МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2021г., протокол №5
с учетом изменений и дополнений,
утвержденных на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«17» июня 2021г., протокол № 10 ,
вступающих в силу с 1 сентября 2021 года

Заведующий кафедрой

В.В.Глаголев

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ) ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И РОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)
"Дифференциальные уравнения"

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью
Прикладная математика и информатика
Форма обучения очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-21

Тула 2021 год

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ
фонда оценочных средств

Разработчик:
Буркин И.М., профессор, доктор физ.-мат.наук, доцент ________________
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

1. Описание фонда оценочных средств (оценочных материалов)

Фонд оценочных средств (оценочные материалы) включает в себя контрольные задания и (или) вопросы, которые могут быть предложены обучающемуся в рамках текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю). Указанные контрольные задания и (или) вопросы позволяют оценить достижение обучающимся планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), установленных в соответствующей рабочей программе дисциплины (модуля), а также сформированность компетенций, установленных в соответствующей общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

Полные наименования компетенций представлены в общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

2. Оценочные средства для проведения текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине

3 семестр

Перечень контрольных заданий и вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)

1. Порядок дифференциального уравнения определяется:
   a) количеством переменных в уравнении,
   b) старшей степенью искомой функции ,
   c) старшей степенью независимой переменной,
   d) наивысшим порядком производной искомой функции,

2. Среди приведенных ниже дифференциальных уравнений, уравнениями **первого** порядка являются

a) $(\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$, b) $xy'-y=\ln y'$, c) $y(xy''+y')=xy'^2(1-x)$, d) $y=2xy'-4y'^3$.

3. Среди приведенных ниже дифференциальных уравнений, уравнениями **первого** порядка являются

$a)(x^2+y^2)y'=2xy''$ $\quad b)y'+2y=y^2e^x$ $\quad c)2y'(y''+2)=xy'^2$ $\quad d)y=(y'-1)e^{y'}$.

4. Среди приведенных ниже дифференциальных уравнений, уравнениями **второго** порядка являются

a) $y=xy'-y'^2$,b) $yy''=y'^2+15y^2\sqrt{x}$, c) $y'^2-2xy'=x^2-4y$, d) $y'^2=(3y-2y')y''$.

5. Среди приведенных ниже дифференциальных уравнений, уравнениями **третьего** порядка являются

$a)(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$,b) $2y'\sin x+y\cos x=y^3\sin^2 x$,

$c)yy'(yy'-2x)=x^2-2y^3$, d) $y'''\cos y+y'^2\sin y-y'=0$.

6. Изоклина дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ это:
   a) кривая, которую не пересекают интегральные кривые уравнения;
   b) кривая, которой касаются все интегральные кривые уравнения;
   c) кривая, вдоль которой отрезки поля направлений составляют один и тот же угол с осью абсцисс;

d) кривая, которую все интегральные кривые уравнения пересекают под одним и тем же углом,

7. Прямые на плоскости являются изоклинами следующих дифференциальных уравнений

1. $y' = \frac{y^2}{x} - 1,$
2. $xy' = 2y + 8x + 5,$
3. $y' = 5y + 3x - 11,$
4. $y' = \frac{y-1}{x} + 4$.

Варианты ответов a) 1,3 и 4; b) 2 и 3 ;c) 2,3 и 4 ;d) всех

8. Для дифференциального уравнения $y' = \frac{y^2}{x} - 1$ условия теоремы Коши не выполнены в области, содержащей точку

a) (1,0) ,b) (0.0), c) (-1.1), d) (2,1)

9. Для дифференциального уравнения $xy' = 2y^2 + 8x + 5,$ условия теоремы Коши не выполнены в области, содержащей точку

a) (1,0) ,b) (7.0), c) (-1.1), d) (0,1)

10. Теорема Пикара-Линделефа гарантирует существование решения задачи Коши $y' = x + y^3,\ y(0) = 0$ на отрезке

a) [0.95, 1.05]
b) [0.875, 1.125]
c) [-0.5, 0.5]
d) [-0.3, 0.3]

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)

Решить уравнения

1. $y^{IY} - 6y''' + 6 = 0.$
2. $y'' - 4y' + 8y = 2(\sin 2x + x).$
3. Указать вид частного решения

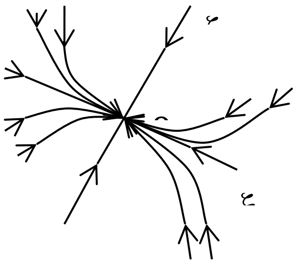
$y'' - 9y = x^2 e^{-3x} + e^{-3x} \cos 3x$

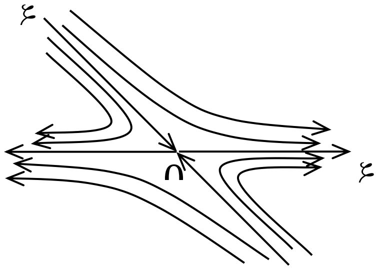
4. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$

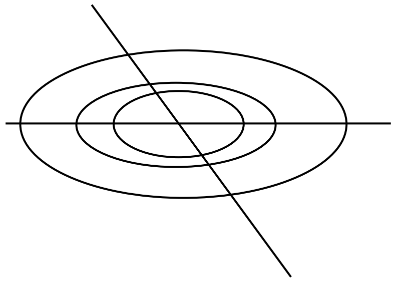
4 семестр

Перечень контрольных заданий и вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)

5. В окрестности точки покоя типа "центр" фазовые траектории системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ x\dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ имеют вид

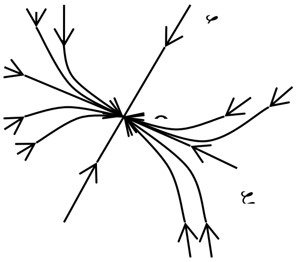


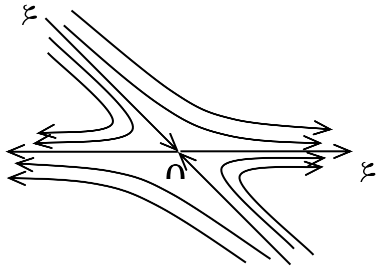


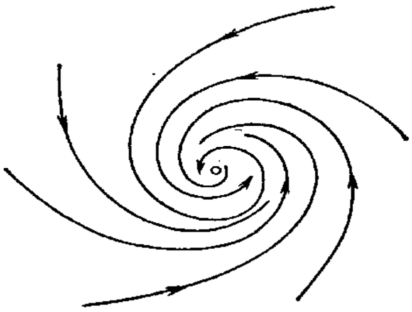


a) b) c)

6. В окрестности точки покоя типа "седло" фазовые траектории системы $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ x\dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ имеют вид



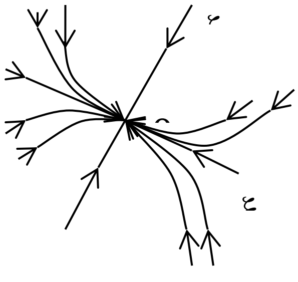


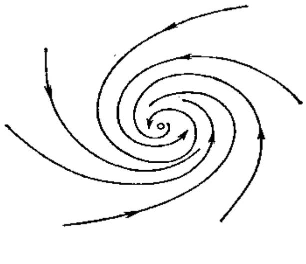


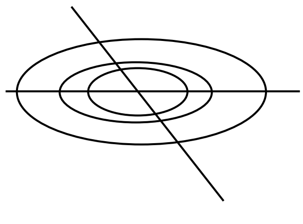
a) b) c)

7. В окрестности точки покоя типа "устойчивый фокус" фазовые траектории системы

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ x\dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ имеют вид







a) в) c)

Перечень контрольных заданий и вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)

С помощью теорем об устойчивости или неустойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение системы

1. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + \sin y + z \\ \dot{y} = e^{2x} - 1 + 2y + 3z \\ \dot{z} = x + 2y - 5tg\, z \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x} = tg(z - y) - 2x \\ \dot{y} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^{y} \\ \dot{z} = -3y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -10x + 4e^{y} - 4\cos y^2 \\ \dot{y} = 2e^{x} - 2 - y + x^4 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dot{x} = 2.5xe^{x} - 3y + \sin x^2 \\ \dot{y} = 2x + ye^{-0.5y^2} - y^4 \cos x \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 0.25(e^{x} - 1) - 9y + x^4 \\ \dot{y} = 0.2x - \sin y + y^{14} \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x} \end{cases}$

Используя теорему Пуанкаре-Бендиксона, доказать существование цикла у уравнения

7. $\ddot{x} + [2 + e^{-2x^2}(x - 3)]\dot{x} + 5x = 0.$

3. Оценочные средства для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

3 семестр

Перечень контрольных заданий и вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)

1. Найти решение уравнения $y' = 2x(y + \pi)$, ограниченное при $x \to \infty$.
2. Найдите интегрирующий множитель, приводящий уравнение $(x^2 + y)dy - 2xy^2dx = 0$ к уравнению в полных дифференциалах.

3. Рассматривая уравнение $y' = x^2 + y^2$ в области $|x| \le 1, |y| \le 1$, укажите отрезок, на котором существует решение с начальными условиями $y(0) = 0$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти e^A.

5.Решить задачу Коши $xy' = y(1 - \ln x + \ln y),\ y(1) = 1$.

6..Дано дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y}{2x+y}$. Укажите все подстановки, с помощью которых оно может быть проинтегрировано:
1) $y = u(x)v(x)$, 2) $x = u(y)v(y)$, 3) $y = xu(x)$, 4) $x = yu(y)$.
7. Найти особое решение дифференциального уравнения $y = x + 2y' - (y')^2$, зная его общее решение $y = C - \dfrac{1}{4}(C-x)^2$.

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)

1. Сколько решений имеет краевая задача $y'' + \pi^2 y = 0, y(0) = 1, y(1) = 2$?
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти e^A
3. Указать вид частного решения уравнения $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}(x^2 + x\cos 2x)$ (само решение не находить).
4. Найти общее решение уравнения $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}e^x$
5. Найти общее решение уравнения
$$(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$$
6. График частного решения уравнения $y'' + 2y' + 2 = 0$ является прямой линией. Найдите $y'(3)$.
7. Найти общее решение системы $\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y + 2z \\ \dot{y} &= x + 4y - 2z \\ \dot{z} &= x + 5y - 3z \end{aligned}$

4 семестр

Перечень контрольных заданий и вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1(контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)

1. Найти особые точки системы. Определить их тип. Построить схематически интегральные кривые в окрестности каждой особой точки
$$\dot{x} = x^2 - y^2 + 12$$
$$\dot{y} = x^2 + y^2 - 20$$
2. Найдя первый интеграл, изобразить фазовый портрет уравнения на плоскости $(x, \dot{x})$.
$$\ddot{x} = 9 - x^2$$
3. С помощью теоремы об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение системы
$$\dot{x} = x + 2y - \sin(y^2)$$
$$\dot{y} = x(e^{\frac{x^2}{2}} - 1) - x - 3y$$
4. Используя теорему Пуанкаре-Бендиксона, доказать существование цикла у системы.

$$\dot{x} = 2x - \frac{y}{3} - xe^{-x^2-y^2}$$

$$\dot{y} = 9x - y + ye^{-x^2-y^2}$$

6. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчиво ли решение данного уравнения с данными начальными условиями:

$\dot{x} = -2t^2 x, x(1) = 1$

7. При каких значениях β и α устойчиво нулевое решение уравнения

$x^{IY} + 3\dddot{x} + \alpha\ddot{x} + 2\dot{x} + \beta x = 0$

4. Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения промежуточной аттестации обучающихся (защиты курсовой работы) по дисциплине

4 семестр

Курсовая работа выполняется в течение четвертого семестра и представляет собой выполнение индивидуальных заданий, объединенных общей тематикой:

1. **Исследование положений равновесия нелинейной системы второго порядка**
2. **Производная в силу системы. Первые интегралы.**
3. **Уравнения с частными производными первого порядка.**
4. **Исследование устойчивости вторым методом Ляпунова.**
5. **Исследование на устойчивость по первому приближению.**
6. **Теория Пуанкаре-Бендиксона.**
7. **Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.**

Перечень контрольных заданий для оценки сформированности компетенции компетенции ОПК-1(контролируемые индикаторы достижения компетенций ОПК-1.1, ОПК-1.2, ОПК-1.3)

Найти особые точки следующих систем, определить их тип. Построить схематически фазовые траектории в окрестности каждой особой точки.

1) $\begin{cases} \dot{x} = 1 - y + x(y-1) \\ \dot{y} = xy - 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = y - x - 1 \\ \dot{y} = \ln(x^2 - y) \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = -2x(y+1) \\ \dot{y} = x^2 + y^3 - 8 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2x(y-2) - 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 4y^2 + x^2 - 4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 + 12 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 20 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = \ln\dfrac{1 - x + x^2}{3} \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dot{x} = 2y + \sqrt{1 - 3y - \sin x} \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x \\ \dot{y} = \ln(5 - x^2) \end{cases}$

Найдя первый интеграл, изобразить фазовый портрет уравнения на плоскости $(x,\dot{x})$.

1) $\ddot{x}+4x-2x^3=0$

2) $\ddot{x}+\left(\dfrac{x-4x^3}{1+x^4}\right)'=0$

3) $\ddot{x}-\dfrac{x^2+3}{2(1+x^2)}=0$

4) $\ddot{x}+x-2x^3=0$

5) $\ddot{x}-3x+4x^3=0$

6) $\ddot{x}=2xe^{-x^2}(x^2-1)$

7) $\ddot{x}-x=2-x^2$

8) $\ddot{x}=4-x^2$

9) $\ddot{x}+\sin x=1/2$

10) $\ddot{x}-x=x^2-5$

11) $4\ddot{x}-5x=x^2+4$

12) $\ddot{x}+\left(\dfrac{x^3-x}{1+x^4}\right)'=0$

Найти общее решение уравнения

1. $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}-x^2=0.$

2. $yx\dfrac{\partial z}{\partial x}-x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz.$

3. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+x^2y.$

4. $(y^2+x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=-z^2.$

5. $2y^4\dfrac{\partial z}{\partial x}-yx\dfrac{\partial z}{\partial y}-x\sqrt{z^2+1}=0.$

6. $x^2z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2z\dfrac{\partial z}{\partial y}-x-y=0.$

Исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова и применив теоремы Ляпунова или Четаева

1. $\begin{cases}\dot{x}=y-x+xy;\\ \dot{y}=x-y-x^2-y^3.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dot{x}=2y^3-x^5;\\ \dot{y}=-x-y^3+y^5.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dot{x}=xy-x^3+y^3;\\ \dot{y}=x^2-y^3.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dot{x}=x^3+x^2y;\\ \dot{y}=-y+y^2+xy-x^3.\end{cases}$