая сила называется силой Стокса? В каких случаях она действует и как направлена?

6. Какое течение называется турбулентным? Что при таком движении происходит с пограничным слоем? Какая сила со стороны жидкости действует на движущееся в ней тело при турбулентном обтекании?
7. Сформулируйте критерий Рейнольдса и объясните, как при помощи этого критерия определить характер движения жидкости и действующую со стороны жидкости силу.
8. На рисунке укажите направления всех сил, действующих на падающий в вязкой жидкости шарик, и запишите их выражения. Меняется ли со временем величина этих сил?
9. Запишите уравнение движения (2-й закон Ньютона) для падающего в жидкости шарика и определите с его помощью установившуюся скорость движения шарика.
10. Почему путь  $l$ , пройденный шариком, надо отсчитывать не от поверхности жидкости, а от риски, находящейся ниже?
11. Выведите расчетную формулу (103) для коэффициента динамической вязкости.
12. По измеренной скорости падения одного из шариков и вычисленной вязкости  $\eta$  проверьте выполнение условия  $Re < Re_{кр}$  критерия Рейнольдса. Будет ли в этом случае на шарик действовать сила Стокса?
13. Две свинцовые дробинки 1 и 2 с разными радиусами  $r_1$  и  $r_2 > r_1$  сбросили без начальной скорости в вязкую жидкость. Нарисуйте графики зависимости скоростей этих шариков от времени падения  $t$  и сравните эти графики. Какой шарик быстрее упадет на дно сосуда и почему?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989.- §§ 78,79.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.5 §5,6.

## Работа №16. Определение длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха

**Цель работы:** ознакомиться с одним из методов определения микропараметров (средней длины свободного пробега и эффективного диаметра молекул воздуха) через термодинамические параметры, исследовать процесс течения газа по капилляру.

### Теоретическое описание

При столкновении молекул газа сближаются их электронные оболочки, и силы кулоновского взаимодействия расталкивают молекулы (рис.56,а). Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром молекулы**  $d$ . Круг радиуса  $d$  с центром в молекуле имеет площадь  $\sigma = \pi d^2$ , которую называют **эффективным сечением молекулы**. Попадая в пределы этого круга, другие молекулы рассеиваются, отклоняются на молекуле-мишени (рис.56,б).

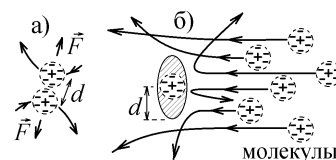


Рис.56

С ростом температуры растёт кинетическая энергия сталкивающихся молекул, пропорциональная температуре газа  $E_{кин} \sim T$ . Молекулы могут сблизиться на меньшее расстояние  $d$ . Но потенциальная энергия кулоновского отталкивания возрастает при сближении молекул настолько быстро (рис.57), что можно считать, что эффективный диаметр молекул практически не зависит от температуры:  $d = const$ .

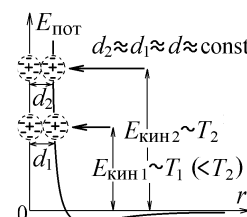


Рис.57

Среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя последовательными соударениями с другими молекулами газа называется **средней длиной свободного пробега молекулы**  $\lambda$ . Эта величина связана с концентрацией молекул газа  $n$  (числом молекул в единице объёма) соотношением

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}. \quad (104)$$

Величина  $\lambda$  определяется в данной работе по скорости втекания газа (воздуха) из атмосферы в сосуд через капилляр радиуса  $r$  (рис.58). Из-за микроскопической шероховатости стенок капилляра происходит **адгезия** (прилипание) молекул газа к поверхности стенок. Слой газа, непосредственно соприкасающийся со стенкой капилляра, неподвижен, а в центре капилляра газ движется с максимальной скоростью  $v_{max}$ . Разность скоростей слоёв газа приводит к процессу переноса импульса от центральной оси капилляра к его стенкам. Величина потока импульса, равная импульсу, переносимому молекулами газа за единицу времени через поперечную площадь  $S$ , в соответствии со вторым законом Ньютона равна величине **силы вязкого** или **внутреннего трения**

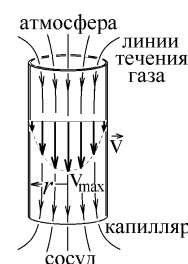


Рис.58

$$J_p = \frac{dp}{dt} = F_{тр} = \eta |\text{grad } v| S, \quad (105)$$

где коэффициент  $\eta$  называется **коэффициентом динамической вязкости** или просто **вязкостью** газа. Эта сила, действуя на газ, направлена против скорости газа в капилляре и замедляет его движение по капилляру.

Лабораторная установка показана на рис.59. В пробке, плотно закрывающей сосуд с водой, находится капилляр длины  $l$ , соединяющий воздух в сосуде с атмосферой. Внизу находится трубка, плотно закрытая краном "К", через которую вода может вытекать из сосуда. Первоначально давление  $p_0$  воздуха в сосуде равно давлению  $p_{атм}$  атмосферы снаружи. Давление жидкости внутри трубки, в сечении крана "К", складывается из давления воздуха в сосуде и гидростатического давления столба воды, имеющей плотность  $\rho_{воды}$  и высоту  $h$ , отсчитываемую от поверхности воды до крана (рис.59):  $p_0 + \rho_{воды}gh > p_{атм}$ . Поэтому если кран "К" открыть, то вода начинает под давлением вытекать из сосуда по трубке сплошной струей.

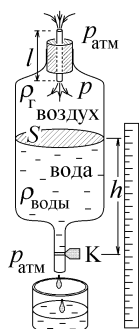


Рис.59

Объём воды в сосуде уменьшается, но вытекающий по капилляру воздух не успевает заполнить этот объём из-за малого радиуса капилляра. Давление  $p$  воздуха внутри сосуда уменьшается, и когда давление воды в сечении крана сравняется с атмосферным давлением снаружи,

$$p + \rho_{\text{воды}}gh = p_{\text{атм}}, \quad (106)$$

вода начнёт вытекать из трубки отдельными каплями. В этот момент надо измерить начальное значение высоты  $h_1$ .

Чтобы давление (106) не изменялось, объём капель вытекшей воды должен быть равен объёму воздуха, протекающего по капилляру.

Для вычисления этого объёма, выделим в капилляре воздушный цилиндр длины  $l$  с радиусом  $x$  и поперечным сечением  $S' = \pi x^2$  (рис.60). Согласно (105) на его боковую поверхность  $S_{\text{бок}} = 2\pi xl$  действует тормозящая сила вязкого трения:  $F_{\text{тр}} = -\eta \frac{dv}{dx} \cdot S_{\text{бок}}$ , где  $\frac{dv}{dx} < 0$ .

При установившемся течении центр масс такого воздушного цилиндра движется с постоянной скоростью, и сила  $F_{\text{тр}}$  уравнивается разностью сил давления на основания цилиндра:  $F_{\text{тр}} = (p_{\text{атм}} - p)S'$ . Отсюда, с учетом (105) и

$$(106), \text{ получаем дифференциальное уравнение } 2\eta l \frac{dv}{dx} = -\rho_{\text{воды}}gh \cdot x.$$

Разделяя в нем переменные, интегрируем, учитывая, что у стенок капилляра, при  $x = r$ , скорость движения воздуха  $v = 0$ :

$$\int_0^v dv = -\frac{\rho_{\text{воды}}gh}{2\eta l} \int_r^x x dx, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{\rho_{\text{воды}}gh}{4\eta l} (r^2 - x^2) \quad (107)$$

(скорости слоёв воздуха в капилляре меняются по параболическому закону). Разобьём теперь поперечное сечение капилляра на бесконечно узкие кольца радиуса  $x$  с толщиной  $dx$  и с площадью  $dS' = 2\pi x dx$ . За время  $\tau$  через эту площадь со скоростью  $v$  протечет объём газа  $dV = dS' \cdot v\tau$ , а объём воздуха, протекающего за время  $\tau$  через все сечение капилляра будет равен

$$V = \int_0^r v\tau \cdot 2\pi x dx = \frac{\pi \rho_{\text{воды}}gh\tau}{2\eta l} \int_0^r (r^2 - x^2) x dx = \frac{\pi \rho_{\text{воды}}ghr^4}{8\eta l} \tau \quad (108)$$

(эта формула называется формулой Пуазейля).

При плотно закрытой пробке капли вытекают из сосуда очень медленно. За время  $\tau$ , измеряемое секундомером, уровень воды в сосуде с площадью сечения  $S$  на рис.59 понизится незначительно, от уровня  $h_1$  до  $h_2$ , где  $h_1 - h_2 \ll h$ . Поэтому в формулу (108) можно подставить среднее значение  $h = (h_1 + h_2)/2$ . Приравняв объём вытекшей воды  $V = (h_1 - h_2)S$  и объём воздуха, попавшего в сосуд в соответствии с формулой Пуазейля (108), найдем расчётную формулу для коэффициента вязкости воздуха:

$$\eta = \frac{\pi r^4 \rho_{\text{воды}}g(h_1 + h_2)\tau}{16lS(h_1 - h_2)}. \quad (109)$$

Заметим, что этот результат справедлив только при ламинарном течении воздуха по капилляру, когда слои газа движутся вдоль нигде не прерывающихся и плавно огибающих препятствия линий, как показано на рис.58. Проверить, выполнен ли ламинарный характер течения, можно при помощи критерия Рейнольдса: безразмерный параметр Рейнольдса  $Re$  не должен превышать критического значения  $Re_{\text{кр}}$ . Если  $Re \geq Re_{\text{кр}}$ , то возникают турбулентные вихри (рис.53,б), и полученные формулы (108) и (109) не справедливы.

В данной работе в случае течения газа (воздуха) с плотностью  $\rho_{\text{газа}}$  по цилиндрическому капилляру, параметр

$$\text{Рейнольдса вычисляется по формуле } Re = \frac{\rho_{\text{газа}}\rho_{\text{воды}}g(h_1 + h_2)r^3}{8\eta^2 l}, \text{ а } Re_{\text{кр}} = 2000 - 20000. \quad (110)$$

Для вычисления средней длины свободного пробега  $\lambda$  используем формулу для вязкости газа, получаемую при анализе явлений переноса:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \rho_{\text{газа}} \langle v \rangle. \quad (111)$$

Подставляя в (111) формулу для средней скорости молекул газа  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$  и выражение для плотности газа

$\rho_{\text{газа}} = \frac{m_{\text{газа}}}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ , полученное из уравнения состояния, находим следующую расчётную формулу для  $\lambda$ :

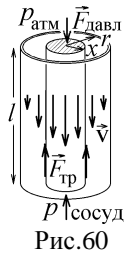
$$\lambda = \frac{3\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi RT}{8\mu}}. \quad (112)$$

Другая форма записи уравнения состояния газа позволяет выразить концентрацию его молекул как

$$n = p/kT, \quad (113)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Из формул (104) и (113) находим расчётную формулу для эффективного диаметра молекулы:

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2}\pi\lambda p}}. \quad (114)$$



### Порядок выполнения работы

1. Открыть кран К. Дождавшись, когда вода начнет вытекать каплями, включить секундомер и одновременно заметить положение уровня воды  $h_1$  в сосуде по закрепленной сбоку линейке (см.рис.59).
2. Когда уровень воды в сосуде, **вытекающей через нижнюю трубку отдельными каплями**, уменьшится приблизительно на 1 см, одновременно закрыть кран и остановить секундомер.
3. Записать время вытекания  $\tau$  и новый уровень  $h_2$  воды. Расстояния  $h_1$  и  $h_2$  должны быть измерены от поверхности жидкости до крана К (рис.61).
4. Измерить термометром температуру  $t$  °С, найти термодинамическую температуру  $T = (t^\circ + 273)$ , К, барометром измерить атмосферное давление  $p$ .

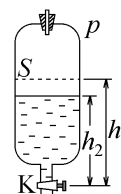


Рис.61

5. Вычислить коэффициент динамической вязкости воздуха  $\eta$  по формуле (109).
6. Вычислить среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  молекул воздуха по формуле (112).
7. Вычислить эффективный диаметр молекул воздуха  $d$  по формуле (114).

Во всех этих формулах  $r$  – радиус капилляра,  $l$  – длина капилляра,  $S$  – площадь сечения сосуда с водой. Их величины приведены на установке.  $\rho_{\text{воды}} = 1000 \text{ кг/м}^3$  – плотность воды,  $R = 8,31 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$  – универсальная газовая постоянная,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$  – постоянная Больцмана,  $\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$  – молярная масса воздуха,  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

8. Данные измерений и вычислений занести в таблицу:

$h_1$ , м	$h_2$ , м	$\tau$ , с	$T$ , К	$p$ , Па	$\eta$ , Па·с	$\lambda$ , м	$d$ , м

### Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе № 16

1. Какие величины называются эффективным диаметром  $d$  и средней длиной свободного пробега  $\lambda$  молекулы? Как эти величины зависят от температуры и давления?
2. Газ совершает изобарический (или изотермический) процесс, при котором его температура  $T$  (или давление  $p$ ) увеличиваются в два раза. Что при этом происходит с величинами  $d$  и  $\lambda$ ?
3. Какая величина называется коэффициентом динамической вязкости газа  $\eta$ ? Как величина  $\eta_{\text{газа}}$  зависит от давления  $p$  и температуры  $T$ ?
4. Какие явления называются явлениями переноса? Приведите примеры таких явлений.
4. Чем вызвано появление вязкого (внутреннего) трения? Как направлена и чему равна сила вязкого трения?
5. Объясните вывод формулы Пуазейля (108). При каком условии она справедлива, и чем является величина  $V$  в этой формуле?
6. При открывании крана “К” на установке (рис.59) вода сначала вытекает из сосуда струей, а потом – отдельными каплями. Почему? Чему равно при этом давление воздуха внутри сосуда?
7. Через капилляр в сосуд втекает воздух с объемом  $V_{\text{возд}} = 1 \text{ см}^3$ . Сколько капель воды выльется при этом из сосуда, если каждую каплю можно считать шариком с радиусом 1 мм?
8. Сделайте и объясните вывод расчетных формул (109), (112) и (113) для величин  $\eta$ ,  $\lambda$  и  $d$ .
9. Сравните вычисленные величины  $\eta$ ,  $\lambda$  и  $d$  для воздуха с экспериментальными данными для этих величин при температуре 20°C, которые можно найти в Интернете. Чем могут быть вызваны отклонения от правильных значений?
10. Какое течение газа называется ламинарным? Как проверить условие ламинарности с помощью критерия Рейнольдса? Сделайте эту проверку, проведя вычисления с помощью формулы (110).

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика - М.: Наука, 1989.- §§ 62, 78-80.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика,- изд. ТулГУ. 2008, гл.5 §1,3,5,6.

### Работа №21. Исследование электрического поля проводника с током

**Цель работы:** изучение свойств электрических полей в проводящей жидкости, получение графического изображения поля с помощью эквипотенциальных поверхностей и силовых линий.

#### Теоретическое описание

Пространство в кювете между двумя металлическими электродами (анодом и катодом) залито слабопроводящей жидкостью с малой удельной проводимостью  $\sigma$ . На электроды подано напряжение  $U = \phi_a - \phi_k = \mathcal{E} - Ir$ , и между ними возникает электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$  (рис.62). Линии напряженности  $\vec{E}$  (силовые линии поля) начинаются на положительно заряженном электроде (аноде) и заканчиваются на отрицательно заряженном катоде. Вдоль них, в жидкости протекает, электрический ток с плотностью  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Жидкость между проводниками является однородным проводником (в нём нет источников сторонней ЭДС). В таком случае поле  $\vec{E}$  является электростатическим потенциальным полем, создаваемым разностью потенциалов  $\Delta\phi$ .

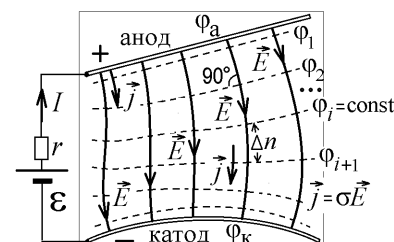


Рис.62

Напомним, что разность потенциалов определяет изменение потенциальной энергии заряда  $q$ , находящегося в электрическом поле:  $\Delta W = q\Delta\phi$ . Сила, действующая на положительный заряд единичной величины, будет напряженностью поля  $\vec{E} = \vec{F}/q = -\text{grad } W/q$ , а энергия такого заряда – потенциалом электрического поля  $\phi = W/q$ . Связь напряженности и потенциала  $\boxed{\vec{E} = -\text{grad } \phi}$ . Градиент любого скалярного потенциала  $\phi$  вычисляется по формуле  $\text{grad } \phi \equiv \vec{\nabla}\phi = \vec{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}$ . Проекция вектора напряженности  $E_x = -\partial\phi/\partial x$ ;  $E_y = -\partial\phi/\partial y$ ;  $E_z = -\partial\phi/\partial z$ . Величина напряженности  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$ .

Потенциальным называется поле, для которого в каждой точке однозначно определена величина потенциала  $\phi$ , и для которого можно определить потенциальную энергию  $E_{\text{пот}}$ . Силы, вызываемые такими полями консервативны, т.е. могут быть определены соотношением  $\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{пот}}$ . Условие потенциальности электростатического поля выражается теоремой о циркуляции: циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю:  $\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  (рис.63).



Рис.63

Линии  $\vec{E}$  потенциального электростатического поля начинаются и заканчиваются на электрических зарядах, или уходят в бесконечность. Они не могут образовать замкнутую линию.

Поверхности, во всех точках которых потенциал одинаков,  $\phi = \text{const}$ , называются эквипотенциальными поверхностями (на рис.62 они показаны штриховыми линиями). Линии  $\vec{E}$  электростатического поля обязательно перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, и, как видно из рис.62, их надо рисовать изогнутыми, составляющими угол  $90^\circ$  с каждой поверхностью  $\phi = \text{const}$ . Вектор  $\text{grad } \phi$  направлен в сторону увеличения потенциала, а линии  $\vec{E}$  – в сторону уменьшения потенциала (рис.64). Чем гуще (плотнее) расположены линии  $\vec{E}$ , тем больше величина напряженности  $E$ .

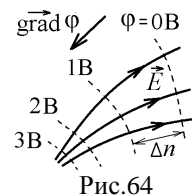


Рис.64

Величину напряженности можно приближенно вычислить по формуле

$$E = \Delta\phi / \Delta n, \quad (115)$$

где  $\Delta\phi$  – разность потенциалов между двумя близко расположенными эквипотенциальными поверхностями, а  $\Delta n$  – расстояние между ними по нормали (рис.64). Этот отрезок совпадает с отрезком силовой линии (на рис.62  $\Delta\phi = \phi_{i+1} - \phi_i$ ). Величина  $E$  различна в разных точках силовой линии и увеличивается, если линии  $\vec{E}$  сближаются друг к другу.

#### Порядок выполнения работы

1. Перерисовать с установки **в натуральную величину** координатные линейки и электроды на листе миллиметровой бумаги, который в виде графика, который прилагается к отчету о выполнении работы.

2. Определить потенциал анода  $\phi_A$ , и записать его величину.

3. Найти эквипотенциальную поверхность со значением  $\phi_1 = 0,8\phi_A$ . Для этого следует поместить острие зонда в плоский сосуд с жидкостью над одной из вертикальных линий у миллиметровой бумаги, расположенной под прозрачным дном сосуда, и, перемещая его вдоль этой линии, найти координаты точки, в которой потенциал имеет значение  $\phi_1$ . Отметить эту точку на Вашем графике (рис.65). Помещая зонд последовательно над второй, над третьей и т.д. вертикальными линиями миллиметровой бумаги и перемещая зонд вдоль них, найти точки с тем же потенциалом  $\phi_1$ .

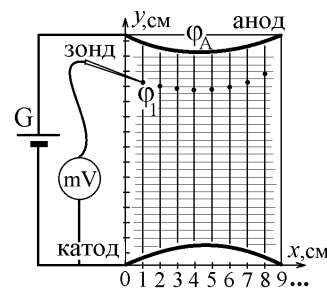


Рис.65

4. Соединив на своем рисунке точки с потенциалом  $\phi_1$ , вы получите первую из искомых эквипотенциальных поверхностей (на плоском листе она будет эквипотенциальной линией).

5. Аналогичные измерения проделать для других значений потенциалов, например,  $\phi_2 = 0,6\phi_A$ ,  $\phi_3 = 0,5\phi_A$ ,  $\phi_4 = 0,4\phi_A$ ,  $\phi_5 = 0,2\phi_A$ . Желательно выбрать их так, чтобы расстояния между эквипотенциальными линиями были приблизительно одинаковыми. На графике должно быть нарисовано не менее пяти эквипотенциальных линий.

6. Аккуратно, соблюдая взаимную ортогональность, нарисовать на бумаге систему силовых линий (не менее пяти), указав стрелками их направление, как показано на рис.62.

7. Вычислить по формуле (115) значения напряженности  $E$  во всех точках пересечения одной из силовой линии с эквипотенциальной поверхностью.

#### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 21

1. Какие поля называются потенциальными? Почему потенциально электростатическое поле и как записать условие его потенциальности?
2. Каков физический смысл потенциала? Разности потенциалов?
3. Как определяется и какой физический смысл имеет вектор напряженности  $\vec{E}$  электростатического поля? Как он связан с потенциалом?
4. Как вычислить градиент потенциала, его направление и его величину?

5. Найдите величину и направление вектора  $\vec{E}$  в точке на плоскости  $xOy$ , в которой потенциал имеет выражение  $\varphi = Ax^n y^m$ , где  $A, n, m$  – целые числа (по указанию преподавателя).
6. Что такое эквипотенциальные поверхности? Какова взаимная ориентация плотности тока  $\vec{j}$ , текущего по электролиту, вектора  $\vec{E}$  и таких поверхностей?
7. Почему все силовые линии (линии  $\vec{E}$ ) электростатического поля в выполненной работе обычно не являются прямыми линиями?
8. Нарисуйте на листе бумаги картину из нескольких кривых линий, являющихся эквипотенциальными поверхностями, и объясните, как по этой картине рассчитать величину и направление вектора  $\vec{E}$ .
9. Три эквипотенциальные поверхности имеют на плоскости  $xOy$  вид концентрических окружностей с центром в начале координат 0 (рис.А). Чему равна величина напряжённости электрического поля в точке с координатами  $x = y = 3$  см?
10. Нарисуйте картину силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для двух близко расположенных точечных зарядов, имеющих одинаковую величину и одинаковый (разный) знак.
11. Вблизи плоской границы металла, в воздухе, эквипотенциальные поверхности электрического поля искривлены и имеют величину потенциала, указанную на рис. Б. Укажите направление электрической силы, действующей на электрон, находящийся в точке 0.

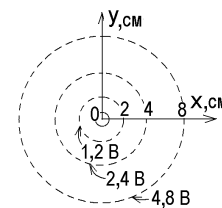


Рис.А

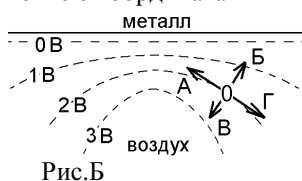


Рис.Б

### Литература

- Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 5, 7, 10-12.
- Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.І §§ 1,2,6,7.

## Работа №22. Измерение сопротивлений проводников мостовыми схемами

**Цель работы:** ознакомление с принципами работы мостовых схем, определение удельного сопротивления с помощью моста Уитстона, определение сопротивления гальванометра с помощью моста Томсона.

### Теоретическое описание

Электрическая схема установки приведена на рис.66. Измерение удельного сопротивления участка провода длиной  $l_1$  с диаметром  $d$  не требует использования мостовой схемы. В этом случае ключи  $S1$  и  $S2$  разомкнуты, и провод напрямую подсоединен к источнику постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$  (рис.67).

Измеряя ток  $I$ , текущий по участку провода  $l_1$ , длину которого меняют движком кронштейна  $K$ , а также падение напряжения  $U$  на нем (его можно менять с помощью движка реостата  $R$ ), находим сопротивление провода

$$R_2 = R_{\text{пр}} = U/I$$

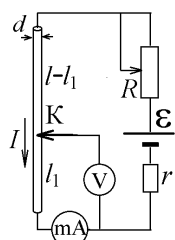


Рис.67

(закон Ома). Это сопротивление связано с длиной провода  $l_1$  и с площадью поперечного сечения  $S = \pi d^2/4$ :  $R_{\text{пр}} = \rho l_1/S$ , откуда находим величину удельного сопротивления материала провода  $\rho = US/I l_1$ .

Механизм возникновения электрического сопротивления можно объяснить качественно: свободные электроны в проводнике ускоряются электрическим полем, создающим ток, но не могут приобрести большую скорость, так как рассеиваются в стороны при взаимодействии с электрическими полями непрерывно колеблющихся атомов проводника (рис.68). Как видно, электроны движутся хаотически и смещаются против электрического поля  $\vec{E}$  с очень небольшой усредненной дрейфовой скоростью  $u < 1$  мм/с, создавая электрический ток с плотностью  $\vec{j} = -en\vec{u} = \vec{E}/\rho$ . Правильно такой процесс уравнениями классической физики описать нельзя. Рассеяние электронов на тепловых колебаниях атомов решетки подчиняется законам квантовой физики. Можно сказать, что величина удельного сопротивления  $\rho$  зависит от концентрации  $n$  свободных электронов и атомов, от конфигурации их электронных облаков, от ориентации и особенностей тепловых колебаний атомов среды, от температуры. Чем сильнее рассеяние свободных электронов, тем меньше их дрейфовая скорость  $\vec{u}$  направленного движения, тем больше электрическое сопротивление и меньше величина тока  $\vec{j}$ .

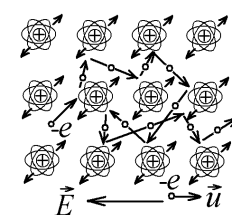


Рис.68

При замыкании ключа  $S2$  схема на рис.66 образует мост Уитстона (рис.69). В данном случае правила Кирхгофа для разветвленной цепи имеют вид:

Здесь  $R_d$  – сопротивление диагонали моста  $AB$ ,  $I_d$  – ток, текущий по этой диагонали через ключ  $S1$ . Направления токов указаны на рис.69.

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_3 = I_2 + I_4; \\ I_d &= I_2 - I_1 = I_3 - I_4; \\ I_3 R_0 + I_d R_d - I_1 R_1 &= 0; \\ I_4 R_x - I_2 R_2 - I_d R_d &= 0; \\ I(R + r) + I_1 R_1 + I_2 R_2 &= \mathcal{E}. \end{aligned}$$

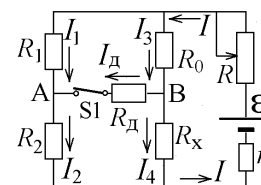


Рис.69





9. Рассчитайте среднее значение удельного сопротивления  $\langle \rho \rangle$ .

10. Определите случайные отклонения  $\Delta \rho_i = \rho_i - \langle \rho \rangle$  для каждого измерения  $i = 1, 2, 3$  и среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta \rho_i)^2}$ . Вычислите погрешность  $\Delta \rho$  результата измерений:  $\Delta \rho = S/\sqrt{3}$ , а также относительную погрешность  $E = \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} \cdot 100\%$ . Результаты вычислений занести в таблицу 1.

11. Записать результат в виде:  $\rho = (\langle \rho \rangle \pm \Delta \rho)$  Ом·м:  $\rho = (\dots \pm \dots)$  Ом·м

#### Определение сопротивления гальванометра с помощью моста Томсона.

1. Схема моста Томсона показана на рис.70. Для включения такой схемы необходимо отжать клавишу S2 (положение – мост)

2. Переключатель S1, разрывающий диагональ моста, поставьте в нижнее положение; отожмите клавишу S3, при этом в плечо моста подключается первый резистор  $R_{01}$ .

3. Регулятором R (рис.71) установите стрелку вольтметра так, чтобы она не зашкаливала.

4. Поставьте переключатель S1 в верхнее положение, при этом показание вольтметра изменится; передвигая по проводу подвижный кронштейн 5 (рис.71), добейтесь первоначального показания вольтметра (как и при нижнем положении переключателя S1), т.е. уравновесьте мост.

5. Проверьте равновесие моста переводом переключателя S1 в нижнее и вновь в верхнее положение. Стрелка вольтметра при этом не должна изменять своего положения.

6. Запишите значение сопротивления подключенного резистора  $R_{01}$  и длину проводника  $l_1$  от основания до риски на подвижном кронштейне в таблицу 2.

7. Верните переключатель S1 в нижнее положение, разрывая диагональ моста. Нажмите клавишу S3, тем самым подключая в плечо моста второй резистор  $R_{02}$ . Переведите переключатель S1 в верхнее положение, замыкая диагональ моста. Показание вольтметра изменится. Снова уравновесьте мост передвижением подвижного кронштейна. Проверьте равновесие моста переводом переключателя S1 в нижнее и вновь в верхнее положение. Стрелка вольтметра при этом не должна изменять своего положения.

8. Запишите значение сопротивления подключенного резистора  $R_{02}$  и новую длину проводника  $l_1$  от основания до риски на подвижном кронштейне в таблицу 2.

9. Повторите пункты 2–8 при двух других значениях напряжения, изменяя его регулятором R.

10. Сопротивление гальванометра вычислите по формуле  $R_x = R_0 \frac{l_1}{l - l_1}$ , где  $l = 51$  см – длина всего провода.

9. Рассчитайте среднее значение сопротивления  $\langle R_x \rangle$ .

11. Определить случайные отклонения  $\Delta R_{xi} = R_{xi} - \langle R_x \rangle$  для каждого измерения  $i = 1 - 6$  и среднее квадратичное отклонение  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta R_{xi})^2}$ . Вычислите погрешность  $\Delta R_x$  результата измерений:  $\Delta R_x = S/\sqrt{6}$ , а также относительную погрешность  $E = \frac{\Delta R_x}{\langle R_x \rangle} \cdot 100\%$ . Результаты вычислений занести в таблицу 1.

11. Записать результат в виде:  $R_x = (\langle R_x \rangle \pm \Delta R_x)$  Ом·м:  $R_x = (\dots \pm \dots)$  Ом·м

Измерения и окончательный результат занесите в таблицу 2

Таблица 2.

№ п/п	$R_0$ , Ом	$l_1$ , см	$R_{xi}$ , Ом	$\langle R_x \rangle$ , Ом	$\Delta R_{xi}$ , Ом	$\Delta R_x$ , Ом	E, %

#### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 22

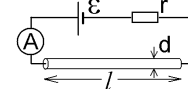
1. Объясните механизм появления электрического тока в металлах. Как движутся свободные электроны в металлическом проводнике, подключенном к источнику напряжения? Почему мала скорость их направленного движения?

2. По какой причине возникает электрическое сопротивление? Какую величину называют удельным сопротивлением? От чего она зависит?

3. Как вычислить сопротивление однородного участка проводника, зная его размеры?

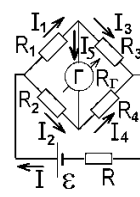
4. Сформулируйте закон Ома для однородного участка проводника в обычной и в локальной форме.

5. Проволока подключена к источнику постоянной ЭДС  $\varepsilon$  с внутренним сопротивлением  $r$ . Длину  $l$  проволоки увеличили в 4 раза. Как надо изменить, диаметр  $d$  проволоки, чтобы текущий по проволоке ток не изменился?



6. Сформулируйте правила Кирхгофа. Объясните, как ими пользоваться.

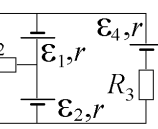
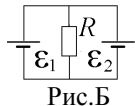
7. Запишите систему уравнений правил Кирхгофа для определения токов в неуровновешенной мостовой схеме, изображенной на рис.А.



8. Сделайте вывод условия равновесия мостовой схемы.

9. Чем отличаются мостовые схемы Уитстона и Томсона? В каких случаях они применяются? Можно ли использовать схему Томсона вместо схемы Уитстона?

10. Определите величину и направление тока, протекающего через сопротивление  $R$  на рис.Б, где  $\varepsilon_1 = 10$  В,  $\varepsilon_2 = 5$  В,  $R = 10$  Ом, а внутренние сопротивления обоих источников ЭДС равны  $r = 1$  Ом.





## 5. Результаты занесите в таблицу 2.

Таблица 2.

$t_3, \text{с}$	$t_x, \text{с}$	$T_3, \text{с}$	$T_x, \text{с}$	$C_3, \text{мкФ}$	$C_x, \text{мкФ}$

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 23

1. Первоначально конденсатор с ёмкостью  $C$  в изображенной на рис.А цепи был не заряжен. Ключ  $K$  замкнули, подсоединяя конденсатор к источнику постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$  через сопротивление  $R$ . Используя правило Кирхгофа, запишите уравнение зарядки конденсатора, решите его, находя зависимость напряжения на обкладках конденсатора  $U_C$  от времени  $t$ . Нарисуйте график зависимости  $U_C = U_C(t)$ .
2. Конденсатор с ёмкостью  $C$  в изображенной на рис.Б цепи имел заряд  $q_0$ . Ключ  $K$  замкнули. Используя правило Кирхгофа, вычислите закон изменения заряда на конденсаторе от времени и нарисуйте график зависимости  $q = q(t)$ .
3. Какую роль играет в данной работе заполненная неоном лампочка? Почему в момент зажигания она начинает светиться? Как изменяются параметры цепи в момент зажигания и в момент гашения лампочки? Как процесс ионизации газа в лампочке влияет на протекающий через неё ток? Как меняется сопротивление лампы при её зажигании и гашении?
4. Почему при замыкании ключа  $K$  на рис.72 лампочка начинает мигать? Что при этом происходит с напряжением на обкладках конденсатора? Какая величина испытывает релаксационные колебания, и по какой причине?
5. Почему напряжение зажигания  $U_3$  газонаполненной лампы больше, чем напряжение её гашения  $U_Г$ ? Почему при обратном соотношении  $U_Г > U_3$  релаксационные колебания возникнуть не могут?
6. В электрической цепи для изучения релаксационных колебаний конденсатор ёмкостью  $C_1 = 3600 \text{ пФ}$  заменяют конденсатором с ёмкостью  $C_2 = 900 \text{ пФ}$ . Что произойдет при этом с периодом релаксационных колебаний?
7. Сделайте вывод расчетной формулы  $C_x = C_3 T_x / T_3$ .

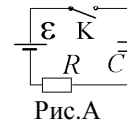


Рис.А

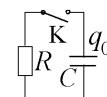


Рис.Б

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 24,25, 33, 35, 36, 84-88.
2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.4 §§1,2, гл.5 §§1,5-7.

**Работа №24. Термоэлектрические явления**

Цель работы: ознакомление с термоэлектрическими явлениями, градуировка термопары и определение удельной термоэлектродвижущей силы.

Теоретическое описание

Исследуемая в работе термопара – это замкнутая цепь из проводников, изготовленных из **разных** металлов (рис.77). Если контакты (спаи) проводников поддерживать при разных температурах  $T_1 \neq T_2$ , то в цепи возникает термоЭДС  $\mathcal{E}_{\text{термо}}$  и протекает термоэлектрический ток  $\vec{j}$ . Это – эффект Зеебека. Величина термоЭДС пропорциональна разности температур:  $\mathcal{E}_{\text{термо}} = \alpha(T)(T_1 - T_2)$ , где  $\alpha(T)$  – коэффициент, называемый удельной термоЭДС – это величина термоЭДС при разности температур двух спаев в  $\Delta T = 1 \text{ К}$ .

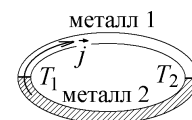


Рис.77

Вывод расчетной формулы. Получить зависимость  $\mathcal{E}_{\text{термо}}$  от разности температур  $T_1 - T_2$  достаточно просто, если считать газ свободных электронов в металле идеальным газом. Весь перешедший из одного металла в другой заряд, т.е. перешедшие электроны могут распределиться только по поверхности металла. Внутри объема плотность заряда остается равной нулю и концентрации электронов  $n_1$  и  $n_2$  не меняются. При появлении термоэлектрического тока через спай I, нагретый до температуры  $T_1$  за какое-то время переносится заряд  $-eN$ , т.е.  $N$  электронов, занимавших в металле 1 объем  $V_1 = N/n_1$  переходят в металл 2, где занимают объем  $V_2 = N/n_2$  (рис.78). Происходит изотермическое изменение объема электронного газа. Работа, совершаемая над газом при изотермическом процессе  $A_1 = \nu RT_1 \ln(V_2/V_1) = Nk_B T_1 \ln(n_1/n_2)$ , где  $k_B$  – постоянная Больцмана. При переходе такого же числа электронов через второй спай II при температуре  $T_2$  будет совершена работа  $A_2 = Nk_B T_2 \ln(n_2/n_1)$ . Суммарная работа над электронным газом будет работой термоЭДС (по определению ЭДС  $\mathcal{E}$  равна работе, совершаемой над положительным зарядом единичной величины):  $eN\mathcal{E}_{\text{термо}} = A_1 + A_2 = Nk_B(T_1 - T_2) \ln(n_1/n_2)$ . Отсюда



Рис.78

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \frac{k_B}{e} \ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \cdot (T_1 - T_2) = \alpha(T) \cdot (T_1 - T_2), \text{ где } e - \text{ величина заряда электрона.}$$

В действительности полученная формула дает лишь **качественное** объяснение зависимости термоЭДС от температур спаев термопары. Электронный газ в металле не является классическим газом, подчиняющимся распределению Максвелла-Больцмана. Правильное объяснение контактных термоэлектрических явлений может быть получено только в квантовой теории.

На поверхности любого металла образуется двойной электрический слой, связанный с тем, что распределение плотности свободных электронов не совпадает с распределением плотности положительных ионов. Толщина этого слоя  $d$  не превышает нескольких межатомных расстояний, и внутри слоя возникает электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}_{\text{сл}}$ , препятствующее вылету свободных электронов с зарядом  $-e$  из металла (рис.79). Чтобы электрон хотя бы с нулевой скоростью покинул металл, ему надо преодолеть запирающее поле, совершив работу  $A_{\text{вых}} = eE_{\text{сл}} \cdot d$ . Такая минимальная энергия, которую надо сообщить электрону, для вылета, называется работой выхода электрона из металла. Энергия электрона  $E_{\text{м}}$  внутри металла меньше энергии электрона  $E_{\text{в}}$  вне металла, в вакууме, на величину работы выхода:  $A_{\text{вых}} = E_{\text{в}} - E_{\text{м}}$ .

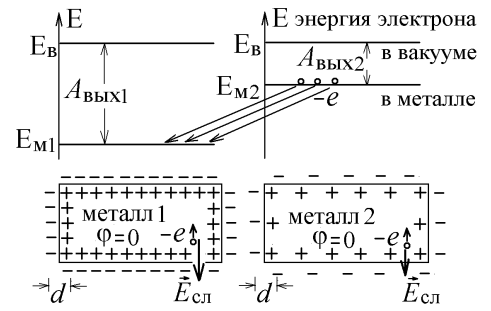


Рис.79

Концентрации  $n_1$  и  $n_2$  электронов и величины работы выхода  $A_1$  и  $A_2$  в разных металлах различны, причем оба металла на рис.79 не заряжены и имеют одинаковый потенциал. Если их соединить (спаять), то энергии электронного газа в общем проводнике выравниваются из-за того, что электроны будут переходить из металла с меньшей работой выхода, где их энергия больше, в металл с большей работой выхода, заряжая металл с большей работой выхода отрицательно, а металл с меньшей работой выхода — положительно (рис.2.79). Электроны переносят заряд, который распределяется по поверхности металлов, в том числе по поверхности их соприкосновения (спая, рис.2.80). Внутри объема плотность заряда остается равной нулю, и концентрации электронов  $n_1$  и  $n_2$  не меняются. Если первоначально потенциал обоих металлов был равен нулю, то теперь они приобретают потенциалы  $\phi_1 < \phi_2$  и между ними создается контактная разность потенциалов, пропорциональная разности работ выхода:

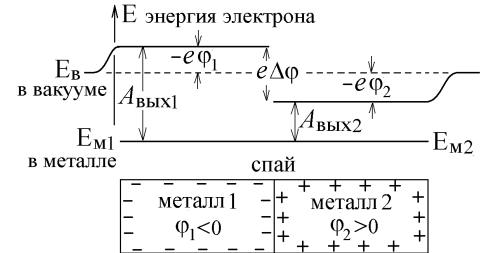


Рис.80

$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = (A_{\text{вых}1} - A_{\text{вых}2})/e$ , которую называют внешней контактной разностью потенциалов.

Если два спая термопары имеют одинаковую температуру, то в замкнутой цепи контактные разности потенциалов, играющие роль ЭДС, уравновешивают друг друга, и ток в термопаре отсутствует (рис.81,а). Если температуры спаев разные, то имеется три причины возникновения термоЭДС.

1) Величина работы выхода слабо зависит от температуры металла. Величина разности работ выхода растет с ростом температуры, и контактные разности потенциалов спаев, нагретых до разных температур, различны (рис.81,б). В цепи возникнет эффективная ЭДС  $\varepsilon = \Delta\phi_1(T_1) - \Delta\phi_2(T_2)$ , пропорциональная разности температур спаев и создающая ток проводимости  $\vec{j}_{\text{пров}}$ .

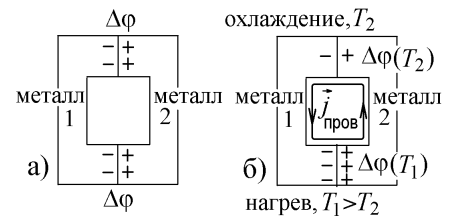


Рис.81

2) При нагревании металла возрастает концентрация свободных электронов, способных направленно перемещаться по проводнику и создавать ток. Диффузионные потоки  $\vec{j}_{\text{дифф}}$ , стремящиеся выровнять концентрацию таких электронов по разные стороны спая, растут с ростом температуры и не будут скомпенсированы при разных температурах спаев (рис.2.18), приводя к накоплению заряда. Чтобы этот заряд вблизи контактов цепи не рос, возникает ток проводимости с плотностью  $\vec{j}_{\text{пров}}$ , направление которого показано на рис.82 (так как электроны заряжены отрицательно, то ток  $\vec{j}_{\text{пров}}$  перемещает их в направлении, обратном направлению диффузионного потока  $\vec{j}_{\text{дифф}}$ ).

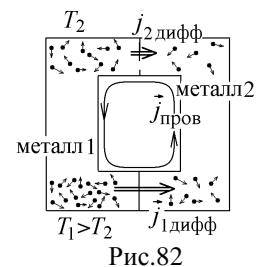


Рис.82

3) Колебания атомов решетки металла представляют в виде газа квазичастиц-фононов, на которых рассеиваются движущиеся в металле электроны. Поток фононов, пропорциональный градиенту температуры и направленный к холодному спаю увлекает электроны за собой. Это приводит к увеличению термоэлектрического тока.

Все эти механизмы возникновения явления термоэлектричества могут быть правильно описаны только в квантовой теории металлов. Их суммарное действие приводит к появлению достаточно большой термоЭДС. Так удельная термоЭДС пары Pd-Ag равна 86 мкВ/К. Термопары используются, например, в качестве источника тока в геотермальных электростанциях, или для подзарядки аккумуляторов подводных лодок.

Обратным явлением Зеебека будет эффект Пельтье: если в замкнутую цепь из двух разнородных проводников включить внешний источник ЭДС (рис.83), то вызванный этим источником ток охлаждает один из контактов между проводниками и нагревает другой (в зависимости от направления тока и характеристик металлов). В рассмотренном выше случае металл 2 заряжен положительно, а металл 1 — отрицательно (рис.80). Переходя из металла 1 в металл 2, электроны будут уменьшать энергию взаимодействия с электрическим полем на величину  $e\Delta\phi$ , отдавая её области вблизи спая и нагревая её (рис.83). По той же причине переходя обратно в металл 1, электрон забирает эту энергию, охлаждая второй спай.

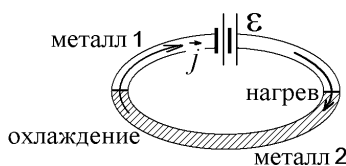


Рис.83

### Порядок выполнения работы

1. Определите по термометру “тер” на установке (рис.84) комнатную температуру  $t_{\text{комн}}$ , одинаковую для спаев а, б и с при выключенном нагревателе R.

2. Включите установку в сеть. Нагревая рабочий спай термопары, через каждые 5°C измеряйте по вольтметру величину термоЭДС  $\varepsilon'_T$ . Нагревание производите до 80°C. Результаты измерений занесите в таблицу.

3. При достижении 80°C выключите установку и продолжите измерение термоЭДС  $\varepsilon''_T$  при естественном остывании рабочего спае, фиксируя её значение при тех же значениях температуры, какие были взяты при нагревании, но в обратном порядке вплоть до комнатной температуры. Данные занесите в таблицу.

4. Для каждого значения температуры вычислите среднее значение термоЭДС

$$\varepsilon_T = \frac{1}{2}(\varepsilon'_T + \varepsilon''_T) \quad \text{и постройте график зависимости}$$

$\varepsilon_T$  от разности измеренной и комнатной температур  $\Delta t = t - t_{\text{комн}}$  (рис.85)

5. По формуле  $\alpha = \frac{\varepsilon_{T2} - \varepsilon_{T1}}{\Delta t_2 - \Delta t_1}$  вычислите

$t, ^\circ\text{C}$	$\Delta t, ^\circ\text{C}$	$\varepsilon'_T, \text{мВ}$	$\varepsilon''_T, \text{мВ}$	$\varepsilon_T, \text{мВ}$
...				
$t_{\text{комн}} = \dots ^\circ\text{C}$			$\alpha = \dots \text{мВ/К}$	

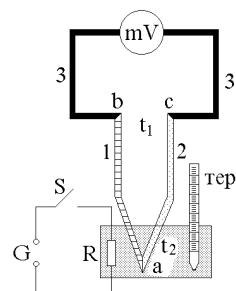


Рис.84

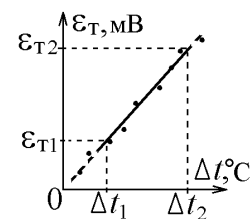


Рис.85

те величину удельной термоЭДС  $\alpha$ , используя прямолинейный участок построенного графика. Участок графика должен содержать несколько экспериментальных точек.

### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 24

1. Что представляет собой термопара? В чем суть эффекта Зеебека?
2. Каков физический смысл удельной термоЭДС, измеряемой в данной работе?
3. Что надо сделать с термопарой, чтобы увеличить возникающую в ней термоЭДС? Где применяются термопары?
4. Что удерживает газ свободных электронов в металле? Какая величина называется работой выхода электрона из металла? Напряжение какой величины надо приложить к металлу, чтобы вырвать из него электрон?
5. Имеются два металла 1 и 2 с разной работой выхода электрона ( $A_1 < A_2$ ). Какой из металлов при их контакте окажется заряженным положительно, а какой – отрицательно и почему?
6. Почему при соединении разных металлов образуется контактная разность потенциалов? Чему равна её величина?
7. Какие физические причины приводят к появлению термоЭДС в замкнутой цепи из двух разнородных металлов? Каковы механизмы появления термоЭДС?
8. Почему при одинаковой температуре спаев электрический ток в термопаре не течет, а при разной температуре – появляется? Чем обусловлено направление этого тока?
9. В чем заключается явление Пельтье?
10. Нарисуйте замкнутую цепь из двух разнородных металлических проводников 1 и 2, в которую включен источник внешней ЭДС (рис.83). Укажите, какой из спаев будет нагреваться, а какой охлаждаться и по какой причине, если работа выхода электрона из первого металла меньше, чем из второго ( $A_1 < A_2$ )?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 74-77.
2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.6 §§1-3.

## Работа №25. Определение удельного заряда электрона методом магнетрона

**Цель работы:** измерить удельный заряд электрона с помощью магнетрона.

### Теоретическое описание

В данной установке магнетрон – это вакуумный диод с катодом и анодом, сделанными в виде длинных цилиндров с общей осью и радиусами  $r_k$  и  $r_a$  (рис.86). Вокруг анода равномерно намотана обмотка (катушка) из  $n$  витков, приходящихся на единицу длины. Когда по катушке протекает ток  $I$ , величина которого регулируется потенциометром  $R$  (потенциометр – это резистор с регулируемым сопротивлением), то вдоль оси катушки, в пространстве между катодом и анодом, создается магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ .

На электроны, вылетающие с катода практически с нулевой скоростью, будет действовать электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , линии которого направлены по радиусам от положительно заряженного анода к отрицательно заряженному катоду, как показано на рис.87, где изображено поперечное сечение магнетрона.

В случае отсутствия магнитного поля  $\vec{B} = 0$  электроны летят против линий  $\vec{E}$  (траектория 1), попадая на анод и создавая анодный ток  $I_A$ , величина которого определяется падением напряжения  $U$  (разностью потенциалов между катодом и анодом).

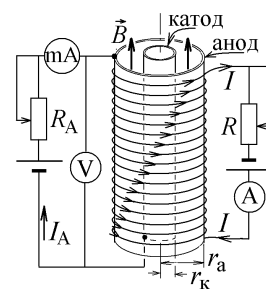


Рис.86

При появлении магнитного поля  $\vec{B}$  на электроны с зарядом  $-e$  кроме электрической составляющей  $\vec{F}_{эл} = -e\vec{E}$  будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца  $\vec{F}_{магн} = -e[\vec{v}, \vec{B}]$ . Эта сила отклоняет электроны в сторону (рис.87), меняя направление их скорости  $\vec{v}$ . При небольшой величине  $\vec{B}$  все вылетающие с катода электроны по-прежнему попадут на анод (траектория 2), и величина анодного тока не изменится.

При увеличении индукции магнитного поля до критического значения  $B_{кр}$  траектория 3 электрона изгибается настолько, что только касается анода (рис.87). С этого момента анодный ток начинает уменьшаться, так как при большем значении  $\vec{B}$  траектории электронов искривляются так, что электроны не попадают на анод (траектории 4 на рис.87).

Если длина катушки с током  $I$  бесконечна, то в таком соленоиде создается индукция магнитного поля  $B = \mu_0 I n$ , где  $n = N/l$  – число витков, приходящихся на единицу длины. При достижении критического значения  $I_{кр}$  анодный ток должен резко уменьшиться до нуля (все электроны перестают попадать на анод). В действительности, длина катушки конечна, и величина индукции уменьшается на её краях (рис.88). Если в бесконечном соленоиде индукция поля равна  $B_{кр}$ , то половина соленоида создаст половину этого поля. На краю полубесконечной катушки поле равно  $B_{кр}/2$ . Если в центре конечной катушки магнетрона поле достигло величины  $B > B_{кр}$ , и электроны перестают попадать на анод, то на её краях  $B < B_{кр}$ , и вылетевшие с катода электроны всё еще достигают анода. Начиная с точки 3, величина анодного тока уменьшается постепенно, по мере того, как с ростом  $B$  все меньшее число электронов на краях магнетрона перестает попадать на анод.

**Вывод расчетной формулы.** В скрещенных полях  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  траектория электронов не будет окружностью. Удобно перейти в цилиндрическую систему координат, в которой ось  $z$  совпадает с осью магнетрона, а  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$  – взаимно перпендикулярные единичные орты системы координат (рис.89). Вылетевший из катода с нулевой скоростью электрон с зарядом  $-e$  движется в плоскости, перпендикулярной оси  $z$  и приобретает скорость  $\vec{v} = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta$ . Момент импульса

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}] = m \cdot \det \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ r & 0 & 0 \\ v_r & v_\theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z m r v_\theta \text{ меняется под действием момента силы Лоренца}$$

$$\vec{M} = [\vec{r}, -e\vec{E} - e[\vec{v}, \vec{B}]] = -e[\vec{r}, [\vec{v}, \vec{B}]] \text{ (векторы } \vec{r} \text{ и } -e\vec{E} \text{ параллельны). Раскрывая двойное векторное}$$

произведение по правилу  $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c})$ , учтём, что  $(\vec{r} \cdot \vec{B}) = 0$  (скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов). Поэтому  $\vec{M} = \vec{e}_z \cdot e B r v_r$ , где  $v_r = dr/dt$ .

Подставив полученные выражения в уравнение динамики  $d\vec{L}/dt = \vec{M}$ , получим уравнение

$$\frac{d}{dt}(m r v_\theta) = B e r \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{B e r^2}{2} \right). \text{ Интегрируем обе части этого уравнения, считая, что электрон движется по траектории 3, прибли-}$$

жается к аноду по касательной и не имеет в этой точке радиальной проекции скорости ( $v_r = 0$  и  $v = v_\theta$ ):

$$\int_{r_k}^{r_a} d \left( \frac{B e r^2}{2} \right) = B e \left( \frac{r_a^2 - r_k^2}{2} \right) = m r_a v. \text{ Долетев от катода до анода, электрон будет ускорен разностью потенциалов } U_A \text{ между ано-}$$

дом и катодом и приобретёт энергию  $eU_A = \frac{mv^2}{2}$ , откуда  $v = \sqrt{\frac{2eU_A}{m}} = \frac{Be(r_a^2 - r_k^2)}{2mr_a}$ . Считая, что анодный ток в магнетроне начинает уменьшаться при достижении критической величины индукции в центре катушки,

$$B = B_{кр} = \mu_0 I_{кр} n, \quad (117)$$

находим из полученного уравнения величину удельного заряда электрона (отношения его

$$\text{заряда к массе):} \quad \frac{e}{m} = \frac{8U_A r_a^2}{B_{кр}^2 (r_a^2 - r_k^2)^2}. \quad (118)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь со схемой электрической цепи на рис.90. Определите цену деления каждого измерительного прибора.

2. Ручки потенциометров ПА и П поверните против часовой стрелки до упора, установив нулевые значения.

3. Включите установку в сеть. Ручкой потенциометра ПА установите анодное напряжение  $U_{A1}$  и поддерживайте его постоянным до конца снятия од-

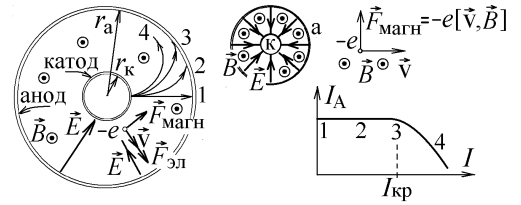


Рис.87

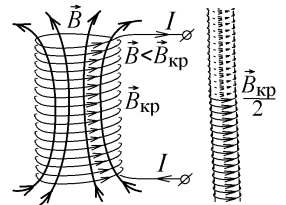


Рис.88

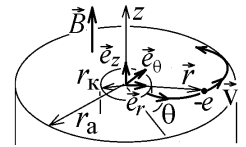


Рис.89

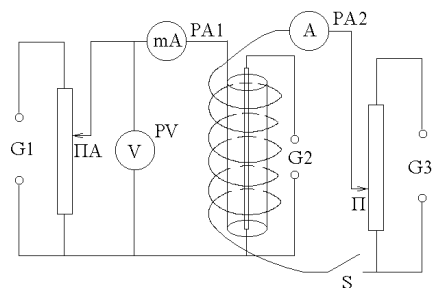


Рис.90



ной характеристики.

4. Снимите так называемую сбросовую характеристику магнетрона  $I_A = f(I)$ , т.е. зависимость величины анодного тока  $I_A$  от тока катушки  $I$ . Для этого, удерживая кнопку  $S$  в нажатом состоянии, медленно увеличивайте ток  $I$  в катушке с помощью ручки потенциометра  $\Pi$  и заносите в таблицу значения тока  $I$  и соответствующие им значения анодного тока  $I_A$ . Снимите не менее 10 значений тока для установленного анодного напряжения  $U_{A1}$ .

5. Аналогичные сбросовые характеристики снимите для двух других значений анодного напряжения  $U_{A2}$  и  $U_{A3}$ . Рекомендуемые величины  $U_{A1}$ ,  $U_{A2}$  и  $U_{A3}$  указаны на лабораторной установке. Все результаты измерений занесите в таблицу.

6. Приведите установку в исходное состояние и отключите от сети.

7. По измеренным данным постройте графики трех сбросовых характеристик в одних координатных осях.

8. На графике каждой характеристики найдите точку сброса анодного тока  $I_A$  и соответствующее ей критическое значение тока в катушке  $I_{кр}$ . Критический ток можно определить как ток катушки, при котором ток анода начинает резко уменьшаться. При измерениях анодный ток вначале начинает уменьшаться не слишком значительно и сбросовые характеристики выглядят так, как показано на рис.91. На этом рисунке показано как с помощью двух прямых асимптотических линий определить положение точки  $I_{кр}$ .

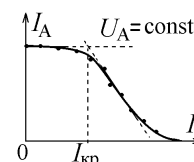


Рис.91

9. По формуле (117) вычислите значение критической индукции магнитного поля катушки  $I_{кр}$ , а затем по формуле (118) рассчитайте величину удельного заряда электрона  $e/m$  для каждого из трех опытов с разными значениями  $U_A$ . и найдите его среднее значение.  $\langle e/m \rangle$ .

10. Определите случайные отклонения  $\Delta(e/m) = e/m - \langle e/m \rangle$  для каждого измерения  $i = 1, 2, 3$  и среднее квадратичное отклонение

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (\Delta e/m)^2}. \text{ Вычислите погрешность}$$

$\Delta e/m$  результата измерений:  $\Delta e/m = S/\sqrt{3}$ . Результаты вычислений занести в таблицу.

11. Записать результат в виде  $(e/m)_{\text{эсп}} = (\langle e/m \rangle \pm \Delta e/m)$ , Кл/кг и сравнить его с табличным значением отношения величины заряда электрона  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл к его массе  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  Кг.

№ п/п	$U_{A1} = \dots \text{ В}$		$U_{A2} = \dots \text{ В}$		$U_{A3} = \dots \text{ В}$	
	$I, \text{ А}$	$I_A, \text{ мкА}$	$I, \text{ А}$	$I_A, \text{ мкА}$	$I, \text{ А}$	$I_A, \text{ мкА}$
1						
...						
10						
$I_{\text{кр}}, \text{ А}$						
$B_{\text{кр}}, \text{ Тл}$						
$e/m, \text{ Кл/кг}$						
$(e/m)_{\text{эксп}} = \dots \pm \dots \text{ Кл/кг}$ (экспериментальное)			$(e/m)_{\text{табл}} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$ (табличное)			

### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 25

1. На электрической схеме установки покажите замкнутую цепь, по которой течет ток  $I$  катушки (соленоида), и цепь, по которой течет анодный ток  $I_A$ . Укажите приборы, которые измеряют эти токи.

2. С какой целью магнетрон окружен витками соленоида? Что меняется при увеличении тока  $I$ , текущего по этим виткам?

3. Какова величина и направление вектора индукции магнитного поля, создаваемого в магнетроне? Как можно изменить эту величину?

4. Напишите выражение силы Лоренца, которая действует на электрон, движущийся в скрещенных электрическом и магнитном полях. Укажите направление электрической и магнитной составляющих этой силы.

5. Направление тока  $I$ , текущего по виткам намотанной на цилиндрический анод катушки, указано на рис.А. Укажите и объясните правильную траекторию движения одного из электронов, создающих анодный ток.

6. Что называется удельным зарядом электрона, как вычислить его величину и чему она должна быть равна?

7. Укажите соответствие траекторий электронов, вылетающих из катода на левом рис.Б, и точек графика зависимости анодного тока  $I_A$  от тока  $I$ , протекающего по виткам катушки (правый рис.Б).

8. Объясните поведение графиков зависимости  $I_A = I_A(I)$ : почему при увеличении тока  $I$  величина  $I_A$  вначале не меняется? на каком основании определяют критическое значение тока  $I_{кр}$ ? почему после достижения критической величины  $I$  анодный ток уменьшается постепенно, а не падает скачком до нуля? почему величина  $I_A$  возрастает с ростом напряжения  $U_A$ ?

9. Сделайте и объясните вывод расчетной формулы для вычисления удельного заряда электрона в данной работе.

10. Может ли электрон в скрещенных однородных электрическом  $\vec{E}$  и магнитном  $\vec{B}$  полях двигаться с постоянной по величине и направлению скоростью? Если да, то при каких условиях, и чему равна минимальная величина такой скорости?

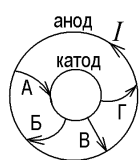


Рис.А

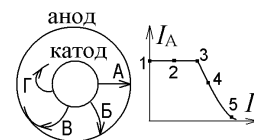


Рис.Б

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 38, 39, 47, 64-66.
2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.7 §§2,5,8,9.

## Работа №26. Магнитное поле Земли

Цель работы: измерение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли методом тангенс-гальванометра.

### Теоретическое описание

Плоскость компаса совпадает с горизонтальной плоскостью. Индукция магнитного поля Земли будет суммой горизонтальной и вертикальной составляющих  $\vec{B}_3 = \vec{B}_{гор} + \vec{B}_{верт}$  (рис.92).

В северном полушарии вертикальная составляющая  $\vec{B}_{верт}$  направлена вниз, перпендикулярна плоскости компаса и не действует на его магнитную стрелку, которая направлена вдоль горизонтальной составляющей  $\vec{B}_{гор}$  (рис.92,а). В этом же направлении ориентируют плоскость катушки тангенс-гальванометра из  $N$  витков (стрелка компаса – в его центре).

Если по катушке пропустить ток  $I$ , то в центре витка радиуса  $R$  будет создано магнитное поле тока с индукцией  $B_I = \mu_0 I / (2R)$  (это выражение можно получить с помощью закона Био-Савара). В катушке из  $N$  витков суммарная индукция магнитного поля тока перпендикулярна плоскости катушки, равна  $B_k = \mu_0 NI / (2R)$  и отклоняет стрелку компаса на угол  $\alpha$  относительно горизонтальной линии магнитного меридиана (рис.92,б,в). Стрелка установится в горизонтальной плоскости вдоль результирующего вектора  $\vec{B}_{рез} = \vec{B}_{гор} + \vec{B}_k$ . Измерив тангенс угла отклонения стрелки компаса  $\alpha$ :  $\text{tg } \alpha = B_k / B_{гор}$  (рис.92,в) легко найти горизонтальную составляющую индукции магнитного поля Земли в месте нахождения компаса:

$$B_{гор} = \frac{\mu_0 IN}{2R \text{tg } \alpha}. \quad (119)$$

Чем больше величина тока  $I$  в катушке, тем больше угол отклонения стрелки.

Источником постоянного магнитного поля являются движущиеся электрические заряды или токи любой природы, например, токи намагничивания в магнитных средах (рис.93). Линии индукции  $\vec{B}$  охватывают линии тока и **всегда замкнуты**.

Поэтому магнитное поле называют **вихревым**, в отличие от **потенциального** электростатического поля, линии напряженности  $\vec{E}$  которого начинаются или заканчиваются на электрических зарядах. Помните однако, что и электростатическое, и постоянное магнитное поле являются составляющими единого электромагнитного поля, описываемого уравнениями Максвелла. Постоянное магнитное поле в одной инерциальной системе отсчета превращается в электростатическое поле в другой системе отсчета и наоборот.

Индукцию магнитного поля  $\vec{B}$  можно рассматривать как векторную характеристику, определяющую величину силы, действующей на движущийся в магнитном поле заряд  $q$  (магнитная составляющая силы Лоренца) или на элемент тока  $I d\vec{l}$  (сила Ампера, рис.94). Величина магнитного поля пропорциональна величине его индукции.

### Объяснение природы магнитного поля Земли.

Геомагнитное поле не постоянно и на 95% создается в земном ядре, имеющем радиус  $R_{я} \approx 2900$  км. Внешняя часть ядра состоит из расплавленного при очень большом давлении жидкого железа с температурой  $\sim 4600$  К, в котором создаются конвекционные потоки жидкости. Эти потоки все время распадаются на отдельные гигантские вихри, вместе с которыми движутся “вмороженные” в них линии



Рис.95

индукции  $\vec{B}$ , созданные токами заряженных ионов и электронов. Вихри жидкости при турбулентном движении перекручиваются, разделяются, накладываются друг на друга. При этом, как показано на рис.95, складываются линии  $\vec{B}$ , усиливая, ослабляя или даже меняя направление результирующего магнитного поля. Подобные процессы изучает **магнитная гидродинамика**.

В результате вне земного ядра создается результирующее магнитное поле, которое на 80% совпадает с полем **магнитного диполя** с огромным магнитным моментом

$p_m = 8,3 \cdot 10^{22}$  А·м (рис.96). Положение этого диполя меняется с медленным изменением вихревого движения электропроводящей жидкости в ядре Земли. Центр диполя смещен приблизительно на 300-400 км от центра Земли, а его ось не совпадает с осью вращения Земли и пересекает поверхность Земли в точках, которые называются **геомагнитными полюсами** (рис.96). В настоящее время южный геомагнитный полюс Земли находится вблизи северного полюса и постепенно перемещается со средней скоростью 10 км/год от северного побережья Канады к Сибири.

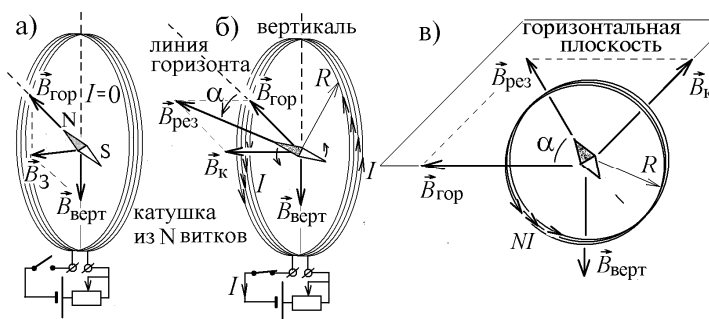


Рис.92

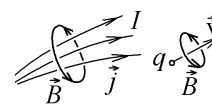


Рис.93

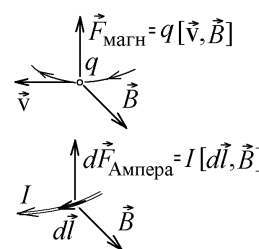


Рис.94

Дрейф магнитных полюсов связан не только с изменением токов в ядре Земли, но и с тем, что величины угловых скоростей вращения земного ядра, мантии и твердой оболочки (литосферы) не совпадают. Поэтому земная кора понемногу смещается относительно оси вращения Земли и оси магнитного диполя. 600 миллионов лет назад континенты (участки земной коры), которые сейчас находятся вблизи экватора, находились на полюсах Земли. Там же (немного южнее современного экватора) находился, например, северный магнитный полюс.

Известно, что магнитное поле Земли тысячи раз меняло направление магнитных полюсов, постепенно, раз в  $10^6$  лет, уменьшаясь до нуля, а затем возникая в противоположном направлении. При этом в течении  $10^3 - 10^4$  лет Земля оказывалась без защитного магнитного поля, предотвращающего её поверхность от попадания сильных потоков космических лучей. Объяснить это можно только переменой направления токов в ядре Земли (рис.95).

В настоящее время индукция  $\vec{B}$  поля Земли максимальна на магнитных полюсах ( $\sim 65$  мкТл) и минимальна вблизи экватора ( $\sim 35$  мкТл). Горизонтальная составляющая  $\vec{B}_{\text{гор}}$ , наоборот, максимальна на экваторе, где линии  $\vec{B}$  почти горизонтальны, и  $\vec{B}_{\text{гор}} = 0$  на магнитных полюсах, где линии  $\vec{B}$  направлены по вертикали к поверхности Земли (рис.96). В районе Тулы  $\vec{B}_{\text{гор}} \approx 25$  мкТл.

Однако, в земной коре много намагниченных ферромагнитных руд, которые создают аномальное магнитное поле ( $\sim 4\%$  магнитного поля Земли). Эти источники магнитного поля находятся вблизи земной поверхности и могут заметно изменить форму и направление линии  $\vec{B}$ , вдоль которой ориентируется стрелка компаса (рис.2.29). Так в районе Курской магнитной аномалии линии  $\vec{B}$  направлены так же вертикально, как и на магнитном полюсе.

Заметное влияние на стрелку компаса оказывают также ионосферные токи, вызванные потоком солнечных космических лучей (потоком протонов, попадающих в магнитное поле Земли). В период сильных магнитных бурь (возмущений магнитного поля Земли, вызванных солнечной активностью), величина  $B_{\text{Земли}}$  может измениться на  $\sim 1 \div 2$  мкТл, что вблизи полярного круга, где мала величина  $\vec{B}_{\text{гор}}$ , вызовет отклонения стрелки магнитного компаса на  $10-20^\circ$  (за сутки положение магнитного полюса Земли может описать круг диаметром в сотню километров).

#### Порядок выполнения работы

1. Не включая источник тока, установите тангенс-гальванометр в плоскости магнитного меридиана. При этом стрелка компаса должна быть направлена по диаметру тангенс-гальванометра (вдоль плоскости витков, рис.92,а). Обратите внимание на то, чтобы северный конец стрелки указывал на нулевое значение компаса.

2. Установите регулятор потенциометра (или реостата) на минимальный ток через тангенс-гальванометр и затем включите источник тока.

3. Изменяя регулятором потенциометра ток через равные интервалы, определяйте угол отклонения  $\alpha$  стрелки (рис.92,б). Необходимо некоторое время, чтобы стрелка компаса успокоилась и перестала колебаться. Записывайте величины тока  $I$  и углы отклонения от первоначального положения северного  $\alpha_1$  и южного  $\alpha_2$  полюсов стрелки в таблицу. Измерить надо не менее 5 значений тока (и соответствующие им углы).

**Внимание:** отклонение любого полюса стрелки есть разность начального и конечного показания компаса и не может превысить  $90^\circ$ .

4. Измените направление тока в гальванометре с помощью переключателя на установке. Прделайте пункт 3, устанавливая те же значения токов и фиксируя углы отклонения от первоначального положения северного  $\alpha_3$  и южного  $\alpha_4$  полюсов стрелки. Стрелка будет отклоняться от первоначального положения в другую сторону. Дублирование измерений делается для того, чтобы исключить систематическую погрешность, связанную с неточной установкой катушки в плоскости магнитного меридиана, а также с определением самой этой плоскости. Данные занесите в таблицу.

№ п/п	$I$ , мА	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, ^\circ$	$\alpha_3, ^\circ$	$\alpha_4, ^\circ$	$\langle \alpha \rangle, ^\circ$	$\text{tg} \langle \alpha \rangle$	$B_{\text{гор}}, \text{ мкТл}$	$\Delta B_{\text{гор}}, \text{ мкТл}$	$E$
1										
2										
3										
4										
5										
$N = \dots$ витков		$R = \dots$ м		$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$		$\langle B_{\text{гор}} \rangle = \dots \text{ мкТл};$		$(\Delta B_{\text{гор}})_{\text{max}} = \dots \text{ мкТл}$		

5. Определите среднее значение угла  $\langle \alpha \rangle$  для каждого значения тока  $I$  по формуле  $\langle \alpha \rangle = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) / 4$ .

6. По формуле (119) надо вычислить  $B_{\text{гор}}$  для каждого значения тока, подставляя вместо  $\alpha$  среднее значение этого угла  $\langle \alpha \rangle$ . Величины  $R$  и  $N$  указаны на установке.

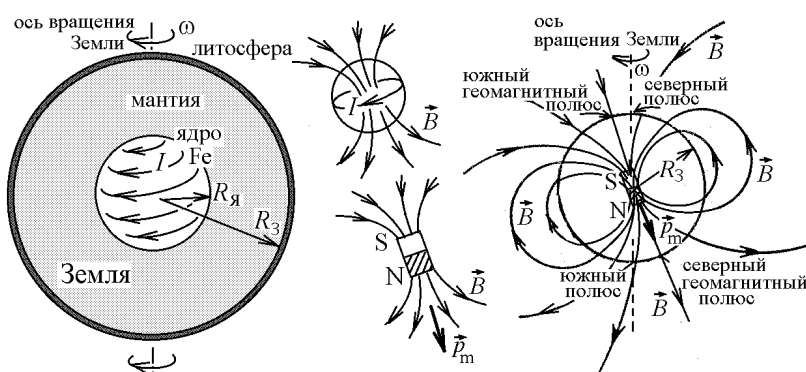


Рис.96



Рис.97

7. По вычисленным значениям  $B_{\text{гор}}$  найдите среднее значение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли  $\langle B_{\text{гор}} \rangle$

8. Определите относительную  $E$  и абсолютную  $\Delta B_{\text{гор}}$  погрешности по формулам

$$E = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha}, \quad \Delta B_{\text{гор}} = B_{\text{гор}} \cdot E,$$

в которых  $\Delta I$ ,  $\Delta R$  и  $\Delta\alpha$  определяются как половина деления прибора, с помощью которого были измерены величины  $I$ ,  $R$  и  $\alpha$ , причем  $\Delta\alpha$  **надо выразить в радианах**. Если значение какой-либо величины уже указано в описании установки, например  $R$ , то абсолютная погрешность этой величины определяется как половина единицы последнего разряда. Пример:  $R=20,15$  см. Единица последнего разряда - это одна сотая. Таким образом,  $\Delta R = 0,01/2 = 0,005$  см.

9. Определите наибольшее значение абсолютной погрешности  $(\Delta B_{\text{гор}})_{\text{max}}$  и запишите результат измерений в виде  $B_{\text{гор}} = \langle B_{\text{гор}} \rangle \pm (\Delta B_{\text{гор}})_{\text{max}}$  мкТл, т.е.  $B_{\text{гор}} = \dots \pm \dots$  мкТл.

Сравните полученное значение  $B_{\text{гор}}$  с истинным, которое в районе Тулы равно  $B_{\text{гор}} \approx 25$  мкТл.

### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 26

1. Что является источником постоянного магнитного поля? Чем постоянное магнитное поле отличается от электростатического поля и почему оно называется вихревым?
2. Дайте определение вектора индукции магнитного поля.
3. Сформулируйте закон Био-Савара и получите с его помощью формулу для величины индукции магнитного поля в центре и на оси тангенс-гальванометра с током  $I$ ,  $N$  витков которого имеют радиус  $R$ .
4. Нарисуйте линии индукции магнитного поля, созданного током, текущим по тангенс-гальванометру. Будут ли они замкнутыми и почему?
5. С какой силой или моментом силы магнитное поле Земли действует на движущуюся заряженную частицу? на прямолинейный проводник с током? на круговой виток с током? на стрелку магнитного компаса?
6. Покажите на экспериментальной установке направление вертикальной и горизонтальной составляющих вектора индукции магнитного поля Земли, а также направление вектора индукции магнитного поля, созданного током, текущим по виткам тангенс-гальванометра. В какую сторону будет поворачиваться стрелка компаса при увеличении или уменьшении тока?
7. Плоскость витков катушки тангенс-гальванометра параллельна вектору  $\vec{B}_T$  горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли (рис.А).  $I$  – ток в катушке,  $N$  – число витков в катушке,  $r$  – их радиус. При каком условии стрелка компаса в центре катушки повернута на угол  $\alpha = 45^\circ$  относительно плоскости витков?
8. Прямой бесконечный ток  $I$  течёт вдоль вертикальной оси  $z$ . Горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли направлена вдоль оси  $y$  (рис.Б). Укажите в какой точке и на каком расстоянии от тока  $I$  вектор индукции суммарного магнитного поля тока и магнитного поля Земли будет направлен вертикально.
9. Сделайте вывод расчетной формулы (119) для определения величины горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли.

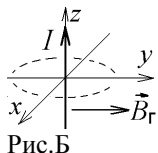


Рис.Б

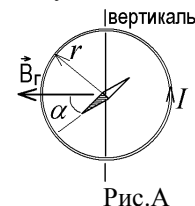


Рис.А

10. Какие причины приводят к появлению магнитного поля Земли? Как направлены линии индукции геомагнитного поля в северном и южном полушарии?
11. Почему магнитный компас нельзя использовать вблизи геомагнитных полюсов Земли? Направлена ли стрелка компаса на северный полюс?
12. Что должно происходить с величиной горизонтальной составляющей магнитного поля Земли в зависимости от географической широты? Почему в разных точках Земли на одной широте и в разное время стрелка компаса может не показывать на геомагнитный полюс?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 39-42, 48.
2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.7 §§5,8,9, гл.8 §§1,2.

### Работа №27. Исследование магнитного поля соленоида

**Цель работы:** экспериментальное определение значений магнитной индукции на оси соленоида и сравнение их с расчетными значениями.

#### Теоретическое описание

С помощью теоремы о циркуляции легко вычислить поле внутри бесконечного соленоида, по виткам которого течет ток  $I$ . Прямые линии индукции  $\vec{B}_\infty$  внутри соленоида уходят в бесконечность, и охватывая  $N$  витков соленоида прямоугольным контуром длины  $l$ , изображенным штриховой линией на рис.98,а, получаем  $\oint \vec{B} d\vec{l} = B_\infty l = \mu_0 IN$  или  $B_\infty = \mu_0 IN / l$ .

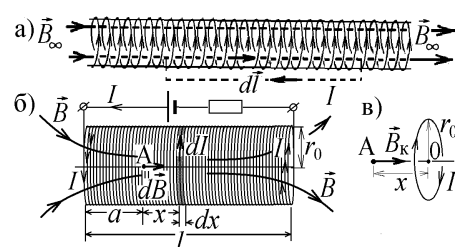


Рис.98

В исследуемом соленоиде конечной длины  $l$  с радиусом витков  $r_0$  линии индукции  $\vec{B}$  изогнуты (рис.98,б), и удобного для интегрирования по теореме о циркуляции замкнутого контура нет. Для вычисления  $B$  на оси такого соленоида, имеющего  $N$  витков с током  $I$ , воспользуемся законом Био-Савара. Определим индукцию  $B$  в точке А, находящейся на расстоянии  $a$  от края соленоида. Разобьём боковую поверхность соленоида на узкие кольцевые полоски ширины  $dx$  на расстоянии  $x$  от точки А. По всем  $N$  виткам на боковой поверхности протекает ток  $NI$ , а по такой полоске течет ток  $dI = NI \cdot dx/l$ , пропорциональный её ширине.

С помощью закона Био-Савара легко показать, что на оси кругового витка радиуса  $r_0$  с током  $I$  на расстоянии  $x$  от центра 0 витка (рис.98,в) создается магнитное поле с индукцией  $B_k = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + x^2)^{3/2}}$ . Аналогично, кольцевой ток  $dI$

создаст в точке А поле  $dB = \frac{\mu_0 dI}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + x^2)^{3/2}}$ . Суммируя вклады всех полосок, т.е. вычисляя интеграл, находим рас-

четную формулу для теоретически вычисленной величины индукции магнитного поля на оси конечного соленоида длины  $l$  на расстоянии  $a$  от его края:

$$B_{\text{теор}} = \int_{x=-a}^{x=l-a} dB = \frac{\mu_0 NI r_0^2}{2l} \int_{-a}^{l-a} \frac{dx}{(r_0^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{2l} \left( \frac{l-a}{\sqrt{r_0^2 + (l-a)^2}} + \frac{a}{\sqrt{r_0^2 + a^2}} \right). \quad (120)$$

Кроме этого, величина индукции определяется в данной лабораторной работе экспериментально с помощью баллистического гальванометра.

Схема эксперимента изображена на рис.99.

По оси соленоида длины  $l$  и радиуса  $r_0$ , состоящего из  $N$  витков, перемещается маленькая измерительная катушка  $K_{\text{и}}$  из  $N_{\text{и}}$  витков с площадью  $S_{\text{и}}$  и с индуктивностью  $L_{\text{и}}$ , расстояние  $a$  которой от края соленоида определяют по положению совмещенного с катушкой указателя. Кнопкой  $S$  соленоид подключают к источнику постоянного тока, и по его виткам начинает течь ток  $I$ , создающий на оси соленоида магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . Возникающая в соленоиде ЭДС самоиндукции препятствует мгновенному появлению этого тока. Он нарастает до установившегося значения некоторое время  $\tau$ , в течение которого меняется поле  $B$ , а в измерительной катушке  $K_{\text{и}}$  возрастает магнитный поток  $\Phi_{\text{и}} = BN_{\text{и}}S_{\text{и}}$ .

Измерительная катушка соединена с рамкой баллистического гальванометра, и образует замкнутую цепь с сопротивлением  $R$ . В такой цепи возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{и}} = -d\Phi_{\text{и}}/dt$  и появляется меняющийся ток  $I_{\text{и}}$ , что приводит к появлению ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_{\text{с}} = -L_{\text{и}}dI_{\text{и}}/dt$ . Интегрируя по времени уравнение правила Кирхгофа,

$$-I_{\text{и}}R = \mathcal{E}_{\text{и}} + \mathcal{E}_{\text{с}} = -\frac{d\Phi_{\text{и}}}{dt} - L_{\text{и}}\frac{dI_{\text{и}}}{dt}, \text{ получаем } -R \int_0^{\tau} I_{\text{и}} dt = -\int d\Phi_{\text{и}} - L_{\text{и}} \int dI_{\text{и}} = -BN_{\text{и}}S_{\text{и}}. \text{ Здесь } \int_0^{\tau} I_{\text{и}} dt = q - \text{заряд, протекший}$$

через измерительную катушку за время установления поля  $B$  в соленоиде. Ток  $I_{\text{и}}$  в момент  $\tau$  прекращается, так как величина  $\Phi_{\text{и}}$  достигает постоянной установившейся величины, и исчезает ЭДС индукции, приводившая к появлению тока.

$$\text{Поэтому } I_{\text{и}}(\tau) = I_{\text{и}}(0) = 0 \text{ и } \int_0^{\tau} dI_{\text{и}} = 0.$$

Таким образом, протекший по измерительной катушке заряд  $q$  пропорционален установившейся величине индукции магнитного поля в том месте, где она находится:  $q = BN_{\text{и}}S_{\text{и}}/R$ .

Индукционный ток  $I_{\text{и}}$  протекает по подвешенной на нити прямоугольной рамке баллистического гальванометра с площадью  $S_{\text{р}}$ , имеющей  $N_{\text{р}}$  витков и большой момент инерции  $I_{\text{р}}$  (рис.99). Постоянный магнит и железный цилиндр  $F$ , который охватывают витки рамки, создают магнитное поле с индукцией  $B_{\text{м}}$ , линии которого радиальны, и при повороте рамки на любой угол  $\theta$  параллельны плоскости рамки "Пл" (рис.99). При протекании тока  $I_{\text{и}}$ , рамка имеет магнитный момент  $p_{\text{м}} = I_{\text{и}}N_{\text{р}}S_{\text{р}}$ , и на неё действует момент сил  $M = [\vec{p}_{\text{м}}, \vec{B}_{\text{м}}] = I_{\text{и}}N_{\text{р}}S_{\text{р}}B_{\text{м}} \sin 90^\circ$ . Согласно уравнению динамики вращательного движения,  $I_{\text{р}} \frac{d\omega}{dt} = M$ . Рамка приходит во вращение, приобретая за время  $\tau$  угловую скорость

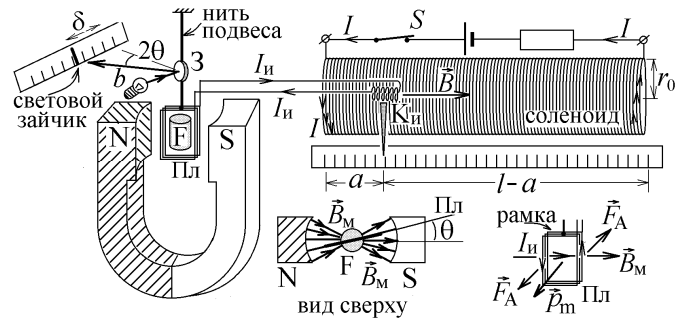


Рис.99

$$\omega = \int_0^{\tau} \frac{M}{I_p} dt = \frac{N_p S_p B_m}{I_p} \int_0^{\tau} I_n dt = \frac{N_p S_p B_m}{I_p} q.$$

Чтобы закрутить нить подвеса на угол  $\theta$ , к ней надо приложить момент силы, пропорциональный углу закручивания:  $M_{кр} = K\theta$ , где  $K = \text{const}$ . Полученная рамкой кинетическая энергия вращательного движения превращается в ра-

боту момента силы:

$$\frac{I_p \omega^2}{2} = \int M_{кр} d\theta = K \int \theta d\theta = \frac{K\theta^2}{2}.$$

На нити подвеса укреплено крошечное зеркальце 3 (рис.99), которое вместе с нитью повернется на угол  $\theta = \omega \cdot \sqrt{I_p/K}$ . Луч лампочки отражается от зеркальца и создает световой зайчик на шкале, находящейся на удалении  $b$ .

При повороте зеркальца на малый угол  $\theta$ , зайчик сместится по шкале на расстояние  $\delta = b \cdot 2\theta$ . Учитывая все полученные результаты, видим, что экспериментально определенная величина индукции магнитного поля на оси соленоида в том месте, где находится измерительная катушка  $K_n$ , пропорциональна отклонению зайчика:

$$B_{\text{экс}} = k\delta, \text{ где } k = \frac{R\sqrt{KI_p}}{2bN_p N_n S_p S_n B_m}. \quad (121)$$

Современные приборы, измеряющие малые изменения тока или напряжения, основаны на принципе измерения протекшего по цепи заряда и обладают намного большей чувствительностью и точностью.

#### Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь с установкой и включите ее в сеть (220 В).
2. Ручкой на установке поместите измерительную катушку  $K_n$  у одного из концов соленоида, определив ее положение  $a$  (расстояние от края соленоида до точки, в которой определяется значение магнитной индукции) с помощью указателя на шкале (линейке, см.рис.99).
3. Нажмите на кнопку  $S$  и измерьте отклонение светового зайчика  $\delta$  по шкале гальванометра. Не отпуская кнопку, определите силу тока в соленоиде по миллиамперметру.
4. Такие же измерения расстояния  $a$  и отклонения зайчика  $\delta$  проделайте для других положений катушки  $K_n$ , перемещая ее каждый раз на 1 см вдоль оси соленоида до упора. Занесите данные в таблицу.

5. По формуле (121) найдите экспериментальные значения магнитной индукции, воспользовавшись значением  $k$ , указанным на установке.

6. Для тех же значений  $a$  рассчитайте по формуле (120) теоретически вычисленные значения индукции маг-

нитного поля  $B_{\text{теор}} = \frac{\mu_0 NI}{2l} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2),$

где  $\cos \beta_1 = \frac{a}{\sqrt{r_0^2 + a^2}}, \cos \beta_2 = \frac{l-a}{\sqrt{r_0^2 + (l-a)^2}}.$  Данные вы-

числений занести в таблицу. Значения  $N$  и  $l$  даны на установке.

8. По значениям  $B_{\text{экс}}$ , определенным на опыте, и  $B_{\text{теор}}$ , вычисленным теоретически, постройте графики  $B_{\text{экс}} = f_1(a)$  и  $B_{\text{теор}} = f_2(a)$  в одних координатных осях (на одном листе). Сравните построенные графики.

#### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 27

1. Нарисуйте линии индукции магнитного поля, созданного током, текущим по виткам катушки-соленоида с учетом направления этого тока. Будут ли эти линии замкнутыми и почему?
2. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора магнитной индукции и с её помощью определите величину индукции магнитного поля внутри бесконечно длинного соленоида с током  $I$ , у которого на длину  $l$  приходится  $N$  витков.
3. Сформулируйте закон Био-Савара и с его помощью получите выражение величины индукции магнитного поля на оси кругового витка с током.
4. Сделайте вывод расчетной формулы для величины индукции магнитного поля на оси соленоида конечной длины  $l$  с радиусом витков  $r$ .
5. Определите величину отношения индукции магнитного поля в центре соленоида (при  $a = l/2$ ) и на его краях (при  $a = 0$  или  $l$ ). Совпадает ли эта величина с той, что следует из построенного Вами графика?
6. Объясните принцип работы баллистического гальванометра, используемого в данной работе.
7. В чем состоит явление электромагнитной индукции? Сформулируйте закон Фарадея для определения ЭДС электромагнитной индукции и с его помощью объясните, почему заряд, протекающий по измерительной катушке, пропорционален величине индукции магнитного поля, в которую её вносят. Почему размер измерительной катушки должен быть малым?
8. Почему при включении тока в соленоиде поворачивается зеркальце, создающее световой “зайчик”? Почему вращающий зеркальце момент сил пропорционален измеряемой индукции магнитного поля?

$a$ , м	$\delta$ , дел	$B_{\text{экс}}$ , Тл	$\cos \beta_1$	$\cos \beta_2$	$B_{\text{теор}}$ , Тл
0					
0,01					
....					
$a = l$					
$N = \dots$ витков; $l = \dots$ м; $k = \dots$ Тл/дел; $I = \dots$ А.					

9. Почему световой “зайчик” сразу же возвращается в исходное положение, если нажать кнопку включения тока в соленоиде и не отпускать её?
10. Сделайте вывод формулы зависимости смещения  $\delta$  “зайчика” от величины индукции  $B$ . От каких параметров установки зависит коэффициент пропорциональности  $k$  между этими величинами?
11. Каким способом проще всего увеличить смещение  $\delta$  “зайчика”, не меняя силу тока в соленоиде и параметры измерительной катушки?
12. Почему баллистические гальванометры, измеряющие величину тока по величине протекающего заряда более точны, чем обычные амперметры?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 39-42, 48, 55-57, 59, 62.
2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.7 §§5,8,9, гл.8 §§1,2.
3. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Электромагнетизм и оптика,- изд. ТулГУ. 2010, гл.I §§ 3-5.

## Работа №28. Определение индуктивности тороида с ферритовым магнитопроводом

**Цель работы:** изучение зависимости индуктивности тороида от силы тока.

### Теоретическое описание

Электрическая схема установки изображена на рис.100. На тороидальный сердечник намотана обмотка из  $N$  витков тонкого провода, по которому течет ток  $I$  от подключенного источника переменной ЭДС с амплитудой  $\varepsilon_0$  и циклической частотой  $\omega$ . Величину тока меняют, изменяя сопротивление потенциометра  $R$ . Если  $L$  – индуктивность такой тороидальной катушки, а  $R_k$  – её омическое (активное) сопротивление, то с учетом ЭДС самоиндукции правило Кирхгофа для изображенной на рис.100 замкнутой цепи имеет вид  $I(R + R_k) = \varepsilon_0 \cos(\omega t) - L \cdot dI/dt$ . Решение этого уравнения вынужденных колебаний известно. Амплитуда вынужденных колебаний тока в цепи связана с амплитудой ЭДС через полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{(\omega L)^2 + (R + R_k)^2}, \text{ т.е. } I = I_0 \sin(\omega t + \alpha) = \frac{\varepsilon_0}{Z} \sin(\omega t + \alpha).$$

Сопротивление  $\omega L$  называют индуктивным сопротивлением.

Можно найти падение напряжения на контактах тороидальной катушки:  $U = IR_k + L dI/dt$ . Подстановка дает

$$U = I_0 R_k \sin(\omega t + \alpha) + I_0 \omega L \cos(\omega t + \alpha) \text{ или } U = I_0 \sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2} (\cos \theta \cdot \sin(\omega t + \alpha) + \sin \theta \cdot \cos(\omega t + \alpha)), \text{ где}$$

$$\cos \theta = \frac{R_k}{\sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2}}, \sin \theta = \frac{\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2}}, \text{ т.е. } U = I_0 \sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2} \cos(\omega t + \alpha - \theta) = U_0$$

Амперметр и вольтметр измеряют не амплитудные, а действующие или эффективные величины тока и напряжения  $I = I_0/\sqrt{2}$ ,  $U = U_0/\sqrt{2}$ . Это величины **постоянного** тока, который оказывает такое же действие, как и переменный ток с амплитудами  $I_0$ ,  $U_0$ . Их отношение равно отношению амплитуд:  $U/I = U_0/I_0 = \sqrt{(\omega L)^2 + R_k^2}$ . В данной работе сопротивление провода, намотанного на тороидальный сердечник, считается пренебрежимо малым,  $R_k \approx 0$ , что позволяет определить индуктивность катушки по измеренным показаниям амперметра и вольтметра:

$$L = \frac{U}{I\omega}. \quad (122)$$

Чтобы вычислить индуктивность  $L$ , воспользуемся теоремой о циркуляции вектора индукции  $\vec{B}$  магнитного поля, линии которого внутри соленоида образуют замкнутые окружности (рис.100). Приняв такую окружность радиуса  $r$  за контур интегрирования, получим  $\oint \vec{B} d\vec{l} = B \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 IN$  (контур охватывает  $N$  витков с током  $I$ ). Величина маг-

нитного поля  $B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}$  зависит от расстояния  $r$  до центра  $O$  тороида. Поэтому магнитный поток через площадь  $S_B$

одного витка (рис.101) можно только приблизительно записать в виде  $\Phi_1 = BS_B$ . Поток через все  $N$

витков связан с индуктивностью катушки:  $\Phi = NBS_B \approx LI$ . Отсюда  $L \approx \frac{\mu_0 S_B N^2}{2\pi r}$ . Результат вычисле-

ния  $L$  по этой формуле, где  $r$  – радиус оси тороида, тем точнее, чем меньше поперечное сечение  $S_B$  сердечника. В данной работе определяется зависимость индуктивности  $L$  от величины магнитной проницаемости  $\mu$  феррита, из которого изготовлен сердечник.

Правильно объяснить магнитные свойства любого магнетика – ферромагнетика, парамагнетика или диамагнетика – можно только с помощью законов квантовой физики. В частности, феррит – это магнитно-упорядоченная среда, в которой магнитные моменты атомов выстраиваются строго вдоль одного направления под действием обменных сил квантовой природы, не имеющих аналога в классической физике. Ферриты отличаются от ферромагнетиков тем, что магнитные моменты атомов разного сорта направлены в разные стороны (рис.102, феррит  $Mn_2O_3$ ).

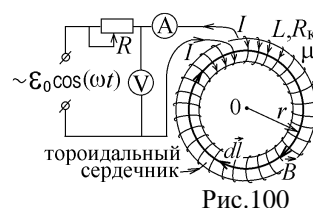


Рис.100

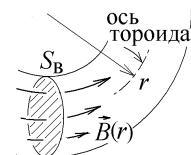


Рис.101

При изменении магнитного поля в ферритах не возникают токи Фуко, поскольку ферриты не проводят электрический ток. По этой причине ферриты используются в качестве материала для изготовления сердечников трансформаторов, поскольку из-за большой величины магнитной проницаемости  $\mu$  позволяют создать большое магнитное поле, а в случае переменных токов не нагреваются, так как в них не происходит потеря энергии на выделение джоулева тепла, которое обязательно выделялось бы при затухании индукционных токов Фуко в проводящей ферромагнитной среде.

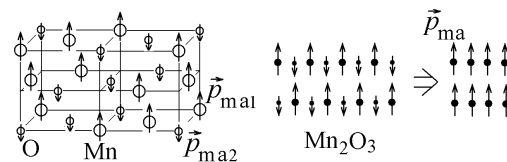


Рис.102

Магнитные моменты разных атомов  $\vec{p}_{ma}$  значительно отличаются по величине. Магнитные моменты групп соседних атомов, как и в ферромагнетиках, будут направлены в одну сторону (рис.102). Это приводит к появлению огромного магнитного момента  $\vec{p}_m = \sum \vec{p}_{ma}$  всего феррита (рис.103,а). Поэтому феррит делится на домены – участки кристаллической решетки с размером  $d \sim 10^{-4} \div 10^{-6}$  м, в которых магнитные моменты атомов под действием обменных сил ориентированы параллельно, но в соседних доменах их направления противоположны (рис.103,б). В результате индукция магнитного поля  $\vec{B}$  в феррите сильно уменьшена и практически равна нулю, если феррит не намагничен.

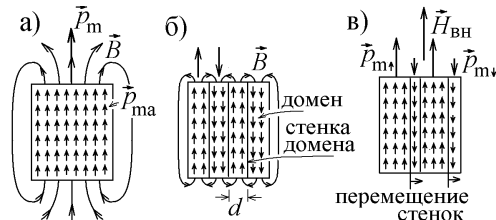


Рис.103

Без ферритового сердечника текущий по катушке ток  $I$  создаёт внутри неё, в воздушном пространстве, поле с индукцией  $B_I = \mu_0 IN / (2\pi r)$ . Магнитные моменты доменов в ферритовом сердечнике имеют в этом поле энергию  $W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}_I$ . Домены, ориентированные по полю, имеют меньшую энергию  $W_{\uparrow} = -p_{m\uparrow} B_I \cos 0^\circ = -p_{m\uparrow} B_I$ , чем домены, ориентированные против поля,  $W_{\downarrow} = -p_{m\downarrow} B_I \cos 180^\circ = +p_{m\downarrow} B_I$ . Домены с меньшей энергией начинают расти, а домены с большей энергией – уменьшаться в размерах. При этом атомы феррита не смещаются, а направления их магнитных моментов  $\vec{p}_{ma}$  слоями меняют направление (рис.103,в). Происходит перемещение стенок (границ) доменов. Не скомпенсированные магнитные моменты доменов создают дополнительное магнитное поле  $\vec{B}_d$ , которое складывается с магнитным полем тока:  $\vec{B} = \vec{B}_d + \vec{B}_I$ .

Дополнительное поле, созданное магнитными моментами атомов среды характеризуют вектором намагниченности  $\vec{J} = \sum_{\text{ед } V} \vec{p}_{ma}$  – это сумма магнитных моментов атомов в единице объёма среды. В ферромагнетиках и ферритах

$\vec{B} = \vec{B}_I + \mu_0 \vec{J}$ , но между векторами  $\vec{B}_I$  и  $\vec{J}$  нет линейной зависимости. С ростом поля  $B_I$  скорость переориентации доменов вначале растёт, достигает максимума при  $B_I = B_K$  (соответствующее значение напряженности  $H_K = B_K / \mu_0$  называется коэрцитивной силой), а при больших величинах  $B_I$  все домены будут переориентированы по направлению поля  $\vec{B}_I$  (насыщение). Зависимость индукции поля  $B$  в феррите от величины  $B_I$  станет линейной (рис.104,а). Такая зависимость называется кривой намагничивания Столетова.

Считая, что поле в среде возрастает пропорционально величине магнитной проницаемости  $\mu$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{B}_I$ , получаем зависимость  $\mu$  феррита от величины магнитного поля тока или от величины тока  $I$ , пропускаемого по виткам катушки (рис.104,б). При больших величинах  $I$   $\mu \rightarrow 1$ , т.е. феррит ведет себя как парамагнетик. Так как  $L \sim \mu$ , то экспериментально определяемый график  $L = L(I)$ , если пренебречь сопротивлением провода катушки  $R_K \approx 0$ , должен иметь ту же форму, что и график  $\mu = \mu(I)$  (рис.104,в).

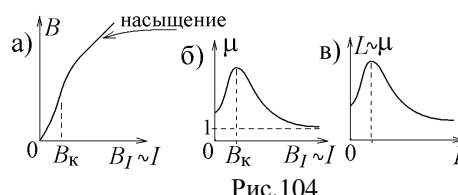


Рис. 104

#### Порядок выполнения работы

1. Разберитесь в электрической схеме установки (рис.100). Определите цену деления каждого из измерительных приборов.

2. Включите установку в сеть.

3. Изменяя напряжение на тороиде с помощью потенциометра  $R$ , измерьте зависимость тока  $I$  от напряжения  $U$  (не менее 10 значений). Для замыкания цепи на установке служит кнопка  $S$ . Занесите полученные величины в таблицу.

4. Выключить установку из сети. Получите подпись преподавателя после завершения эксперимента.

5. По формуле (122) подсчитайте эквивалентную индуктивность тороида при всех снятых значениях тока и напряжения. Результаты занести в таблицу.

7. Постройте график зависимости  $L = f(I)$ .

#### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 28

1. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора магнитной индукции и с её помощью определите величину индукции  $B$  магнитного поля внутри тороидальной катушки с ферритовым сердечником. Одинакова ли величина  $B$  во всех точках сердечника?

	$I, A$	$U, B$	$L, Гн$
1			
2			
.....			
10			



2. Какая величина называется индуктивностью? В каких единицах она измеряется? Как связать индуктивность тороидальной катушки с величиной индукции магнитного поля внутри неё?
3. Какая величина называется магнитной проницаемостью ферритового сердечника? К какому значению она стремится, если феррит поместить в очень сильное магнитное поле?
4. Получите формулу индуктивности катушки. Почему в данной работе важна её зависимость от магнитной проницаемости сердечника?
5. Почему амперметр и вольтметр в данной работе измеряют не истинные, а эффективные (действующие) значения тока  $I$  и напряжения  $U$ ? Какая величина называется эффективным значением тока (напряжения)?
6. Запишите правило Кирхгофа для цепи, в которой катушка подключена к источнику переменной ЭДС, и получите с его помощью расчетную формулу (122).
7. Почему сердечник катушки изготовлен из феррита, а не из стали с большим значением магнитной проницаемости?
8. Почему феррит самопроизвольно делится на домены? Что такое домен?
9. Какая величина называется вектором намагниченности?
10. Сердечник из феррита находится во внешнем магнитном поле  $B_I$ , созданном током, текущим по катушке. Как найти индукцию магнитного поля в феррите? Почему она не меняется прямо пропорционально  $B_I$ ?
11. Объясните, как намагничивается феррит при увеличении тока  $I$  в катушке? Что происходит с доменами? Когда возникает насыщение? Что такое кривая намагничивания Столетова?
12. Объясните вид экспериментального графика  $L = L(I)$ , получаемого в данной работе. По какой причине индуктивность катушки зависит от тока  $I$ ? Каким получится график зависимости, если убрать сердечник?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 42-44, 50, 54, 55, 56, 59.
2. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм,- изд. ТулГУ. 2008, гл.7 §9, гл.9 §§4,6.
3. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Электромагнетизм и оптика,- изд. ТулГУ. 2010, гл.I §§ 3,4-5.
4. Колмаков Ю. Н., Левин Д.М., Семин В.А. Основы физики конденсированных сред и физики микромира: Ч.1, - изд. ТулГУ. 2014, §§7.3-7.6.

## Работа №29. Исследование электрических затухающих колебаний с помощью осциллографа

**Цель работы:** ознакомление с методом получения затухающих электрических колебаний и определение параметров колебательного контура с помощью осциллографа.

### Теоретическое описание

Электрическая схема установки приведена на рис.105. Генератор создает импульсы напряжения  $U_{\text{и}}$  практически прямоугольной формы, которые с периодом  $T_{\text{и}}$  подаются на конденсатор электрического колебательного контура, подключенный тумблером  $K_1$ . Длительность импульса  $\tau$  очень мала ( $\tau \ll T_{\text{и}}$ , см.

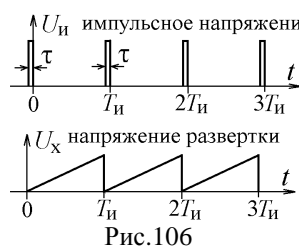


Рис.106

рис.106), но за это время конденсатор с ёмкостью  $C$  успевает зарядиться, и на его обкладках оказывается заряд  $q_0 = CU_0$ . Затем конденсатор разряжается и в цепи колебательного контура возникает переменный ток. На клеммы вертикальной развертки "Y" осциллографа подается напряжение  $U_y$ , создаваемое на концах катушки с индуктивностью  $L_0$  (см.рис.105). Получим зависимость этого напряжения от времени.

**Вывод расчетной формулы.** Электрический колебательный контур – это цепь, обладающая ёмкостью  $C$ , индуктивностью  $L$  и омическим сопротивлением  $R$  (рис.107). Генератор импульсов подключается к этой цепи только на время зарядки конденсатора. Остальное время ( $T_{\text{и}} - \tau$ ) в цепи контура имеется единственная ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_c$  в катушке  $L$ . Правило Кирхгофа для такого контура  $U_R + U_C = \mathcal{E}_c$ . После подстановки выражений для падения напряжения на сопротивлении  $U_R = IR$ , на конденсаторе  $U_C = q/C$ , для ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_c = -L di/dt$ , а также определения тока  $I = dq/dt$ , получаем уравнение собственных затухающих колебаний заряда на конденсаторе:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \beta = \frac{R}{2L}. \quad (123)$$

Параметр  $\beta$  называют коэффициентом затухания колебаний.

Решение этого уравнения имеет вид  $q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t)$  (при  $t = 0$  заряд на конденсаторе максимален и равен

$q_0$ ).  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$  – циклическая частота затухающих колебаний. Их период  $T = 2\pi/\omega$ , а также скорость затухания колебаний зависит от величин ёмкости конденсаторов и сопротивлений резисторов, подключаемых тумблерами  $K_1$  и  $K_2$  (рис.105). В частности, при очень большой величине сопротивления  $R$  или большой величине ёмкости  $C$ , ко-

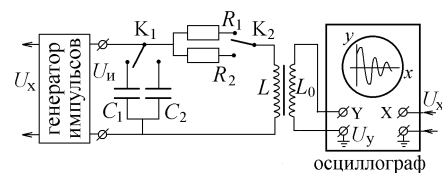


Рис.105

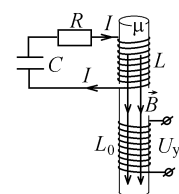


Рис.107

гда  $\omega_0^2 \leq \beta^2$ , или  $R \geq R_{кр} = 2\sqrt{L/C}$ , колебания возникать не могут (величина сопротивления  $R_{кр}$  называется критической).

Ток в цепи выразится как  $I(t) = dq/dt = -\beta q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t) - \omega q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t)$ . Вводя обозначения

$$\sin \alpha = -\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}, \quad \text{учтем, что } \sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0, \text{ и } \cos(\theta + \alpha) = \sin \alpha \sin \theta - \cos \alpha \cos \theta. \text{ Получаем}$$

$I(t) = q_0 \omega_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$  - колебания тока в цепи контура опережает по фазе колебания напряжения  $U_C = q(t)/C$  на конденсаторе на величину  $\alpha$ .

В катушке индуктивности  $L$  создается магнитное поле с индукцией, величина которой пропорциональна величине тока, протекающего по виткам катушки,  $B \sim I(t)$ . Линии индукции пронизывают витки другой катушки с индуктивностью  $L_0$ , и создают в ней переменный магнитный поток, также пропорциональный величине тока  $\Phi_0 \sim B \sim I(t)$ .

Падение напряжения на концах катушки  $L_0$ , если пренебречь омическим сопротивлением её витков, будет равно ЭДС взаимной индукции  $\mathcal{E}_{вз} = -d\Phi_0/dt = -L_{вз} dI/dt$ , где  $L_{вз}$  - коэффициент взаимной индуктивности. Изменение тока в одном замкнутом контуре приводит к появлению ЭДС в другом, соседнем замкнутом контуре. Величину индуктивной связи между катушками (величину коэффициента  $L_{вз}$ ) обычно увеличивают, наматывая витки катушек на общий ферритовый сердечник с большой величиной магнитной проницаемости  $\mu$  (рис.107).

Подставляя полученное выше выражение для тока  $I(t)$ , находим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{вз} &= L_{вз} q_0 \omega_0 (\beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + \omega e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha)) = \\ &= L_{вз} q_0 \omega_0^2 e^{-\beta t} (\cos \alpha \cos(\omega t + \alpha) - \sin \alpha \sin(\omega t + \alpha)) = L_{вз} q_0 \omega_0^2 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \pi + 2\alpha). \end{aligned}$$

Напряжение, подаваемое на клеммы вертикальной развертки “Y”,  $U_y = \mathcal{E}_{вз} = \underbrace{U_{y0} e^{-\beta t}}_{\text{амплитуда}} \cos(\omega t + \delta)$ , где  $U_{y0} = L_{вз} q_0 \omega_0^2$  (рис.108), меняется со временем по тому же закону, что и колебания

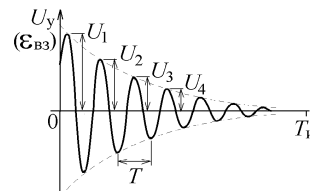


Рис.108

заряда на конденсаторе, но сдвинуто по фазе на  $\delta = \pi + 2\alpha$ . На клеммы горизонтальной развертки “X” осциллографа подается пилообразное напряжение  $U_x$ , период изменения которого совпадает с периодом появления импульсов  $T_H$  (рис.106). За это время колебания напряжения  $U_y$ , происходящие с меньшим периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = 2\pi / \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (124)$$

успевают затухнуть, и на экране осциллографа видна картина, показанная на рис.108.

Горизонтальная ось развертки калибрована в единицах времени, указанных на панели осциллографа, что позволяет определить временной интервал  $T$  между двумя соседними максимумами графика (рис.108), т.е. экспериментально определяемый период затухающих колебаний.

Затухание колебаний характеризуют величиной логарифмического декремента затухания  $\theta$  - это натуральный логарифм отношения амплитуды колебаний в момент времени  $t$  к амплитуде через период:

$$\theta = \ln \left( \frac{U_{y0} e^{-\beta t}}{U_{y0} e^{-\beta(t+T)}} \right) = \ln(e^{+\beta T}) = \beta T. \text{ Подставляя (123) и (124) находим, что } \theta = \pi / \sqrt{\frac{L}{CR^2} - \frac{1}{4}} \quad (125)$$

Но можно воспользоваться другой формулой для вычисления  $\theta$ . Через каждый период амплитуда колебаний уменьшается в  $e^{\beta T}$  раз:  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_2}{U_3} = \dots = \frac{U_{n-1}}{U_n} = e^{\beta T}$  (величины амплитуд  $U_n$  показаны на рис.108). Отсюда

$$\frac{U_1}{U_n} = \frac{e^{\beta T} \cdot e^{\beta T} \cdot \dots \cdot e^{\beta T}}{n-1 \text{ раз}} = e^{(n-1)\beta T}. \text{ Получили другую формулу для вычисления } \theta:$$

$$\theta = \frac{1}{n-1} \ln \left( \frac{U_1}{U_n} \right). \quad (126)$$

Однако, в радиотехнике используют другую величину, обратную к  $\theta$  и также характеризующую быстроту затухания электрических колебаний - добротность контура

$$Q = \pi / \theta. \quad (127)$$

Эта величина пропорциональна отношению запасенной в контуре энергии к энергии, теряемой за период  $T$  в виде джоулева тепла, выделяющегося на активном сопротивлении  $R$ . Чем выше добротность  $Q$  колебательного контура, тем медленнее затухают в нём электрические колебания. В приёмных радиотехнических устройствах контуры с большой добротностью используют для выделения и усиления электромагнитных сигналов с определенной частотой  $\omega$ , соответствующей резонансу колебаний.

Подставляя в определение добротности формулу (125), находим теоретическую расчетную формулу для вычис-

ления добротности:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - \frac{1}{4}}. \quad (128)$$

#### Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с электрической схемой установки.  
2. Подключить в контур конденсатор с ёмкостью  $C = C_1$  и резистор с сопротивлением  $R = R_1$  (рис.105). Включить установку в сеть. Включить осциллограф. Добиться на экране осциллографа изображения затухающих колебаний (рис.108).

3. Измерить величину периода колебаний  $T$  в делениях, нанесенных на экране осциллографа вдоль горизонтальной оси (это расстояние между соседними максимумами или минимумами кривой, рис.108). На панели осциллографа найти регулятор горизонтальной (временной) развертки, указывающий на цену одного деления в единицах времени (ms или  $\mu$ s). Умножив величину  $T$  в делениях на цену одного деления получить экспериментально определенную величину периода колебаний  $T_{\text{эксп}}$ .

4. Перерисовать кривую изображения затухающих колебаний (рис.108) с экрана осциллографа на лист миллиметровой бумаге в масштабе 1:1, тщательно соблюдая все размеры (или вначале сфотографировать кривую на экране, а затем распечатать полученную фотографию на компьютере).

5. Подключить в контур конденсатор с ёмкостью  $C = C_2$  и резистор с сопротивлением  $R = R_2$ . Величины ёмкостей и сопротивлений, а также величина индуктивности  $L$  указаны на установке, занести их в таблицу 1. Добиться на экране осциллографа нового изображения затухающих колебаний.

Таблица 1

$C$ , мкФ	$L$ , Гн	$R$ , Ом	$\omega_0$ , с <sup>-1</sup>	$\beta$ , с <sup>-1</sup>	$T_{\text{теор}}$ , с	$\theta_{\text{теор}}$	$Q_{\text{теор}}$

6. Повторить выполнение пунктов 3 и 4, получая новый график и новое значение  $T_{\text{эксп}}$ .

7. Выключить питание осциллографа и выключить установку.

8. По нарисованным на двух графиках кривым измерить линейкой амплитудные значения  $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots$  в миллиметрах (эти значения отсчитываются от горизонтальной оси, соответствующей значению  $U = 0$ , к которой будут сходиться колебания, и которую надо нанести на графике). Занести их в таблицу 2.

Таблица 2.

$C$ , мкФ	$L$ , Гн	$R$ , Ом	$n$	$U_1$ , мм	$U_n$ , мм	$\theta$	$\langle \theta \rangle = \theta_{\text{эксп}}$	$T_{\text{эксп}}$ , с	$Q_{\text{эксп}}$
			2						
			3						
			4						
			2						
			3						
			4						

9. По формуле (126) вычислить логарифмический декремент затухания  $\theta$  для  $n = 1, 2, 3$  (не менее трех раз для каждого из двух графиков).

10. Рассчитать его среднее значение, полученное в эксперименте  $\langle \theta \rangle = \theta_{\text{эксп}}$ . По формуле (127) вычислить добротность контура, найденную экспериментальным методом  $Q_{\text{эксп}} = \pi / \langle \theta \rangle$ . Результаты вычислений занести в таблицу 2.

11. По формулам (123), (124), (125) и (128) вычислить расчетные значения частоты  $\omega_0$ , коэффициента затухания  $\beta$ , периода колебаний  $T_{\text{теор}}$ , логарифмического декремента  $\theta_{\text{теор}}$  и добротности  $Q_{\text{теор}}$  для каждого из двух опытов. Результаты вычислений занести в таблицу 1.

12. Сравнить величины  $T$ ,  $\theta$  и  $Q$ , полученные экспериментальным методом (таблица 2) и вычисленных по теоретическим формулам (таблица 1).

#### Контрольные вопросы к лабораторной работе № 29

- Какая цепь называется электрическим колебательным контуром?
- Запишите правило Кирхгофа для замкнутой цепи, содержащей конденсатор с ёмкостью  $C$ , катушку с индуктивностью  $L$  и резистор  $R$  и приведите его к дифференциальному уравнению собственных затухающих колебаний заряда на конденсаторе.
- Запишите выражения для коэффициента затухания, циклической частоты и периода таких колебаний. Как они зависят от параметров  $C$ ,  $L$  и  $R$ ?
- Что происходит с величиной периода (частоты) собственных колебаний при увеличении сопротивления  $R$ ? при увеличении ёмкости  $C$ ?
- Чему равно критическое сопротивление контура  $R_{\text{кр}}$ ? Что происходит с колебаниями при  $R \geq R_{\text{кр}}$ ?
- Запишите выражение зависимости колебаний заряда  $q$  на конденсаторе и падения напряжения  $U_C$  на его обкладках от времени.

7. Получите зависимость величины тока  $I$  в контуре от времени. Чему равен сдвиг фаз между колебаниями  $U_C$  и  $I$ ?
8. Как изменяются со временем амплитуды колебаний  $U_C$  и  $I$ ?
9. Какая величина называется логарифмическим декрементом затухания колебаний  $\theta$ ? Выразите величину  $\theta$  через параметры  $C$ ,  $L$  и  $R$ .
10. В электрическом колебательном контуре сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$  увеличили в два раза. Во сколько раз надо изменить ёмкость  $C$ , чтобы логарифмический декремент затухания колебаний не изменился?
11. Как вычислить добротность колебательного контура? Что характеризует величина добротности?
12. Как определяется величина ЭДС взаимной индукции? Какова роль этой ЭДС в данной работе?
13. Объясните, как возникает картина затухающих колебаний на экране осциллографа? Какова роль генератора прямоугольных импульсов?
14. Объясните, как определить величину логарифмического декремента затухания  $\theta$  по картине, наблюдаемой на экране?
15. Каким образом по данной картине можно определить величину периода затухающих колебаний?
16. Период собственных затухающих колебаний в электрическом колебательном контуре  $T = 2$  мс. За время  $\Delta t = 10$  мс амплитуда таких колебаний уменьшается в  $e = 2,71828$  раз. Чему равен логарифмический декремент затухания колебаний?
17. В контуре с заданными параметрами  $C$  и  $R$  изменяют индуктивность  $L$ . При каком значении  $L$  циклическая частота собственных колебаний имеет максимальную величину? Чему равна  $\omega_{\max}$ ?

### Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 59, 62, 99, 100.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Электромагнетизм и оптика,- изд. ТулГУ. 2010, гл. I §§4,5, гл.3 §2.

## Работа №30. Определение характеристик колебательного контура методом резонанса

**Цель работы:** экспериментальное исследование особенностей явления резонанса в электрическом колебательном контуре, условий его возникновения и определение основных характеристик колебательного контура методом резонанса.

### Теоретическое описание

Электрическая схема лабораторной установки показана на рис.109. Источник переменной ЭДС с амплитудой  $\mathcal{E}_0$  и циклической частотой  $\omega$  включен в цепь электрического колебательного контура, состоящую из катушки с индуктивностью  $L$ , конденсатора с переменной ёмкостью  $C$  и резистора с сопротивлением  $R$ .

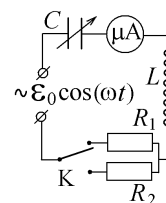


Рис.109

Правило Кирхгофа для такой замкнутой цепи имеет вид  $U_R + U_C = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ , где  $U_R = IR$  – падение напряжения на резисторе,  $U_C = q/C$  – падение напряжения на конденсаторе с зарядом  $q$ ,  $\mathcal{E}_c = -L dI/dt$  – ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке. Подставляя выражение тока  $I = dq/dt$ , созданного изменением заряда на конденсаторе, получаем уравнение вынужденных электрических колебаний

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos(\omega t), \quad \text{где } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \beta = \frac{R}{2L}.$$

Подставляя в это уравнение выражение для установившихся колебаний заряда, происходящих с частотой внешней ЭДС и с амплитудой  $A$ , не зависящей от времени,  $q = A \cos(\omega t - \varphi)$ , приходим к равенству

$$\begin{aligned} A\omega^2 (-\cos(\omega t - \varphi)) + 2\beta A\omega (-\sin(\omega t - \varphi)) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) &= \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos(\omega t) \\ = \cos(\omega t - \varphi + \pi) &= \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) \end{aligned}$$

Три колебания с одинаковой частотой  $\omega$  и разными начальными фазами в левой части этого уравнения складываем методом векторной диаграммы (рис.110), получая в результате сложения вектор, соответствующий правой части. Из прямоугольного треугольника на этом рисунке следует,

что  $A^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta A\omega)^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{L^2}$ ;  $\tan \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ . Отсюда видно, что амплитуда вынужденных колебаний заряда на конденсаторе зависит от частоты переменной ЭДС:

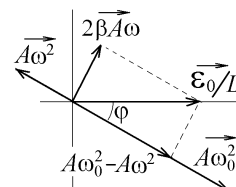


Рис.110

$$A(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Такая же зависимость от частоты  $\omega$  будет у амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе  $U_C = q/C$  (рис.111,а).

Находя ток в цепи,  $I = dq/dt = -A\omega \sin(\omega t - \varphi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$ , видим, что колебания тока опережают колебания напряжения  $U_C$  по фазе на  $\pi/2$ . Амплитуда тока  $I_0(\omega) = A(\omega)\omega = \frac{\mathcal{E}_0}{\frac{L}{\omega} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}}$

также зависит от частоты  $\omega$  (рис.111,б). Её связывают с амплитудой ЭДС внешнего источника формулой, аналогичной закону Ома в цепи постоянного тока:  $I_0 = \mathcal{E}_0 / Z$ , где величину

$$Z(\omega) = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}$$

называют полным сопротивлением цепи переменному току. Записанная формула связывает амплитуды тока и ЭДС. Сопротивление  $X_C = 1/\omega C$  называется ёмкостным сопротивлением, а  $X_L = \omega L$  - индуктивным сопротивлением (эти сопротивления называют реактивными).

Амплитуды падения напряжения на конденсаторе  $U_{C0} = q_{\max}/C = X_C I_0$  и на катушке индуктивности (если  $R_{\text{катушки}} = 0$ ),  $U_{L0} = |-L di/dt|_{\max} = X_L I_0$  связаны с амплитудой тока  $I_0$  реактивными сопротивлениями. Но, поскольку колебания  $U_C$  и  $U_L$  сдвинуты по фазе относительно колебаний тока на величину  $\pi/2$ , то средняя мощность тока для них равна нулю. Например,  $P_C = \frac{1}{T} \int_0^T U_C I dt \sim \int_0^T \cos(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi) dt = 0$ . При протекании переменного тока на реактивных сопротивлениях не выделяется джоулево тепло.

На обычном омическом сопротивлении  $R$  резистора, которое называется активным сопротивлением, выделяется

средняя мощность  $P_R = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 R \cos^2(\omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} I_0^2 R$ . Амперметр в цепи (рис.109) измеряет не амплитудное, а эффективное или действующее значение тока  $I_{\text{эфф}} = I_0/\sqrt{2}$ . Это величина такого постоянного тока, который вы-

деляет в цепи ту же мощность, что и переменный ток с амплитудой  $I_0$ .

Из рис.111 видно, что при некоторой частоте внешней ЭДС наблюдается явление резонанса – резкое увеличение амплитуды тока в цепи или амплитуды напряжения на конденсаторе. Такая частота называется резонансной частотой  $\omega_{\text{рез}}$  и определяется из условия максимума. Для напряжения на конденсаторе амплитуда  $U_{C0} = A(\omega)/C$  максимальна

при минимальном значении знаменателя:  $\frac{d}{d\omega} \left( \left( \omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right) = 0$ , что дает  $\omega_{\text{рез}U_C} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$  – резонансная частота для амплитуды заряда или напряжения на конденсаторе. Амплитуда тока максимальна, если  $\frac{1}{C\omega} - L\omega = 0$ , т.е.  $\omega_{\text{рез}I} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансная частота для амплитуды тока в цепи.

Обычно резонанс используется в контурах с очень малым коэффициентом затухания  $\beta \ll \omega_0$ , для которых  $\omega_{\text{рез}U_C} \approx \omega_{\text{рез}I} = 1/\sqrt{LC}$ . Резонансные свойства колебательного контура определяются двумя характеристиками. Это волновое или характеристическое сопротивление контура  $\rho$  – величина его ёмкостного (или индуктивного) сопротивления при резонансной частоте:  $\rho = X_{C\text{рез}} = X_{L\text{рез}} = L\omega_{\text{рез}I}$ , т.е.  $\rho = \sqrt{L/C}$ .

Другая характеристика – добротность  $Q$  контура. Это – отношение амплитуды напряжения на индуктивности (или на конденсаторе) к амплитуде ЭДС при резонансе:  $Q = \frac{U_{L0}}{\mathcal{E}_0} = \frac{X_L I_0}{\mathcal{E}_0} = \frac{L\omega_{\text{рез}I} I_0}{I_0 R}$ , т.е.  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$ .

Чем больше добротность, тем выше и уже ширина резонансных кривых на рис.111. Ширина  $\Delta\omega$  резонансной кривой на высоте  $0,7 \cdot I_{0\max}$  приблизительно равна  $\Delta\omega \approx \omega_0/Q \approx R/L$  (рис.111,б). В приемных устройствах надо использовать контуры с очень большой добротностью и малым затуханием колебаний, чтобы выделить и усилить сигнал с определенной частотой, попадающей в интервал  $\Delta\omega$ . В технике добротность определяют как величину, пропорциональную отношению запасенной в контуре энергии к энергии, теряемой за период  $T$  в виде джоулева тепла, выделяющегося на

активном сопротивлении  $R$ :  $Q \sim \frac{LI_0^2}{2} \bigg/ \left( \frac{RI_0^2}{2} T \right)$ .

В данной работе источник ЭДС имеет постоянную частоту  $\omega = 2\pi\nu$ , где  $\nu = 50$  Гц. Строится зависимости тока в цепи от переменной ёмкости  $C$  включенного в цепь конденсатора. При выполнении условия резонанса тока  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  или  $C_{\text{рез}} = 1/(\omega^2 L)$  амплитуда тока будет максимальна (рис.112), что позволяет рассчитать:

индуктивность цепи  $L = 1/(C_{\text{рез}} \omega^2)$ , (129)

её волновое сопротивление  $\rho = \sqrt{L/C_{\text{рез}}}$  (130)

и добротность колебательного контура  $Q = \rho/R$ . (131)

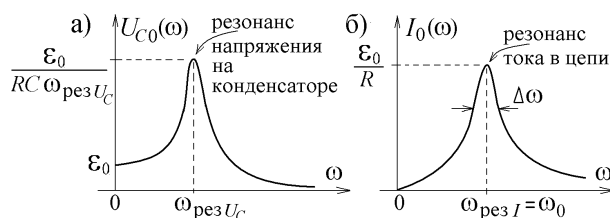


Рис.111

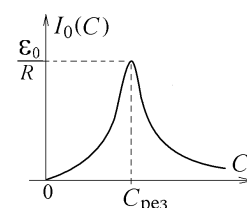


Рис.112

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться со схемой установки (рис.109).
2. Включить установку и переключателем подключить в цепь резистор с сопротивлением  $R_1$  (величины сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  указаны на установке).
3. Снять резонансную кривую, т.е. изменяя значения емкости конденсатора  $C$ , измерять показания микроамперметра, который показывает эффективное значение тока  $I_{эфф}$ , и данные заносить в таблицу 1.
4. Переключателем включить в контур другой резистор с сопротивлением  $R_2$  и снять вторую резонансную кривую, повторяя действия пункта 3.

Таблица 1.

Деления на конденсаторе												
$C$ , пФ												
$I_{эфф}$ , мкА (для $R_1$ )												
$I_{эфф}$ , мкА (для $R_2$ )												

5. По данным таблицы 1 в одних координатных осях (на одном листе) построить два графика резонансных кривых  $I_{эфф} = f(C)$  для двух сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ .

6. По двум резонансным кривым определить значения емкости  $C_{рез}$ , соответствующие максимальному значению тока  $I_{эфф} = I_0 / \sqrt{2}$ .

7. Определить индуктивность контура  $L$  по формуле (129). Резонансная частота для тока в данном случае совпадает с частотой переменного тока в цепи:  $\omega_{рез} = 2\pi\nu_0$ . Частота этого тока  $\nu_0$  указана на установке. При аккуратных измерениях величины рассчитанной индуктивности  $L$  в пределах погрешностей должны совпадать.

8. Рассчитать волновое сопротивление контура  $\rho$  по формуле (130).

9. Рассчитать добротность контура  $Q$  по формуле (131).

10. Все результаты вычислений занести в таблицу 2.

Таблица 2.

$C_{рез}$ , пФ	$\omega_{рез}$ , с <sup>-1</sup>	$L$ , Гн	$R$ , Ом	$\rho$ , Ом	$Q$

Контрольные вопросы к лабораторной работе № 30

1. Какая цепь называется электрическим колебательным контуром?
2. Нарисуйте замкнутую цепь, содержащую конденсатор с ёмкостью  $C$ , катушку с индуктивностью  $L$ , резистор  $R$  и источник тока с переменной ЭДС  $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ . Запишите правило Кирхгофа с учетом ЭДС самоиндукции в катушке и приведите его к дифференциальному уравнению вынужденных электрических колебаний.
3. Какова амплитуда и частота вынужденных колебаний? С помощью метода векторной диаграммы получите выражения для амплитуды напряжения  $U_C$  на конденсаторе и амплитуды силы тока  $I$  в цепи.
4. Какова разность фаз между вынужденными колебаниями  $U_C$  и  $I$ ?
5. Какие величины называются индуктивным, ёмкостным, активным и полным сопротивлением цепи переменному току?
6. Какая величина называется эффективным (действующим) значением тока (напряжения)? На каких элементах цепи выделяется эффективная мощность?
7. Какое явление называется резонансом? Что такое резонансная частота и как её вычислить?
8. Резонанс какой величины наблюдается в данной работе?
9. Найти резонансную частоту для колебаний заряда на конденсаторе.
10. Найти резонансную частоту для колебаний силы тока в цепи.
11. Частоту внешнего источника ЭДС постепенно увеличивают. Резонанс какой величины,  $U_C$  или  $I$ , наступит раньше?
12. Какая величина называется волновым сопротивлением контура? Как её вычислить?
13. Какая величина называется добротностью электрического колебательного контура?
14. Что происходит с кривой амплитудно-частотной характеристики тока (рис.2.43,б) при увеличении активного сопротивления  $R$  цепи?
15. Почему в радиоприемниках надо использовать приемный контур с высокой добротностью?

Литература

1. Савельев И.В. Курс физики в 3-х тт.: Т. 2: Электричество - М.: Наука, 1970.- §§ 59, 100, 101.
2. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Электромагнетизм и оптика,- изд. ТулГУ. 2010, гл.1 §4, гл.3 §§2-4.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савельев И.В. Курс физики : учеб. пособие для вузов : в 3 т.: Т. 1: Механика. Молекулярная физика/ И. В. Савельев . — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург, Москва, Краснодар : Лань, 2008.— 352 с. — ISBN 978-5-8114-0685-2 (Том 1).
- Савельев И.В. Курс физики. В 3-х тт. Т.1. Механика. Молекулярная физика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ — Электрон.текстовые данные. — СПб, М.: Лань, 2017. — 356 с. — Режим доступа: [https://e.lanbook.com/book/95163#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/95163#book_name).— ЭБС “Лань”, по паролю.
2. Савельев И.В. Курс физики : учеб. пособие для вузов : в 3 т.: Т. 2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика / И. В. Савельев . — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург, Москва, Краснодар : Лань, 2008 .— 468 с. — ISBN 978-5-8114-0686-9 (Том 2).
- Савельев И.В. Курс физики. В 3-х тт. Т.2. Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ — Электрон.текстовые данные. — СПб, М.: Лань, 2018. — 468 с. — Режим доступа: [https://e.lanbook.com/book/100927#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/100927#book_name).— ЭБС “Лань”, по паролю.
3. Чертов А.Г., Воробьев А.А., под ред. Общая физика (для бакалавров) [Электронный ресурс]: учебное пособие/— Электрон.текстовые данные. —М.: КноРус, 2016. — 800 с. — ISBN 978-5-406-05760-5 —Режим доступа: <https://www.book.ru/book/922169>.— ЭБС “BOOK.ru”, по паролю.
4. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лагун И.М., Лежнева Л.С. Механика и теория относительности : лекции по физике : учеб. пособие [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2010.— 180 с. — ISBN 5-7679-0213-5. — Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014112718061265516800007818>. – ЭБС “БиблиоТех”, по паролю.
5. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Термодинамика и молекулярная физика. Лекции по физике : учеб. пособие [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2008 .— 139 с. : ил.— ISBN 978-5-7679-1221-6. .- Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014112810265189549100005390>. – ЭБС “БиблиоТех”, по паролю.
6. Колмаков Ю. Н., Пекар Ю. А., Лагун И. М. Электричество и магнетизм : лекции по физике [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2008 .— 140 с. — ISBN 5-7679-0186-4. .- Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014112810334538607700008298>. – ЭБС “БиблиоТех”, по паролю.
7. Колмаков Ю.Н., Пекар Ю.А., Лежнева Л.С. Электромагнетизм и оптика : лекции по физике [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула, 2010 .— 130 с. : ил .— ISBN 5-7679-0187-2. .- Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014112810384275951700003447>. – ЭБС “БиблиоТех”, по паролю.