МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт Естественнонаучный
Кафедра «Физика»

Утверждено на заседании кафедры
«Физика»
«13 » февраля 2018 г., протокол № 7

Заведующий кафедрой

___________________________Р.Н. Ростовцев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по организации и выполнению самостоятельной работы по дисциплине (модулю) «Введение в физику»

основной профессиональной образовательной программы

высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
20.03.01 Техносферная безопасность

с направленностью (профилем)
Инженерная защита окружающей среды

Форма обучения: очная, заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 200301-01-18

Тула 2018 год

Разработчики методических указаний

Жигунов В.В., профессор, д.т.н., профессор
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

Жигунов К.В., доцент, к.т.н., доцент
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

Назначение и сроки выполнения мероприятий по реализации всех форм самостоятельной работы.

Самостоятельная работа планируется и выполняется в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего образования (бакалавриат) по направлению подготовки.

I. Цель и задачи выполнения самостоятельной работы по дисциплине "Введение в физику"

Цель выполнения самостоятельной работы по дисциплине "Введение в физику" состоит в устранении проблем адаптационного характера, возникающих у студентов первого курса при изучении учебных дисциплин естественно-научного цикла, в частности при изучении физики.

Задачами освоения дисциплины "Введение в физику" являются:

1) развитие логического мышления и овладение методами решения физических задач построением математических моделей физических процессов;
2) формирование навыков обработки экспериментальных данных с применением элементов теории ошибок, построения графиков зависимостей физических величин.

II. Содержание самостоятельной работы по дисциплине "Введение в физику".

На выполнение самостоятельной работы отводится заданное учебным планом количество часов самостоятельных занятий студента. Мероприятия по самостоятельной работе выполняется в течение семестра и должны быть сданы для проверки преподавателю в назначенный им срок.

В качестве элементов самостоятельной внеаудиторной работы студенты реализуют изучение теоретического материала, вынесенного на самостоятельную работу, и подготовку отчетов по домашним заданиям.

Самостоятельной работа выполняется с привлечением возможных информационных возможностей (библиотека ТулГУ: учебная, монографическая, периодическая литература и электронные средства информации).

III. Методика выполнения самостоятельной работы.

Домашняя работа выполняется на листах формата А4. Шрифт Times New Roman, кегль 14, межстрочное расстояние одинарное, отступ 1 см, поля – кругом – 2 см. Выравнивание – по ширине. Текстовый редактор – Word.

Приведенные в отчете решения задач должны соответствовать номеру варианта задания, выданного преподавателем данному студенту. В противном случае за предложенный к сдаче материал начисления баллов не производится.

Обязательным элементом оформления отчета о выполненном домашнем задании является титульный лист, образец которого приведен ниже. Титульный лист не нумеруется.

Образец титульного листа

МИНОБРНАУКИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"Тульский государственный университет"

Естественнонаучный институт
Кафедра "Физика"

Домашняя работа №___
по дисциплине
«ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ»

Вариант №____

Выполнил: студент группы______________
____
(Ф.И.О.)

Проверил: В.В. Жигунов
____

Тула 2020 год

ПРИМЕРЫ ВАРИАНТОВ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Домашнее задание №1

1. Частица движется так, что её скорость зависит от времени по закону $\vec{v}(t)=\vec{i}\cdot\left(A\frac{t}{\tau}-B\frac{t^2}{\tau^2}\right)+\vec{j}\cdot\left(B\frac{t^3}{\tau^3}-A\frac{t}{\tau}\right)$, где A, B – постоянные величины, $\vec{i}, \vec{j}$ – единичные орты в декартовой системе координат. Через сколько секунд ускорение частицы будет перпендикулярно оси *y*, если $\tau=1$ с, A = 2 м/с, B = 3 м/с.

а) 0,171 с б) 0,271 с в) 0,471 с г) 0,671 с д) 0,871 с

2. Частица начала своё движение из начала координат с нулевой начальной скоростью, и её ускорение зависит от времени по закону $\vec{a}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^2+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^4$, где A, B – постоянная величина, $\vec{i}, \vec{j}$ – единичные орты в декартовой системе координат. Найти тангенс угла, под которым будет направлена скорость частицы к оси *x* в момент времени $t=1$ с, если $\tau=1$ с, A = 2 м/с^2, B = 3 м/с^2.

а) 1,1 б) 0,9 в) 0,7 г) 0,5 д) 0,3

3. Скорость частицы изменяется во времени по закону $\vec{v}=5t\cdot\vec{i}+12t\cdot\vec{j}$. Чему равна величина тангенциального ускорения частицы в момент времени t = 1 с?

а) 26 м/с^2 б) 13 м/с^2 в) 17 м/с^2 г) 34 м/с^2

4. Частица движется вдоль окружности с радиусом 1 м в соответствии с уравнением $\varphi(t)=2\pi\left(t^3-12t+24\right)$, где φ – угол в радианах, t – время в секундах. Чему равно тангенциальное (касательное к траектории) ускорение частицы (в $\text{м}/\text{с}^2$) в тот момент времени, когда её нормальное ускорение равно нулю?

а) 6π б) 12π в) 24π г) 36π

5. Частица из состояния покоя начала двигаться по дуге окружности радиуса $R=1$ м со скоростью, модуль которой зависит от времени по закону $v=A\cdot\frac{t}{\tau}$. Найти тангенс угла между вектором полного ускорения и вектором скорости частицы через время $t=1$с, если $\tau=1$ с. A = 2 м/с.

а) 2 б) 3 в) 4 г) 5 д) 6

Домашнее задание №2

1. Частица движется в плоскости так, что её импульс зависит от времени по закону $\vec{p}(t)=\vec{i}\cdot A\left(\frac{t}{\tau}\right)^7+\vec{j}\cdot B\left(\frac{t}{\tau}\right)^8$, где A, B – постоянные величины, $\vec{i}, \vec{j}$ – единичные орты в декартовой системе координат. Найти тангенс угла между осью *y* и вектором силы, действующей на частицу в момент времени $t=1$ с, если $\tau=1$ с. A = 2 кг·м/с, B = 3 кг·м/с.

а) 0,98 б) 0,88 в) 0,78 г) 0,68 д) 0,58

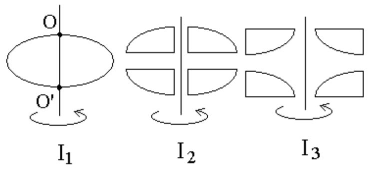
2. Импульс тела $\vec{p}_1$ изменился под действием короткого удара и стал равным $\vec{p}_2$, как показано на рисунке. В каком направлении действовала сила?

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4

3. Перпендикулярно однородному тонкому стержню массы m и длиной l проходят две параллельные оси. Одна проходит через центр масс стержня *C*, а другая через точку *O*, лежащую на расстоянии *x* от его конца *A*. Во сколько раз отличаются моменты инерции стержня относительно этих осей? m = 2 кг, l = 3 м, x = 1 м

а)133 раза б)13,3 раза в)1,33 раза г)4,33 раза д)5,33 раза

4. Из жести вырезали три одинаковые детали в виде эллипса. Две детали разрезали на четыре одинаковые части. Затем все части отодвинули друг от друга на одинаковое расстояние и расставили симметрично относительно оси ОО' (см. рис.). Выберите правильное соотношение между моментами инерции этих деталей относительно оси ОО'.



а) $I_1 > I_2 > I_3$ б) $I_1 < I_2 = I_3$ в) $I_1 < I_2 < I_3$

г) не хватает данных

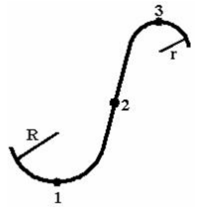
5. Маленький шарик поместили в точку с радиус-вектором $\vec{r} = \vec{i} \cdot A + \vec{j} \cdot B + \vec{k} \cdot C$. В некоторый момент на шарик подействовали силой $\vec{F} = \vec{i} \cdot D + \vec{j} \cdot E + \vec{k} \cdot G$. Найти проекцию момента силы на ось *x* относительно начала координат. *A, B, C, D, E* и *G* – некоторые постоянные; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты в декартовой системе координат. *A* = 2 м, *B* = 3 м, *C* = 4 м, *D* = 4 Н, *E* = 5 Н, *G* = 6 Н.

а) –2 Н·м б) 2 Н·м в) –4 Н·м г) 4 Н·м д) –6 Н·м

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТЕСТОВ И ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ "КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ"

1. Материальная точка движется с постоянной по величине скоростью вдоль плоской кривой. Её полное ускорение максимально …

1) в точке 1 траектории
2) в точке 2 траектории
3) в точке 3 траектории
4) правильный ответ отсутствует



Полное ускорение материальной точки равно векторной сумме нормального и тангенциального ускорений. Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости. По условию теста скорость по величине не изменяется, поэтому тангенциальное ускорение $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$. Значит в каждой точке траектории полное ускорение равно нормальному ускорению, которое определяют по формуле $a_n = \frac{v^2}{R}$. Из этой формулы следует, что при постоянной скорости нормальное ускорение тем больше, чем меньше радиус кривизны траектории. В точке 2 $R \to \infty$, и нормальное ускорение в этой точке обращается в нуль, т.е. полное ускорение в этой точке достигает минимального значения, равного нулю. Как видно из рисунка радиус кривизны траектории в точке 3 меньше, чем в точке 1. Из этого следует, что нормальное ускорение (а значит и полное ускорение) будет максимальным в точке 3.

Ответ: 3

2. Начальная скорость частицы $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, конечная $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$. Найти приращение скорости частицы $\Delta\vec{v}$, модуль приращения скорости $|\Delta\vec{v}|$ и приращение модуля скорости Δv. Значения скоростей приведены в СИ.

Дано	***Решение***
$\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ ——— $\Delta\vec{v}$ – ? $\lvert\Delta\vec{v}\rvert$ – ? Δv – ?	Учитывая, что $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, из выражений $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ получаем: $v_{1x} = 2$ м/с; $v_{1y} = 3$ м/с; $v_{1z} = 5$ м/с; $v_{2x} = 3$ м/с; $v_{2y} = 4$ м/с; $v_{2z} = 7$ м/с.

Тогда приращение скорости будет равно

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

$$\Delta\vec{v} = (v_{2x} - v_{1x})\vec{i} + (v_{2y} - v_{1y})\vec{j} + (v_{2z} - v_{1z})\vec{k}.$$

Подставив значения проекций скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, получим

$$\Delta\vec{v} = (3-2)\vec{i} + (4-3)\vec{j} + (7-5)\vec{k}.$$

Окончательно для приращения скорости частицы имеем

$$\Delta\vec{v} = 1\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 2\cdot\vec{k}.$$

Модуль приращения скорости равен

$$\left|\Delta\vec{v}\right| = \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2 + \Delta v_z^2}\ .$$

Так как $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$, $\Delta v_y = v_{2y} - v_{1y}$, $\Delta v_z = v_{2z} - v_{1z}$, то

$$\left|\Delta\vec{v}\right| = \sqrt{\left(v_{x_2} - v_{x_1}\right)^2 + \left(v_{y_2} - v_{y_1}\right)^2 + \left(v_{z_2} - v_{z_1}\right)^2}$$

$\left|\Delta\vec{v}\right| = \sqrt{(3-2)^2 + (4-3)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \approx 2{,}449\ (\text{м/с})$Для изменения модуля скорости будем иметь

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \sqrt{v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2 + v_{z_2}^2} - \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2}$$

$$\Delta v = \sqrt{9+16+49} - \sqrt{4+9+25} \approx 2{,}438\ (\text{м/с})$$

Ответ: $\Delta\vec{v} = 1\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 2\cdot\vec{k}$; 2,449 м/с; 2,438 м/с

3. Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\vec{r} = 2t^3\vec{i} + \vec{j} + 3t\vec{k}$. Найти зависимости от времени векторов скорости и ускорения точки и модулей этих величин.

Дано	***Решение***
$\vec{r} = 2t^3\vec{i} + \vec{j} + 3t\vec{k}$	Сравнивая выражения
$\vec{v}$ – ? v – ? $\vec{a}$ – ? a – ?	$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и $\vec{r} = 2t^3\vec{i} + \vec{j} + 3t\vec{k}$ приходим к выводу, о том что $x = 2t^3$, $y = 1$, $z = 3t$. Тогда

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6t^2;\ v_y = \frac{dy}{dt} = 0;\ v_z = \frac{dz}{dt} = 3.$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = 6t^2\vec{i} + 3\vec{k}\ .$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{36\cdot t^4 + 9} = 3\cdot\sqrt{4\cdot t^4 + 1}\ .$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 12t;\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0;\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0\ .$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = 12t\,\vec{i}\ . \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{144t^2} = 12t.$$

Ответ: $\vec{v} = 6t^2\vec{i} + 3\vec{k}$; $v = 3\cdot\sqrt{4\cdot t^4 + 1}$; $\vec{a} = 12t\,\vec{i}$; $a = 12t$

4. Материальная точка движется так, что её радиус-вектор с течением времени изменяется по закону $\vec{r}(t) = Ae^{\alpha t}\,\vec{i} + (Bt - Ct^3)\,\vec{j} - (D\cos\omega t)\vec{k}$. В какой момент времени скорость частицы будет направлена по нормали к оси y? A = 5 м; α = 3 с$^{-1}$; B = 18 м/с; C = 1,5 м/с^3; D = 4 м; ω = 2 рад/с.

Дано	***Решение***
$\vec{r}(t) = Ae^{\alpha t}\,\vec{i} + (Bt - Ct^3)\,\vec{j} -$ $-(D\cos\omega t)\vec{k}$ A = 5 м; α = 3 с$^{-1}$; B = 18 м/с; C = 1,5 м/с^3; D = 4 м; ω = 2 рад/с	

t – ?

В тот момент времени, когда скорость частицы будет направлена по нормали к оси y, проекция вектора скорости на эту ось v_y станет равной нулю. Из выражения для радиус-вектора следует, что координата y со временем изменяется по закону:

$y = (Bt - Ct^3)$. Значит $v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Bt - Ct^3\right) = B - 3Ct^2$.

$B - 3Ct^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{B}{3C}} = 2$ с

Ответ: 2 с

5. Движение материальной точки описывается законом $x = t^3 - 9t^2$. В какой момент времени t_1 от начала движения скорость точки достигнет экстремального значения? В какой момент времени t_2 после начала движения скорость точки станет равной нулю?

Дано	***Решение***
$x = t^3 - 9t^2$	$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^3 - 9t^2\right) = 3t^2 - 18t.$
t_1 – ? t_2 – ?	Скорость v_x экстремальна при $\frac{dv_x}{dt} = 0$.

$\frac{dv_x}{dt} = 6t - 18$, поэтому $6t_1 - 18 = 0$ и $t_1 = 3$ с.

Найдём, в какой момент времени t_2 после начала движения скорость обратится в нуль:

$$v_x = 3t_2^2 - 18t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = 6 \text{ с}.$$

Ответ: $t_1 = 3$ с; $t_2 = 6$ с

6. Частица движется прямолинейно с ускорением, которое изменяется с течением времени по закону $a = Bt^2$. $B = 0{,}5$ м/с^4. Какой путь прошла частица за первые 3 с после начала движения из состояния покоя?

Дано	***Решение***
$a = Bt^2$ $B = 0{,}5$ м/с^4 $t = 3$ с	$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\cdot dt$. Интегрируем левую и правую части полученного уравнения:
S – ?	$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt$. Учитываем, что по условию задачи при $t_o = 0$ $v_o = 0$. Тогда $v = \int_0^t a\,dt$.

Подставив выражение для ускорения, будем иметь $v = \int_0^t Bt^2\,dt = B\int_0^t t^2\,dt = B\frac{t^3}{3}$.

$v = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = v\cdot dt \Rightarrow \int_0^S dS = \int_0^t v\,dt$.

Подставляем в подынтегральное выражение конкретный вид функциональной зависимости скорости от времени $v = B\frac{t^3}{3}$ и получаем:

$$S=\int_0^t B\frac{t^3}{3}dt=\frac{B}{3}\int_0^t t^3\,dt=B\frac{t^4}{12}=\frac{0,5\cdot 3^4}{12}=3,375\,(\text{м})$$

Ответ: 3,375 м

7. Скорость частицы, движущейся вдоль оси x, изменяется по закону $\vec{v}=\left(A-Bt^2\right)\vec{i}$, где A = 5 м/с, а B = 0,2 м/с^3. В начальный момент времени t = 0 частица находилась в точке x_o = 0. Найти путь, пройденный частицей за промежуток времени, по истечении которого она вернётся в исходную точку.

Дано

$\vec{v}=\left(A-Bt^2\right)\vec{i}$

A = 5 м/с

B = 0,2 м/с^3

S – ?

Решение

Из выражения для скорости видно, что в начальный момент времени она отлична от нуля и её проекция на ось x положительна. Это означает, что частица начинает двигаться в направлении, совпадающем с положительным направлением оси x. С течением времени величина скорости уменьшается, и в некоторый момент времени $t_{ост}$ частица останавливается, пройдя путь, равный координате x частицы в момент остановки. В дальнейшем проекция скорости на ось x становится отрицательной и частица начинает двигаться к исходной точке. Очевидно, что, когда она в неё вернётся, пройденный за всё время движения путь будет равен S = 2x.

Найдем время, прошедшее до остановки частицы, учитывая, что в момент остановки v = 0:

$$A-Bt_{ост}^2=0\;\Rightarrow\; t_{ост}=\sqrt{\frac{A}{B}}=\sqrt{\frac{5}{0,2}}=5\,с$$

Так как $v=\dfrac{dx}{dt}$, то $dx=v\,dt$. Интегрируя, получим:

$$\int_0^x dx=\int_0^{t_{ост}} v\,dt \Rightarrow x=\int_0^{t_{ост}}\left(A-Bt^2\right)dt\;\Rightarrow x=A\,t\Big|_0^{t_{ост}}-\frac{B}{3}t^3\Big|_0^{t_{ост}}.$$

Подставив приведённые в условии задачи данные, получим

$x=5\cdot 5-\dfrac{0,2}{3}\cdot 5^3=16,67$ м, а весь пройденный путь S = 2x = 33,3 м

Ответ: 33,3 м

8. Частица движется в положительном направлении оси x так, что её скорость меняется по закону $v=D\sqrt{x}$, где $D=4$ м$^{1/2}$с$^{-1}$. В начальный момент времени частица находилась в точке x_o = 0. Найти скорость частицы в момент времени t = 2 с.

Дано

$v=D\sqrt{x}$

$D=4$ м$^{1/2}$с$^{-1}$

$t=2$ с

v – ?

Решение

Согласно условию задачи

$$a=a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{dv}{dt}.$$

Так как координата зависит от времени, т.е. $x=x(t)$, скорость можно рассматривать как сложную функцию $v=v\left[x(t)\right]$. Тогда

$$a=\frac{d}{dt}v\left[x(t)\right]=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dx}\left(D\sqrt{x}\right)\frac{dx}{dt}.$$

Учитывая, что $\dfrac{dx}{dt} = v_x = v$, получим:

$a = v\dfrac{D}{2\sqrt{x}} = D\sqrt{x}\,\dfrac{D}{2\sqrt{x}} = \dfrac{D^2}{2}$. Видим, что ускорение от времени не зависит, то есть движение частицы является равноускоренным, поэтому

$$v = v_o + at.$$

Так как при $t = 0$ $x = x_o = 0$, из выражения для скорости $v = D\sqrt{x}$ следует, что $v_o = v(x_o = 0) = 0$. Тогда

$$v = \frac{D^2}{2}t.$$

Подставив исходные данные, получим, что $v = 16$ м/с

Ответ: 16 м/с

9. Две частицы в момент $t = 0$ одновременно начинают двигаться таким образом, что их радиус-векторы изменяются по законам: $\vec{r}_1 = 3t^2\vec{i}$, $\vec{r}_2 = (50 - 5t)\vec{i}$. Найти радиус-вектор $\vec{r}_0$ точки встречи частиц и скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ частиц в момент $t_в$ их встречи. Все величины измерены в единицах системы СИ.

Дано

$\vec{r}_1 = 3t^2\vec{i}$

$\vec{r}_2 = (50 - 5t)\vec{i}$

$\vec{r}_0$ – ? $\vec{v}_1$ – ?

$\vec{v}_2$ – ?

Решение

В момент встречи $\vec{r}_1(t_в) = \vec{r}_2(t_в)$. Тогда

$$3t_в^2 = 50 - 5t_в \quad \text{или} \quad 3t_в^2 + 5t_в - 50 = 0$$

$$t_{в_{1,2}} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 600}}{6} = \frac{-5 \pm 25}{6} \Rightarrow t_в = 3{,}33 \text{ с}$$

$$\vec{r}_0 = 3t_в^2\vec{i} = 3\cdot 11{,}09\cdot\vec{i} = 33{,}27\cdot\vec{i} \text{ (м)}.$$

$$\vec{v}_1(t) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = 6t_в\vec{i}$$

$$\vec{v}_1 = 19{,}98\cdot\vec{i} \text{ (м/с)}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = -5\cdot\vec{i} \text{ (м/с)}$$

Ответ: $\vec{r}_0 = 33{,}27\cdot\vec{i}$ (м); $\vec{v}_1 = 19{,}98\cdot\vec{i}$ (м/с); $\vec{v}_2 = -5\cdot\vec{i}$ (м/с)

10. Две частицы движутся с постоянными скоростями $v_1 = 2$ м/с и $v_2 = 5$ м/с по двум взаимно перпендикулярным прямым к точке их пересечения О. В начальный момент времени $t_0 = 0$ частицы находились на расстояниях $\ell_1 = 30$ м и $\ell_2 = 60$ м от точки О. Через какое время после начала движения расстояние между частицами станет наименьшим?

Дано

$v_1 = 2$ м/с

$v_2 = 5$ м/с

$t_0 = 0$

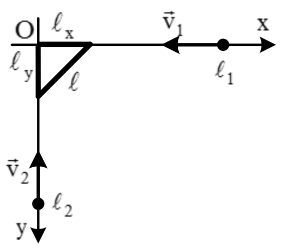
$\ell_1 = 30$ м

$\ell_2 = 60$ м

---

t – ?

Решение



Так как $\ell_x = \ell_1 - v_1 t$, а $\ell_y = \ell_2 - v_2 t$, то расстояние между точками определяется из выражения

$\ell = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2} = \sqrt{(\ell_1 - v_1 t)^2 + (\ell_2 - v_2 t)^2}$. Расстояние ℓ минимально в тот момент времени, когда $\frac{d\ell}{dt} = 0$. Находим производную и приравниваем её к нулю:

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{2(\ell_1 - v_1 t)\cdot(-v_1) + 2(\ell_2 - v_2 t)\cdot(-v_2)}{2\sqrt{(\ell_1 - v_1 t)^2 + (\ell_2 - v_2 t)^2}} = 0.$$

$$2(\ell_1 - v_1 t)\cdot(-v_1) + 2(\ell_2 - v_2 t)\cdot(-v_2) = 0$$

$$-\ell_1 v_1 + v_1^2 t - \ell_2 v_2 + v_2^2 t = 0$$

$$t\cdot\left(v_1^2 + v_2^2\right) = \ell_1 v_1 + \ell_2 v_2$$

$$t = \frac{\ell_1 v_1 + \ell_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2};\ t = \frac{30\cdot 2 + 60\cdot 5}{4 + 25} \approx 12,41\,c$$

Ответ: 12,41 с

11. Снаряд вылетает из орудия под углом α = 45° к горизонту с начальной скоростью v_0 = 500 м/с. Через t = 20 с после начала движения, пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: а) модуль скорости снаряда; б) угол, который составляет вектор скорости $\vec{v}$ с осью x; в) модули нормального и тангенциального ускорений снаряда; в) радиус кривизны траектории в точке, соответствующей заданному моменту времени.

Дано

$\alpha_o = 45°$

v_o = 500 м/с

t = 20 с

v – ? α – ? R – ?

a_n – ? a_τ – ?

Решение

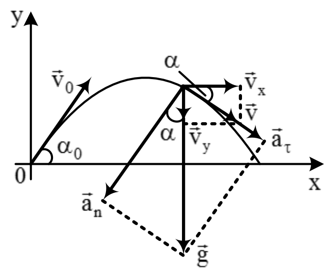


Рис.1. Частица находится на нисходящем участке траектории

Тело в гравитационном поле Земли движется с полным ускорением, равным ускорению свободного падения $\vec{g}$. Проекция полного ускорения на горизонтальную ось x равна нулю, поэтому вдоль этой оси тело движется с постоянной скоростью $v_x = v_0\cdot\cos\alpha_o$. Вдоль оси y, направленной вертикально вверх, тело движется равнопеременно со скоростью $v_y = v_0\cdot\sin\alpha_o - gt$.

Полная скорость тела в заданный момент времени t равна $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Подставив выражения для v_x и v_y, будем иметь:

$$v = \sqrt{(v_o\cos\alpha_o)^2 + (v_o\sin\alpha_o)^2 - 2(v_o\sin_o\alpha)gt + (gt)^2}.$$

Учитывая, что $\cos^2\alpha_o + \sin^2\alpha_o = 1$, получим:

$$v = \sqrt{v_o^2 - 2(v_o\sin\alpha_o)gt + (gt)^2}.$$

$$v = \sqrt{25\cdot 10^4 - 2\cdot 500\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 10\cdot 20 + (10\cdot 20)^2} \approx 385,5\left(\frac{м}{с}\right).$$

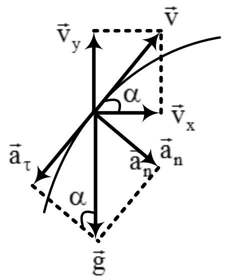


Рис.2. Частица находится на восходящем участке траектории

Найдём угол α между вектором скорости и осью x. Как видно из рисунков 1 и 2

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_o \sin\alpha_o - gt}{v_o \cos\alpha_o}.$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{500\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 10\cdot 20}{500\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 0,43 \quad => \quad \alpha \approx 23{,}3^o$$

Нормальное и тангенциальное ускорения можно определить двумя способами.

<u>Способ 1.</u>

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля (величины) скорости, поэтому

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{2g^2t - 2g\left(v_0 \sin\alpha\right)}{2\sqrt{v_0^2 - 2\left(v_0\sin\alpha\right)gt + \left(gt\right)^2}} = \frac{g\left(gt - v_o\sin\alpha_o\right)}{\sqrt{v_o^2 - 2\left(v_o\sin\alpha_o\right)gt + \left(gt\right)^2}}.$$

$$a_\tau = \frac{10\cdot\left(10\cdot 20 - 500\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{25\cdot 10^4 - 2\cdot 500\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 10\cdot 20 + \left(10\cdot 20\right)^2}} \approx -3{,}98\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

Знак минус в выражении для a_τ *означает, что частица находится на восходящем участке траектории. Действительно, на нисходящем участке траектории скорость растет и тангенциальное ускорение должно быть положительным (рис.1), а на восходящем участке скорость частицы уменьшается и тангенциальное ускорение отрицательно (рис. 2).*

Убедимся в том, что через 20 секунд после начала движения частица находится на восходящем участке траектории. Время, необходимое для достижения наивысшей точки траектории, определяем из условия равенства нулю в этой точке проекции скорости v_y*:*

$$v_y = v_0\cdot\sin\alpha_o - g\,t_{max} = 0 \Rightarrow t_{max} = \frac{v_o\sin\alpha_o}{g} \approx 35{,}4 \text{ с}.$$

По условию задачи $t = 20$ с $< t_{max}$. *Это означает, что частица в этот момент времени находится на восходящем участке траектории.*

Модуль a_τ равен 3,98 м/с^2.

Так как полное ускорение $g = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$, то $a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}$ или, подставив выражение для a_τ, будем иметь:

$a_n = \sqrt{\dfrac{v_0^2 g^2 + g^4t^2 - 2(v_0 \sin\alpha_o)g^3 t - g^4t^2 + g^2\cdot 2gt(v_o \sin\alpha_o) - g^2(v_o \sin\alpha_o)^2}{v_o^2 - 2(v_o \sin\alpha_o)gt + (gt)^2}}$ После преобразований получим:

$$a_n = \frac{g(v_o \cos\alpha_o)}{\sqrt{v_o^2 - 2(v_o \sin\alpha_o)gt + (gt)^2}}.$$

$$a_n = \frac{10\cdot 500\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{25\cdot 10^4 - 2\cdot 500\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 10\cdot 20 + (10\cdot 20)^2}} \approx 9{,}2\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

<u>Способ 2.</u>

Из подобия треугольника, образованного скоростью $\vec{v}$ и её компонентами $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, треугольнику, составленному полным ускорением $\vec{g}$ и его тангенциальной $\vec{a}_\tau$ и нормальной $\vec{a}_n$ компонентами (см. рис. 1 и 2), следует, что связь между модулями векторов $\vec{v}$, $\vec{v}_x$, $\vec{a}_n$ и $\vec{g}$ имеет вид $\frac{v_x}{v} = \frac{a_n}{g}$. Тогда $a_n = \dfrac{g(v_o \cos\alpha_o)}{\sqrt{v_o^2 - 2(v_o \sin\alpha_o)gt + (gt)^2}}$.

Из подобия рассмотренных выше треугольников следует, что связь между модулями векторов $\vec{v}$, $\vec{v}_y$, $\vec{a}_\tau$ и $\vec{g}$ определяется соотношением $\frac{v_y}{v} = \frac{a_\tau}{g}$. Из этого выражения можем найти модуль a_τ:

$$a_\tau = \frac{v_y g}{v} = \frac{(v_o \sin\alpha_o - gt)g}{\sqrt{v_o^2 - 2(v_o \sin\alpha_o)gt + (gt)^2}}.$$

Для нахождения радиуса кривизны траектории в точке, в которой частица оказалась через 20 с после начала движения, воспользуемся выражением $a_n = \frac{v^2}{R}$. Откуда получаем, что

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{g(v_o \cos\alpha_o)} = \frac{\left(v_o^2 - 2(v_o \sin\alpha_o)gt + (gt)^2\right)^{3/2}}{g(v_o \cos\alpha_o)}.$$

Подставив численные значения, будем иметь, что R $\approx$ 16,2 км.

Ответ: v = 385,5 м/с, α = 23,3°, a_n = 9,2 м/с^2,
a_τ = 3,98 м/с^2, R = 16,2 км

12. Скорость частицы, начавшей движение из начала координат, изменяется со временем по закону $\vec{v} = (A - Bt)\vec{i} + Ct^2\vec{j}$. Найти экстремальное значение координаты $x = x_1$ и соответствующую x_1 координату y_1, если A = 6 м/с; B = 2 м/с^2; а C = 3 м/с^3.

Дано ***Решение***

$\vec{v}=(A-Bt)\vec{i}+Ct^2\vec{j}$ $x\|_{t=0}=x_0=0$ $y\|_{t=0}=y_0=0$ A = 6 м/с B = 2 м/с^2 C = 3 м/с^3	Координата x принимает экстремальное значение в тот момент времени t_1, когда производная $\frac{dx}{dt}=0.$ Так как $\frac{dx}{dt}=v_x$, то $v_x(t_1)=0$. Проекцию скорости частицы на ось x найдём, сравнив выражения $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$ и $\vec{v}=(A-Bt)\vec{i}+Ct^2\vec{j}$.
x_1 – ? y_1 – ?	Видим, что $v_x = A-Bt$. Для момента времени t_1 имеем $A-Bt_1=0 \Rightarrow t_1=\frac{A}{B}$. Подставив значения A и B, получим, что координата x примет экстремальное значение при $t_1=3$с.

Найдём выражения для временных зависимостей координат x и y.

Так как $\frac{dx}{dt}=v_x$, то $dx=v_x dt$. Интегрируя левую и правую части этого уравнения, получим

$$\int\limits_{x_o=0}^{x} dx = \int\limits_{t_o=0}^{t} v_x dt .$$

Подставив выражение для v_x, будем иметь

$$x=\int\limits_{t_o=0}^{t}(A-Bt)dt = At-\frac{B}{2}t^2.$$

Учитывая, что $x = x_1$ при $t = t_1$, получим, что

$$x_1 = At_1-\frac{B}{2}t_1^2 .$$

По известным значениям A, B и t_1 вычисляем экстремальное значение координаты x, которое оказывается равным $x_1 = 9$ м.

Так как $\frac{dy}{dt}=v_y$, то $dy=v_y dt$. Интегрируя левую и правую части этого уравнения, получим

$$\int\limits_{y_o=0}^{y} dy = \int\limits_{t_o=0}^{t} v_y dt .$$

Сравнив выражения $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$ и $\vec{v}=(A-Bt)\vec{i}+Ct^2\vec{j}$ приходим к выводу о том, что $v_y=Ct^2$.

Подставив выражение для v_y в подынтегральное выражение, будем иметь

$$y=\int\limits_{t_o=0}^{t} Ct^2 dt=\frac{C}{3}t^3.$$

Учитывая, что $y = y_1$ при $t = t_1$, будем иметь $y_1=\frac{C}{3}t_1^3.$ Подставив значения C и t_1, получим, что $y_1 = 27$ м.

Ответ: $x_1 = 9$ м; $y_1 = 27$ м

13. Материальная точка движется так, что её радиус-вектор изменяется с течением времени по закону $\vec{r} = At^3\vec{i} - Bt^4\vec{j}$. Найти угол между векторами скорости и ускорения в момент времени t = 2 с, если A = 10 м/с, а B = 4 м/с^2.

Дано	***Решение***
$\vec{r} = At^3\vec{i} - Bt^4\vec{j}$ t = 2 с A = 10 м/с B = 4 м/с^2 α – ?	Рассмотрим два способа решения этой задачи.

Способ 1.

Скалярное произведение векторов скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ равно: $(\vec{v},\vec{a}) = |\vec{v}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\alpha$, где α – угол между векторами скорости и ускорения. Учитывая, что $(\vec{v},\vec{a}) = v_x a_x + v_y a_y$, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ и $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, для $\cos\alpha$ будем иметь:

$\cos\alpha = \dfrac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\cdot\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \Rightarrow \alpha = \arccos\dfrac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\cdot\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$. Найдём проекции скорости и ускорения на координатные оси x и y. Сравнивая выражения $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ и $\vec{r} = At^3\vec{i} - Bt^4\vec{j}$, приходим к выводу о том, что $x = At^3;\ y = -Bt^4$. Тогда

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}At^3 = 3At^2;\ v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{d}{dt}Bt^4 = -4Bt^3;$$
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3At^2\right) = 6At;\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(4Bt^3\right) = -12Bt^2.$$

Подставив выражения для проекций скорости и ускорения, будем иметь

$$\alpha = \arccos\frac{3At^2\cdot 6At + \left(-4Bt^3\right)\left(-12Bt^2\right)}{\sqrt{9A^2t^4 + 16B^2t^6}\cdot\sqrt{36A^2t^2 + 144B^2t^4}} = \\ = \frac{3A^2 + 8B^2t^2}{\sqrt{9A^2 + 16B^2t^2}\cdot\sqrt{A^2 + 4B^2t^2}}.$$

Зная значения A, B и t, окончательно получим, что $\alpha \approx 11{,}2^o$.

Преимущество этого способа решения заключается в том, что он легко обобщается на трёхмерный случай, когда тело движется не в плоскости, а в пространстве:

$$\alpha = \arccos\frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\cdot\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Способ 2.

Находим так, как это показано выше, проекции на координатные оси скорости v_x, v_y и ускорения a_x, a_y. Определяем угол α_1, который образует вектор скорости с одной из координатных осей, например, с осью x:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \alpha_1 = \mathrm{arctg}\frac{v_y}{v_x} = \mathrm{arctg}\left(-\frac{4Bt^3}{3At^2}\right) = \mathrm{arctg}\left(-\frac{4Bt}{3A}\right).$$

Подставив значения A, B и t, получим, что $\alpha_1 \approx -46{,}8^o$.

Аналогично определяем угол α_2, который образует вектор ускорения с той же координатной осью, что и в случае с вектором скорости (т.е. с осью x):

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{a_y}{a_x} \Rightarrow \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{a_y}{a_x} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{12Bt^2}{6At}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2Bt}{A}\right).$$

Вычисления показывают, что $\alpha_2 \approx -58^{o}$. Угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{a}$ будет тогда равен $\alpha = |\alpha_2 - \alpha_1| \approx 11{,}2^{o}$.

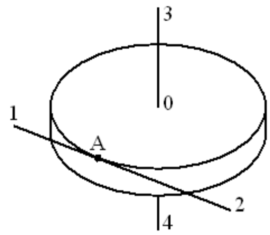
Решение задачи существенно упрощается, если одна из проекций ускорения на координатные оси равна нулю. Пусть, например, равна нулю проекция ускорения на ось x. Это означает, что полное ускорение направлено вдоль оси y. Тогда угол между векторами скорости и ускорения равен углу, который составляет вектор скорости с положительным (при $a_y > 0$) или с отрицательным (при $a_y < 0$) направлением оси y.

Ответ: 11,2°

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТЕСТОВ И ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ "КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА"

1. Диск вращается вокруг вертикальной оси равноускоренно против часовой стрелки. Укажите направление вектора углового ускорения.

а) 1 б) 2 в) 3 г) 4



Направление вектора угловой скорости связано с направлением вращения правилом правого винта, поэтому при вращении диска против часовой стрелки направление вектора угловой скорости совпадает с направлением 3. При ускоренном движении, вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости и также ориентирован в направлении 3.

Ответ: в

Отметим, что если бы вращение было замедленным, векторы угловой скорости и углового ускорения были бы противоположны.

2. Точка М движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением. Если проекция тангенциального ускорения на направление скорости положительна, то величина нормального ускорения …

1) увеличивается 2) уменьшается
3) не изменяется 4) правильный ответ отсутствует

Нормальное ускорение определяют по формуле $a_n = \frac{v^2}{R}$. При движении по окружности радиус R = const. Если проекция тангенциального ускорения на направление скорости положительна, то скорость возрастает по величине. Приходим к выводу, что с течением времени величина нормального ускорения увеличивается.

Ответ: 1

3. Материальная точка М движется по окружности со скоростью $\vec{v}$. На рис.1 показан график зависимости v_τ от времени ($\vec{\tau}$ – единичный вектор положительного направления, v_τ – проекция $\vec{v}$ на это направление). На рис.2 укажите направление ускорения точки М в момент времени t_1.

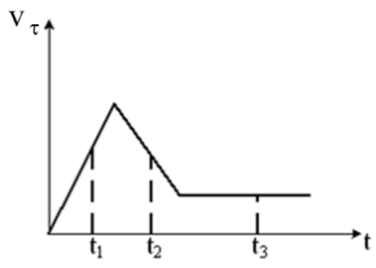


Рис. 1

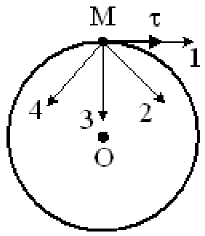


Рис. 2

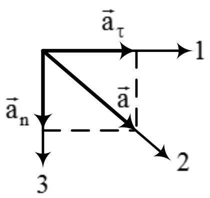
а) 4 б) 3 в) 1 г) 2

Полное ускорение представим как сумму тангенциального $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Величина нормального ускорения определяется по формуле $a_n = \dfrac{v^2}{R}$. Из рис. 1 следует, что в момент времени t_1 скорость не равна нулю, а из рис. 2 видим, что радиус кривизны траектории имеет постоянное конечное значение. Это означает, что величина нормального ускорения отлична от нуля. Нормальное ускорение всегда направлено по радиусу к центру окружности, т.е. его направление совпадает с направлением 3.

Скорость движения материальной точки М равна $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$, т.е. вектор скорости ориентирован в направлении 1. Из рис. 1 следует, что в момент времени t_1 скорость растёт ($\dfrac{dv}{dt} > 0$), значит тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = \dfrac{dv}{dt}\vec{\tau}$ отлично от нуля и направлено так же как и скорость в направлении 1.

Определяем направление полного ускорения в заданный момент времени по правилу параллелограмма:



Видим, что полное ускорение в момент времени t_1 направлено в направлении 2.

Ответ: г

Отметим, что в момент времени t_2 *скорость уменьшается (*$\dfrac{dv}{dt} < 0$*), и тангенциальное ускорение отлично от нуля и противоположно направлению скорости. В этом случае полное ускорение направлено в направлении 4. В момент времени* t_3 *скорость постоянна (*$\dfrac{dv}{dt} = 0$*), поэтому тангенциальное ускорение равно нулю и направление полного ускорения совпадает с направлением центростремительного ускорения, т.е. с направлением 3.*

4. Материальная точка движется по окружности радиусом R = 0,2 м с постоянным угловым ускорением ε = 1,5 рад/с^2. Определить через t = 0,5 с после начала её движения из состояния покоя: а) полное ускорение a; б) нормальное ускорение a_n; в) тангенциальное ускорение a_τ; г) угловую скорость ω; д) линейную скорость v.

Дано	*Решение*
$\omega_o = 0$ $R = 0{,}2$ м $\varepsilon = 1{,}5$ рад/с^2 $t = 0{,}5$ с a – ? a_n – ? a_τ – ? ω – ? v – ?	Установим связь между угловой скоростью и угловым ускорением при движении материальной точки по окружности с постоянным угловым ускорением.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \varepsilon\, dt .$$

Интегрируем правую и левую части уравнения:

$$\int\limits_{\omega_o=0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int\limits_{t_o=0}^{t} dt .$$

Отметим, что угловое ускорение ε вынесено за знак интеграла как постоянная величина.

$$\omega\Big|_0^{\omega} = \varepsilon\, t\Big|_0^{t} \Rightarrow \omega - 0 = \varepsilon(t-0)\text{, т.е. } \omega = \varepsilon\, t.$$

Тогда $\omega = 1{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}75$ (рад/с).

Линейная скорость v связана с угловой скоростью выражением $v = \omega R = \varepsilon t R$, поэтому $v = 1{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2 = 0{,}15$ (м/с).

Нормальное (центростремительное) ускорение равно:

$a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R$ и $a_n = 1{,}5^2\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}2 = 0{,}1125 \approx 0{,}11$ (м/с^2).

Связь тангенциального и углового ускорений описывается следующим выражением

$a_\tau = \varepsilon R$, поэтому $a_\tau = 1{,}5\cdot 0{,}2 = 0{,}3$ (м/с^2)

Найдём полное ускорение материальной точки:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \varepsilon^4 t^4 R^2} = \varepsilon R\sqrt{1+\varepsilon^2 t^4}$$

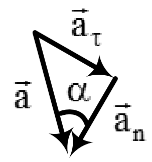
$$a = 1{,}5\cdot 0{,}2\cdot\sqrt{1+1{,}5^2\cdot 0{,}5^4} \approx 0{,}32\left(\text{м}/\text{с}^2\right)$$

Ответ: $a = 0{,}32$ м/с^2; $a_n = 0{,}11$ м/с^2; $a_\tau = 0{,}3$ м/с^2; $\omega = 0{,}75$ рад/с; $v = 0{,}15$ м/с

5. Материальная точка движется по окружности, радиус которой равен $R = 3$ м. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки достигает значения $a_n = 12$ м/с^2, а угол между векторами полного и нормального ускорений становится равным $\alpha = 30°$. Найти модули скорости и тангенциального ускорения точки для этого момента времени.

Дано	*Решение*
$R = 3$ м $a_n = 12$ м/с^2 $\alpha = 30°$ v – ? a_τ – ?	Известно, что нормальное ускорение связано с линейной скоростью следующим выражением $a_n = \dfrac{v^2}{R}$. Тогда $v = \sqrt{a_n R}$ и $v = \sqrt{12\cdot 3} = 6$ м/с.

В рассматриваемый момент времени материальная точка оказалась в некоторой точке окружности. Тангенциальное ускорение направлено по касательной к окружности в этой точке, а центростремительное ускорение – по нормали к ней, как это показано на рисунке. При этом угол между векторами полного $\vec{a}$ и центростремительного $\vec{a}_n$ ускорений согласно условию задачи равен 30°. Из рисунка видно, что $a_\tau = a_n\cdot \mathrm{tg}\,\alpha$, поэтому



$$a_\tau = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 6{,}93\left(\text{м}/\text{с}^2\right).$$

Ответ: $v = 6$ м/с; $a_\tau = 6{,}93$ м/с^2

6. Твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = At - Bt^3$. Найти среднее значение угловой скорости за промежуток времени от $t_1 = 0$ до остановки тела, если A = 6 рад/с, а B = 0,89 рад/с^3.

Дано

$t_1 = 0$

$\varphi = At - Bt^3$

A = 6 рад/с

B = 0,89 рад/с^3

$\langle \omega \rangle$ – ?

Решение

Среднее значение угловой скорости равно

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Из выражения для временной зависимости угла поворота видно, что $\varphi(t_1) = 0$.

Найдём момент времени t_2, в который тело остановилось. Для этого учтём, что в этот момент времени угловая скорость тела становится равной нулю. Тогда

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(At - Bt^3\right) = A - 3Bt^2.$$

$$A - 3Bt_2^2 = 0 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{A}{3B}}.$$

$$\langle \omega \rangle = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2} = \frac{A\sqrt{\frac{A}{3B}} - B\frac{A}{3B}\sqrt{\frac{A}{3B}}}{\sqrt{\frac{A}{3B}}} = \frac{2A}{3}.$$

Подставив A = 6 рад/с, получим $\langle \omega \rangle$ = 4 рад/с.

Ответ: 4 рад/с

7. Колесо радиусом R = 20 см вращается вокруг неподвижной оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени задаётся уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где A = 2 рад, B = 4 рад/с, C = 0,1 рад/с^3. Определите для точек на ободе колеса нормальное ускорение a_n в момент времени t = 2 с и тангенциальное ускорение a_τ для этого же момента времени.

Дано

R = 0,2 м

$\varphi = A + Bt + Ct^3$

A = 2 рад

B = 4 рад/с

C = 0,1 рад/ с^3

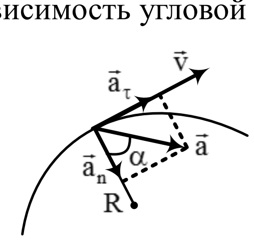
t = 2 с

a_n – ? a_τ – ?

Решение

Найдём временную зависимость угловой скорости колеса:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 3Ct^2.$$



Учитываем, что $a_n = \omega^2 R$. Зная выражение для угловой скорости, будем иметь $a_n = \left(B + 3Ct^2\right)^2 R$.

Подставив численные значения, получим

$$a_n = \left(4 + 3\cdot 0{,}1\cdot 4\right)^2 0{,}2 \approx 5{,}41 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Найдём временную зависимость углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 6Ct.$$

Тогда $a_\tau = \varepsilon R = 6CtR = 6\cdot 0{,}1\cdot 2\cdot 0{,}2 = 0{,}24$ (м/с^2).

Ответ: a_n = 5,41 м/с^2; a_τ = 0,24 м/с^2

8. Нормальное ускорение частицы, движущейся по окружности радиусом R = 2 м, изменяется по закону $a_n = At^4$, где A = 8 м/с^6. Найти: а) путь, пройденный частицей за τ = 3 с после начала движения; б) тангенциальное и полное ускорения в конце этого участка пути.

Дано	*Решение*
R = 2 м $a_n = At^4$ A = 8 м/с^6 τ = 3 с S – ? a – ? a_τ – ?	Модуль скорости – это производная от пройденного пути по времени, поэтому $v = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = v \cdot dt.$ Откуда получаем $\int\limits_{S_0=0}^{S} dS = \int\limits_{\tau_0=0}^{\tau} v\,dt\,;\; S = \int\limits_{0}^{\tau} v\,dt\,.$

Видим, что для нахождения пройденного пути необходимо знать, как скорость зависит от времени. Временную зависимость скорости можно найти, зная, как зависит от времени нормальное ускорение. Действительно,

$$a_n = \frac{v^2}{R} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{a_n R} = \sqrt{ARt^4} = t^2\sqrt{AR}\,.$$

Подставим выражение для скорости в интеграл, определяющий путь, и получим:

$$S = \int\limits_0^{\tau} \sqrt{AR}\,t^2 dt = \sqrt{AR}\int\limits_0^{\tau} t^2 dt = \sqrt{AR}\,\frac{\tau^3}{3}\,.$$

Окончательно для пройденного пути будем иметь: $S = \sqrt{8\cdot 2}\cdot\frac{3^3}{3} = 36\,(\text{м})\,.$

Тангенциальное ускорение характеризует скорость изменения модуля скорости, поэтому

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2\sqrt{AR}\right) = 2t\sqrt{AR}\,;$$

$$a_\tau = 2\cdot 3\sqrt{8\cdot 2} = 24\left(\text{м}/\text{с}^2\right).$$

Зная тангенциальное и нормальное ускорения для полного ускорения будем иметь

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{4t^2AR + A^2t^8}\,.$$

Вычислив, получим $a \approx 648{,}4\left(\text{м}/\text{с}^2\right)$.

Ответ: S = 36 м; a = 648,4 м/с^2; a_τ = 24 м/с^2

9. Точка движется по окружности так, что зависимость пройденного ею пути от времени описывается уравнением $S = At + Bt^2$, где A = 1 м/с, B = 3 м/с^2.Через t_1 = 2 с после начала движения нормальное ускорение точки стало равным a_{n_1} = 2 м/с^2. Определите момент времени, в который модули нормального и тангенциального ускорений будут равны.

Дано *Решение*

$S = At + Bt^2$
$A = 1$ м/с
$B = 3$ м/с^2
$t_1 = 2$ с
$a_{n_1} = 2$ м/с^2
$a_n = a_\tau$

$t - ?$

Найдём зависимости от времени нормального $a_n = \frac{v^2}{R}$ и тангенциального $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ ускорений. Для этого получим выражение для скорости движения точки:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(At + Bt^2\right) = A + 2Bt.$$

Тогда $a_\tau = \frac{d}{dt}(A + 2Bt) = 2B$. Чтобы найти нормальное ускорение, предварительно найдём радиус окружности, по которой движется материальная точка:

$$a_{n_1} = \frac{\left[v(t_1)\right]^2}{R} = \frac{\left(A + 2Bt_1\right)^2}{R} \Rightarrow R = \frac{\left(A + 2Bt_1\right)^2}{a_{n_1}}.$$

Отсюда следует, что $a_n = \frac{\left(A + 2Bt\right)^2 a_{n_1}}{\left(A + 2Bt_1\right)^2}$.

Из условия $a_n = a_\tau$, будем иметь

$$\frac{\left(A + 2Bt\right)^2 a_{n_1}}{\left(A + 2Bt_1\right)^2} = 2B.$$

Тогда $t = \dfrac{\sqrt{\dfrac{2B\left(A + 2Bt_1\right)^2}{a_{n_1}}} - A}{2B}$.

Подставив данные, приведённые в условии задачи, получим, что $t = 3{,}59$ с

Ответ: 3,59 с

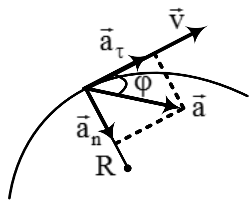
10. Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м. Её скорость зависит от пройденного пути по закону $v = A\sqrt{S}$, где A – постоянная. Найти угол между векторами полного ускорения и скорости частицы в тот момент времени, когда частица пройдёт путь S, равный 3 м.

Дано ***Решение***

$v = A\sqrt{S}$
$R = 2$ м
$S = 3$ м

$\varphi - ?$

Из приведённого рисунка следует, что $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{a_\tau}$. Нормальное ускорение равно $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{A^2 S}{R}$.



При нахождении тангенциального ускорения учтём, что пройденный путь – это функция времени. Это даёт возможность представить скорость как сложную функцию $v = v\left[S(t)\right]$ и производную $\frac{dv}{dt}$ находить как производную от сложной функции:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}v\left[S(t)\right] = \frac{dv}{dS}\cdot\frac{dS}{dt} = \frac{A}{2\sqrt{S}}v = \frac{A^2\sqrt{S}}{2\sqrt{S}} = \frac{A^2}{2}.$$

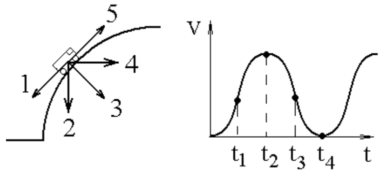
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{a_\tau} = \operatorname{arctg}\frac{2A^2 S}{RA^2} = \operatorname{arctg}\frac{2S}{R}.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\cdot 3}{2} \approx 71{,}6^{\circ}.$$

Ответ: 71,6°

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТЕСТОВ И ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ "ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК"

1. Материальная точка движется вверх по участку дуги. Величина её скорости изменяется во времени так, как это показано на графике зависимости v(t). Куда направлена результирующая всех сил, действующих на материальную точку в момент времени t_3?

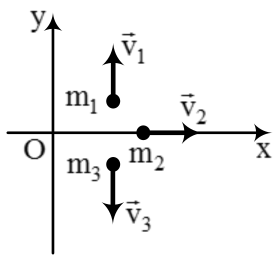


а) 1 б) 2 в) 3 г) 4 д) 5

В соответствии со вторым законом Ньютона, который в данном случае запишем в виде $\vec{F} = m\vec{a}$, результирующая всех сил, действующих на материальную точку, направлена так же, как и вектор полного ускорения. Полное ускорение равно векторной сумме тангенциального и нормального ускорений. Найдём направления каждого из этих ускорений, а затем, сложив их по правилу треугольника или по правилу параллелограмма, определим направление полного ускорения. Нормальное ускорение направлено к центру дуги, по которой движется точка, т.е. в направлении 3. Так как в момент времени t_3 скорость уменьшается, тангенциальное ускорение направлено в сторону противоположную скорости, т.е. в направлении 1. Тогда полное ускорение направлено в направлении 2. В этом же направлении действует на материальную точку и результирующая сила.

Ответ: б

2. Система состоит из трех шаров с массами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг, которые движутся так, как показано на рисунке. Если скорости шаров равны $v_1 = 3$ м/с, $v_2 = 2$ м/с, $v_3 = 1$ м/с, то величина скорости центра масс этой системы в м/с равна ...



а) 2/3 б) 4 в) 5/3 г) 10

Радиус-вектор центра масс системы определяется по формуле

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{i=3} m_i}.$$

Найдём координаты центра масс системы:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=3} m_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=3} m_i}.$$

Проекция вектора скорости центра масс данной системы на ось x равна

$$v_{cx} = \frac{dx_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} m_i \frac{dx_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{i=3} m_i}.$$

Так как $\frac{dx_i}{dt} = v_{xi}$, то $v_{cx} = \frac{m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2} + m_3 v_{x3}}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Из рисунка видно, что $v_{x1}=v_{x3}=0$, а $v_{x2}=v_2$. Тогда $v_{cx}=\dfrac{m_2v_2}{m_1+m_2+m_3}$. Подставив численные значения, получим, что $v_{cx}=\dfrac{2}{3}\dfrac{м}{с}$. Аналогично находим проекцию вектора скорости центра масс данной системы на ось y:

$$v_{cy}=\frac{dy_c}{dt}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=3}m_i\dfrac{dy_i}{dt}}{\sum\limits_{i=1}^{i=3}m_i}=\frac{m_1v_{y1}+m_2v_{y2}+m_3v_{y3}}{m_1+m_2+m_3}.$$

Учитываем, что $v_{y1}=v_1;\ v_{y2}=0;\ v_{y3}=-v_3$, поэтому

$v_{cy}=\dfrac{m_1v_1-m_3v_3}{m_1+m_2+m_3}$. Подставив численные значения, получим, что $v_{cy}=0$. Величину скорости центра масс найдём по формуле $v_c=\sqrt{v_{cx}^2+v_{cy}^2}=v_{cx}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{м}{с}\right)$.

Ответ: а

3. Тело массой m = 1 кг движется так, что зависимость координаты x тела от времени описывается уравнением $x = A\cdot\sin(\omega t)$, где A = 3 м, $\omega=\pi\ с^{-1}$. Найти модуль силы, действующей на тело в момент времени $t=0,25$ с.

Дано	*Решение*
$m = 1$ кг $x = A\cdot\sin(\omega t)$ $A = 3$ м $\omega=\pi\ с^{-1}$ $t=0,25$ с $y = 0$ $z = 0$ $\lvert\vec F\rvert$ – ?	Так как масса тела с течением времени не изменяется, второй закон Ньютона можно записать в форме $\vec F=m\dfrac{d\vec v}{dt}$. Учтём, что $\vec F=\vec i F_x+\vec j F_y$, а $\vec v=\vec i v_x+\vec j v_y$. Тогда $F_x=m\dfrac{dv_x}{dt}$.

Учитывая, что $v_x=\dfrac{dx}{dt}=\omega A\cdot\cos(\omega t)$, а $\dfrac{dv_x}{dt}=-\omega^2A\cdot\sin(\omega t)$, получаем, что

$$F_x=-m\omega^2A\cdot\sin(\omega t).$$

По условию y = 0 и z = 0, поэтому $v_y=\dfrac{dy}{dt}=0$ и $v_z=\dfrac{dz}{dt}=0$. Это означает, что $a_y=a_z=0\Rightarrow F_y=F_z=0.$ Отсюда следует, что $\vec F=-m\omega^2A\cdot\sin(\omega t)\vec i$.

$\lvert\vec F\rvert=m\omega^2A\cdot\sin(\omega t)=m\omega^2A\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$. Подставив приведённые в условии задачи значения m, ω, A и t, получим

$$\lvert\vec F\rvert=1\cdot 3{,}14^2\cdot 3\cdot 0{,}707\approx 20{,}91\,(\text{Н}).$$

Ответ: 20,91 Н

4. Материальная точка массой 3 кг движется так, что её радиус-вектор изменяется с течением времени по закону $\vec r=t^2(A-Bt)\vec i+Ct\vec j$, где A = 5 м/с^2, B = 1 м/с^3, C = 4 м/с. Найти модуль силы, действующей на тело, через полторы секунды после начала движения.

Дано	*Решение*
$\vec{r} = t^2(A - Bt)\vec{i} + Ct\,\vec{j}$ m = 3 кг t = 1,5 с A = 5 м/с^2 B = 1 м/с^3 C = 4 м/с	В соответствии со вторым законом Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$. Найдём ускорение тела, учитывая, что, как видно из выражения для временно́й зависимости радиус-вектора, $x = At^2 - Bt^3$, а $y = Ct$. Тогда $$v_x = 2At - 3Bt^2,\ v_y = C;$$ $$a_x = 2A - 6Bt,\ a_y = 0.$$ В координатной форме выражение для силы запишем в виде $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j}$. Подставив выражения для a_x и a_y, будем
$\lvert\vec{F}\rvert$ – ?	

иметь:

$$\vec{F} = 2m(A - 3Bt)\vec{i},$$
$$\vec{F} = 2\cdot 3(5 - 3\cdot 1\cdot 1{,}5)\vec{i} = 3\vec{i}.$$

Таким образом, модуль силы в момент времени t = 1,5 с равен 3 Н. *Отметим, что в этот момент времени она направлена в положительном направлении оси x.*

Ответ: 3 Н

5. В момент t = 0 частица массой 3 кг находилась в начале координат и имела скорость $\vec{v}_o = A\vec{i}$, где A = 2 м/с. В этот момент на неё начала действовать сила $\vec{F} = (B + Ct)\vec{j}$, где B = 3 Н, C =0,6 Н/с. Найти расстояние частицы от начала координат в момент времени t_1 = 3 с.

Дано	*Решение*
$\vec{F} = (B + Ct)\vec{j}$ $\vec{v}_o = A\vec{i}$ m = 3 кг t_1 = 3 с A = 2 м/с B = 3 Н C = 0,6 Н/с $x_o = y_o = 0$	Расстояние частицы от начала координат при t_1 = 3 с равно модулю её радиус-вектора, определённого в этот момент времени, т.е. $\ell = \lvert\vec{r}\rvert = \sqrt{x^2(t_1) + y^2(t_1)}$. Таким образом, задача сводится к нахождению значений координат частицы в момент времени $t = t_1$. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x: $$F_x = ma_x.$$ Тогда $a_x = \frac{F_x}{m}$. Из выражения для силы видим, что $F_x = 0$, следовательно $a_x = 0$. Так как $a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x\,dt$. Интегрируя левую и правую части
ℓ – ?	

этого уравнения $\int\limits_{v_x(t_o)=A}^{v_x(t)} dv_x = \int\limits_0^t a_x\,dt$ и учитывая, что $a_x = 0$, получим $v_x - A = 0$, т.е. проекция скорости частицы на ось x не зависит от времени и равна начальной скорости: $v_x = A$. Определим зависимость от времени координаты x частицы.

$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x\,dt$. Интегрируем это выражение:

$$\int\limits_{x_o=0}^{x} dx = \int\limits_{t=0}^{t=t_1} v_x\,dt \Rightarrow x(t_1) = A\int\limits_{t=0}^{t=t_1} dt = At_1 \text{ и } x(t_1) = 6 \text{ м.}$$

Переходим к нахождению координаты y.

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$F_y = ma_y \Rightarrow a_y = \frac{F_y}{m}$. Из выражения для силы видим, что $F_y = B + Ct \Rightarrow a_y = \frac{B + Ct}{m}$. Так как

$a_y = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow dv_y = a_y\,dt$. Интегрируем левую и правую части этого уравнения $\int\limits_{v_y(t_o)=0}^{v_y(t)} dv_y = \int\limits_0^t a_y\,dt$. Подставив выражение для a_y, получим $v_y = \frac{B}{m}\int\limits_0^t dt + \frac{C}{m}\int\limits_0^t t\,dt = \frac{B}{m}t + \frac{C}{2m}t^2$. Определим зависимость от времени координаты y частицы.

$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow dy = v_y dt$. Интегрируем это выражение

$$\int\limits_{y_o=0}^{y(t_1)} dy = \int\limits_{t=0}^{t=t_1} v_y\,dt$$

и получаем значение координаты y в момент времени t_1:

$$y(t_1) = \frac{B}{m}\int\limits_{t=0}^{t=t_1} t\,dt + \frac{C}{2m}\int\limits_{t=0}^{t=t_1} t^2\,dt = \frac{Bt_1^2}{2m} + \frac{Ct_1^3}{6m} \text{ и } y(t_1) = 5{,}4 \text{ м}$$

Подставив значения $x(t_1)$ и $y(t_1)$ в выражение для расстояния частицы от начала координат $\ell = \sqrt{x^2(t_1) + y^2(t_1)}$, будем иметь $\ell =$ 8,07 м

Ответ: 8,07 м

6. В момент времени t = 0 на материальную точку массой m = 1 кг, находившуюся в состоянии покоя, начала действовать сила, изменяющаяся с течением времени по закону $\vec{F} = Ae^{Ct}\vec{i} + Be^{Ct}\vec{j}$, где A = 3 кг·м/с^2, B = 4 кг·м/с^2, C = 0,1 с$^{-1}$.

Найти путь, пройденный частицей за первые три секунды после начала движения.

Дано	***Решение***
$\vec{F} = Ae^{Ct}\vec{i} + Be^{Ct}\vec{j}$ $v_{ox} = v_{oy} = 0$ m = 1 кг $t_0 = 0$ $t_1 = 3$ с A = 3 кг·м/с^2 B = 4 кг·м/с^2 C = 0,1 с$^{-1}$	Из сравнения выражений $\vec{F} = Ae^{Ct}\vec{i} + Be^{Ct}\vec{j}$ и $\vec{F} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j}$ следует, что $a_x = \frac{A}{m}e^{Ct}$, $a_y = \frac{B}{m}e^{Ct}$.
S – ?	Так как $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, то $dv_x = a_x dt$. Интегрируя, получим закон изменения во

времени проекции скорости на ось x:

$$\int\limits_{v_x(t_o)=0}^{v_x(t)} dv_x = \int\limits_{t_o=0}^{t} a_x dt \text{ и } v_x = \frac{A}{m}\int\limits_{t=0}^{t} e^{Ct}dt = \frac{A}{mC}e^{Ct}\Big|_0^t = \frac{A}{mC}\left(e^{Ct} - 1\right)$$

Аналогично получаем, что

$$v_y = \frac{B}{mC}\left(e^{Ct} - 1\right).$$

Пройденный путь равен

$$S = \int\limits_{t_o=0}^{t=t_1} v\,dt,$$

где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{mC}\left(e^{Ct} - 1\right)$.

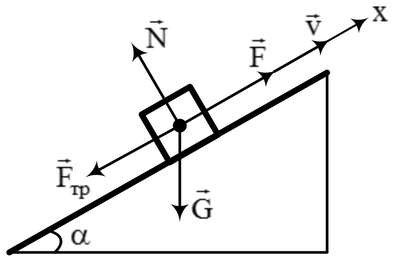
Окончательно будем иметь:

$$S=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{mC}\int_{t_o=0}^{t=t_1}\left(e^{Ct}-1\right)dt=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{mC^2}\left(e^{Ct_1}-1\right)-\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{mC}t_1.$$

Подставив приведённые в условии задачи значения m, A, B, C и t_1, получим, что S = 24,9 м

Ответ: 24,9 м

7. Брусок массой m = 2 кг начинает двигаться вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^o$ с горизонтом. К бруску приложена сила F = 24 Н, направленная вдоль наклонной плоскости вверх. Коэффициент трения меняется по закону $\mu=\mu_o\sin(bx)$, где $\mu_o = 0{,}1$; $b=\pi/9$ рад/м. Найти скорость бруска после того, как он пройдет путь 3 метра.

Дано	*Решение*
F = 24 Н m = 2 кг $\mu_o = 0{,}1$ b = π/9 рад/м S = 3 м $\alpha = 30^o$	
v – ?	

Запишем уравнение движения бруска в проекции на ось x, направление которой совпадает с направлением силы $\vec{F}$:

$$F-mg\sin\alpha-F_{трения}=ma.$$

Учтём, что $F_{трения}=\mu N=\mu_o\sin bx\, mg\cos\alpha$.

Рассмотрим скорость как сложную функцию $v=v\left[x(t)\right]$, тогда $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt}=v\dfrac{dv}{dx}$.

Подставив выражения для силы трения и ускорения в уравнение движения бруска, и разделив левую и правую части этого уравнения на массу бруска, будем иметь:

$$\frac{F}{m}-g\sin\alpha-\mu_o\sin bx\,g\cos\alpha=v\frac{dv}{dx}.$$

Проинтегрируем левую часть этого уравнения по координате x, а правую по скорости:

$$\frac{F}{m}\int_0^S dx-g\sin\alpha\int_0^S dx-\mu_o g\cos\alpha\int_0^S\sin bx\,dx=\int_0^v vdv.$$

$$\frac{F}{m}S-g\,S\sin\alpha+\frac{\mu_o g\cos\alpha}{b}\cos bx\Big|_0^S=\frac{v^2}{2}.$$

Тогда $v=\sqrt{2\left[\dfrac{F}{m}S-gS\sin\alpha+\dfrac{\mu_o g\cos\alpha}{b}\left(\cos(bS)-1\right)\right]}$.

Подставив данные, приведённые в условии задачи, получим, что v = 6,29 м/с.

Ответ: 6,29 м/с

8. Моторная лодка двигалась по озеру, имея в начальный момент времени скорость $v_o = 4$ м/с. Найти скорость её движения через τ = 20 с после выключения двигателя, если сила сопротивления движению лодки пропорциональна квадрату скорости: $F_c=-rv^2$, где r = 2 кг/м. Масса лодки m = 150 кг.

Дано	*Решение*
$F_c = -r v^2$ $t_0 = 0$ $v_o = 4$ м/с $m = 150$ кг $\tau = 20$ с $r = 2$ кг/м	Запишем уравнение движения лодки после выключения двигателя в проекции на направление движения:
v – ?	

$$F_c = m\frac{dv}{dt}.$$

Подставив выражение для силы сопротивления, получим:

$$-r v^2 = m\frac{dv}{dt}.$$

Разделив переменные v и t, будем иметь $\frac{dt}{m} = -\frac{1}{r}\frac{dv}{v^2}$. Интегрируем это уравнение

$$\frac{1}{m}\int_0^{\tau} dt = -\frac{1}{r}\int_{v_o}^{v}\frac{dv}{v^2}$$

и получаем

$$\frac{\tau}{m} = -\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{v}\Big|_{v_o}^{v}\right) \Rightarrow \frac{\tau}{m} = \frac{v_o - v}{r v v_o}.$$

После преобразований будем иметь

$$v = \frac{m v_o}{\tau r v_o + m}.$$

Подставив исходные данные, получим, что v = 1,94 м/с.

Ответ: 1,94 м/с

9. Нагруженная щебнем железнодорожная платформа с начальной массой m_o = 5 т начинает движение из состояния покоя под действием постоянной горизонтальной силы F = 300 Н. Щебень высыпается через отверстие в дне платформы так, что скорость уменьшения её массы равна μ = 15 кг/с. Определить скорость платформы через 3 минуты после начала движения.

Дано	*Решение*
$t_0 = 0$ $m_o = 5000$ кг $v_o = 0$ $F = 300$ Н $\mu = 15$ кг/с $\tau = 180$ с	Запишем уравнение Мещерского
v – ?	

$\frac{m d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \pm \frac{dm}{dt}\vec{u}_o$, где $\vec{u}_o$ – начальная скорость высыпающегося щебня относительно платформы, которая принимается равной нулю, $\mu = \frac{dm}{dt}$ – скорость уменьшения массы платформы с щебнем. Спроектируем это уравнение на направление движения платформы, масса которой с течением времени изменяется по закону $m(t) = m_o - \mu t$:

$$m(t)\frac{dv}{dt} = F \text{ или } (m_o - \mu t)\frac{dv}{dt} = F.$$

Разделяя переменные v и t, получим $\frac{F}{m_o - \mu t}dt = dv$. Проинтегрируем данное уравнение:

$$\int_0^{\tau}\frac{F}{m_o - \mu t}dt = \int_0^{v} dv. \qquad (1)$$

Приведём интеграл $\int\limits_0^{\tau}\frac{F}{m_o-\mu t}dt$ к табличному виду. Для этого воспользуемся методом замены переменной. Рассмотрим один из вариантов этого метода. Введём обозначение $z=m_o-\mu t$. Найдём производную от новой переменной z по старой переменной t:

$$\frac{dz}{dt}=-\mu .$$

Тогда $dz=-\mu dt$ или $dt=-\frac{dz}{\mu}$. Заменим в интеграле переменную t на переменную z, не забывая изменить пределы интегрирования (при $t=0$ $z_o=m_o$, а при $t=\tau$ $z=m_o-\mu\tau$):

$$\int\limits_0^{\tau}\frac{F}{m_o-\mu t}dt=-\frac{F}{\mu}\int\limits_{m_o}^{m_o-\mu\tau}\frac{dz}{z}=-\frac{F}{\mu}\ell n\, z\Big|_{m_o}^{m_o-\mu\tau}=-\frac{F}{\mu}\ell n\frac{m_o-\mu\tau}{m_o}.$$

Возвращаясь к уравнению (1), получим

$$v=\frac{F}{\mu}\ell n\frac{m_o}{m_o-\mu\tau}.$$

После подстановки исходных данных будем иметь

$$v=\frac{300}{15}\ell n\frac{5000}{5000-15\cdot 180}=15{,}53\,\text{м/с}.$$

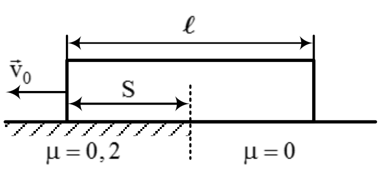
Ответ: 15,53 м/с

10. Прямоугольный брусок массой m = 4 кг и длиной ℓ = 8 м, движущийся по гладкой поверхности со скоростью $v_0=3$ м/с, направленной влево, попадает на шероховатый участок с коэффициентом трения μ = 0,2. Найти путь, пройденный левым концом бруска по шероховатой поверхности до остановки.

Дано
$v_0=3$ м/с
$v=0$ м/с
m = 4 кг
ℓ = 8 м
μ = 0,2
S – ?

Решение

Запишем второй закон Ньютона в проекции на направление движения бруска:



$F_{тр}=-m\frac{dv}{dt}$ (знак минус означает, что с течением времени скорость под действием силы трения уменьшается).

Учтём, что сила трения зависит от расстояния x, измеряемого от начала шероховатого участка до положения, которое занимает в данный момент времени левый конец бруска. Действительно, если брусок ещё не попал на шероховатый участок (x = 0), то сила трения равна нулю, если же весь брусок находится на шероховатом участке (x = ℓ), то $F_{тр}=\mu mg$. В случае $0<x<\ell$ сила трения изменяется по закону

$$F_{тр}=\mu\frac{mg}{\ell}x.$$

Скорость будем рассматривать как сложную функцию $v=v\left[x(t)\right]$, поэтому $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v$. Подставив выражения для силы трения и производной $\frac{dv}{dt}$ в уравнение движения бруска, будем иметь:

$$-\mu\frac{mg}{\ell}x = m\frac{dv}{dx}v \Rightarrow vdv = -\mu\frac{g}{\ell}xdx\,.$$

Интегрируя, получим

$$\int\limits_{v_o}^{v=0} vdv = -\mu\frac{g}{\ell}\int\limits_0^S xdx \Rightarrow -\frac{v_o^2}{2} = -\mu\frac{g}{\ell}\frac{S^2}{2}\,.$$

Тогда

$$S = v_o\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}\,.$$

Используя данные, приведённые в условии задачи, будем иметь, что S = 6 м.

Ответ: 6 м

11. В сосуде с жидкостью начинает двигаться вертикально вниз шарик радиусом r = 1 мм; его плотность равна $\rho_1 = 10{,}5\cdot10^3$ кг/м^3, плотность жидкости $\rho_2 = 1{,}5\cdot10^3$ кг/м^3. Динамический коэффициент вязкости жидкости равен $\eta = 0{,}4$ Па·с. Найти скорость шарика в момент времени t = 0,01 с.

Дано
$r = 10^{-3}$ м
$\rho_1 = 10{,}5\cdot10^3$ кг/м^3
$\rho_2 = 1{,}5\cdot10^3$ кг/м^3
$\eta = 0{,}4$ Па·с
t = 0,01 с
v – ?

Решение

На шарик действуют направленная вертикально вниз сила тяжести $G = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g$, ($\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 = V_ш\rho_1 = m$ – масса шарика) и направленные вертикально вверх выталкивающая сила (сила Архимеда) $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_2 g$ и сила сопротивления Стокса $F_c = 6\pi\eta rv$. Запишем уравнение движения шарика:

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_2 g - 6\pi\eta rv = m\frac{dv}{dt}\,.$$

Это уравнение содержит две переменные величины – скорость v и время t. Преобразуем уравнение так, чтобы одна переменная находилась в одной части уравнения (например, слева от знака равенства), а другая – в другой части (т.е. справа):

$$\frac{dt}{m} = \frac{dv}{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_1-\rho_2)g - 6\pi\eta rv}\,.$$

Интегрируем $\frac{1}{m}\int\limits_0^t dt = \int\limits_0^v \frac{dv}{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_1-\rho_2)g - 6\pi\eta rv}$ и, пользуясь методом замены переменной, получаем:

$\frac{t}{m} = \frac{1}{6\pi\eta r}\ell n\frac{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_1-\rho_2)g}{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_1-\rho_2)g - 6\pi\eta rv}$. После преобразования этого выражения будем иметь:

$$v = \frac{2r^2(\rho_1-\rho_2)g}{9\eta}\left(1 - e^{-\frac{9\eta}{2r^2\rho_1}t}\right).$$

Вычисления показывают, что при заданных условиях $v = 0{,}041$ м/с.

Ответ: 0,041 м/с

12. Определить силу гравитационного взаимодействия тонкого однородного стержня массой m = 5 кг и длиной ℓ = 0,4 м и материальной точки массой M =10 кг, если она расположена на оси стержня на расстоянии a = 0,1 м от ближайшего его конца.

Дано

$m = 5$ кг

$M = 10$ кг

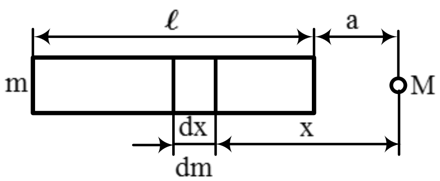
$\ell = 0,4$ м

$a = 0,1$ м

$G = 6,67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг²

F – ?

Решение



Очевидно, что для решения задачи необходимо воспользоваться законом всемирного тяготения, в соответствии с которым две материальные точки взаимодействуют друг с другом с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих точек и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Если рассматривается случай взаимодействия протяжённых тел, их разбивают на элементарные массы, каждую из которых можно принять за материальную точку.

В данной задаче разделим стержень на участки длиной dx, масса каждого из которых равна

$$dm = \frac{m}{\ell}dx,$$

где $\frac{m}{\ell}$ – масса единицы длины стержня. Согласно закону всемирного тяготения сила взаимодействия материальной точки массой M и находящегося от неё на расстоянии x участка стержня массой dm, будет равна:

$$dF = G\frac{M\,dm}{x^2} = G\frac{M\,m}{\ell}\frac{dx}{x^2}.$$

Интегрируя это выражение, найдём силу взаимодействия всего стержня с материальной точкой M:

$F = G\frac{Mm}{\ell}\int\limits_a^{\ell+a}\frac{dx}{x^2} = G\frac{mM}{\ell}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^{\ell+a} = G\frac{mM}{\ell}\left(\frac{\ell}{a(\ell+a)}\right) = G\frac{mM}{a(\ell+a)}$. Подставив значения m, M, a и ℓ, получим, что

$$F = 6,67\cdot10^{-11}\frac{5\cdot10}{0,1\cdot(0,4+0,1)} = 6,67\cdot10^{-8}\ (\text{Н})$$

Ответ: $6,67\cdot10^{-8}$ Н

13. Найти силу гравитационного взаимодействия тонкого однородного полукольца массой 4 кг и радиусом 2 м с помещённым в центр его кривизны однородным маленьким шариком массой M = 0,5 кг.

Дано

$M = 0,5$ кг

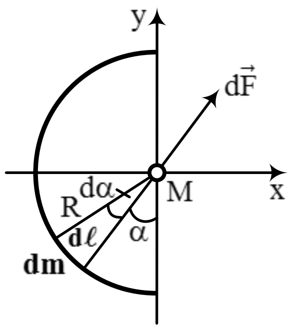
$R = 2$ м

$m = 4$ кг

$G = 6,67\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг²

F – ?

Решение



Так как расстояние между полукольцом и материальной точкой M сравнимо с размерами полукольца, его в данном случае нельзя рассматривать как материальную точку. Представим полукольцо состоящим из участков длиной $d\ell$, масса каждого из которых равна

$$dm = \frac{m}{\pi R} d\ell .$$

Такие участки (один из которых показан на рисунке) можно считать материальными точками. Так как $d\ell = Rd\alpha$, то $dm = \frac{m}{\pi R} Rd\alpha = \frac{m}{\pi} d\alpha$. Тогда модуль силы взаимодействия материальных точек M и dm будет равен:

$$dF = G\frac{M\,dm}{R^2} = G\frac{M}{R^2}\frac{m}{\pi}d\alpha .$$

Обратим внимание на то, что силы взаимодействия материальной точки M и расположенных в различных местах полукольца элементарных масс dm будут отличаться по направлению (на рис. изображена сила, действующая на один из участков полукольца со стороны материальной точки M). Для нахождения модуля силы взаимодействия полукольца с материальной точкой в таком случае определяют проекции этой силы на координатные оси x и y. Для этого запишем выражения для проекций на оси x и y силы dF:

$$dF_x = dF\sin\alpha = G\frac{M}{R^2}\frac{m}{\pi}\sin\alpha d\alpha ,$$

$$dF_y = G\frac{M}{R^2}\frac{m}{\pi}\cos\alpha d\alpha \cdot$$

Интегрируя, получаем, что

$$F_x = G\frac{M}{R^2}\cdot\frac{m}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\alpha\, d\alpha = G\frac{mM}{\pi R^2}\left(-\cos\alpha\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2GmM}{\pi R^2};$$

$$F_y = G\frac{M}{R^2}\cdot\frac{m}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha\, d\alpha = G\frac{mM}{\pi R^2}\left(\sin\alpha\right)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

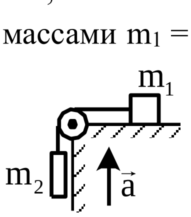
Отсюда следует, что

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = F_x = \frac{2GmM}{\pi R^2}.$$

$$F = \frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4\cdot 0{,}5}{3{,}14\cdot 4} = 2{,}12\cdot 10^{-11}\left(Н\right)$$

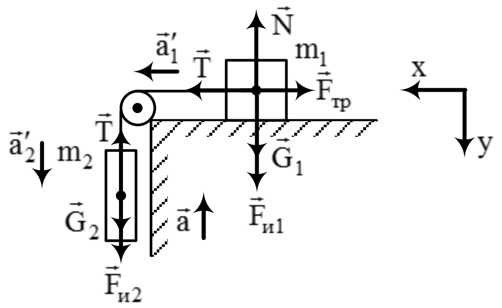
Ответ: $2{,}12\cdot 10^{-11}$ Н

14. Соединённые невесомой и нерастяжимой нитью через невесомый блок тела массами m_1 = 0,3 кг и m_2 = 0,4 кг находятся в лифте, движущемся вверх с ускорением a = 2 м/с^2. Определите силу натяжения нити, если коэффициент трения между телом массой m_1 и поверхностью, по которой оно движется, равен 0,2.



Дано | ***Решение***

Дано
m_1 = 0,3 кг
m_2 = 0,4 кг
a = 2 м/с^2
μ = 0,2
T – ?



Систему отсчёта свяжем с лифтом. Так как он движется ускоренно, эта система отсчёта будет неинерциальной. Из показанных на рисунке величин отметим следующие: $\vec{G}_1 = m_1\vec{g}$, $\vec{G}_2 = m_2\vec{g}$, $\vec{a}_1'$ – ускорение движения первого тела, измеренное в выбранной неинерциальной системе отсчёта, $\vec{a}_2'$ – ускорение движения второго тела, измеренное в этой же системе отсчёта и равное по модулю ускорению движения первого тела ($|\vec{a}_1'| = |\vec{a}_2'| = a'$), $\vec{F}_{и1} = -m_1\vec{a}$ – сила инерции, действующая на первое тело, $\vec{F}_{и2} = -m_2\vec{a}$ – сила инерции, действующая на второе тело. Другие силы инерции отсутствуют, так как лифт и тела с массами m_1 и m_2 движутся поступательно.

Запишем уравнения движения тела массой m_1 в проекциях на координатные оси x и y, учитывая, что сила инерции $\vec{F}_{и1}$ направлена в положительном направлении оси y и её проекция на эту ось равна $m_1 a$:

$$x: T - F_{тр} = m_1 a'; \qquad (1)$$

$$y: \ m_1 g + m_1 a - N = 0 \ \Rightarrow \ N = m_1(g + a).$$

Тогда $F_{тр} = \mu N = \mu m_1(g+a)$. Подставив выражение для силы трения в уравнение (1), получим

$$T - \mu m_1(g+a) = m_1 a' \qquad (2)$$

Запишем уравнения движения тела массой m_2 в проекции на координатную ось y.

$$y: m_2 g + m_2 a - T = m_2 a' \qquad (3)$$

Разделив левую и правую части уравнения (2) соответственно на левую и правую части уравнения (3), получим

$$\frac{T - \mu m_1(g+a)}{m_2 g + m_2 a - T} = \frac{m_1}{m_2}.$$

После алгебраических преобразований будем иметь:

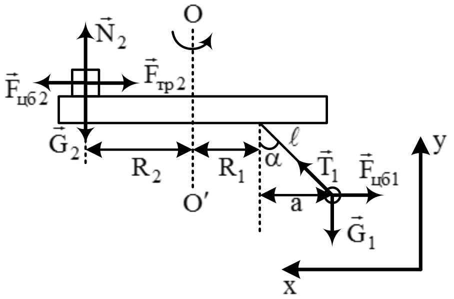
$$T = \frac{m_1 m_2 (g+a)(\mu+1)}{m_1 + m_2}. \ T = \frac{0,3 \cdot 0,4 \cdot (10+2) \cdot (0,2+1)}{0,3+0,4} = 2,47 \ (Н)$$

Ответ: 2,47 Н

15. К вращающемуся горизонтальному диску на расстоянии R_1 = 0,4 м от оси вращения привязано с помощью лёгкой нерастяжимой нити длиной ℓ = 1,41 м тело массой m_1, размерами которого можно пренебречь. При вращении нить образует угол α = 45° с вертикалью. На каком расстоянии R_2 от оси вращения диска может удержаться небольшое тело массой m_2, положенное на диск, если коэффициент трения тела о поверхность диска μ = 0,1?

Дано ***Решение***

$R_1 = 0{,}4$ м $\ell = 1{,}41$ м $\alpha = 45°$ $\mu = 0{,}1$	Описание поведения тел будем проводить в неинерциальной системе отсчёта, связанной с вращающимся диском. В этой системе оба тела покоятся, поэтому суммы сил взаимодействия и сил инерции, действующих на каждое из них, будут равны нулю.
R_2 – ?	



Для тела массой m_1 в проекции на ось x будем иметь:

$$x:\ T_1 \cdot \sin\alpha - F_{цб1} = 0 \quad (1)$$

Центробежная сила инерции определяется из выражения:

$$F_{цб1} = m_1\omega^2 R_1' = m_1\omega^2\left(R_1 + a\right) = m_1\omega^2\left(R_1 + \ell\sin\alpha\right).$$

Тогда из (1) получим

$$T_1 \cdot \sin\alpha = m_1\omega^2\left(R_1 + \ell\sin\alpha\right) \qquad (2)$$

В проекции на ось y для тела массой m_1 можем записать

$$y:\ T_1 \cdot \cos\alpha - G_1 = 0, \qquad (3)$$

где $G_1 = m_1 g$.

Подставив выражение для G_1 в (3) получим:

$$T_1 \cdot \cos\alpha = m_1 g \qquad (4)$$

Разделим (2) на (4):

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{m_1\omega^2\left(R_1 + \ell \cdot \sin\alpha\right)}{m_1 g} = \frac{\omega^2\left(R_1 + \ell \cdot \sin\alpha\right)}{g}.$$

Так как $\alpha = 45°$, то $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$, следовательно

$$\omega^2 = \frac{g}{\left(R_1 + \ell \cdot \sin\alpha\right)}. \qquad (5)$$

Аналогично рассмотрим силы, действующие на тело массой m_2. В проекции на ось x будем иметь

$$x:\ F_{цб2} - F_{тр2} = 0 \ \Rightarrow F_{цб2} = F_{тр2}, \qquad (6)$$

где $F_{цб2} = m_2\omega^2 R_2$ – центробежная сила инерции, действующая на тело массой m_2, $F_{тр2} = \mu N_2$ – максимальное значение силы трения покоя для этого тела. Подставив выражения для силы инерции и силы трения в (6), получим

$$\mu N_2 = m_2\omega^2 R_2. \qquad (7)$$

В проекции на ось y запишем

$$y: N_2 - G_2 = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g\ . \qquad (8)$$

Подстановка (8) в (7) позволяет получить выражение для искомого расстояния

$$R_2 = \frac{\mu g}{\omega^2}.$$

С учётом (5) окончательно будем иметь

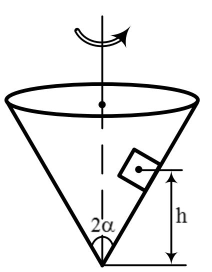
$$R_2 = \mu\left(R_1 + \ell \cdot \sin\alpha\right).$$

После подстановки численных значений, получим

$$R_2 = 0{,}1 \cdot \left(0{,}4 + 1{,}41 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}14\,(\text{м}).$$

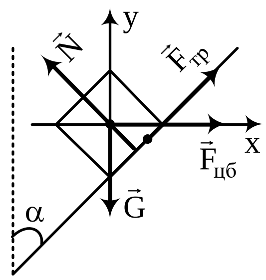
Ответ: 0,14 м

16. На внутренней поверхности вращающегося вокруг вертикальной оси конуса с углом при вершине $2\alpha = 60^{\circ}$ на высоте $h = 5$ м от вершины находится небольшое тело. Коэффициент трения между телом и поверхностью конуса равен $\mu = 0{,}25$. Найти минимальную угловую скорость ω вращения конуса вокруг вертикальной оси, при которой тело будет неподвижно относительно конуса.



Дано
$2\alpha = 60^{\circ}$
$h = 5$ м
$\mu = 0{,}25$
$\omega - ?$

Решение



Задачу удобно решать во вращающейся неинерциальной системе отсчёта, связанной с конусом. Силы, действующие на тело, показаны на рисунке.

Рассматриваем момент времени, непосредственно предшествующий началу движения тела по внутренней поверхности конуса, когда его скорость и ускорение равны нулю, а сила трения представляет собой силу трения покоя $F_{тр} = \mu \cdot N$, где N – модуль силы нормальной реакции опоры. Учитываем, что в данной системе отсчёта на тело действует центробежная сила инерции $F_{цб} = m \cdot \omega^2 \cdot h \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$, где $h \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$ – расстояние от тела до оси вращения.

Для перехода к скалярным соотношениям введём оси координат x и y. Запишем уравнения движения тела в проекциях на эти оси, не забывая, что его ускорение в данной неинерциальной системе равно нулю:

x: $-N \cdot \cos\alpha + F_{тр} \cdot \sin\alpha + m \cdot \omega^2 \cdot h \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = 0$ или

$$m\omega^2 h \cdot \mathrm{tg}\alpha = N\cos\alpha - \mu N \sin\alpha \qquad (1)$$

$y: N \cdot \sin\alpha + F_{тр} \cdot \cos\alpha - m \cdot g = 0$ или

$$mg = N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha \qquad (2)$$

Разделив левую и правую части уравнения (1) соответственно на левую и правую части уравнения (2), получим

$\dfrac{m\omega^2 h \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{mg} = \dfrac{N\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right)}{N\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}$. После преобразований будем иметь

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \left(\cos\alpha - \mu \cdot \sin\alpha\right)}{h \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \left(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha\right)}}.$$

Подстановка численных значений величин позволяет получить следующее значение угловой скорости вращения конуса

$$\omega = \sqrt{\frac{9,81\cdot(0,866-0,25\cdot 0,5)}{5\cdot 0,577\cdot(0,5+0,25\cdot 0,866)}} = 1,88 \text{ рад/с}$$

Ответ: 1,88 рад/с

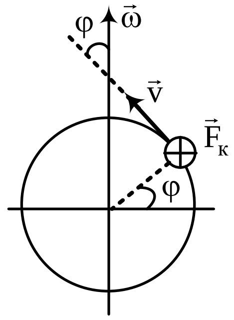
17. Определить поперечное смещение $\Delta\ell$ снаряда, выпущенного со скоростью v = 800 м/с в плоскости меридиана по горизонтальному направлению, за первые 0,5 секунды после выстрела. Выстрел произведён в северном полушарии Земли на широте φ = 56°. В момент выстрела орудийный ствол был направлен на север. Силу сопротивления воздуха не учитывать, и составляющую скорости снаряда в плоскости меридиана v считать постоянной.

Дано

t = 0,5 с
φ = 56°
v = 800 м/с
$\Delta\ell$ – ?

Решение

Задачу будем решать во вращающейся неинерциальной системе отсчёта, связанной с Землёй. Поперечное смещение снаряда может быть вызвано только действием силы, которая составляет отличный от нуля угол с плоскостью меридиана, в котором лежит вектор начальной скорости v. В выбранной системе отсчёта такой силой является сила Кориолиса $\vec{F}_к = 2m[\vec{v},\vec{\omega}]$. Как видно из приведённого выражения, сила Кориолиса перпендикулярна плоскости меридиана, в которой лежат векторы $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$. Её модуль равен $F_к = 2mv\omega\sin\varphi$. Угловая скорость Земли ω может быть определена по формуле $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где период вращения Земли T = 24·3600 с = 86400 с. Сила Кориолиса сообщает снаряду ускорение, модуль которого равен



$$a = \frac{F_к}{m} = \frac{4\pi v}{T}\sin\varphi. \qquad (1)$$

Анализ выражения (1) показывает, что так как по условию задачи v = const, то и ускорение также величина постоянная. Это означает, что движение снаряда в направлении, перпендикулярном плоскости меридиана, является равноускоренным, поэтому поперечное смещение $\Delta\ell$ можно определить по формуле

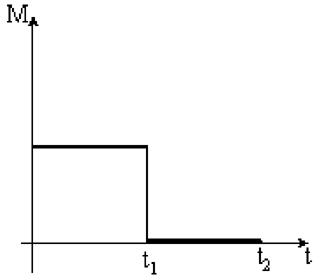
$$\Delta\ell = v_{0\ell}t + \frac{at^2}{2}, \text{ где } v_{0\ell} = 0.$$

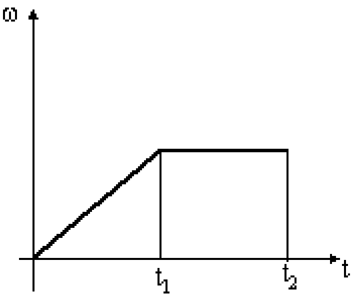
Тогда $\Delta\ell = \frac{2\pi vt^2}{T}\sin\varphi$ и $\Delta\ell = \frac{2\cdot 3,14\cdot 800\cdot 0,5^2}{86400}\cdot 0,829 \approx 0,012\,(м)$

Ответ: 0,012 м

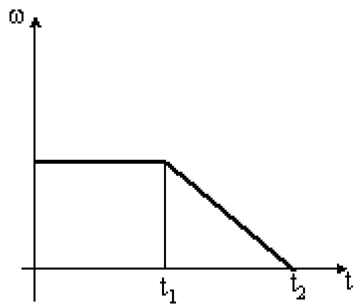
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТЕСТОВ И ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ "ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА"

1. Диск начинает вращаться из состояния покоя под действием момента сил, график временной зависимости которого представлен на рисунке. Укажите график, правильно отражающий зависимость угловой скорости диска от времени.

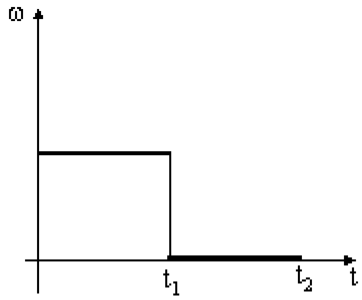




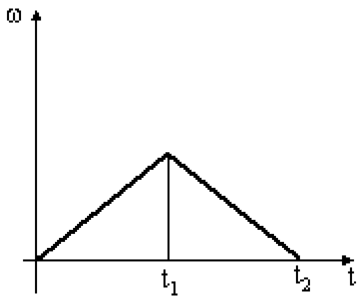
а)



б)



в)



г)

Запишем уравнение моментов в проекции на ось вращения, преобразуем и проинтегрируем его:

$$\frac{dL}{dt} = M \Rightarrow dL = Mdt\,;$$

$$\int\limits_{L_o}^{L} dL = \int\limits_{0}^{t} Mdt\,, \qquad (1)$$

где верхний предел интегрирования $L = L(t)$ – момент импульса диска в некоторый момент времени t.

Вычислим интеграл (1) для двух интервалов времени: $0 \le t \le t_1$ и $t_1 \le t \le t_2$, соответствующих различной зависимости момента силы от времени.

Начнём с интервала времени $0 \le t \le t_1$. Из графика зависимости $M = M(t)$, видим, что в этом временном интервале $M = \text{const}$, поэтому из (1) получаем

$$L - L_o = Mt\,.$$

Найдём значение момента импульса в начальный момент времени $t = 0$. Учтём для этого, что момент импульса связан с угловой скоростью вращения тела соотношением вида

$$L = J\omega \Rightarrow L_o = J\omega_o\,.$$

По условию задачи "диск начинает вращаться из состояния покоя", значит $\boldsymbol{\omega}_o = 0 \Rightarrow L_o = 0$. Получаем, что в интервале времени $0 \le t \le t_1$ $L(t) = Mt$, и угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = \frac{L}{J} = \frac{M}{J}t$ линейно увеличивается с ростом времени. Этот результат соответствует начальным участкам графиков а) и г).

Запишем интеграл (1) для интервала времени $t_1 \le t \le t_2$:

$$\int_{L_{o1}}^{L} dL = \int_{t_1}^{t} Mdt$$

Из графика зависимости $M = M(t)$, видим, что в этом интервале времени $M = 0$, поэтому из (1) получаем

$$L - L_{o1} = 0,$$

где L – значение момента импульса в произвольный момент времени, принадлежащий интервалу от t_1 до t_2; $L_{o1} = Mt_1$ – значение момента импульса в момент времени t_1. Тогда $L(t) = Mt_1$, т.е. в интервале времени $t_1 \le t \le t_2$ момент импульса имеет постоянное значение, следовательно и угловая скорость в этом интервале времени принимает постоянное значение, равное $\boldsymbol{\omega} = \frac{M}{J}t_1$.

Итак, до момента времени t_1 угловая скорость линейно растёт, а затем, достигнув значения $\boldsymbol{\omega} = \frac{M}{J}t_1$, остаётся постоянной. Этот результат соответствует только графику а).

Ответ: а

2. Найти момент инерции тонкого стержня длиной $\ell = 2$ м и массой m = 5 кг относительно оси, проходящей через конец стержня O и составляющей со стержнем угол $\alpha = 30^o$. Стержень неоднороден и его плотность изменяется по закону $\rho = \rho_o\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$, где ρ_o – const., а x – расстояние, измеряемое вдоль стержня от точки O.

Дано

$\ell = 2$ м

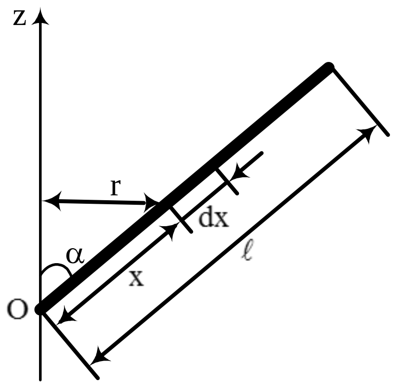
m = 5 кг

$\rho = \rho_o\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$

$\alpha = 30^o$

J – ?

Решение



Выделим на стержне малый участок длиной dx и массой dm, находящийся на расстоянии x от точки O. Массу этого участка представим как

$$dm = \rho(x)\,dV = \rho(x)\,Sdx = \rho_o\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 Sdx,$$

где S – площадь поперечного сечения стержня, $dV = Sdx$ – объём участка длиной dx. Момент инерции J будем определять по формуле $J = \int\limits_m r^2 dm$, где r – расстояние от участка стержня массой dm до оси z, относительно которой определяется момент инерции. Из рисунка видно, что это расстояние можно представить в виде $r = x\cdot\sin\alpha$. Подставив выражения для r и dm в формулу для определения J, будем иметь

$J = \int\limits_0^\ell \left(x^2\sin^2\alpha\right)\rho_o\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 Sdx = S\frac{\rho_o}{\ell^2}\cdot\sin^2\alpha\int\limits_0^\ell x^4 dx = S\frac{\rho_o}{\ell^2}\sin^2\alpha\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^\ell$. Подставив верхний и нижний пределы интегрирования, получим

$$J = \frac{\rho_o S\ell^3}{5}\sin^2\alpha. \qquad (1)$$

Так как значения S и ρ_o в условии задачи отсутствуют, найдём их связь с массой стержня, которая известна:

$$m = \int\limits_0^\ell \rho(x)\,dV = \int\limits_0^\ell \rho_o\frac{x^2}{\ell^2}Sdx = \frac{\rho_o S\ell}{3} \Rightarrow \rho_o S\ell = 3m.$$

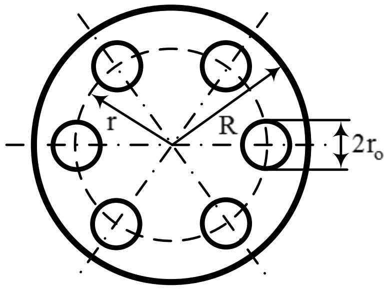
Заменив $\rho_o S\ell$ в формуле (1) на $3m$, будем иметь

$$J = \frac{3m\ell^2}{5}\sin^2\alpha.$$

Подставив исходные данные, получим, что J = 3 (кг·м^2).

Ответ: 3 кг·м^2

3. Деталь в форме диска радиусом R = 0,2 м и толщиной h = $2 \cdot 10^{-3}$ м имеет шесть отверстий радиусом r_o = 0,02 м. Центры отверстий находятся на равных расстояниях друг от друга на окружности радиусом r = 10 см, проведённой из центра диска. Найти момент инерции детали относительно оси О, проходящей через её центр перпендикулярно к плоскости детали. Плотность материала, из которого изготовлена деталь, равна 10^4 кг/м^3.



Дано | ***Решение***

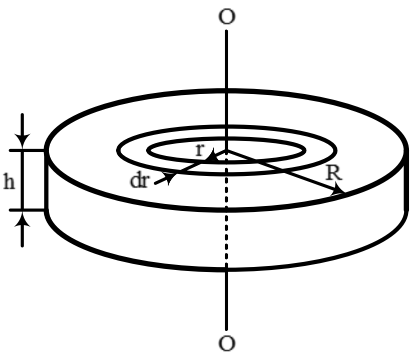
R = 0,2 м
h = 0,002 м
r_0 = 0,02 м
r = 0,1 м
ρ = 10000 кг/м^3

J – ?

Вычисление моментов инерции некоторых тел, имеющих сложную форму, можно существенно упростить, если есть возможность представить их как совокупность других тел, моменты инерции которых известны или легко определяется. Возможность такого упрощения задачи объясняется тем, что момент инерции обладает свойством аддитивности: момент инерции тела сложной формы относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции тел, его составляющих, относительно той же оси. В данной задаче свойство аддитивности используют следующим образом. Деталь представляют как сплошной диск радиусом R, из которого удаляют шесть одинаковых дисков радиусами r_o. Тогда момент инерции J детали относительно оси О будет равен моменту инерции J_1 сплошного диска радиусом R относительно этой оси за вычетом шести моментов инерции J_2 дисков радиусами r_o, вычисленных относительной оси О:

$$J = J_1 - 6J_2 . \qquad (1)$$

Получим формулу, с помощью которой по известным массе m и радиусу R можно рассчитать момент инерции тонкого сплошного однородного прямого кругового цилиндра (диска) относительно оси, перпендикулярной основанию и проходящей через его центр. Для этого выделим в диске кольцо радиусом r, толщиной dr и массой $dm = \rho dV = \rho h 2\pi r dr$, где h – высота кольца, $dS = 2\pi r dr$ – площадь его поверхности. Так как каждая точка выделенного кольца отстоит от оси на одно и то же расстояние r, его момент инерции будет равен



$$dJ_1 = r^2 dm = 2\pi\rho h r^3 dr .$$

Проинтегрировав это выражение по r от 0 до R, получим для момента инерции диска

$$J_1 = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \rho\pi h \frac{R^4}{2} . \qquad (2)$$

Если величина плотности материала ρ*, из которого изготовлен диск, и его толщина h не известны, а масса задана, формулу (2) преобразуют, учитывая, что масса диска равна* $m = \rho V = \rho\pi R^2 h$. *Тогда момент инерции сплошного однородного диска определяют по формуле* $J_1 = \frac{mR^2}{2}$.

Момент инерции диска радиусом r_0 и массой m' относительно заданной в условии задачи оси О определим с помощью теоремы Штейнера, согласно которой момент инерции малого диска относительно оси О, проходящей через центр большого диска равен сумме момента инерции малого диска относительно оси, проходящей параллельно оси O через его центр масс, и произведения массы малого диска на квадрат расстояния r между осями:

$$J_2 = \frac{m' r_o^2}{2} + m' r^2 = \frac{\rho\pi h r_o^4}{2} + \rho\pi h r_o^2 r^2 = \rho\pi h r_o^2 \left(\frac{r_o^2}{2} + r^2\right).$$

Подставив в формулу (1) выражения для J_1 и J_2, будем иметь

$$J = \frac{\rho\pi h R^4}{2} - 6\rho\pi h r_o^2 \left(\frac{r_o^2}{2} + r^2\right) = \frac{\rho\pi h}{2}\left[R^4 - 12 r_o^2 \left(\frac{r_o^2}{2} + r^2\right)\right].$$

После вычислений получим, что $J \approx 0{,}049$ кг$\cdot$м^2.

Ответ: 0,049 кг·м^2

4. Определить момент инерции тонкого однородного кольца массой 20 г и радиусом 1 м относительно оси O, касательной к боковой поверхности кольца и лежащей в его плоскости.

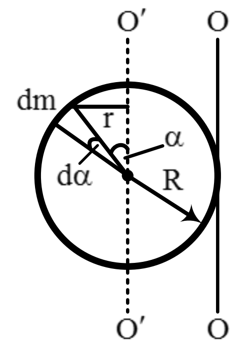
Дано

$m = 0{,}02$ кг

$R = 1$ м

J_o – ?

Решение



Сначала найдём момент инерции кольца относительно оси $O'O'$, проходящей через его центр, по формуле

$$J_{o'} = \int r^2 dm, \qquad (1)$$

где $r = R\sin\alpha$ – расстояние от выделенного элементарного участка кольца dm до оси $O'O'$; $dm = \lambda d\ell = \lambda R d\alpha$ – масса элементарного участка кольца длиной $d\ell = R d\alpha$, λ – линейная плотность материала, из которого изготовлено кольцо.

Если объёмная плотность тела ρ численно равна массе единицы его объёма, то линейная плотность λ численно равна массе единицы его длины. Эту характеристику удобно использовать, если, например, толщина и высота тела малы по сравнению с его длиной, как это и имеет место в случае тонкого кольца.

Подставим выражения для r и dm в (1):

$$J_{o'} = \int_0^{2\pi} R^3 \lambda \sin^2\alpha\, d\alpha = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha\, d\alpha. \qquad (2)$$

Чтобы вычислить этот интеграл, воспользуемся формулой

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Тогда $\int_0^{2\pi} \sin^2\alpha\, d\alpha = \underbrace{\left.\frac{\alpha}{2}\right|_0^{2\pi}}_{=\pi} - \underbrace{\left.\frac{\sin 2\alpha}{4}\right|_0^{2\pi}}_{=0} = \pi.$

Подставив полученное значение определённого интеграла, будем иметь

$$J_{o'} = \lambda R^3 \pi . \quad (3)$$

Так как линейная плотность в условии задачи не задана, выразим её через массу кольца, которая известна

$$m = \lambda \cdot 2\pi R \Rightarrow \lambda = \frac{m}{2\pi R} .$$

После подстановки выражения для линейной плотности в (3) получим

$$J_{o'} = \frac{mR^3\pi}{2\pi R} = \frac{mR^2}{2} .$$

Для определения момента инерции тонкого кольца относительно оси О воспользуемся теоремой Штейнера:

$$J_o = J_{o'} + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2 .$$

После вычислений имеем

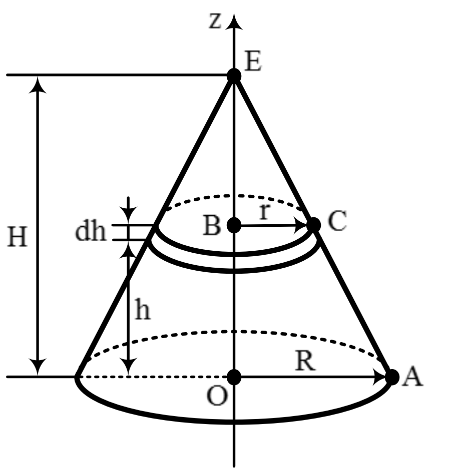
$$J_o = \frac{3}{2} \cdot 0,02 \cdot 1 = 0,03 \left(кг \cdot м^2 \right) .$$

Ответ: 0,03 кг·м^2

5. Определить момент инерции сплошного однородного круглого прямого конуса массой m = 5 кг и радиусом основания R = 2 м относительно его оси симметрии z.

Дано — ***Решение***

m = 5 кг
R = 2 м
J_z – ?



Выделим на высоте h тонкий диск высотой dh и радиусом основания r. Его момент инерции

$$dJ_z = \frac{1}{2} dm \cdot r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 dh , \quad (1)$$

где $dm = \rho dV = \rho S dh = \rho \pi r^2 dh$, ρ – объёмная плотность материала, из которого изготовлен конус.

Для вычисления момента инерции конуса найдём связь между высотой и радиусом конуса. Из подобия треугольников ΔOAE и ΔBCE имеем:

$$\frac{H-h}{r} = \frac{H}{R} .$$

Дифференцируя это выражение, получим

$$dh = -\frac{H}{R} dr . \quad (2)$$

Знак «–» указывает на то, что с ростом h радиус r уменьшается.

Тогда, подставив (2) в (1), получим, что $dJ_z = -\frac{1}{2}\rho\pi r^4 \frac{H}{R} dr$. Интегрируем это выражение

$$J_z = -\frac{1}{2}\pi\rho\frac{H}{R}\int_R^0 r^4 dr = \frac{1}{2}\pi\rho\frac{R^4 H}{5}. \qquad (3)$$

Так как ρ и H не известны, выразим их через массу конуса m, для чего найдём связь между величинами m, ρ, H

$$dm = \rho dV = \rho\pi r^2 dh = \pi\rho r^2\left(-\frac{H}{R}dr\right), \text{ поэтому}$$

$$m = -\pi\rho\frac{H}{R}\int_R^0 r^2 dr = \pi\rho\frac{HR^3}{3R} = \frac{\pi\rho HR^2}{3}.$$

Тогда

$$\pi\rho HR^2 = 3m. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим, что момент инерции конуса относительно оси z равен $J_z = \frac{3}{10}mR^2$.

После подстановки численных значений величин m и R, будем иметь

$$J_z = \frac{3\cdot 5\cdot 2^2}{10} = 6 \text{ кг·м}^2.$$

Ответ: 6 кг·м^2

6. Сила $\vec{F} = A\vec{i} + Bt\vec{j} + Ct^3\vec{k}$ приложена к точке, радиус-вектор которой $\vec{r} = Dt^2\vec{i} + E\vec{j} + Lt\vec{k}$. Принять A = 5 Н; B = 3 Н/с; C = 0,5 Н/с^3; D = 2 м/с^2; E = 3 м; L = 1 м/с. Найти в момент времени t = 2 с момент силы относительно начала координат и модуль вектора момента силы.

Дано

$\vec{F} = A\vec{i} + Bt\vec{j} + Ct^3\vec{k}$

$\vec{r} = Dt^2\vec{i} + E\vec{j} + Lt\vec{k}$

A = 5 Н

B = 3 Н/с

C = 0,5 Н/с^3

D = 2 м/с^2

E = 3 м

L = 1 м/с

t = 2 с

$\vec{M}$ – ? M – ?

Решение

Согласно определению момент силы $\vec{M}$ относительно начала координат равен векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы. Учитываем, что

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}.$$

Тогда

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Dt^2 & E & Lt \\ A & Bt & Ct^3 \end{vmatrix}.$$

$$\vec{M} = \left(E\cdot Ct^3 - Bt\cdot Lt\right)\vec{i}\cdot + \left(A\cdot Lt - Dt^2\cdot Ct^3\right)\vec{j}\cdot + \left(Dt^2\cdot Bt - A\cdot E\right)\vec{k}.$$ Подставив численные значения, получим $\vec{M} = -22\cdot\vec{j} + 33\cdot\vec{k}$.

Модуль этого вектора равен

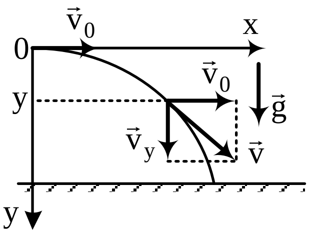
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0 + 22^2 + 33^2} \approx 39{,}7\ (\text{Н}\cdot\text{м}).$$

Ответ: 39,7 Н·м

7. Тело массой m = 0,2 кг брошено с некоторой высоты в горизонтальном направлении со скоростью v_o = 10 м/с. Найти модуль приращения момента импульса тела относительно точки бросания за первые t = 3 с движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано ***Решение***

m = 0,2 кг
v_o = 10 м/с
t = 3 с
g = 10 м/с^2
ΔL – ?



Приращение вектора момента импульса тела относительно точки бросания О равно

$$\Delta\vec{L} = \vec{L} - \vec{L}_o. \qquad (1)$$

Найдём $\vec{L}_0$ и $\vec{L}$. Учитываем, что движение происходит в плоскости XOY, поэтому $z = z_o = 0$, $p_z = p_{zo} = 0$. По условию задачи $p_{yo} = 0$. Тогда

$$\vec{L}_o = \left[\vec{r}_o, \vec{p}_o\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{xo} & p_{yo} & p_{zo} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{L} = \left(x \cdot p_y - y \cdot p_x\right)\vec{k}. \qquad (3)$$

Из (1) и (2) следует, что $\Delta\vec{L} = \vec{L} \Rightarrow \left|\Delta\vec{L}\right| = L$. Тогда из (3)

$$\Delta L = L = \left(x \cdot p_y - y \cdot p_x\right). \qquad (4)$$

Сопротивление воздуха не учитывается, поэтому вдоль оси x тело движется равномерно со скоростью v_o, а по оси y – равноускоренно с ускорением, равным ускорению свободного падения g. Очевидно, что

$x = v_o t;\ p_x = mv_x = mv_o;\ y = \dfrac{gt^2}{2};\ p_y = mv_y = mgt$. Подставив эти выражения в (4), будем иметь

$$\Delta L = \left(v_o t \cdot m \cdot gt - \frac{gt^2}{2} mv_o\right) = \frac{mv_o gt^2}{2}.$$

Учитывая исходные данные, получим

$$\Delta L = \frac{0,2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3^2}{2} = 90\left(\text{кг} \cdot \text{м}^2\right).$$

Ответ: 90 кг·м^2

8. Однородный цилиндрический вал массой m = 12 кг и радиусом R = 0,03 м вращается с частотой ν = 15 об/с. В момент t = 0 к поверхности вала прижали тормозную колодку с силой F = 10 Н. Коэффициент трения колодки о вал μ = 0,314. Найти время, за которое вал остановится.

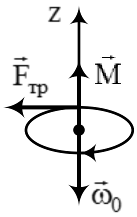
Дано ***Решение***

$m = 12$ кг	
$R = 0{,}03$ м	
$\nu = 15$ об/с	
$F = 10$ Н	
$\mu = 0{,}314$	
t – ?	

Для решения задачи воспользуемся основным законом вращательного движения твёрдого тела (в нашем случае – вала) вокруг неподвижной оси z:

$$J_z\varepsilon = M_z\,, \qquad (1)$$

где J_z – момент инерции вала относительно оси z; M_z – момент силы трения относительно этой же оси.



Подставив в (1) выражение для углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon = -\frac{d\omega}{dt}}$ (знак минус указывает на то, что с течением времени угловая скорость, согласно условию задачи, должна уменьшаться), будем иметь

$$J_z\left(-\frac{d\omega}{dt}\right) = M_z \text{ или}$$

$$dt = -\frac{J_z}{M_z}d\omega \qquad (2)$$

Проинтегрируем уравнение (2)

$$\int_0^t dt = -\frac{J_z}{M_z}\int_{\omega=\omega_o}^{\omega=0} d\omega$$

и получим

$$t = \frac{J_z}{M_z}\omega_0\,. \qquad (3)$$

Так как $M_z = \mu F\cdot R$, $J_z = \frac{mR^2}{2}$, $\boldsymbol{\omega_o = 2\pi\nu}$ из (3) будем иметь

$$t = \frac{mR^2\cdot 2\pi\nu}{2\mu FR} = \frac{mR\pi\nu}{\mu F}\,. \qquad (4)$$

Подставляем численные значения величин, входящих в формулу (4), и получаем:

$$t = \frac{12\cdot 0{,}03\cdot 3{,}14\cdot 15}{0{,}314\cdot 10} = 5{,}4(\text{с})$$

Ответ: 5,4 с

9. В момент времени $t_o = 0$ на покоившийся однородный диск массой $m = 3$ кг и радиусом $R = 1{,}5$ м начинает действовать сила, момент которой относительно неподвижной оси вращения диска, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр масс, изменяется по закону $M = At^3$, где $A = 4$ Н·м/с^3. На какой угол (в рад) повернётся диск за время $t = 2$ с?

Дано

$M = At^3$	
$A = 4$ Н·м/с^3	
$m = 3$ кг	
$R = 1{,}5$ м	
$t = 2$ с	
φ – ?	

Решение

Так как диск вращается вокруг неподвижной оси, его движение описывается уравнением

$$M = J\varepsilon, \qquad (1)$$

где ε – угловое ускорение диска, а J – момент его инерции относительно оси вращения, равный в данном случае

$$J = \frac{mR^2}{2}\,.$$

Учитывая, что $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, уравнение (1) запишем в виде $M = J\frac{d\omega}{dt}$. Преобразуя, получим

$$d\omega = \frac{M}{J}dt. \qquad (2)$$

Подставляя в (2) выражения для момента сил $M = At^3$ и момента инерции $J = \frac{mR^2}{2}$, будем иметь

$$d\omega = \frac{2At^3}{mR^2}dt. \qquad (3)$$

Интегрируем уравнение (3)

$$\int_0^{\omega} d\omega = \frac{2A}{mR^2}\int_0^t t^3dt \Rightarrow \omega = \frac{At^4}{2mR^2}. \qquad (4)$$

Зная зависимость угловой скорости от времени (4), находим угол поворота φ:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega dt \Rightarrow d\varphi = \frac{At^4}{2mR^2}dt.$$

Интегрируя это выражение, получим

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \frac{A}{2mR^2}\int_0^t t^4dt,$$

$$\varphi = \frac{At^5}{10mR^2}. \qquad (5)$$

Подставив численные значения величин, входящих в выражение (5), будем иметь

$$\varphi = \frac{4\cdot 2^5}{10\cdot 3\cdot 1{,}5^2} \approx 1{,}9 \text{ рад}.$$

Ответ: 1,9 рад

10. Однородный диск массой m = 10 кг и радиусом R = 1 м может вращаться без трения вокруг неподвижной вертикальной оси z, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его геометрический центр. В начальный момент времени на покоящийся диск начинает действовать сила F = Bt, лежащая в плоскости диска и направленная по касательной к его боковой поверхности. Постоянную B принять равной 9 Н/с. Найти время, за которое диск повернётся на угол φ = 8,1 рад.

Дано
$F = Bt$
$m = 10$ кг
$R = 1$ м
$B = 9$ Н/с
$\varphi = 8{,}1$ рад
$t - ?$

Решение

Запишем основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси z

$$J_z\varepsilon = M_z, \qquad (1)$$

где $J_z = \frac{mR^2}{2}$ – момент инерции диска относительно оси его симметрии z, проходящей через геометрический центр перпендикулярно к его плоскости; $M_z = FR = BtR$ – момент силы F относительно оси z.

По определению угловое ускорение равно

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M_z}{J_z} = \frac{2F}{mR} = \frac{2Bt}{mR}. \qquad (3)$$

Проинтегрировав (3), найдём зависимость угловой скорости от времени:

$$\int\limits_{\omega_o=0}^{\omega} d\omega = \frac{2B}{mR}\int\limits_0^t t\,dt \Rightarrow \omega = \frac{Bt^2}{mR}. \qquad (4)$$

Чтобы найти временну́ю зависимость угла поворота диска, учтём, что

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega dt. \qquad (5)$$

При интегрировании (5) воспользуемся выражением (4):

$$\int\limits_0^{\varphi} d\varphi = \int\limits_0^t \omega dt \Rightarrow \varphi = \frac{B}{mR}\int\limits_0^t t^2 dt = \frac{Bt^3}{3mR}.$$

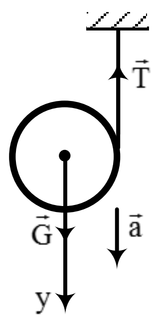
Тогда $t = \sqrt[3]{\frac{3mR\varphi}{B}}$. Подставив исходные данные, получим, что t = 3 с.

Ответ: 3 с

11. Один конец висящей вертикально тонкой, невесомой и нерастяжимой нити закреплен на потолке, а другой плотно намотан на сплошной однородный тонкий диск массой 6 кг. В момент времени t_o= 0 диск начинает падать. Определить модуль силы натяжения нити.

Дано
m = 6 кг
T – ?

Решение



Диск участвует в сложном движении, которое можно представить как суперпозицию поступательного движения вдоль оси y и вращения вокруг оси его симметрии. Запишем уравнения этих движений. В соответствии со вторым законом Ньютона, записанным в проекции на ось y, поступательное движение описывается уравнением

$$mg - T = ma \qquad (1)$$

Так как нить невесома, уравнение вращательного движения будет иметь вид

$$M = J\varepsilon \qquad (2)$$

Учитывая, что момент силы тяжести относительно оси симметрии диска равен нулю, момент силы натяжения $M = TR$, момент инерции однородного диска относительно оси симметрии $J = \frac{mR^2}{2}$ и угловое ускорение можно представить как $\varepsilon = \frac{a}{R}$, уравнение (2) запишем в виде

$$TR = \frac{mR^2}{2}\frac{a}{R}.$$

После алгебраических преобразований имеем

$$T = \frac{ma}{2} \Rightarrow ma = 2T \qquad (3)$$

Подставим (3) в (1):

$$mg - T = 2T \Rightarrow T = \frac{mg}{3}.$$

Подставив в это выражение значения массы и ускорения свободного падения, которое принимаем равным 10 м/с^2, получим, что $T = 20(\text{Н})$.

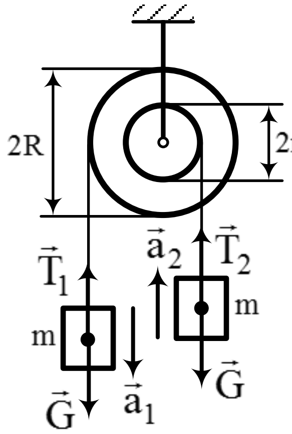
Ответ: 20 Н

12. На ступенчатый вал, радиусы которого R = 0,4 м и r = 0,2 м намотаны в противоположных направлениях нити, нагруженные одинаковыми массами m = 2 кг. Момент инерции вала относительно его оси симметрии $J = 3\cdot 10^{-2}$ кг·м^2. Массой нитей и трением в оси блока пренебречь. Найти ускорения грузов 1 и 2.

Дано
R = 0,4 м
r = 0,2 м
m = 2 кг
$J = 3\cdot 10^{-2}$ кг·м^2
a_1 – ? a_2 – ?

Решение

В этой задаче рассматривается движение трёх тел: двух грузов массой m, и ступенчатого вала. При этом грузы движутся поступательно и их движение описывается вторым законом Ньютона, а вал вращается вокруг неподвижной оси, и его движение происходит в соответствии с основным законом вращения твёрдого тела. Записываем соответствующие уравнения:



$$G - T_1 = ma_1;$$
$$T_2 - G = ma_2;$$
$$M = J\varepsilon.$$

Учитываем, что

$$G = mg\,, \tag{1}$$

момент сил натяжения, действующих со стороны нитей на вал,

$$M = T_1R - T_2r\,, \tag{2}$$

а угловое ускорение вала в отсутствии проскальзывания нитей

$$\varepsilon = \frac{a_1}{R} = \frac{a_2}{r}\,. \tag{3}$$

Как следует из соотношения (3) $a_2 = a_1\dfrac{r}{R}$, тогда уравнения движения тел примут вид

$$mg - T_1 = ma_1;$$
$$T_2 - mg = m\frac{a_1 r}{R};$$
$$T_1R - T_2r = J\cdot\frac{a_1}{R}.$$

Решаем эту систему уравнений и получаем

$$mg(R-r) = a_1\left(mR + m\frac{r^2}{R} + \frac{J}{R}\right).$$

Тогда ускорение первого груза будет равно

$$a_1 = \frac{mgR(R-r)}{mR^2 + mr^2 + J};$$

$$a_1 = \frac{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}4\cdot 0{,}2}{2\cdot 0{,}4^2 + 2\cdot 0{,}2^2 + 0{,}03} = 3{,}65\left(\text{м/с}^2\right)$$

$$a_2 = \frac{a_1 r}{R};$$

$$a_2 = 3{,}65 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}4} = 1{,}82 \left(м/с^2\right).$$

Ответ: $a_1 = 3{,}65$ м/с^2; $a_2 = 1{,}82$ м/с^2

13. На однородный диск массой $m_1 = 2$ кг и радиусом R = 2 м, который может вращаться вокруг горизонтальной оси О без трения, плотно намотана тонкая нить длиной L =3 м и массой $m_2 = 0{,}5$ кг. В момент времени $t_o = 0$ на нить начинает действовать сила F = 5 Н, направленная по касательной к боковой поверхности диска вертикально вниз. Найти угловое ускорение диска в тот момент времени, когда с него будет свисать часть нити длиной ℓ = 1 м. Проскальзывание нити относительно диска отсутствует.

Дано
$m_1 = 2$ кг
$m_2 = 0{,}5$ кг
R = 2 м
F = 5 Н
L = 3 м
ℓ = 1 м
ε – ?

Решение

Анализируя характер движения диска и нити, отмечаем, что свисающий участок нити движется поступательно, а диск вместе с намотанной на него оставшейся частью нити вращается вокруг неподвижной оси. При вращении диска нить сматывается с него. Это приводит к изменению момента инерции J_o тела, образованного диском и намотанной на него нитью. Такое движение может быть описано уравнением вида

$$\frac{dL_o}{dt} = M_o, \tag{1}$$

где L_o – момент импульса диска и нити относительно оси О, а M_o – момент действующих на них сил, относительно той же оси.

Найдём момент сил, действующих на систему, относительно оси О. Учтём, что на диск с намотанной на него нитью со стороны свисающей её части действует сила тяжести, момент которой относительно оси вращения О диска равен

$$M'_o = \frac{m_2 \ell}{L} gR,$$

где $\frac{m_2}{L}$ – масса единицы длины нити, $\frac{m_2}{L}\ell$ – масса свисающего с диска участка нити длиной ℓ. Кроме того в том же направлении на диск с нитью действует сила F, момент которой относительно оси О определяется выражением

$$M''_o = FR.$$

Результирующий момент тогда будет равен

$$M_o = M'_o + M''_o = R\left(\frac{m_2 \ell}{L} g + F\right). \tag{2}$$

Перейдём к определению момента импульса системы "диск+нить", учитывая, что диск и часть нити длиной L – ℓ участвуют во вращательном движении с угловой скоростью ω, а часть нити длиной ℓ движется поступательно со скоростью $v = \omega R$.

$$L_o = J_o \omega + \frac{m_2 \ell}{L} Rv, \tag{3}$$

где $J_o = \frac{m_1 R^2}{2} + \frac{m_2 (L - \ell) R^2}{L}$ – момент инерции системы, состоящей из диска и намотанной на него нити.

После подстановки выражения для J_o в (3) будем иметь

$$L_o = \left(\frac{m_1 R^2}{2} + \frac{m_2 (L - \ell) R^2}{L} \right) \omega + \frac{m_2 \ell}{L} R^2 \omega =$$
$$= \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) R^2 \omega.$$

Чтобы воспользоваться уравнением (1), найдём производную по времени от момента импульса L_o:

$$\frac{dL_o}{dt} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) R^2 \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) R^2 \varepsilon . \qquad (4)$$

Подставив (2) и (4) в (1), будем иметь

$$\left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) R^2 \varepsilon = R \left(\frac{m_2}{L} \ell g + F \right) \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\left(m_2 \ell g + LF \right)}{\left(m_1 + 2m_2 \right) LR} .$$

Зная численные значения величин m_1, m_2, L, ℓ, F и R, получим, что $\varepsilon \approx 2{,}2$ рад/с^2.

Ответ: 2,2 рад/с^2

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

2.1. Абсолютная и относительная погрешности результатов измерения. Виды погрешностей измерения

Измерением называют действия по нахождению численных значений какой-либо физической величины в принятых единицах измерения.

По способу получения результата различают прямые и косвенные измерения. При ***прямых*** измерениях действия по нахождению значений физической величины сводятся к использованию соответствующего прибора, позволяющего осуществить сравнение измеряемой величины с эталонным ее значением. При прямых измерениях значение измеряемой величины получают непосредственно по шкале измерительного прибора. При ***косвенных*** измерениях значение физической величины вычисляют по некоторой формуле, связывающей искомую величину с величинами, значения которых определены прямыми измерениями. Например, объём параллелепипеда находят перемножением длины, ширины и высоты, значения которых получают при прямых измерениях.

Опыт показывает, что никакое измерение нельзя выполнить абсолютно точно, результат любого измерения всегда содержит некоторую погрешность.

Погрешность измерения – это отклонение результата измерений x от истинного (действительного) значения x_o измеряемой величины.

Различают абсолютную и относительную погрешности измерений.

Абсолютная погрешность – это модуль разности между измеренным и истинным значениями физической величины, то есть $\Delta x = |x - x_o|$.

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины или к величине, принимаемой за истинное значение:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_o}.$$

Часто относительную погрешность выражают в процентах:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_o} \cdot 100\%.$$

В зависимости от характера проявления, причин возникновения, возможностей устранения и учёта различают систематические и случайные погрешности, а также грубые погрешности (промахи).

Промахи – это ошибочные измерения, которые чаще всего вызываются неисправностью приборов, невнимательностью или небрежностью экспериментатора. Промахи следует выявлять и при обработке результатов измерений не учитывать.

Систематические погрешности вызываются причинами, действующими упорядоченным образом. Эти погрешности, как правило, сохраняют величину и знак, либо закономерно изменяются при многократном повторении измерений. Систематические погрешности могут быть обусловлены неточностью используемой измерительной аппаратуры, несовершенством используемого метода измерений, плохой настройкой измерительных приборов, влиянием окружающей среды. Систематические погрешности можно выявить, учесть и свести к минимуму проверкой приборов, использованием более точных средств измерения, правильной их установкой и настройкой, критическим анализом используемого метода исследования, проведением измерений по альтернативным методикам. Таким образом, систематические погрешности в принципе можно считать устранимыми.

Случайные погрешности – это погрешности, изменяющие непредсказуемым образом свою величину и знак от опыта к опыту при измерениях, выполненных одинаковым образом и при, казалось бы, одинаковых условиях. Случайные погрешности зависят от большого числа неконтролируемых причин, сочетающихся различным и случайным образом.

Случайные погрешности являются неустранимыми, но можно оценить их величину с помощью методов теории вероятности, которая оперирует со случайными величинами.

2.2. Оценка величины случайной погрешности прямых измерений

Пусть было проведено n прямых измерений некоторой физической величины x и был получен ряд её значений: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В теории вероятностей показано, что наилучшей оценкой истинного значения измеряемой величины является её среднее арифметическое значение. Среднее арифметическое значение измеряемой величины $\langle x \rangle$ (его часто называют математическим ожиданием) определяют по формуле:

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}.$$

Измеренные значения x_i в большей или меньшей степени рассеяны относительно среднего арифметического значения. Наиболее употребительной мерой, характеризующей степень рассеяния величины x, является ***дисперсия***. Дисперсию определяют по формуле

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \langle x \rangle \right)^2}{n-1}.$$

Величину $S_x = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \langle x \rangle \right)^2}{n-1}}$ называют ***средним квадратичным отклонением***.

Для оценки точности определения <u>среднего значения</u> $\langle x \rangle$ используют величину, называемую ***средним квадратичным отклонением среднего значения*** или ***стандартным отклонением среднего***, которую вычисляют по формуле

$$S_{\langle x \rangle} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \langle x \rangle \right)^2}{n(n-1)}}.$$

Итак, действие непредсказуемых факторов приводит к тому, что результаты прямых измерений физической величины в большей или меньшей степени отличаются от истинного её значения, т.е. определяются с некоторой погрешностью. Величину погрешности обозначают как Δx и при выполнении лабораторных работ в курсе физики принимают равной $\Delta x = S_{\langle x \rangle}$.

При записи результата измерений необходимо величину погрешности Δx округлить до первой значащей цифры, если она отлична от единицы, и до второй цифры, если первая равна единице. Значащими цифрами числа называют все его цифры, кроме нулей стоящих левее первой, отличной от нуля цифры.

Среднее значение измеряемой величины округляют до того же разряда, что и погрешность. Если отбрасываемая цифра равна 5, то последнюю цифру числа не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная. Окончательный результат прямых измерений величины x записывают в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x \,.$$

2.3. Определение погрешности косвенных измерений

В косвенных измерениях определяемая величина вычисляется по результатам прямых измерений других величин, от которых она зависит, с помощью формул или других алгоритмов, полученных теоретическим путем.

Если эксперименты проводятся в идентичных условиях, то измерения называют ***равноточными***. Если условия, в которых выполняются прямые измерения, изменяются, то такие измерения называют ***неравноточными***.

Методика оценки косвенных погрешностей в случаях равноточных и неравноточных измерений различна.

Пусть необходимо определить численное значение физической величины F, измерить которую прямыми методами невозможно, но известно, как она зависит от величины x, значение которой можно получить при прямых равноточных измерениях.

Наилучшее приближение к истинному значению величины F получают, если в функциональную зависимость $F = f(x)$ подставляют среднее арифметическое величины x, т.е. наилучшее приближение к истинному значению величины F равно

$$\langle F \rangle = f\left(\langle x \rangle\right).$$

Оценим абсолютную погрешность ΔF косвенного измерения величины F, которая обусловлена тем, что истинное значения x лежит внутри интервала с границами $\langle x \rangle \pm \Delta x$. По этой причине абсолютная погрешность ΔF величины F представляет собой приращение функции $f(x)$ при приращении аргумента x на величину абсолютной погрешности Δx его измерения. При малых значениях Δx приращение ΔF можно выразить приближенным равенством

$$\Delta F = \left.\frac{d\left(f(x)\right)}{dx}\right|_{x=\langle x \rangle} \Delta x \,,$$

где производная по x от функции $F = f(x)$ берется в точке $x = \langle x \rangle$.

Под относительной погрешностью косвенного измерения величины F будем понимать отношение абсолютной погрешности ΔF к среднему статистическому её значению $\langle F \rangle = f\left(\langle x \rangle\right)$, т.е.

$$\varepsilon = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle},$$

или

$$\varepsilon=\left(\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=\langle x\rangle}\Delta x.$$

Учитываем, что

$$\frac{d}{dx}\ell n\big(f(x)\big)=\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}.$$

Тогда выражение для относительной погрешности приобретает вид

$$\varepsilon=\left.\frac{d\big(\ell n\, f(x)\big)}{dx}\right|_{x=\langle x\rangle}\Delta x.$$

Перейдём к случаю, когда величина F является функцией нескольких переменных, т.е. зависит от нескольких величин x, y, z, t, ..., p. При этом функциональная зависимость исследуемой величины $F=f(x,y,z,t,...,p)$ от величин x, y, z, t, ..., p, значения которых могут быть измерены в ходе прямых <u>равноточных</u> измерений, полагается известной.

Наилучшим приближением к истинному значению неизвестной F, как показано в математической статистике, является величина, определяемая по формуле

$$\langle F\rangle=f\big(\langle x\rangle,\langle y\rangle,\langle z\rangle,\langle t\rangle,\ ...,\langle p\rangle\big),$$

где $\langle x\rangle,\langle y\rangle,\langle z\rangle,\langle t\rangle,\ ...,\langle p\rangle$ – средние арифметические значения величин x, y, z, t, ..., p, которые были получены в результате прямых измерений по методике, рассмотренной выше.

После вычисления приближенного значения искомой величины F необходимо оценить погрешность полученного результата.

Исходим из предположения о том, что результаты измерений каждой из величин x, y, z, t, ..., p не зависят от значений остальных величин, а, значит, и погрешности измерения этих величин не зависят друг от друга, поэтому каждую частную погрешность (вклад в общую погрешность одной из исходных величин x, z, t, ..., p) можно находить, полагая погрешности всех других величин равными нулю. Отсюда следует, что:

1) каждая частная погрешность находится по правилу нахождения погрешности измерения величины, являющейся функцией только одной переменной;

2) предположение об отсутствии погрешностей у других аргументов, соответствует предположению об их постоянстве, поэтому при нахождении частной погрешности по некоторой величине следует определять <u>частную</u> производную по этой величине:

$$\Delta F_x=\left.\frac{\partial\big(f(x,y,...,p)\big)}{\partial x}\right|_{x=\langle x\rangle,y=\langle y\rangle,...,p=\langle p\rangle}\Delta x,$$

$$\Delta F_y=\left.\frac{\partial\big(f(x,y,...,p)\big)}{\partial y}\right|_{x=\langle x\rangle,y=\langle y\rangle,...,p=\langle p\rangle}\Delta y,$$

....

$$\Delta F_p=\left.\frac{\partial\big(f(x,y,...,p)\big)}{\partial p}\right|_{x=\langle x\rangle,y=\langle y\rangle,...,p=\langle p\rangle}\Delta p.$$

Частная производная функции нескольких переменных представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной при фиксированном значении других переменных:

$$\frac{\partial f(x,y,z,t,p)}{\partial x} = f'_x\left(x,y,z,t,p\right),\text{ где } y,z,t,p = \text{const}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z,t,p)}{\partial y} = f'_y\left(x,y,z,t,p\right),\text{ где } x,z,t,p = \text{const}$$

....

$$\frac{\partial f(x,y,z,t,p)}{\partial p} = f'_p\left(x,y,z,t,p\right),\text{ где } x,y,z,t = \text{const}$$

Частные производные вычисляют по формулам и правилам вычисления производной функции одной переменной, считая при этом другие переменные константами.

Абсолютная погрешность ΔF величины $F = f\left(x,y,z,t,...,p\right)$) может быть вычислена, как это показано в математической статистике, по формуле:

$$\Delta F = \sqrt{\left(\Delta F_x\right)^2 + \left(\Delta F_y\right)^2 +,...,+ \left(\Delta F_p\right)^2}$$

или

$$\Delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2_{x=\langle x\rangle,...,p=\langle p\rangle}\left(\Delta x\right)^2 +,...,+ \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2_{x=\langle x\rangle,...,p=\langle p\rangle}\left(\Delta p\right)^2}\ ,$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ldots,\ \dfrac{\partial f}{\partial p}$ – значения частных производных функции $f\left(x,y,z,t,...,p\right)$ по переменным x, y, z, t, ..., p соответственно. Для вычисления этих значений в выражения, полученные при дифференцировании функции $F = f\left(x,y,z,t,...,p\right)$, подставляют средние арифметические аргументов этой функции, о чём напоминают нижние индексы у производных.

Если некоторая величина, входящая в формулу для определения величины F, в данном опыте не измеряется, а в описании лабораторной работы или на лабораторной установке приведено только её численное значение, то погрешность этой величины принимается равной половине единицы последнего разряда числа, которым задано значение этой величины.

Рассмотрим методику определения погрешности косвенных измерений величины $F = f\left(x,y,z,t,...,p\right)$ при неравноточных измерениях, когда условия эксперимента изменяются. Например, в лабораторной работе № 9 при определении ускорения свободного падения периоды колебаний физического маятника измеряют для различных положений точки подвеса, в лабораторной работе № 15 при измерении коэффициента вязкости водного раствора глицерина используют шарики различного размера.

При неравноточных косвенных измерениях среднее значение и абсолютную погрешность вычисляют аналогично случаю прямых измерений, а именно:

- сначала находят значения $F_i = f\left(x_i, y_i, z_i, t_i, ..., p_i\right)$;

- далее определяют среднее значение $\langle F\rangle = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} F_i$;

- затем вычисляют среднее квадратичное отклонение среднего значения $S_{\langle F \rangle} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(\langle F \rangle - F_i \right)^2}{n(n-1)}}$

;

- определяют погрешность косвенных неравноточных измерений по формуле $\Delta F = S_{\langle F \rangle}$.

Результат косвенных измерений записывают в виде:

$$F = \langle F \rangle \pm \Delta F,$$

где ΔF – абсолютная погрешность измерения величины F.

2.4. Правила построения графиков

Для представления результатов измерений в наглядной форме и для упрощения процедуры сопоставления теоретических и экспериментальных зависимостей физических величин от параметров, определяющих их значение, строят графики. При их построении следует выполнять следующие правила:

1. Прежде всего необходимо определить, какая переменная величина является аргументом, а какая функцией этого аргумента. Значения аргумента откладывают по горизонтальной оси (оси абсцисс), значения функции – по вертикальной оси (оси ординат).

2. На координатных осях графиков должны быть указаны обозначения откладываемых величин и единицы их измерений. При этом ось абсцисс подписывают справа внизу, а ось ординат – слева вверху, с указанием названия или символа откладываемой по оси величины, а через запятую – единицы её измерения. Если по оси приходится откладывать многозначные числа, множитель, указывающий порядок числа, приводят при записи обозначения физической величины, соответствующей данной оси.

Координаты экспериментальных точек на осях не показывают, и выносные линии, определяющие эти координаты, не проводят.

3. Область, выделенная для построения графика, должна быть использована в максимальной степени, поэтому, во-первых, начало координат может не совпадать с нулевыми значениями величин, во-вторых, масштаб выбирают так, чтобы график занимал всю поверхность, отведенную для его изображения и, в-третьих, масштабы по обеим осям выбирают независимо друг от друга.

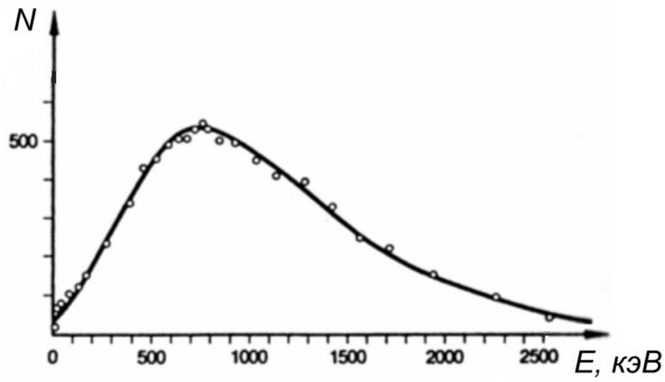
Для выполнения этих условий прежде всего определяют по данным, приведённым в соответствующей таблице, пределы изменения аргумента и функции. Их наименьшее и наибольшее значения обычно определяют интервалы значений, которые откладывают по осям координат. В случае линейных шкал числовой масштаб обычно выбирают в виде равноотстоящих по значению чисел так, чтобы соседние значения отличались на 10^n, $2 \cdot 10^n$ или $5 \cdot 10^n$, где n – любое целое положительное или отрицательное число.

4. Масштабные деления на координатных осях следует наносить равномерно (в случае линейной шкалы) вдоль всей длины каждой оси. По оси абсцисс цифры числового масштаба пишут под рисками, по оси ординат – слева от рисок.

Если в одних осях строят различные зависимости, полученные, например, при разных условиях эксперимента, то точки таких зависимостей следует отмечать разными значками (квадратами, кружками, крестиками и т.п.).

5. На тех участках графика, где возможны такие особенности, как резкое изменение кривизны, максимум, минимум, перегиб и др., следует брать большую густоту экспериментальных точек. Чтобы не пропустить такие особенности, график следует строить непосредственно во время эксперимента.

6. Если соединить все экспериментальные точки отрезками прямой, то на графике получится ломаная линия, которая не имеет ничего общего с истинной физической зависимостью. График экспериментальных данных следует проводить не по точкам, а между ними так, чтобы число точек над и под графиком было приблизительно одинаково. Обычно рекомендуется пользоваться зрительным ощущением равенства нулю суммы положительных и отрицательных отклонений точек от проводимой кривой. Если известно математическое описание наблюдаемой зависимости, то график, по возможности, должен ему соответствовать. Отклонения



экспериментальных данных от теоретической кривой обусловлены тем, что результаты измерений получают с некоторой погрешностью.

При построении теоретической зависимости кривую строят на графике таким образом, чтобы она плавно проходила по всем расчётным точкам. Это требование обусловлено тем, что теоретические значения координат точек могут быть вычислены сколь угодно точно.

5.5. Описание движения в неинерциальных системах отсчёта

Неинерциальной системой отсчёта называют систему, движущуюся ускоренно относительно инерциальной.

В неинерциальных системах законы Ньютона не выполняются. Действительно, в неинерциальной системе отсчёта можно ускорить тело изменением состояния движения этой системы отсчёта. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим закон преобразования ускорений при переходе от неинерциальной к инерциальной системе отсчёта.

Предварительно получим ***классическую теорему сложения скоростей*** для случая, когда одна система отсчёта движется произвольным образом относительно другой системы, являющейся инерциальной.

Пусть **К** – это система отсчёта с началом координат в точке O, которую будем условно считать неподвижной, а **К′** – это система отсчёта с началом координат в точке O′, которая движется произвольным образом относительно системы **К**. В классической механике предполагается, что расстояния и промежутки времени не изменяются при переходе от одной системы отсчёта к другой. Движение системы отсчета **К′** относительно **К** можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного со скоростью $\vec{v}_0$ точки O′ и вращательного вокруг этой точки с угловой скоростью $\vec{\Omega}$.

Значения радиус-векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ произвольной материальной точки A в системах отсчёта **К** и **К′** связаны соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}',$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки O′, измеренный в системе отсчёта K.

Скорость точки A в неподвижной системе отсчёта **K** называют ***абсолютной скоростью.*** Она равна

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}, \qquad (5.11)$$

или, учитывая, что

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}', \qquad (5.12)$$

где x', y', z' – декартовы координаты точки A, а $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ – орты осей координат в системе отсчета **K′**, выражение (5.11) можно преобразовать к виду

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_o + \left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} \right) + \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' \right), \qquad (5.13)$$

где $\vec{\mathbf{v}}_o = \dfrac{d\vec{r}_o}{dt}$ – скорость поступательного движения системы отсчёта **K′** относительно системы **K**.

Орты $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ системы отсчёта **K′** могут изменяться в системе отсчёта **K** только вследствие вращения системы **K′** вокруг точки O′ с угловой скоростью $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$. Производные по времени от векторов $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ равны линейным скоростям концов этих векторов при вращении системы **K′**, поэтому по аналогии с формулой $\vec{\mathbf{v}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \left[\vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{r}\right]$ имеем

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \left[\vec{\boldsymbol{\Omega}}, \vec{i}'\right], \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \left[\vec{\boldsymbol{\Omega}}, \vec{j}'\right], \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \left[\vec{\boldsymbol{\Omega}}, \vec{k}'\right] \qquad (5.14)$$

Тогда

$$x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = \left[\vec{\boldsymbol{\Omega}}, \left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'\right)\right] = \left[\vec{\boldsymbol{\Omega}}, \vec{r}'\right]. \qquad (5.15)$$

Очевидно, что $\vec{\mathbf{v}}' = \dfrac{dx'}{dt}\vec{i}' + \dfrac{dy'}{dt}\vec{j}' + \dfrac{dz'}{dt}\vec{k}'$ – это скорость точки A в движущейся системе отсчёта **K′**, называемая ***относительной скоростью*** точки A. С учетом (5.14) преобразуем формулу (5.13) к виду

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_o + \left[\vec{\boldsymbol{\Omega}}, \vec{r}'\right] + \vec{\mathbf{v}}', \qquad (5.16)$$

где $\vec{\mathbf{v}}_o + \left[\vec{\boldsymbol{\Omega}}, \vec{r}'\right]$ – ***переносная скорость*** точки A. *Переносная скорость равна скорости той точки системы* **K′***, через которую проходит точка A в рассматриваемый момент времени.*

Таким образом, *абсолютная скорость точки A равна сумме её относительной и переносной скоростей.*

Если система отсчёта **K′** не вращается, то из (5.16) получим ***классическую теорему сложения скоростей***

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_o + \vec{\mathbf{v}}' \qquad (5.17)$$

Скорость материальной точки в неподвижной системе отсчёта равна её скорости в подвижной системе отсчёта, сложенной со скоростью поступательного движения подвижной системы отсчёта относительно неподвижной.

Аналогично получают формулы преобразования ускорений при переходе от описания движения точки А в системе отсчёта **K′** к описанию её движения в системе отсчёта **K**. Установлено, что ускорение точки А в системе **K**, которое будем называть ***абсолютным***, равно:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_o + \vec{a}_k, \tag{5.18}$$

где $\vec{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$ – это ускорение точки А в системе отсчёта **K′**, называемое ***относительным ускорением***; $\vec{a}_o = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_o}{dt} + \left[\frac{d\vec{\mathbf{\Omega}}}{dt}, \vec{r}'\right] + \left[\vec{\mathbf{\Omega}}\left[\vec{\mathbf{\Omega}}, \vec{r}'\right]\right]$ – это ***переносное ускорение*** точки А, равное ускорению в системе отсчёта **K** той точки системы отсчёта **K′**, через которую проходит точка А в рассматриваемый момент времени; $\vec{a}_k = 2\left[\vec{\mathbf{\Omega}}, \vec{\mathbf{v}}'\right]$ называют ***кориолисовым ускорением***. Итак, ***абсолютное ускорение материальной точки равно векторной сумме её относительного, переносного и кориолисова ускорений.***

Получим основной закон динамики материальной точки в неинерциальных системах отсчёта, для чего воспользуемся выражением $\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{a}_k + \vec{a}'$, связывающим абсолютное и относительное ускорения материальной точки. Домножим левую и правую части этого выражения на массу материальной точки

$$m\vec{a} = m\vec{a}_o + m\vec{a}_k + m\vec{a}' \tag{5.19}$$

Так как система отсчёта **K** инерциальна, в соответствии со вторым законом Ньютона имеем, что $m\vec{a} = \vec{F}$, где $\vec{F} = \sum_j \vec{F}_j$ – результирующая всех сил взаимодействия, приложенных к материальной точке. Это позволяет записать ***основное уравнение динамики движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта*** в следующем виде:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_o - m\vec{a}_k \tag{5.20}$$

Его можно привести к виду, аналогичному по форме второму закону Ньютона:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_o + \vec{F}_k, \tag{5.21}$$

где $\vec{F}_o = -m\vec{a}_o = -m\frac{d\vec{\mathbf{v}}_o}{dt} - m\left[\frac{d\vec{\mathbf{\Omega}}}{dt}, \vec{r}'\right] - m\left[\vec{\mathbf{\Omega}}\left[\vec{\mathbf{\Omega}}, \vec{r}'\right]\right]$ называют ***переносной силой инерции***, а $\vec{F}_k = -m\vec{a}_k = -2m\left[\vec{\mathbf{\Omega}}\ ,\ \vec{\mathbf{v}}'\right]$ – ***кориолисовой силой инерции***.

Последний член в выражении для переносной силы инерции $\vec{F}_{цб} = -m\left[\vec{\mathbf{\Omega}}\left[\vec{\mathbf{\Omega}}, \vec{r}'\right]\right]$ называют ***центробежной силой инерции.*** Следует помнить, что силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчёта, в которой они проявляются. Они существуют только для наблюдателя, находящегося в данной неинерциальной системе отсчёта.

Пусть материальная точка движется со скоростью $\vec{\mathbf{v}}'$ и ускорением $\vec{a}'$ в неинерциальной системе, связанной с Землёй. Эта система вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\mathbf{\Omega}}$ вокруг оси, перемещающейся поступательно с ускорением $\vec{a}_п = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_o}{dt}$ относительно инерциальной системы отсчёта. Так как угловая скорость вращения Земли постоянна, выражение $m\left[\frac{d\vec{\mathbf{\Omega}}}{dt}, \vec{r}'\right] = 0$. Основное уравнение динамики в неинерциальной системе отсчёта, связанной с Землёй, принимает вид

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_п + m\mathbf{\Omega}^2\vec{R} + 2m\left[\vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{\Omega}}\right], \tag{5.22}$$

где $\vec{F}$ – результирующая сил взаимодействия, действующих на материальную точку; $\vec{R}$ – радиус-вектор, перпендикулярный к оси вращения Земли и характеризующий положение материальной точки относительно этой оси; $m\mathbf{\Omega}^2\vec{R}$ – центробежная сила инерции, направленная от оси вращения перпендикулярно к ней; $\vec{\mathbf{v}}'$ – скорость движения материальной точки относительно Земли; $2m\left[\vec{\mathbf{v}}', \vec{\mathbf{\Omega}}\right]$ – сила Кориолиса, перпендикулярная плоскости, в которой лежат вектор скорости материальной точки и вектор угловой скорости вращения Земли.

При составлении вариантов домашних заданий используются источники, приведённые в библиографическом списке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жигунов В. В., Ростовцев Р. Н., Жигунов К. В. Введение в физику [Электронный ресурс]: учебн. пособие/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2016.— 259 с. .— ISBN 978–5–7679–3311–2. - Режим доступа: https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2016012714490180121900001778 – ЭБС “БиблиоТех”, по паролю.

2. Колмаков Ю. Н., Лагун И. М. Введение в физику. Основы механики: учеб. пособие [Электронный ресурс]/ Электрон.текстовые данные. — Тула : Изд-во ТулГУ, 2017.— 156 с.— ISBN 978–5–7679–3862–9. - Режим доступа: https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2017071011432687318100003056 – ЭБС “БиблиоТех”, по паролю.