МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2021г., протокол №5
с учетом изменений и дополнений,
утвержденных на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«17» июня 2021г., протокол № 10 ,
вступающих в силу с 1 сентября 2021 года

Заведующий кафедрой

В.В.Глаголев

# ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ) ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

**«Дифференциальные уравнения»**

**основной профессиональной образовательной программы**
**высшего образования – программы бакалавриата**
по направлению подготовки
**01.03.03 Механика и математическое моделирование**

с направленностью
**Механика деформируемого твердого тела**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-21

Тула 2021 год

**ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ**
**фонда оценочных средств**

**Разработчик:**
Буркин И.М., профессор, доктор физ.-мат.наук, доцент _____
*(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)* *(подпись)*

## 1. Описание фонда оценочных средств (оценочных материалов)

Фонд оценочных средств (оценочные материалы) включает в себя контрольные задания и (или) вопросы, которые могут быть предложены обучающемуся в рамках текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю). Указанные контрольные задания и (или) вопросы позволяют оценить достижение обучающимся планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), установленных в соответствующей рабочей программе дисциплины (модуля), а также сформированность компетенций, установленных в соответствующей общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

Полные наименования компетенций представлены в общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

## 2. Оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

**3 семестр**

**Перечень контрольных заданий и вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)**

1. Порядок дифференциального уравнения определяется:
   a) количеством переменных в уравнении,
   b) старшей степенью искомой функции ,
   c) старшей степенью независимой переменной,
   d) наивысшим порядком производной искомой функции,

2. Среди приведенных ниже дифференциальных уравнений, уравнениями **первого** порядка являются

a) $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$, b) $xy'-y=\ln y'$ , c) $y(xy''+y')=xy'^2(1-x)$, d) $y=2xy'-4y'^3$.

3. Среди приведенных ниже дифференциальных уравнений, уравнениями **первого** порядка являются

$a)(x^2+y^2)y'=2xy''$ $\quad b)y'+2y=y^2e^x$ $\quad c)2y'(y''+2)=xy'^2$ $\quad d)y=(y'-1)e^{y'}$.

4. Среди приведенных ниже дифференциальных уравнений, уравнениями **второго** порядка являются

a) $y=xy'-y'^2$ ,b) $yy''=y'^2+15y^2\sqrt{x}$ , c) $y'^2-2xy'=x^2-4y$, d) $y'^2=(3y-2y')y''$.

5. Среди приведенных ниже дифференциальных уравнений, уравнениями **третьего** порядка являются

$a)(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$ ,b) $2y'\sin x+y\cos x=y^3\sin^2 x$ ,

$c)yy'(yy'-2x)=x^2-2y^3$, d) $y'''\cos y+y'^2\sin y-y'=0$.

6. Изоклина дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ это:
   a) кривая, которую не пересекают интегральные кривые уравнения;
   b) кривая, которой касаются все интегральные кривые уравнения;
   c) кривая, вдоль которой отрезки поля направлений составляют один и тот же угол с осью абсцисс;

d) кривая, которую все интегральные кривые уравнения пересекают под одним и тем же углом,

7. Прямые на плоскости являются изоклинами следующих дифференциальных уравнений

1. $y' = \frac{y^2}{x} - 1,$
2. $xy' = 2y + 8x + 5,$
3. $y' = 5y + 3x - 11,$
4. $y' = \frac{y-1}{x} + 4$.

Варианты ответов a) 1,3 и 4; b) 2 и 3 ;c) 2,3 и 4 ;d) всех

8. Для дифференциального уравнения $y' = \frac{y^2}{x} - 1$ условия теоремы Коши не выполнены в области, содержащей точку

a) (1,0) ,b) (0.0), c) (-1.1), d) (2,1)

9. Для дифференциального уравнения $xy' = 2y^2 + 8x + 5,$ условия теоремы Коши не выполнены в области, содержащей точку

a) (1,0) ,b) (7.0), c) (-1.1), d) (0,1)

10. Теорема Пикара-Линделефа гарантирует существование решения задачи Коши $y' = x + y^3,\ y(0) = 0$ на отрезке

a) [0.95, 1.05]
b) [0.875, 1.125]
c) [-0.5, 0.5]
d) [-0.3, 0.3]

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)**
**Решить уравнения**

1. $y^{IY} - 6y''' + 6 = 0.$
2. $y'' - 4y' + 8y = 2(\sin 2x + x).$
3. Указать вид частного решения

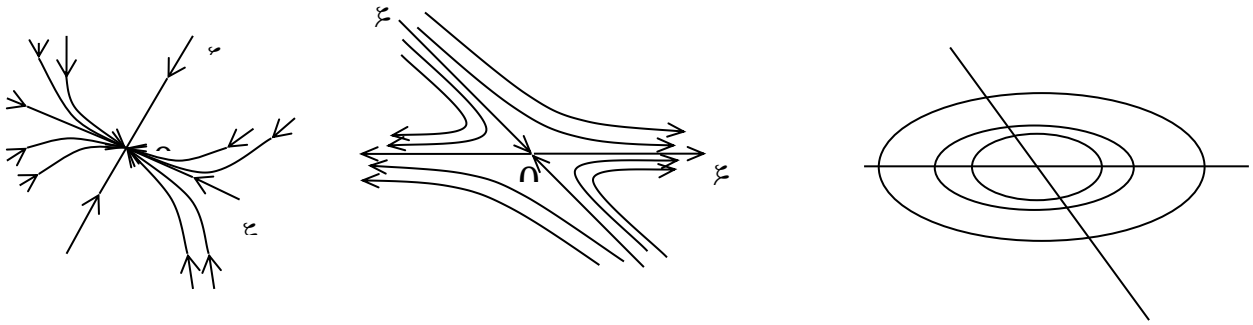
$y'' - 9y = x^2 e^{-3x} + e^{-3x}\cos 3x$

4. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$

**4 семестр**

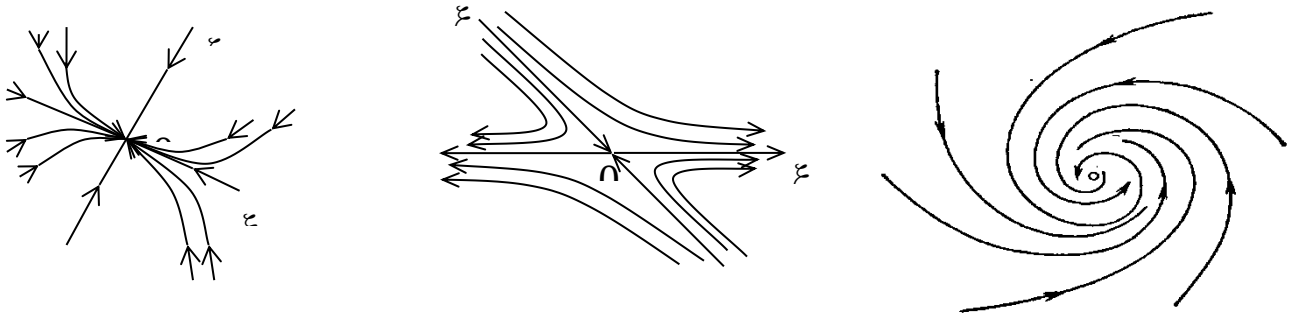
**Перечень контрольных заданий и вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)**

5. В окрестности точки покоя типа "центр" фазовые траектории системы $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ x\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ имеют вид



a) b) c)

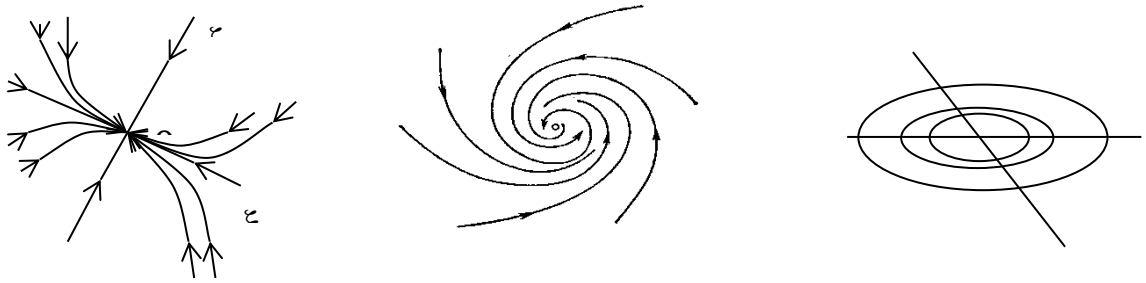
6. В окрестности точки покоя типа "седло" фазовые траектории системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ x\dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ имеют вид



a) b) c)

7. В окрестности точки покоя типа "устойчивый фокус" фазовые траектории системы

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ x\dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ имеют вид



a) в) c)

**Перечень контрольных заданий и вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)**

**С помощью теорем об устойчивости или неустойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение системы**

1. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + \sin y + z \\ \dot{y} = e^{2x} - 1 + 2y + 3z \\ \dot{z} = x + 2y - 5tg\, z \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = tg(z - y) - 2x \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^{y} \\ \dot{z} = -3y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -10x + 4e^{y} - 4\cos y^{2} \\ \dot{y} = 2e^{x} - 2 - y + x^{4} \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = 2.5xe^{x} - 3y + \sin x^{2} \\ \dot{y} = 2x + ye^{-0.5y^{2}} - y^{4}\cos x \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 0.25(e^{x} - 1) - 9y + x^{4} \\ \dot{y} = 0.2x - \sin y + y^{14} \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x} \end{cases}$

Используя теорему Пуанкаре-Бендиксона, доказать существование цикла у уравнения

**7.** $\ddot{x} + [2 + e^{-2x^{2}}(x - 3)]\dot{x} + 5x = 0.$

## 3. Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

**3 семестр**

**Перечень контрольных заданий и вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)**

1. Найти решение уравнения $y' = 2x(y + \pi)$, ограниченное при $x \to \infty$.
2. Найдите интегрирующий множитель, приводящий уравнение $(x^2 + y)dy - 2xy^2dx = 0$ к уравнению в полных дифференциалах.

3. Рассматривая уравнение $y' = x^2 + y^2$ в области $|x| \le 1, |y| \le 1$, укажите отрезок, на котором существует решение с начальными условиями $y(0) = 0$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $e^{A}$.

5.Решить задачу Коши $xy' = y(1 - \ln x + \ln y),\ y(1) = 1$.

6..Дано дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y}{2x + y}$. Укажите все подстановки, с помощью которых оно может быть проинтегрировано:
1)$y = u(x)v(x)$, 2)$x = u(y)v(y)$, 3)$y = xu(x)$, 4)$x = yu(y)$.

7. Найти особое решение дифференциального уравнения $y = x + 2y' - (y')^2$, зная его общее решение $y = C - \dfrac{1}{4}(C - x)^2$.

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)**

1. Сколько решений имеет краевая задача $y'' + \pi^2 y = 0, y(0) = 1, y(1) = 2$ ?
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $e^A$
3. Указать вид частного решения уравнения $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}(x^2 + x\cos 2x)$ (само решение не находить).
4. Найти общее решение уравнения $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}e^x$
5. Найти общее решение уравнения
$$(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$$
6. График частного решения уравнения $y'' + 2y' + 2 = 0$ является прямой линией. Найдите $y'(3)$.
7. Найти общее решение системы $\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y + 2z \\ \dot{y} &= x + 4y - 2z \\ \dot{z} &= x + 5y - 3z \end{aligned}$

**4 семестр**

**Перечень контрольных заданий и вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)**

1. Найти особые точки системы. Определить их тип. Построить схематически интегральные кривые в окрестности каждой особой точки

$\dot{x} = x^2 - y^2 + 12$

$\dot{y} = x^2 + y^2 - 20$

2. Найдя первый интеграл, изобразить фазовый портрет уравнения на плоскости $(x, \dot{x})$.

$\ddot{x} = 9 - x^2$

3. С помощью теоремы об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$\dot{x} = x + 2y - \sin(y^2)$

$\dot{y} = x(e^{\frac{x^2}{2}} - 1) - x - 3y$

4. Используя теорему Пуанкаре-Бендиксона, доказать существование цикла у системы.

$\dot{x} = 2x - \frac{y}{3} - xe^{-x^2 - y^2}$

$\dot{y} = 9x - y + ye^{-x^2 - y^2}$

6. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчиво ли решение данного уравнения с данными начальными условиями:

$\dot{x} = -2t^2 x, x(1) = 1$

7. При каких значениях $\beta$ и $\alpha$ устойчиво нулевое решение уравнения

$x^{IY} + 3\dddot{x} + \alpha\ddot{x} + 2\dot{x} + \beta x = 0$

## 4. Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения промежуточной аттестации обучающихся (защиты курсовой работы) по дисциплине

**4 семестр**

**Курсовая работа выполняется в течение четвертого семестра и представляет собой выполнение индивидуальных заданий, объединенных общей тематикой:**

1. **Исследование положений равновесия нелинейной системы второго порядка**
2. **Производная в силу системы. Первые интегралы.**
3. **Уравнения с частными производными первого порядка.**
4. **Исследование устойчивости вторым методом Ляпунова.**
5. **Исследование на устойчивость по первому приближению.**
6. **Теория Пуанкаре-Бендиксона.**
7. **Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.**

**Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции компетенции ОПК-1(контролируемые индикаторы достижения компетенций ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3)**

**Найти особые точки следующих систем, определить их тип. Построить схематически фазовые траектории в окрестности каждой особой точки.**

1) $\begin{cases} \dot{x} = 1 - y + x(y-1) \\ \dot{y} = xy - 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = y - x - 1 \\ \dot{y} = \ln(x^2 - y) \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = -2x(y+1) \\ \dot{y} = x^2 + y^3 - 8 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2x(y-2) - 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 4y^2 + x^2 - 4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 + 12 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 20 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = \ln\dfrac{1 - x + x^2}{3} \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dot{x} = 2y + \sqrt{1 - 3y - \sin x} \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x \\ \dot{y} = \ln(5 - x^2) \end{cases}$

**Найдя первый интеграл, изобразить фазовый портрет уравнения на плоскости $(x, \dot{x})$.**

1) $\ddot{x} + 4x - 2x^3 = 0$

2) $\ddot{x} + \left(\dfrac{x - 4x^3}{1 + x^4}\right)' = 0$

3) $\ddot{x} - \dfrac{x^2 + 3}{2(1 + x^2)} = 0$

4) $\ddot{x} + x - 2x^3 = 0$

5) $\ddot{x} - 3x + 4x^3 = 0$

6) $\ddot{x} = 2xe^{-x^2}(x^2 - 1)$

7) $\ddot{x} - x = 2 - x^2$

8) $\ddot{x} = 4 - x^2$

9) $\ddot{x} + \sin x = 1/2$

10) $\ddot{x} - x = x^2 - 5$

11) $4\ddot{x} - 5x = x^2 + 4$

12) $\ddot{x} + \left(\dfrac{x^3 - x}{1 + x^4}\right)' = 0$

**Найти общее решение уравнения**

1. $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y - x)\dfrac{\partial z}{\partial y} - x^2 = 0.$
2. $yx\dfrac{\partial z}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz.$
3. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z + x^2 y.$
4. $(y^2 + x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = -z^2.$
5. $2y^4\dfrac{\partial z}{\partial x} - yx\dfrac{\partial z}{\partial y} - x\sqrt{z^2 + 1} = 0.$
6. $x^2 z\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2 z\dfrac{\partial z}{\partial y} - x - y = 0.$

**Исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева**

1. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy; \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5; \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3; \\ \dot{y} = x^2 - y^3. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + x^2 y; \\ \dot{y} = -y + y^2 + xy - x^3. \end{cases}$