МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
общеобразовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Вычислительная механика и математика»

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 14 » января 2021 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой
________________________________В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий по дисциплине (модулю)

" Интегралы. Дифференциальные уравнения. Ряды." (Математика-3)

Основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
12.03.02 Оптотехника

с направленностью (профилем)
Оптико-электронные приборы и системы

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 120302-01-21

Тула 2021 год

Разработчик методических указаний

Кузнецова В.А.,к.ф.-м.н., доцент___________ __________________

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

ИНТЕГРАЛЫ

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (u(x)+v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$.

2. $\int A\cdot f(x)dx = A\cdot\int f(x)dx$, где A − постоянная.

3. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u)+C$.

Таблица простейших интегралов:

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $\quad \int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0)$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C, (A \neq 0)$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

Основные методы интегрирования:

1. Подведение под знак дифференциала:

а) под знаком дифференциала можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) + A)$;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель: $df(x) = \frac{1}{A} d(Af(x))$; в) под знак дифференциала подводится функция по правилу: $f'(x)dx = df(x)$.

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$\int udv = uv - \int vdu$, где $u = u(x), v = v(x)$.

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а) $\int a^x \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = a^x dx$.

б) $\int \sin ax \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \sin axdx$.

в) $\int \cos ax \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \cos axdx$,

где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, где $x = \varphi(t)$.

Пример выполнения задания.

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; б) $\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx$; в) $\int (3x + 4)e^{3x} dx$.

Решение.

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + (-0{,}5)\int (1-x^2)^{-0{,}5} d(1-x^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - 0{,}5 \cdot \frac{(1-x^2)^{0{,}5}}{0{,}5} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C.$$

б) в этом случае подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 17 & \underline{x^2 - 4x + 3} \\
\underline{x^3 - 4x^2 + 3x} & x + 4 \\
4x^2 - 3x - 17 & \\
\underline{4x^2 - 16x - 12} & \\
13x - 29 &
\end{array}$$

Тогда

$$\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3}dx = \int \left(x + 4 + \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} \right) dx = \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3}dx.$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x - 29}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}, \quad 13x - 29 = A(x-3) + B(x-1).$$

При $x = 3$ имеем $13 \cdot 3 - 29 = B(3-1)$, откуда $B = 5$;

при $x = 1$ имеем $13 \cdot 1 - 29 = A(1-3)$, откуда $A = 8$.

Получаем $\dfrac{13x - 29}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{8}{x-1} + \dfrac{5}{x-3}$ и интегрируем

$$\int \frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}dx = \int \frac{8}{x-1}dx + \int \frac{5}{x-3}dx = 8\int \frac{dx}{x-1} + 5\int \frac{dx}{x-3} = 8\ln|x-1| + 5\ln|x-3| + C$$

и окончательно получаем

$$\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + \ln|x-3| + C.$$

Замечание.

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\int \frac{A_1}{x-a}dx = A_1 \ln|x-a| + C; \qquad \int \frac{A_k}{(x-a)^k}dx = \frac{A_k}{(-k+1)}(x-a)^{-k+1} + C,$$

($k = 2,3,...$);

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

в) этот интеграл находим методом интегрирования по частям.

Примем $u = 3x+4$, $dv = e^{3x}dx$, тогда $du = 3dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int (3x+4)e^{3x}dx = (3x+4)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot 3dx = \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \int e^{3x}dx =$$

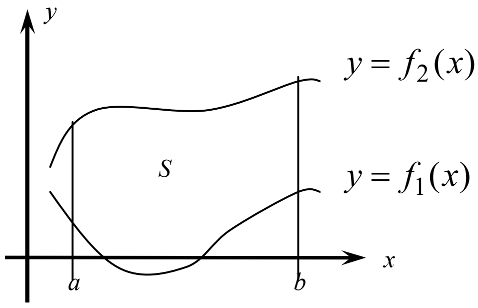
$$= \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3}e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C.$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1)+C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}(3x+4),$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Приложения определенных интегралов



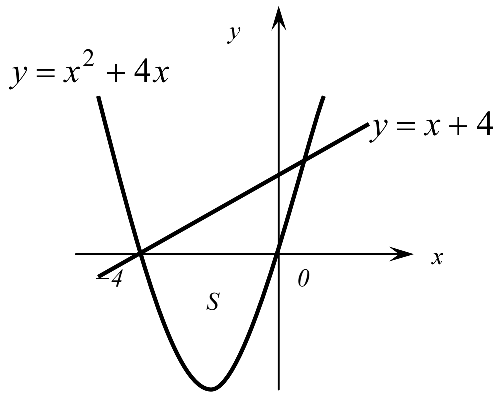
Если на плоскости Oxy задана фигура, ограниченная двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь S такой фигуры может быть вычислена по формуле $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$.

Пример выполнения задания.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение.

Заданные линии ограничивают на плоскости Oxy криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \ x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{-4}^{1}(x+4-x^2-4x)dx = \int(4-3x-x^2)dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \ (\textit{кв. ед.}).$$

Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью *Ox* и прямыми $x = a$, $x = b$,

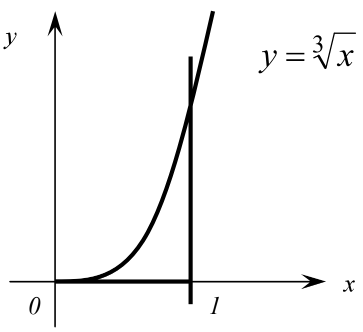
1) вокруг оси *Ox*, вычисляются по формуле $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$;

2) вокруг оси *Oy*, вычисляются по формуле $V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$.

Пример выполнения задания.

Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей *Ox* и *Oy* криволинейного треугольника, образованного кривой $y = \sqrt[3]{x}$, осью *Ox* и прямой $x = 1$.

Решение.



1) объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox*, равен

$$V_x = \pi\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \pi\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \ (\textit{куб. ед.})$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy*, равен

$$V_y = 2\pi\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{x}dx = 2\pi\frac{x^{7/3}}{7/3}\Bigg|_0^1 = \frac{6\pi}{7} (\textit{куб. ед.}).$$

Дифференциальные уравнения

Уравнения первого порядка

1) Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)\cdot g(y),$$

а так же в виде

$$M(x)\cdot N(y)d\,x = P(x)\cdot Q(y)d\,y.$$

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, а в другую только y, и затем проинтегрировать обе части.

Замечание. При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие эти выражения в ноль.

Пример Решить уравнение $x^2y^2y' + 1 = y$.

Решение. Приводим это уравнение к виду:

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1; \qquad x^2y^2d\,y = (y-1)d\,x.$$

Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}d\,y = \frac{d\,x}{x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y^2}{y-1}d\,y = \int\frac{d\,x}{x^2}; \qquad \int\left(y + 1 + \frac{1}{y-1}\right)d\,y = \int\frac{d\,x}{x^2};$$

$$\frac{y^2}{2} + y + ln|\,y-1\,| = -\frac{1}{x} + C.$$

При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y - 1 = 0$, т.е. $y = 1$. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение этих функций убеждаемся, что $y = 1$ – решение уравнения, а $x = 0$ – нет.

2) Однородные уравнения.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется однородным, если его можно записать в виде $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ или в виде $M(x,\,y)d\,x + N(x,\,y)d\,y = 0$, где $M(x,\,y),\ N(x,\,y)$ – однородные функции одной и той же степени k, т.е. $M(tx, ty) = t^k M(x, y)$ и $N(tx, ty) = t^k N(x, y)$ при любом k.

Чтобы решить однородное уравнение, можно сделать замену $y(x) = u(x) \cdot x$, после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

Пример Решить уравнение $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. Полагаем $y(x) = u(x) \cdot x$, тогда $y' = u' \cdot x + u$. Подставляя в уравнение, получим

$$u' \cdot x + u = e^u + u; \quad u' \cdot x = e^u; \quad x \cdot du = e^u d\,x \text{ или } e^{-u} du = \frac{d\,x}{x};$$

$$\int e^{-u} du = \int \frac{d\,x}{x}; \quad -e^{-u} = ln|\,x\,| - ln|\,C\,| \text{ или } e^{-u} = -ln|\,x\,| + ln|\,C\,|;$$

$$e^{-u}\, ln\left|\frac{C}{x}\right|; \quad -u = ln\left(ln\left|\frac{C}{x}\right|\right); \quad u = -ln\left(ln\left|\frac{C}{x}\right|\right).$$

Возвращаясь к старым переменным $x, y,$ получим:

$$\frac{y}{x} = -ln\left(ln\left|\frac{C}{x}\right|\right) \text{ или } y = -x\,ln\left(ln\left|\frac{C}{x}\right|\right).$$

3) Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения Бернулли.

Уравнения вида

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

называется линейным, заметим, что при $q(x) = 0$ линейное уравнение становится уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^{\alpha}$$

при $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ называется уравнением Бернулли (при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ получаем линейное уравнение).

Оба эти уравнения можно решить с помощью подстановки

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Пример Найти частное решение уравнения

$$y' - y \cdot tgx = \frac{1}{cos\,x}, \qquad y(0) = 1.$$

Решение. Используем подстановку $y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тогда уравнение принимает вид

$$u'\cdot v+u\cdot v'-u\cdot v\cdot tgx=\frac{1}{cos\,x},\quad u'\cdot v+u\cdot\left(v'-v\cdot tgx\right)=\frac{1}{cos\,x},$$

отсюда

$$\begin{cases} v'-v\cdot tgx=0 \\ u'\cdot v=\dfrac{1}{cos\,x}. \end{cases}$$

Решаем первое из уравнений :

$$v'=v\cdot tgx;\qquad \frac{dv}{v}=tgx\cdot d\,x;\qquad \int\frac{dv}{v}=\int tgx\cdot d\,x;\qquad ln|\,v\,|=-\,ln|\,cos\,x\,|,$$

(при вычислении этих интегралов произвольная постоянная не пишется), откуда

$$v=\frac{1}{cos\,x}.$$

Из второго уравнения находим $u(x)$:

$$u'\cdot\frac{1}{cos\,x}=\frac{1}{cos\,x},\qquad u'=1,\qquad \int du=\int d\,x,\qquad u=x+C.$$

Следовательно,

$$y=u\cdot v=\left(x+C\right)\cdot\frac{1}{cos\,x}.$$

Найдем частное решение. Так как $y(0)=1,$ то

$$1=\left(0+C\right)\cdot\frac{1}{1}\quad\Rightarrow\quad C=1.$$

Подставляем это значение в общее решение:

$$y=\left(x+1\right)\cdot\frac{1}{cos\,x}.$$

Это и есть искомое частное решение.

Пример Найти общее решение уравнения

$$y'-\frac{4}{x}\cdot y=x\cdot\sqrt{y}.$$

Решение. Это уравнение Бернулли $(\alpha=1/2)$. Заметим, что данное уравнение имеет решение $y=0$. Чтобы найти решение, отличное от нулевого, проведем замену $y=u\cdot v,\quad y'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Получим:

$$u'\cdot v+u\cdot v'-\frac{4}{x}\cdot u\cdot v=x\sqrt{u\cdot v}\quad\text{или}$$

$$u'\cdot v+u\cdot\left(v'-\frac{4}{x}\cdot v\right)=x\sqrt{u\cdot v}.$$

Для определения u и v имеем:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{4}{x} \cdot v = 0 \\ u' \cdot v = x\sqrt{u \cdot v}. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$$\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx; \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{4}{x}d\,x; \qquad ln|\,v\,| = 4\,ln|\,x\,|; \qquad v = x^4,$$

тогда из второго уравнения :

$$u' \cdot x^4 = x \cdot \sqrt{u \cdot x^4}; \quad u' \cdot x = \sqrt{u}; \quad \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{d\,x}{x}; \quad 2\sqrt{u} = ln|\,x\,| + 2C;$$

$$\sqrt{u} = \frac{1}{2}ln|\,x\,| + C; \qquad u = \left(\frac{1}{2}ln|\,x\,| + C\right)^2,$$

следовательно, общее решение получим в виде:

$$y = 0; \qquad y = x^4 \cdot \left(\frac{1}{2}ln|\,x\,| + C\right)^2.$$

4) Уравнения в полных дифференциалах.

Уравнение

$$M(x,\,y)d\,x + N(x,\,y)d\,y = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,\,y)$, т.е. $u'_x = M(x,\,y), \quad u'_y = N(x,\,y)$. Это имеет место, если

$$\left[M(x,\,y)\right]'_y \equiv \left[N(x,\,y)\right]'_x.$$

Чтобы решить уравнение , надо найти функцию $u(x,\,y)$. Тогда общее решение уравнения можно записать в виде $u(x,\,y) = C$, где C – произвольная постоянная.

Пример Решить уравнение

$$\left(2x + 3x^2y\right)d\,x + \left(x^3 - 3y^2\right)d\,y = 0.$$

Решение. Так как

$$\left(2x + 3x^2y\right)'_y = 3x^2 \quad \text{и} \quad \left(x^3 - 3y^2\right)'_x = 3x^2,$$

то это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x,\,y)$, полный дифференциал которой $du = u'_x d\,x + u'_y d\,y$ был бы равен левой части уравнения, т.е.

$$u'_x = 2x + 3x^2y, \quad u'_y = x^3 - 3y^2.$$

Интегрируем по x первое из уравнений , считая y постоянным; при этом вместо постоянной интегрирования надо поставить $\varphi(y)$ − неизвестную функцию от y.

$$u(x, y) = \int \left(2x + 3x^2 y\right) d\,y = x^2 + x^3 y + \varphi(y).$$

Подставляя это выражение для $u(x, y)$ во второе из уравнений, найдем $\varphi(y)$:

$$\left(x^2 + x^3 y + \varphi(y)\right)'_y = x^3 - 3y^2, \quad x^3 + \varphi'(y) = x^3 - 3y^2,$$

$$\varphi'(y) = -3y^2; \qquad \varphi(y) = -y^3.$$

Следовательно, можно взять

$$u(x, y) = x^2 + x^3 y - y^3,$$

и общее решение уравнения будет иметь вид

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$$

Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

I. Если $y'' = f(x)$, то

$$y = \int\left(\int f(x)\,d\,x\right) d\,x + C_1 x + C_2.$$

II. Если дифференциальное уравнение явно не содержит y, т.е. $F(x, y', y'') = 0$, то, полагая $y'(x) = p(x)$, $y''(x) = p'(x)$, получим уравнение первого порядка относительно функции $p(x)$.

<u>Пример</u> Найти частное решение уравнения

$$xy'' + y' + x = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 1$.

<u>Решение.</u> Так как уравнение явно не содержит y, то, полагая $y' = p(x)$, имеем $y'' = p'$, откуда

$$x\,p' + p + x = 0, \text{ т.е. } p' + \frac{1}{x}p = -1.$$

Решаем это уравнение как линейное относительно функции $p(x)$:

$$p(x) = u \cdot v, \quad p' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \frac{1}{x}v\right) = -1,$$

$$\begin{cases} v' + \dfrac{1}{x}v = 0 \\ u' \cdot v = -1. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение относительно v.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad ln|v| = -ln|x|; \quad v = \frac{1}{x}.$$

Из второго уравнения находим u:

$$u' \cdot \frac{1}{x} = -1; \quad u' = -x; \quad \int du = -\int x dx; \quad u = -\frac{x^2}{2} + C_1, \text{ т.е.}$$

$$p(x) = u \cdot v = \frac{1}{x}\left(C_1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2}.$$

Из условия $y' = p = 0$ при $x = 1$ имеем:

$$0 = C_1 - \frac{1}{2}, \text{ т.е. } C_1 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)$, откуда

$$dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)dx \text{ или } y = \frac{1}{2}\left(ln|x| - \frac{x^2}{2}\right) + C_2.$$

Полагая $y = 0$ при $x = 1$, находим:

$$0 = \frac{1}{2}\left(ln1 - \frac{1}{2}\right) + C_2; \quad -\frac{1}{4} + C_2 = 0; \quad C_2 = \frac{1}{4}.$$

Получаем требуемое частное решение: $y = \frac{1}{2}\left(ln|x| - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{4}.$

III. Если дифференциальное уравнение явно не содержит x, т.е. $F(y, y', y'') = 0$, то, полагая $y' = p(y)$, $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p = p'p$, получим уравнение первого порядка $F(y, p, p') = 0$ относительно $p(y)$.

<u>Пример</u> Найти частное решение уравнения $y'' = 2y^3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = 1$.

<u>Решение.</u> Так как уравнение явно не содержит x, то, полагая $y' = p(y)$, $y'' = p'p$, получим: $p'p = 2y^3$ или $pdp = 2y^3 dy$, откуда

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2}y^4 + \frac{C_1}{2}, \quad p^2 = y^4 + C_1.$$

Так как $y' = p = 1$ и $y = 1$ при $x = 0$, то

$$1 = 1 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Следовательно, $p^2 = y^4$; $p = \pm y^2$; $y' = \pm y^2$; $\frac{dy}{y^2} = \pm dx$;

$$-\frac{1}{y} = \pm x + C_2.$$

Подставляя начальные условия, находим C_2:

$$-1 1 = 0 + C_2; \qquad C_2 = -1.$$

Получаем частное решение: $-\frac{1}{y} = \pm x - 1$ или $y = \frac{-1}{\pm x - 1} = \frac{1}{1 \mp x}$, т.е.

либо $y = \frac{1}{1-x}$, либо $y = \frac{1}{1+x}$.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

I. Уравнение вида

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$$

где p, q – постоянные, $y(x)$ – неизвестная функция, называется ***линейным однородным*** дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Если k_1, k_2 – корни ***характеристического уравнения***

$$k^2 + p \cdot k + q = 0,$$

то общее решение уравнения записывается в одном из следующих трех видов:

1) $y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$, если k_1, k_2 – вещественны и $k_1 \neq k_2$;

2) $y = e^{kx}\left(C_1 + xC_2\right)$, если $k_1 = k_2 = k$;

3) $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$, если $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$,

$\beta \neq 0$, i – мнимая единица $\left(i^2 = -1\right)$.

C_1, C_2 – произвольные постоянные.

<u>Пример</u> Найти общие решения уравнений:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

б) $y'' + 2y' + 5y = 0$;

в) $y'' + 2y' + y = 0$.

<u>Решение.</u>

а) Решаем характеристическое уравнение: $k^2 - 3k + 2 = 0$,

$$k_{1,2} = 1{,}5 \pm 0{,}5; \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2,$$

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ – общее решение.

б) Решаем характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0$,

$$k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i; \quad k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i,$$
$$\alpha = -1, \quad \beta = 2.$$
$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$ − общее решение.

в) Решаем характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 1 = 0,$
$$k_1 = k_2 = k = -1.$$
$y = e^{-x}\left(C_1 + xC_2\right)$ − общее решение.

II. Общее решение ***линейного неоднородного*** дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами
$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$$
можно записать в виде $y = y_o + y_*,$
где y_o − общее решение соответствующего однородного уравнения , определяемое по формулам 1) − 3), а y_* − какое-либо частное решение данного неоднородного уравнения.

1). Функция y_* может быть найдена методом вариации произвольных постоянных, если решение y_o записано в виде $y_o = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Согласно этому методу решение y_* ищется в виде:
$$y_* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2,$$
где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы
$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x), \quad C_1' = \dfrac{dC_1}{dx}, \quad C_2' = \dfrac{dC_2}{dx}. \end{cases}$$

<u>Пример</u> Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

<u>Решение</u> Решаем соответствующее однородное уравнение
$$y'' + y = 0.$$
$k^2 + 1 = 0; \quad k = \pm i \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1,$ следовательно,
$$y_o = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$
тогда $y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x,$ и частное решение заданного неоднородного уравнения будем искать в виде
$$y_* = C_1(x) \cdot \cos x + C_2(x) \cdot \sin x.$$
Относительно функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot cos\,x + C_2'(x)\cdot sin\,x = 0 \\ C_1'(x)\cdot(-sin\,x) + C_2'(x)\cdot cos\,x = \dfrac{1}{sin\,x}. \end{cases}$$

Из первого уравнения $C_2' = -C_1'\cdot\dfrac{cos\,x}{sin\,x}$, подставляя это выражение для C_2' во второе уравнение, получим

$$-C_1'\cdot sin\,x - C_1'\cdot\frac{cos^2 x}{sin\,x} = \frac{1}{sin\,x} \quad \text{или} \quad -C_1'\cdot\frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin\,x} = \frac{1}{sin\,x},$$

$$C_1' = -1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -x,$$

$$C_2' = 1\cdot\frac{cos\,x}{sin\,x} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \int\frac{cos\,x}{sin\,x}d\,x = ln|\,sin\,x\,|.$$

Решение y_* принимает вид:

$$y_* = -x\cdot cos\,x + sin\,x\cdot ln|\,sin\,x\,|.$$

Получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = y_o + y_* = C_1\cdot cos\,x + C_2\cdot sin\,x - x\cdot cos\,x + sin\,x\cdot ln|\,sin\,x\,| =$$
$$= (C_1 - x)\cdot cos\,x + \left(C_2 + ln|\,sin\,x\,|\right)\cdot sin\,x.$$

2). Частное решение y_* может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в случаях, когда $f(x)$ имеет специальный вид.

а) $f(x) = P_m(x)$, где

$$P_m(x) = A_o x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m \quad -$$

заданный многочлен степени m $(A_o \neq 0)$.

Частное решение y_* в этом случае следует искать в виде:

$$y_* = Q_m(x) = b_o x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m,$$

если число $k = 0$ не является корнем характеристического уравнения ;

$$y_* = x\cdot Q_m(x),$$

если число $k = 0$ является один раз корнем характеристического уравнения и

$$y_* = x^2\cdot Q_m(x),$$

если число $k = 0$ является два раза корнем характеристического уравнения .

Коэффициенты $b_o,\ b_1, \ldots, b_m$ находятся методом неопределенных коэффициентов.

Пример . Решить уравнение $y'' + y' = 2x + 3.$

Решение. Находим сначала общее решение соответствующего однородного уравнения.

$$y'' + y' = 0, \quad k^2 + k = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -1,$$

$$y_o = C_1 + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Так как число $k = 0$ является один раз корнем характеристического уравнения, и $f(x) = 2x + 3$ – многочлен степени $m = 1$, то частное решение y_* ищем в виде

$$y_* = x \cdot (b_o x + b_1) = b_o x^2 + b_1 x.$$

Подставляя y_* в исходное уравнение, получим:

$$2b_o + 2b_o x + b_1 = 2x + 3 \quad \text{или} \quad 2b_o x + (2b_o + b_1) = 2x + 3 \quad \Rightarrow$$

$$2b_o = 2 \quad \text{и} \quad 2b_o + b_1 = 3,$$

следовательно, $b_o = 1$ и $b_1 = 1$, тогда $y_* = x(x+1)$.

Общее решение исходного уравнения

$$y = y_o + y_* = C_1 + C_2 \cdot e^{-x} + x(x+1).$$

б) $f(x) = e^{ax} \cdot P_m(x)$, где $a = const$, $P_m(x)$ определяется соотношением .

В этом случае

$$y_* = e^{ax} \cdot Q_m(x),$$

если число $k = a$ не является корнем характеристического уравнения ,

$$y_* = e^{ax} \cdot Q_m(x) \cdot x,$$

если число $k = a$ является один раз корнем характеристического уравнения и

$$y_* = e^{ax} \cdot Q_m(x) \cdot x^2,$$

если число $k = a$ является два раза корнем характеристического уравнения .

Многочлен $Q_m(x)$ - с неопределенными коэффициентами.

Пример Решить уравнение $y'' - 2y' + y = x \cdot e^x$.

Решение. Находим сначала y_o.

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad k^2 - 2k + 1 = 0, \quad k_1 = k_2 = 1,$$

$$y_o = e^x \cdot (C_1 + xC_2).$$

Так как $a = 1$ является два раза корнем характеристического уравнения, и $m = 1$, то решение y_* ищем в виде

$$y_* = e^x \cdot (b_o x + b_1) x^2 = e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2\right).$$

Тогда $y_*' = e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2 + 3b_o x^2 + 2b_1 x\right),$

$$y_*'' = e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2 + 6b_o x^2 + 4b_1 x + 6b_o x + 2b_1\right),$$

из исходного уравнения получим

$$e^x\cdot\left(b_o x^3+b_1x^2+6b_ox^2+4b_1x+6b_ox+2b_1\right)-$$
$$-2e^x\cdot\left(b_ox^3+b_1x^2+3b_ox^2+2b_1x\right)+e^x\cdot\left(b_ox^3+b_1x^2\right)=x\cdot e^x,$$

$$b_ox^3+b_1x^2+6b_ox^2+4b_1x+6b_ox+2b_1-2b_ox^3-2b_1x^2-6b_ox^2-$$
$$-4b_1x+b_ox^3+b_1x^2=x,$$
$$6b_ox+2b_1=x,$$
$$6b_o=1,\quad 2b_1=0\quad\Rightarrow\quad b_o=\frac{1}{6},\quad b_1=0.$$

Следовательно, $y_*=\frac{1}{6}x^3\cdot e^x$, и общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y=y_o+y_*=e^x\cdot\left(C_1+xC_2\right)+\frac{1}{6}x^3\cdot e^x.$$

в) $f(x)=e^{ax}\cdot\left[P_m(x)\cos bx+R_s(x)\sin bx\right]$, где $P_m(x)$ и $R_s(x)$ – многочлены степени m и s соответственно. Тогда

$$y_*=e^{ax}\cdot\left[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx\right],$$

если число $k=a+ib$ не является корнем характеристического уравнения, и

$$y_*=x\cdot e^{ax}\cdot\left[S_N(x)\cos bx+T_N(x)\sin bx\right],$$

если число $k=a+ib$ является корнем характеристического уравнения , при этом $N=\max(m,s)$, $S_N(x)$ и $T_N(x)$ – многочлены степени N с неопределенными коэффициентами.

Пример 4.5. решить уравнение $y''+4y=4(\sin 2x+\cos 2x)$.

Решение. решаем соответствующее однородное уравнение.

$$y''+4y=0,\quad k^2+4=0,\quad k=\pm 2i,\quad k_1=2i,\quad k_2=-2i,$$
$$\alpha=0,\quad \beta=2,$$
$$y_o=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

Так как $P_m(x)=R_s(x)=4$, то $m=s=0$, $N=0$, $a=0$, $b=2$ $\Rightarrow$ $a+ib=2i$ – один раз корень характеристического уравнения, частное решение y_* ищем в виде

$$y_*=x\cdot\left(b_o\cos 2x+c_o\sin 2x\right).$$
$$y_*'=b_o\cos 2x+c_o\sin 2x+2x\cdot\left(-b_o\sin 2x+c_o\cos 2x\right),$$
$$y_*''=4\cdot\left(-b_o\sin 2x+c_o\cos 2x\right)-4x\cdot\left(b_o\cos 2x+c_o\sin 2x\right).$$

Подставляем в уравнение:

$$4\cdot\left(-b_o\sin 2x+c_o\cos 2x\right)-4x\cdot\left(b_o\cos 2x+c_o\sin 2x\right)+$$

$$+4x\cdot\left(b_o\cos 2x+c_o\sin 2x\right)=4\left(\sin 2x+\cos 2x\right),$$

$$-b_o\sin 2x+c_o\cos 2x=\sin 2x+\cos 2x,\ \text{откуда}$$

$$b_o=-1,\qquad c_o=1\quad \text{и}$$

$$y_*=x\cdot\left(\sin 2x-\cos 2x\right).$$

Выписываем общее решение:

$$y=y_o=y_*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x\cdot\left(\sin 2x-\cos 2x\right).$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пример . Решить систему $\begin{cases} x'_t=x-y \\ y'_t=-4x+y. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения находим

$$y=x-x'_t,\quad y'_t=x'_t-x''_{tt}.$$

Подставляем во второе уравнение:

$$x'_t-x''_{tt}=-4x+x-x'_t,\quad x''_{tt}-2x'_t-3x=0.$$

Получаем однородное линейное уравнение. Находим его общее решение.

$$k^2-2k-3=0,\qquad k=1\pm 2,\qquad k_1=-1,\qquad k_2=3,$$

$$x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}.$$

Тогда

Вы $y(t)=x-x'(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}+C_1e^{-t}-3C_2e^{3t}=2C_1e^{-t}-2C_2e^{3t}.$

Выписываем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{3t} \\ y(t)=2C_1e^{-t}-2C_2e^{3t}. \end{cases}$$

Ряды

Определение. Рядом называется сумма бесконечного множества слагаемых

$$U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+\ldots \qquad (1)$$

Сокращено ряд обозначается так: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$.Член U_n называется общим членом ряда.

Сумма n-первых членом ряда

$S_n=U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n$ (2)

называется частичной суммой.
Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся S-суммой ряда.
Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то ряд расходится и суммы не имеет.
Необходимый признак сходимости ряда.
Если ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

Достаточные признаки сходимости рядов:

Признак сравнения.
Теорема 1. А) Пусть ряды
$U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+\ldots$ (3)
$V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n+\ldots$ (4)
положительны. Если ряд (4) сходится, а члены ряда (3), начиная с некоторого, меньше соответствующих членов ряда (4), то ряд (4) сходится; б) Если ряд (4) расходится, а члены ряда (3), начиная с некоторого, больше соответствующих членов ряда (4), то ряд (3) расходится.

Теорема 2. Два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ одновременно сходятся или расходятся, если отношение $U_n:V_n$ при $n\to\infty$ стремится к конечному и отличному от нуля пределу.

Признак Даламбера.
Если члены ряда знакоположительны и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = k$, то
при k<1 ряд сходится, а при k>1 расходится.
Если k=1, то заключение о сходимости ряда сделать нельзя. Требуются дополнительные условия.

Радикальный признак Коши.
Если члены ряда положительны и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{V_n} = k$, то при k<1 ряд сходится, а при k>1 расходится. При k=1 требуются дополнительные исследования.

Интегральный признак Коши.

Если функция f(x) непрерывна, монотонно убывает и положительна для

$x \ge a$, то ряд F(1)+f(2)+f(3)+…+f(n)+... сходится, если сходится несобст-

венный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$, т.е. он имеет конечное значение и ряд расхо-

дится, если этот интеграл равен ∞.

Знакочередующиеся ряды.

Определение. Ряд называется знакочередующимся, если два его соседних члена имеют противоположные знаки. Исследование сходимости знакочередующихся рядов проводится на основании теоремы Лейбница.

Теорема. Знакочередующийся ряд сходится, если: 1) Его члены убывают по абсолютной величине и 2) его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Определение. Знакочередующийся ряд называется абсолютно сходящимся если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Если же ряд из абсолютных величин расходится, то знакочередующийся ряд сходится условно.

Для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего теореме Лейбница, ошибка приближенного равенства $S \approx S_n$ ведет по абсолютной величине меньше первого отброшенного члена $|R_{n+1}| < U_{n+1}$, где

$R_n = U_{n+1} + U_{n+2} + ...$ Остаток этого ряда имеет знак своего первого члена U_{n+1}.

Степенной ряд. Радиус сходимости.

Степенной ряд имеет вид

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (5)$$

где a_n-коэффициент степенного ряда. Сходимость степенного ряда зависит от величины x.

Определение. Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал (-R, R) такой, что для всякой точки x, которая лежит внутри этого интервала, ряд сходится, и к тому же абсолютно, а для точек x, лежащих вне его, ряд расходится.Число R называется радиусом сходимости.

Радиус сходимости степенного ряда (5) можно определить через его коэффициенты

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (6)$$

или

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}. \qquad (7)$$

Радиус может быть равен 0, если интервал сходимости вырождается в точку, $R = \infty$, если ряд сходится на всей числовой оси.
Следует также исследовать сходимость ряда на концах интервала, т.е. при $x = \pm R$. Для рядов вида (8), (9) и (10)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^3 + ... + a_n x^{2n\ \ 1} + ... \qquad (8)$$

$$a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + ... + a_n x^{2n} + ... \qquad (9)$$

$$a_0 + a_1 (x - \lambda) + a_2 (x - \lambda)^2 + ... + a_n (x - \lambda)^n + ... \qquad (10)$$

интервал сходимости находится по признаку Даламбера,

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| < 1 \qquad (11)$$

Разложение функции в ряд Тейлора и Маклорена.

$$\ell^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \quad \text{x-любое} \qquad (14)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \quad \text{x-любое} \qquad (15)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \quad \text{x-любое} \qquad (16)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ... \quad -1<x<1 \qquad (17)$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + ... +$$

$$+ \frac{m(m-1)...(m-(n-1)m)}{n!} + ... \quad -1<x<1 \qquad (18)$$

Пример 1. Найти сумму ряда.

Доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Представим общий член ряда U_n в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

.

Умножая на знаменатель левой части, придем к тождеству

$$1 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1).$$

Полагая последовательно n = 0, -1, -2 находим

$$n = 0 \qquad 1 = 2A, \qquad A = \frac{1}{2}$$

$$n = -1 \qquad 1 = -B, \qquad B = -1$$

$$n = -2 \qquad 1 = 2C, \qquad C = \frac{1}{2}$$

Таким образом

$$U_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$

или

$$U_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда

$$U_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$U_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, ряд сходится и имеет суммой $\frac{1}{4}$.

<u>Пример 2</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}$.

Применим признак Даламбера

$$U_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}; \qquad U_{n+1} = \frac{1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n-2)(3n+1)}{2^{n+1}\cdot (n+1)!};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n-2)(3n+1)\cdot 2^{n+1}\cdot n!}{2^{n+2}\cdot (n+1)!\cdot 1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}} = \frac{3}{2} > 1.$$

Так как предел равен $\frac{3}{2} > 1$, то этот ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{10n+9}$ - знакочередующийся.

Члены ряда по абсолютной величине убывают

$$\frac{2}{19} > \frac{3}{29} > \frac{4}{39} > \frac{5}{49} > \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{10+\frac{9}{n}} = \frac{1}{10} \neq 0.$$

Теорема Лейбница для данного ряда не выполняется, значит данный ряд расходится.

Пример 4. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(3n-1)^2}$.

Члены данного ряда по абсолютной величине убывают.

$$\frac{1}{2^2} > \frac{1}{5^2} > \frac{1}{8^2} > \frac{1}{11^2} > \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(3n-1)^2} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Следовательно, данный ряд сходится по теореме Лейбница.

Чтобы решить вопрос об абсолютной сходимости этого ряда, составим ряд из абсолютных величин его членов.

Получим $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$;

Применим интегральный признак Коши

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(3x-1)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{(3x-1)^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3x-1}\right)\Big|_1^b = -\frac{1}{3} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{3b-1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}.$$

Интеграл сходится, поэтому сходится ряд из абсолютных величин. Значит, заданный ряд сходится абсолютно.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n+2}$.

Применим признак сравнения рядов.

Для сравнения возьмем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ который расходится, как часть известного расходящегося гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+2},$$

значит по теореме сравнения рядов данный ряд тоже расходится.

<u>Пример 6</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^{n^2}$.

Применим радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4(2n+3)}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+12}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8+\frac{12}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = 8^{\infty} = \infty > 1.$$

Значит, данный ряд расходится.

<u>Пример 7</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

Сначала сравним ряды

$$\frac{n}{(n^2-1)\ln n} > \frac{n}{n^2\ln n} = \frac{1}{n\ln n}.$$

Исследуем ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Применим интегральный признак Коши к этому ряду:

$$\int_2^{\infty}\frac{dn}{n\ln n} = \int_2^{\infty}\frac{d(\ln n)}{\ln n} = \ln\ln n\Big|_2^{\infty} = \infty - \ln\ln 2 = \infty.$$

Так как $\frac{n}{(n^2-1)\ln n} > \frac{1}{n\ln n}$, то данный ряд расходится так же, как $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

<u>Пример 8</u>. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n+2}x^n$.

Найдем радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+3)}{(n+2)(n+1)^3}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}}_{1}=1.$$

Так как R = 1, то ряд сходится в промежутке (-1; 1).
Проверим концы этого промежутка.

(-1): подставим в данный ряд, получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{n+2}$ - знакочередующийся.

Исследуем его по теореме Лейбница.

1) $\frac{1}{3}<\frac{8}{4}<\frac{27}{5}<\ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}=\frac{1}{0}=\infty$.

Ни одно условие теоремы Лейбница не выполняется, значит ряд расходится. Значит x = -1 не входит в интеграл сходимости.

(+1): подставим в данный ряд, получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n+2}$.

По необходимому признаку сходимости этот ряд расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n+2}=\infty.$$

Значит ряд сходится при $-1 < x < 1$.

Пример 9. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$.

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}\cdot 2^n(n+3)}{2^{n+1}(n+4)(x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|}{2}\cdot\frac{n+3}{n+4}=\frac{|x-1|}{2}<1.$$

$$\frac{|x-1|}{2}<1;$$

$$|x-1|<2;$$

$$-2 < x-1 < 2;$$

$$-1 < x < 3.$$

Проверим концы этого интервала

(-1): $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1-1)^n}{2^n(n+3)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n(n+3)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}$.

Этот ряд сходится по теореме Лейбница, т.к.

$$\frac{1}{4}>\frac{1}{5}>\frac{1}{6}>\frac{1}{7}>\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}=\frac{1}{\infty}=0.$$

(+3): $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-1)^n}{2^n(n+3)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n(n+3)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$.

Полученный ряд расходится, как часть гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Значит интервал сходимости $-1\le x<3$.

<u>Пример 10</u>. Пользуясь основными разложениями, написать разложение в степенной ряд (ряд Маклорена) функции $y=\sqrt{1+x}$.

Применим биноминальную формулу.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n+\ldots\ .$$

Формула верна для всех x, удовлетворяющих условию $-1<x<1$.

Так как $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$, то $m=\frac{1}{2}$.

Тогда

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\ldots$$

После упрощения получим

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}x^n+\ldots$$

Это разложение верно в $-1<x<1$, так же как и биноминальное разложение.

<u>Пример 11</u>. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=3$ функцию $y=\frac{1}{x}$.

Запишем ряд Тейлора для функции f(x).

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\ldots$$

Найдем производные от функции $y=\frac{1}{x}$.

$$y=\frac{1}{x} \qquad y(3)=\frac{1}{3}$$

$$y'=-\frac{1}{x^2} \qquad y'(3)=-\frac{1}{3^2}$$

$$y''=\frac{2}{x^3} \qquad y''(3)=\frac{2}{3^3}$$

$$y'''=-\frac{2\cdot 3}{x^4} \qquad y'''(3)=-\frac{2\cdot 3}{3^4}$$

Подставим в ряд Тейлора

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2\cdot 1!}(x-3)+\frac{2}{3^3\cdot 2!}(x-3)^2-\frac{2\cdot 3}{3^4\cdot 3!}(x-3)^3+\ldots$$

После преобразования получим

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{x-3}{3^2}+\frac{(x-3)^2}{3^3}-\frac{(x-3)^3}{3^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$$

Найдем интервал сходимости полученного ряда. Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n\cdot 3^n}{3^{n+1}(x-3)^{n-1}}\right|=\frac{1}{3}|x-3|<1;$$

$$|x-3|<3;$$

$$-3<x-3<3;$$

$$0<x<6.$$

Исследуем концы этого интервала. Подставим $x = 0$ в данный ряд, получим

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{3^2}{3^3}+\frac{3^3}{3^4}+\ldots=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots$$

Данный ряд расходится, т.к. у него $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\frac{1}{3}\neq 0$.

Исследуем точку $x = 6$.

$$\frac{1}{3}-\frac{3}{3^2}+\frac{3^2}{3^3}-\frac{3^3}{3^4}+\ldots=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots$$

Данный ряд расходится, как колеблющийся ряд.

Значит, полученное разложение в ряд Тейлора функции $y=\frac{1}{x}$ в окрестности точки $x_0 = 3$ справедливо в (0; 6).

<u>Пример 12.</u> Вычислить $\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью 0,001. Известно, что

$$\sin x=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Тогда, разделив почленно на x, получим, что

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \frac{x^9}{9 \cdot 9!} + \cdots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \frac{1}{9 \cdot 9!} - \cdots = 1 - 0{,}0555 + 0{,}0016 - 0{,}00003 \approx 0{,}946$$

При вычислении интеграла мы взяли только 3 члена ряда, т.к. четвертый член 0,00003<0,001 точности, с которой требуется вычислить.

<u>Пример 13</u>. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$$

Разложим подинтегральную функцию в степенной ряд, используя разложение $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$ у нас $x \sim x^4$, $m = -\frac{1}{2}$, тогда получим

$$\left(1 + x^4\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}x^8 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right)}{3!}x^{12} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^8 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^{12} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4!}x^{16} + \cdots$$

Подставим полученное разложение под знак интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x^4}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^8 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^{12} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4!}x^{16} + \cdots\right) dx =$$

$$= x - \frac{x^5}{5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3x^9}{2^2 \cdot 2! \cdot 9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^{13}}{2^3 \cdot 3! \cdot 13} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7x^{17}}{2^4 \cdot 4! \cdot 17} + \cdots\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} \approx$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^5 \cdot 5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! \cdot 9 \cdot 3^9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3! \cdot 3^{13} \cdot 13} + \cdots \approx$$

$$\approx 0{,}3333 - 0{,}0004 + 0{,}00002 \approx 0{,}333$$

т.к. 0,000)4<00,001, поэтому второй член ряда можно отбросить.