

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

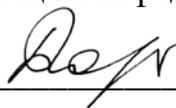
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Естественнонаучный институт

Кафедра «Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика»

Утверждено на заседании кафедры  
«Начертательная геометрия, инженерная и  
компьютерная графика»

« 29 » \_\_ 01 \_\_ 2021г., протокол № 6  
Заведующий кафедрой



Н.Н. Бородкин

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**для самостоятельной работы  
по дисциплине**

***«Начертательная геометрия и инженерная графика»  
«Начертательная геометрия. Инженерная графика»  
«Начертательная геометрия и компьютерная графика»  
«Инженерная и компьютерная графика»  
«Начертательная геометрия и строительное черчение»  
«Инженерная графика»***

**Тема «Пересечение поверхностей»**

**основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы бакалавриата, специалитета**

**по всем направлениям и специальностям подготовки**

Форма(ы) обучения: *очная, очно-заочная, заочная*

Тула 2021 год

## Разработчик(и) методических указаний

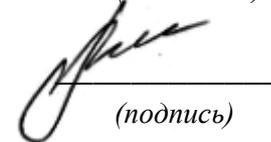
Васина Н.В., доцент, к.т.н.

*(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)*

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

Лобанова С.В., доцент, к.т.н., доцент

*(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)*

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

## Содержание

Содержание .....	3
Цели и задачи .....	4
Рекомендации по выполнению работы .....	4
Методы построения линии пересечения поверхностей .....	5
Построение линии пересечения поверхностей методом вспомогательных секущих плоскостей..	5
Построение развертки цилиндрической поверхности .....	7
Построение линии пересечения поверхностей методом концентрических сфер .....	9
Построение развертки поверхности конуса.....	11
Частный случай пересечения поверхностей.....	13
Построение линии пересечения поверхностей методом эксцентрических сфер.....	15
Построение развертки тора (кольца) методом цилиндров .....	17
Построение развертки сферы методом цилиндров .....	19
Библиографический список.....	21
Приложение.....	22

## Цели и задачи

**Цели:** знакомство студентов с методами построения линии пересечения поверхностей.

**Задачи:** привить студентам навыки построения линии пересечения поверхностей и их разверток.

## Рекомендации по выполнению работы

Путем геометрических построений решают практические задачи графическим способом: все действия производятся чертежными инструментами. Результатом построения является какой-либо графический элемент: геометрическая фигура, контур детали и т.д. Для выполнения графических работ нужны следующие материалы и принадлежности: бумага (ватман и миллиметровка), карандаши, ластик, рейсшина, угольники, линейки, лекала, циркуль. Все чертежи должны выполняться в соответствии с требованиями стандартов Единой системы конструкторской документации (ЕСКД), отличаться четким и аккуратным оформлением.

Работа выполняется на листе формата А2 по индивидуальному заданию. Требуется выполнить чертеж, равномерно распределив изображения на формате. При этом необходимо сохранять все вспомогательные построения.

Задание состоит из следующих частей:

1. На форме начертить необходимое число проекций заданных тел (2 или 3 проекции).
2. Построить линию пересечения поверхностей.
3. Выполнить развертку одной из поверхностей.
4. На развертке построить линию пересечения.

***Все изображения выполняются от руки на одной стороне формата.***

Примеры выполнения работы приведены в приложении.

# Методы построения линии пересечения поверхностей

## *Построение линии пересечения поверхностей методом вспомогательных секущих плоскостей*

Необходимо построить ряд точек, принадлежащих обеим пересекающимся поверхностям. Положение вспомогательных плоскостей выбирают так, чтобы они пересекали заданные поверхности по графически простым линиям – прямым или окружностям (в данном случае по окружностям) (рисунок 1).

Последовательность построения:

1) Пересекающиеся поверхности имеют общую плоскость симметрии, проходящую через их оси вращения и параллельную фронтальной плоскости проекций **V**, что позволяет определить опорные точки **1** и **2** – общие точки пересечения их контуров;

2) Вводится несколько вспомогательных горизонтальных секущих плоскостей уровня ( $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v$ ), пересекающих заданные поверхности по окружностям, общие точки пересечения которых **3** и **4**, **7** и **8**, **9** и **10** на разных уровнях позволяют построить линию пересечения заданных поверхностей.

3) Проекция линии пересечения должны располагаться в пределах очерков как одной, так и другой поверхности одновременно.

Одна из пересекающихся поверхностей занимает проецирующее положение относительно горизонтальной плоскости проекций **H** и решение задачи упрощается.

# Построение линии пересечения поверхностей методом секущих плоскостей

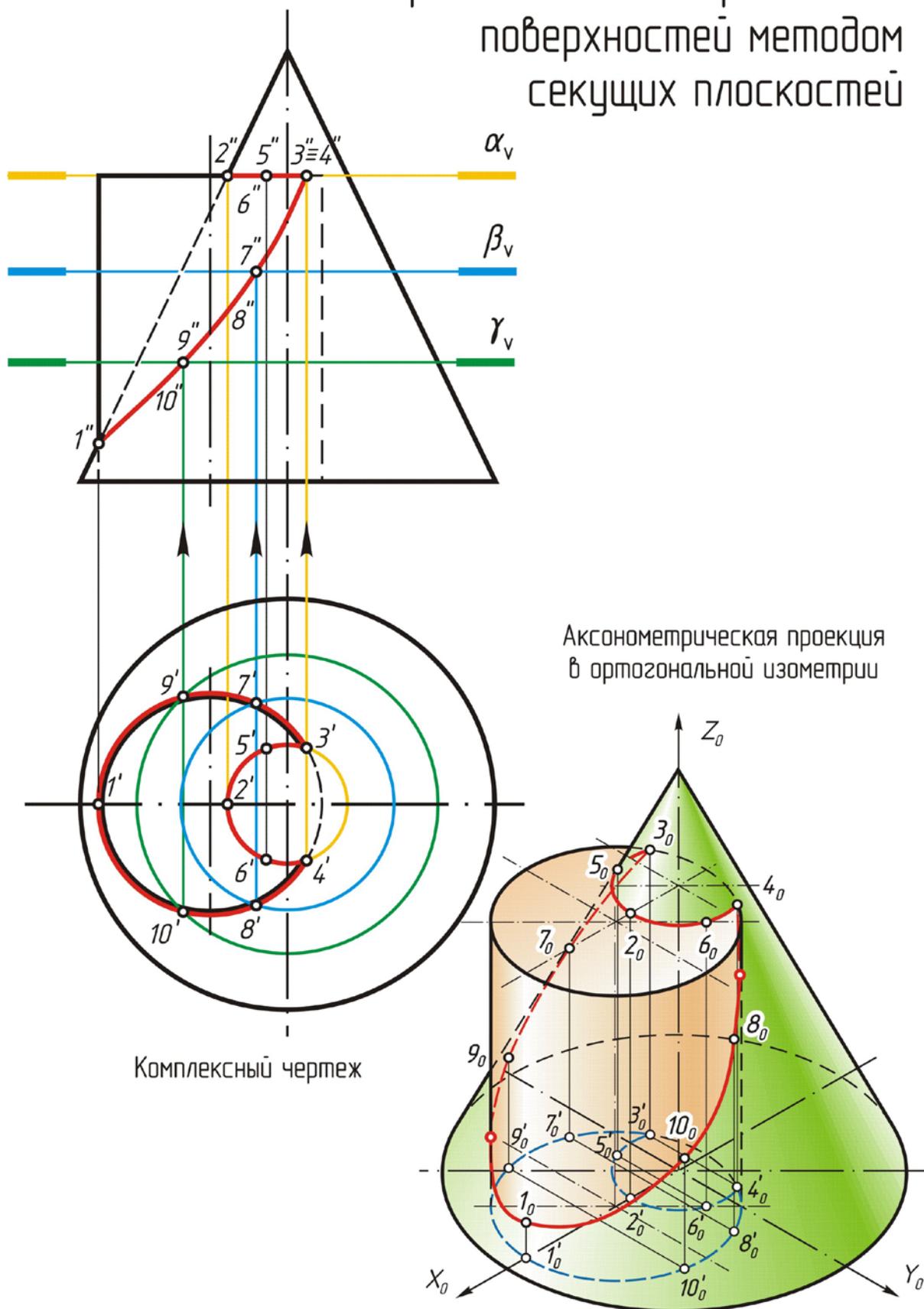


Рисунок 1

## **Построение развертки цилиндрической поверхности**

Графически может быть построена только приближенная развертка цилиндрической поверхности. Это объясняется тем, что в процессе снятия и откладывания размеров и выполнения других графических операций неизбежны погрешности, обуславливаемые конструктивными особенностями чертежных инструментов, физическими особенностями глаза и погрешностью от замены дуг хордами и углов на поверхности плоскими углами. Приближенные развертки при тщательном изготовлении обладают точностью, достаточной для практических целей (рисунок 2).

Боковая поверхность прямого кругового цилиндра представляет собой прямоугольник со сторонами  $b$  и  $\pi d$ , где  $b$  – высота цилиндра, а  $\pi d$  – длина окружности основания цилиндра.

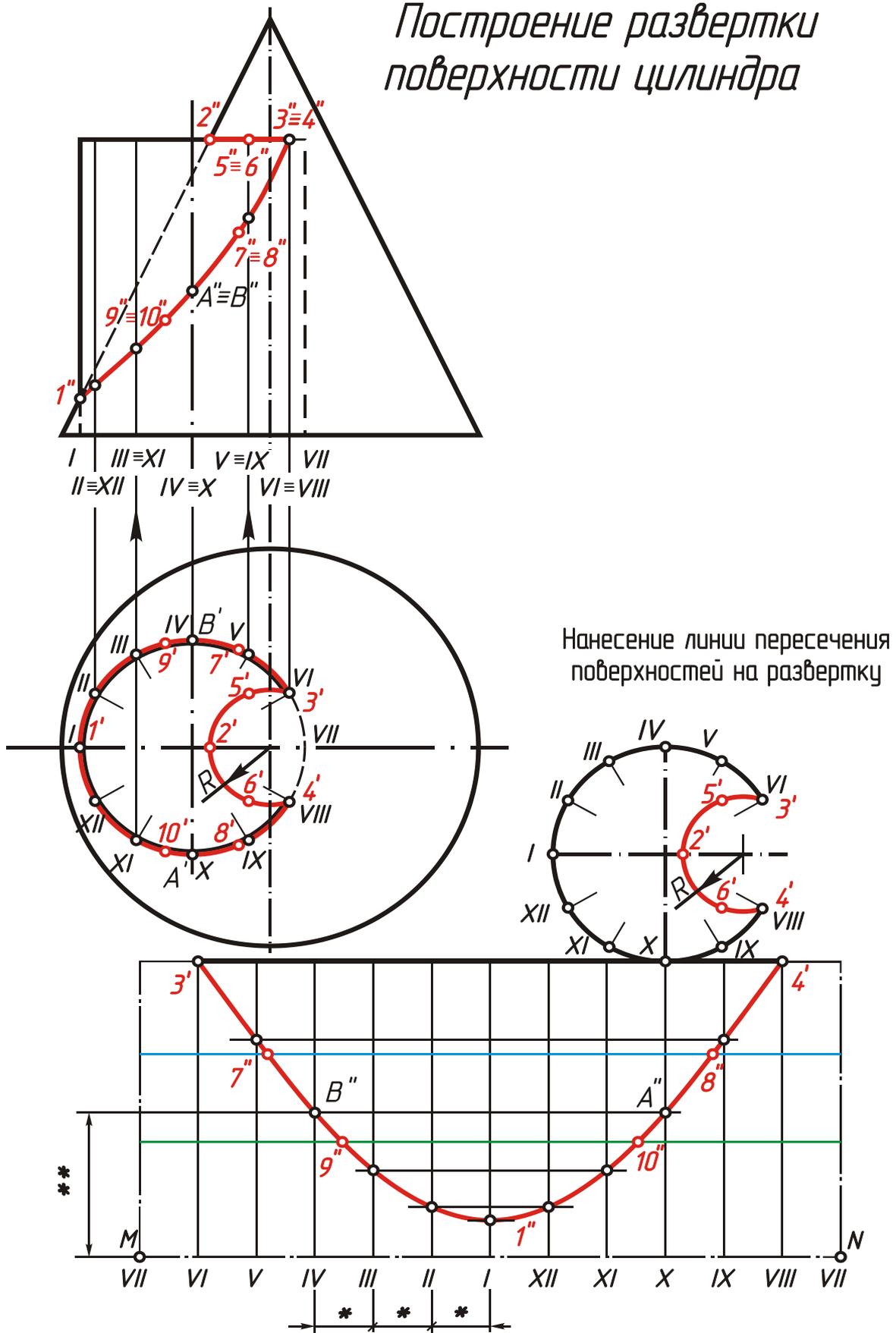
На горизонтальной прямой откладывают отрезок  $MN$ , равный  $\pi d$  и делят его на 12 равных частей.

Другой способ графически так же точен: деля окружность основания цилиндра циркулем на 12 равных частей,  $1/12$  часть дуги окружности, отмеченную знаком «\*», заменяют на хорду и откладывают ее 12 раз на горизонтальной прямой  $MN$ . Через полученные точки деляния проводят образующие на ортогональном чертеже и на развертке, пронумеровав точки деляния с учетом симметрии (*I, II, III* и т.д.).

Точки пересечения каждой образующей с ранее построенной линией пересечения переносят с ортогонального чертежа на развертку. Например, точка **A** принадлежит образующей **X**, а точка **B** – образующей **IV**.

Расстояние, отмеченное знаками «\*\*», с фронтальной проекции переносят на указанные номера образующих на развертку. Полученные точки соединяют плавной кривой линией. Верхнее основание цилиндра вместе с линией пересечения с горизонтальной проекции, где оно получено в натуральную величину, переносят на развертку.

# Построение развертки поверхности цилиндра



Нанесение линии пересечения поверхностей на развертку

Рисунок 2

## **Построение линии пересечения поверхностей методом концентрических сфер**

Центром концентрических вспомогательных сферических поверхностей (сфер) является точка пересечения их осей вращения (рисунок 3).

Последовательность построения:

1) опорные общие точки ***A''***, ***B''***, ***C''***, ***D''*** – в пересечении фронтальных очерковых образующих – главных меридианов поверхностей;

2) строится сфера минимального радиуса ***R<sub>min</sub>*** (на чертеже – красного цвета), касательная к большей поверхности, которая пересекается с конусом по одной окружности ***M''N''***, а со второй поверхностью – по двум окружностям (***K''L''*** и ***G''F''***);

3) эти окружности принадлежат одной поверхности – сфере ***R<sub>min</sub>***, следовательно, парные точки их пересечения одновременно принадлежат и двум данным поверхностям, т.е. принадлежат линии их пересечения (***3''***, ***9''***);

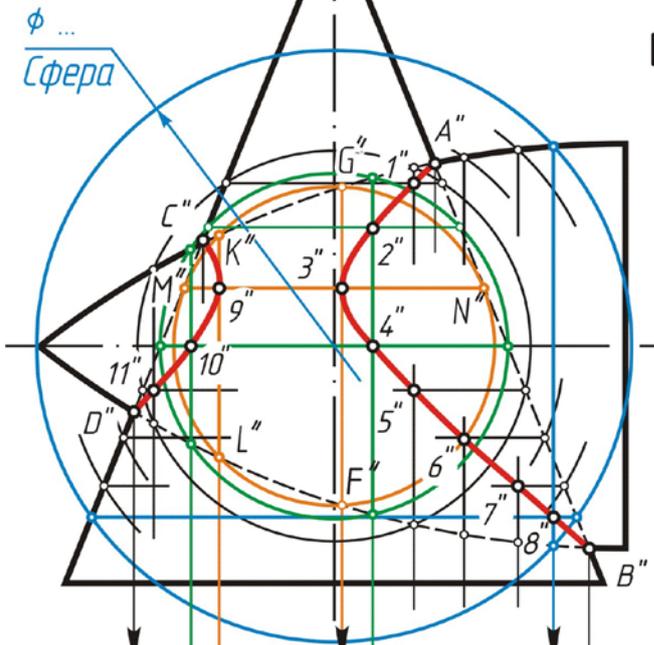
4) выбирая больший радиус вспомогательной сферы (текущий радиус вспомогательной сферы – ***R<sub>i</sub> + 3...5мм***), можно построить любое число точек линии пересечения (***1''***, ***2''***, ..., ***11''***);

5) построение горизонтальной проекций точек линии пересечения видно из чертежа;

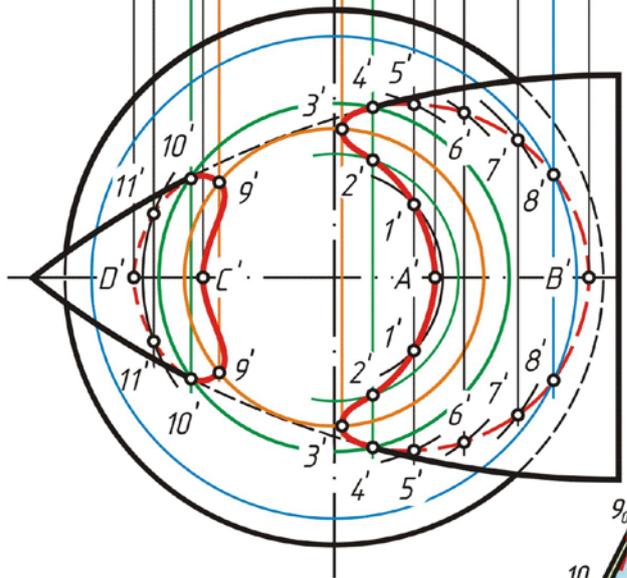
6) границами видимости линии пересечения на горизонтальной проекции являются парные точки ***10'-10'*** и ***4'-4'***.

Проекции линии пересечения поверхностей должны располагаться в пределах очерков как одной, так и другой поверхности одновременно на ортогональном чертеже и в аксонометрии.

# Построение линии пересечения поверхностей методом концентрических сфер



АксонOMETрическая проекция в ортогональной изометрии



Комплексный чертеж

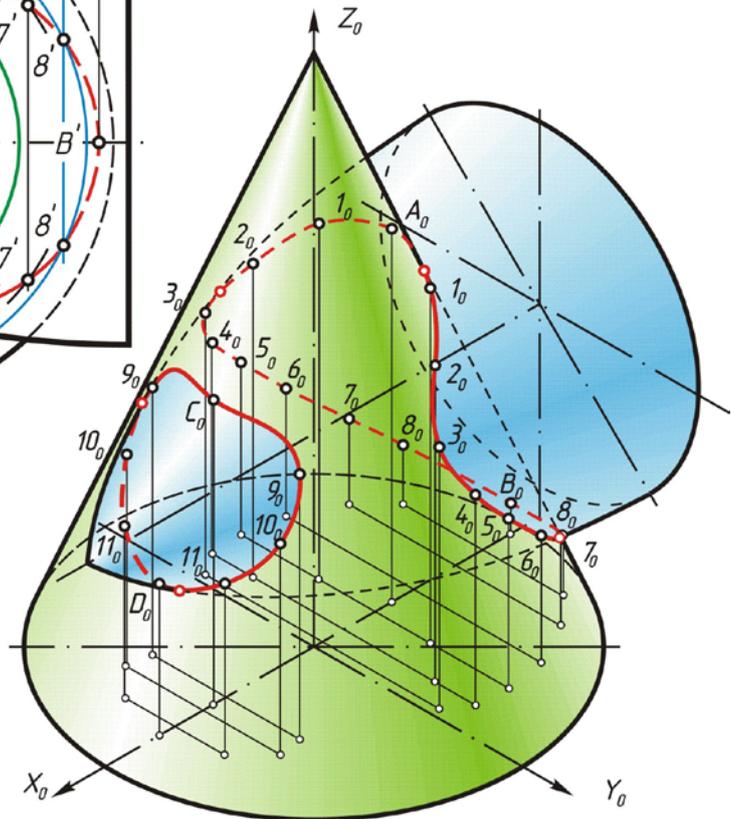


Рисунок 3

## Построение развертки поверхности конуса

Поверхность конуса разворачивается в круговой сектор (рисунок 4), радиус которого  $R^*$  равен натуральной длине образующей конуса, а угол при вершине определяется по формуле  $\alpha = \frac{R}{L} 360^\circ$ ,

где  $L$  – длина образующей;  $R$  – радиус окружности основания.

Делят окружность основания на ортогональном чертеже на 12 равных частей;  $1/12$  часть дуги окружности, отмеченная знаком \*, заменяют на хорду и откладывают ее 12 раз на дуге радиуса  $R^*$  на развертке. Точки деления нумеруются и через них проводят образующие на ортогональном чертеже и на развертке.

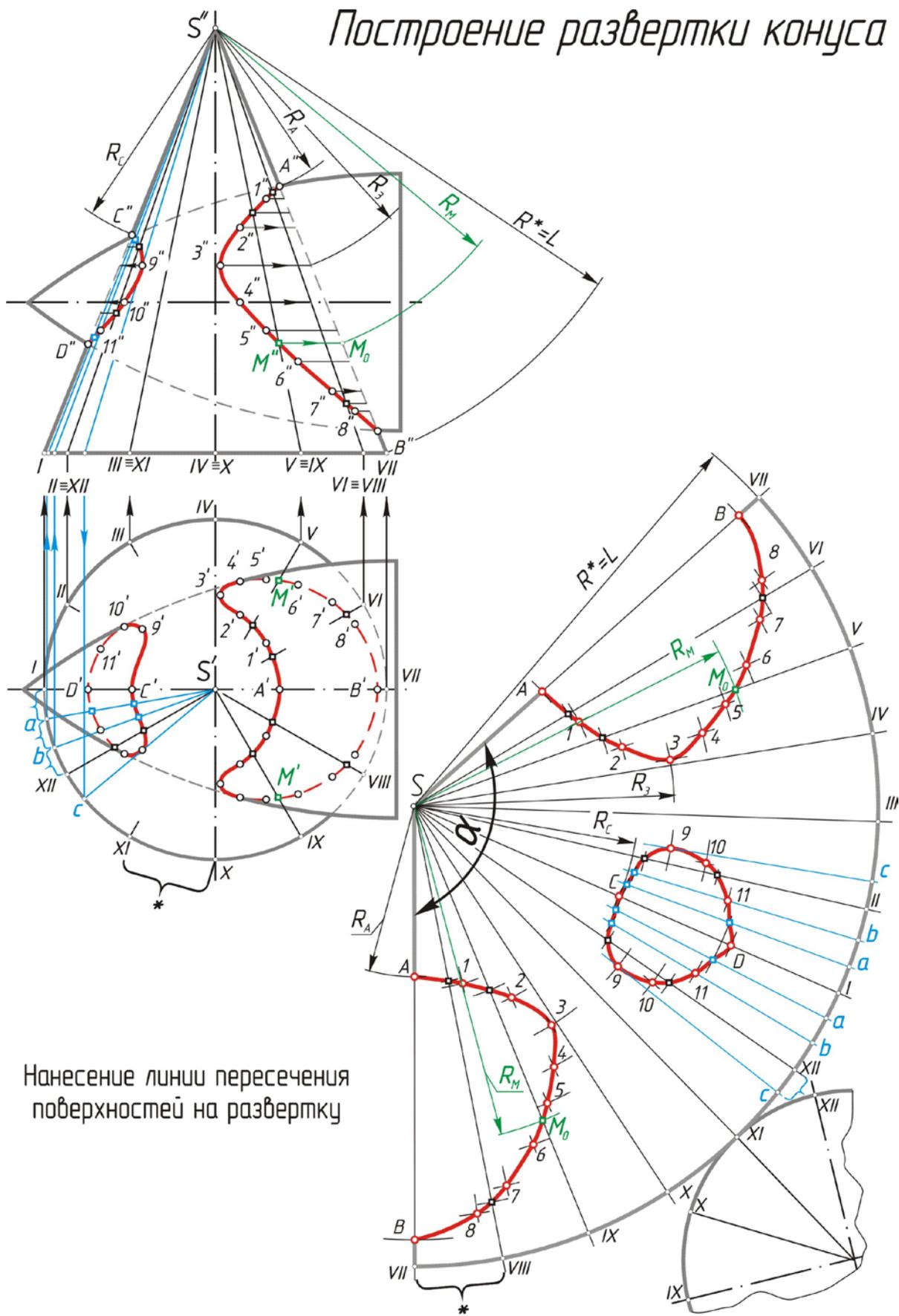
Отмечают на фронтальной проекции точки встречи образующих с линиями пересечения заданных поверхностей. Находят натуральные величины этих отрезков от вершины конуса, перемещая их на крайние (очерковые) образующие и наносят соответствующие отрезки на развертку конуса.

Например:

- 1) парная точка  $M$  принадлежит образующей  $IX$  и  $V$ ;
- 2) перемещаем фронтальную проекцию точки  $M(M'')$  на крайнюю образующую  $M'' \rightarrow M^0$ ;
- 3) засечкой  $S''M^0 = R_M$  отмечают на развертке место точки  $M^0$  на образующей  $IX$  и на парной ей образующей  $V$  и т.д.;
- 4) все перенесенные точки соединяют плавной кривой по лекалу и с учетом симметрии.

Для более точного нанесения точек линии пересечения на развертку необходимо поделить отдельные ее зоны на более мелкие равные доли ( $a, b, c$  и т.д.).

# Построение развертки конуса



Нанесение линии пересечения поверхностей на развертку

Рисунок 4

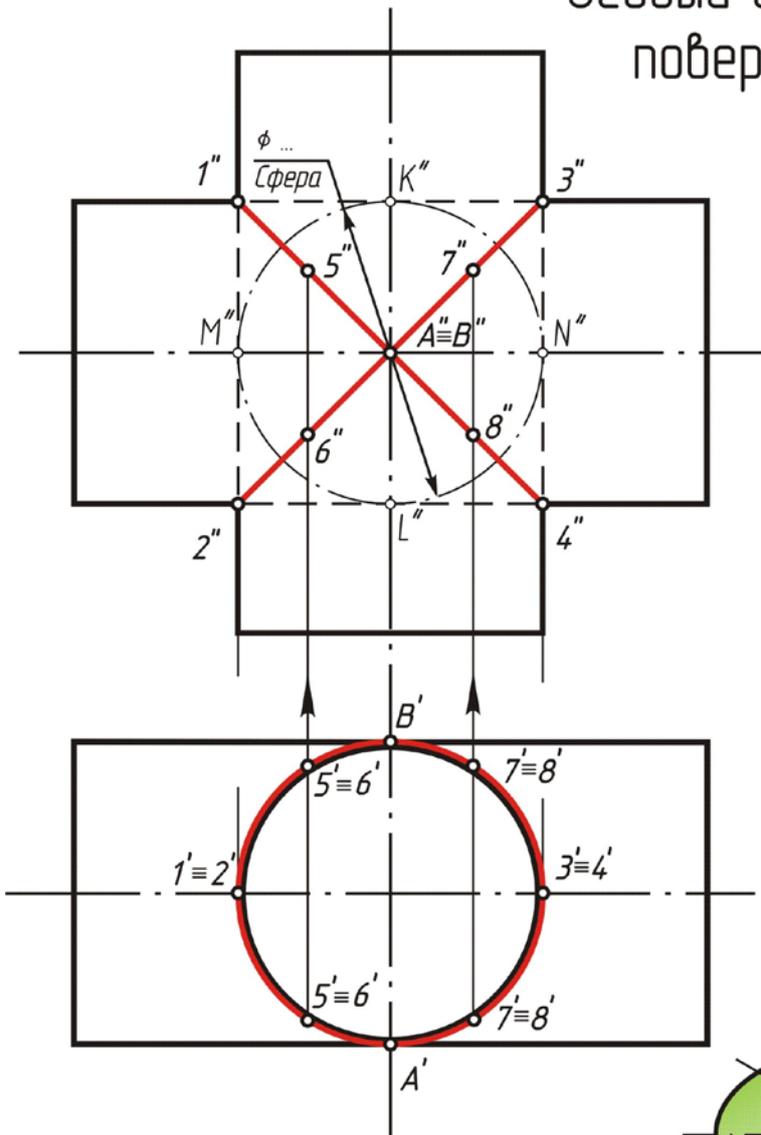
### **Частный случай пересечения поверхностей**

Две пересекающиеся поверхности второго порядка касаются третьей поверхности второго порядка (рисунок 5).

Две цилиндрические поверхности с общей фронтальной плоскостью симметрии касаются сферы по окружностям  $M''-N''$  и  $K''-L''$ , которые пересекаются в точках  $A'' \equiv B''$ . Линии пересечения поверхностей в данном случае представляют собой эллипсы, плоскости которых перпендикулярны фронтальной плоскости проекций ( $1''-4''$  и  $2''-3''$ ).

**Теорема (Г. Монжа).** Если две поверхности второго порядка или описаны вокруг третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка.

Особый случай пересечения  
поверхностей вращения  
второго порядка  
(теорема Монжа)



Комплексный чертеж

АксонOMETрическая проекция  
в ортогональной изометрии

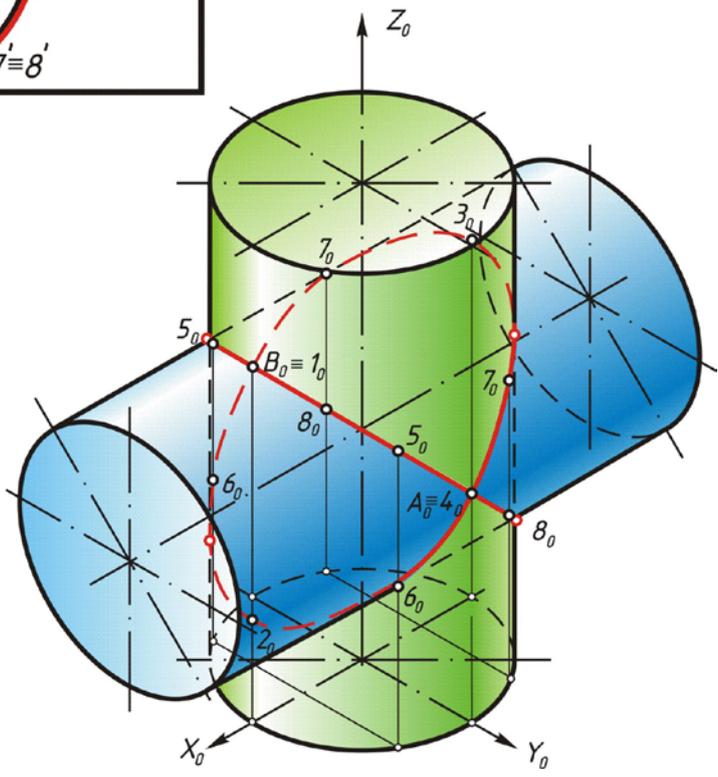


Рисунок 5

## **Построение линии пересечения поверхностей методом эксцентрических сфер**

Пересекающиеся поверхности (прямой конус вращения) и тор (круговое кольцо) имеют общую плоскость симметрии (рисунок 6). Необходимо построить линию пересечения поверхностей для этого будут использованы вспомогательные сферы, которые пересекут обе поверхности по окружностям.

1) Опорные общие точки  $A''$  и  $B''$  определяются в пересечении фронтальных очерковых образующих (главных меридианов поверхностей).

2) Проведена фронтально проецирующая плоскость  $\alpha_v$  через ось вращения тора между проекцией точек  $A''$  и  $B''$  (зеленый цвет).

3) Сечение тора плоскостью  $\alpha_v$  – окружность  $MN$ , плоскость которой перпендикулярна фронтальной плоскости проекций  $V$ .

4) Через середину ее проекции ( $O_1''$ ) проведена прямая  $O_1''C_1''$ , перпендикулярная к ней, до пересечения с осью конуса в точке  $C_1''$ .

5) Из точки  $C_1''$  проводят вспомогательную сферу радиусом  $R=C_1''M''$ , которая пересечет тор по уже построенной окружности  $MN$  (фронтальная проекция – отрезок  $M''N''$ ), а конус – по окружности  $KL$  (фронтальная проекция – отрезок  $K''L''$ ). Эти две окружности принадлежат одной поверхности – сфере  $R_1$ . Поэтому окружность  $MN$  ( $M''N''$ ) пересекается с окружностью  $KL$  ( $K''L''$ ) двух точках  $1(1'')$ , фронтальные проекции которых спроецированы в одну.

6) Все предыдущие действия повторяются для плоскостей  $\beta_v$  и  $\gamma_v$  (синий и желтый цвета соответственно). Центры вспомогательных сфер  $C_1$  ( $C_1''$ ),  $C_2$  ( $C_2''$ ),  $C_3$  ( $C_3''$ ) обязательно должны лежать на оси конуса.

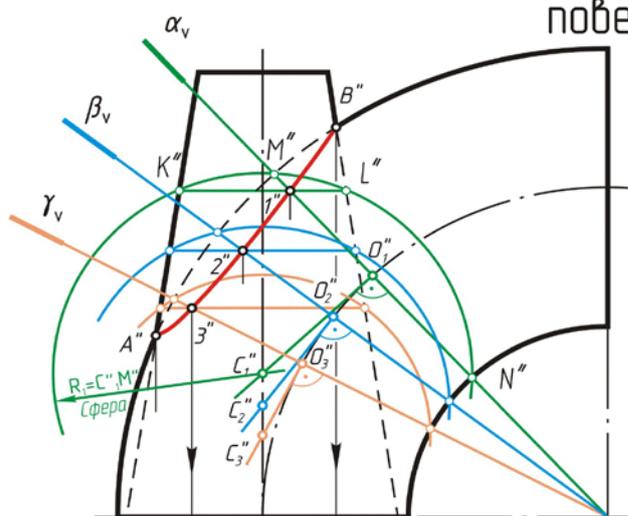
7) Полученные точки лекальной кривой  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  соединяют с опорными точками  $A''$  и  $B''$ .

8) Построение горизонтальной проекции линии пересечения понятно из чертежа.

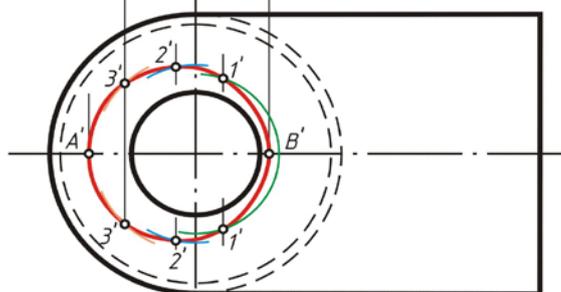
9) Линия пересечения обводится с учетом видимости всех геометрических элементов.

Проекции линии пересечения должны располагаться в пределах очерков как одной, так и другой поверхности одновременно на всех их изображениях.

### Построение линии пересечения поверхностей методом эксцентрических сфер



Аксанометрическая проекция в ортогональной изометрии



Комплексный чертеж

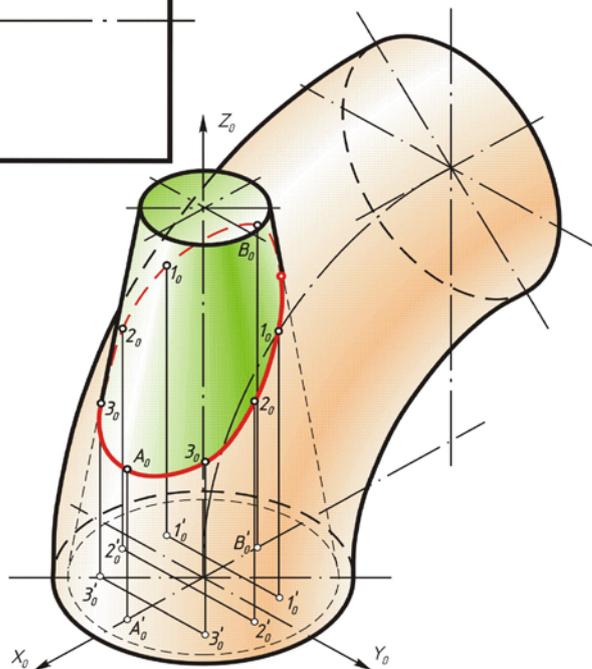


Рисунок 6

### **Построение развертки тора (кольца) методом цилиндров**

Разбивают поверхность  $\frac{1}{4}$  кольца при помощи меридианов на три части и строят приближенную развертку одной части (рисунок 7). Заменяют поверхность одной части описанной цилиндрической поверхностью, нормальным сечением  $\alpha_v$ , которой будет средний меридиан рассматриваемой части кольца (*I, II, III, ..., VIII*). Если спрямить средний меридиан в отрезок прямой и через точки деления провести перпендикулярные к нему образующие цилиндрической поверхности  **$MN=M''N''$** ;  **$KL=K''L''$** ;  **$FG=F''G''$** ;  **$DE=D''E''$** ;  **$PQ=P''Q''$** , то, соединив их концы плавными кривыми, получают приближенную развертку  $\frac{1}{3}$  части поверхности заданного кольца. Остальные две части кольца подстраивают к полной развертке, а затем наносят точки линии пересечения заданных поверхностей.

# Построение развертки тора

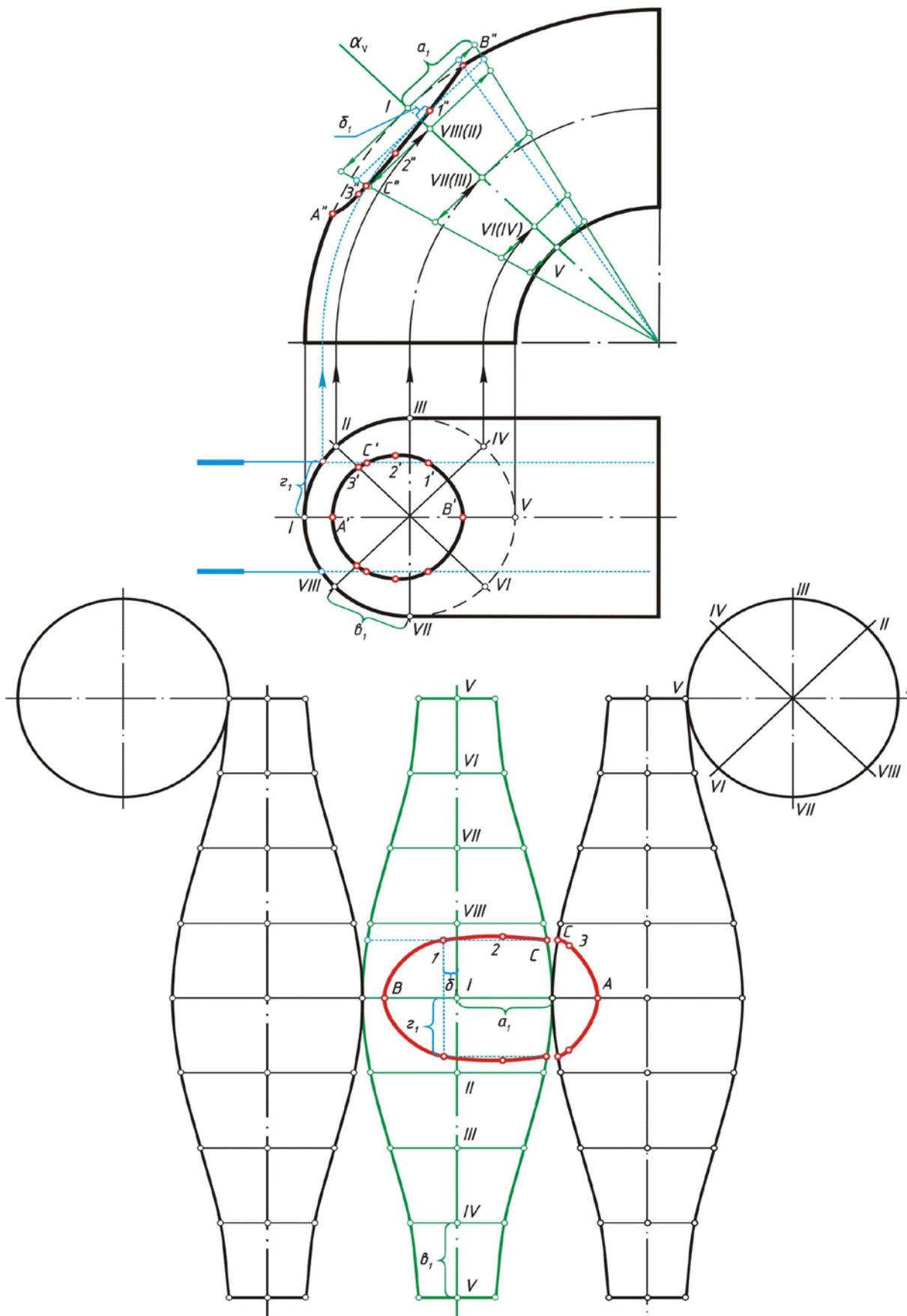


Рисунок 7

## **Построение развертки сферы методом цилиндров**

Сферическая поверхность относится к неразвертывающимся поверхностям так как ее нельзя развернуть на плоскость без складок и разрывов (рисунок 8). При изготовлении сферических поверхностей из листового материала они заменяются развертывающимися поверхностями, которые приближенно повторяют форму сферической.

Сфера с помощью меридианов I, II, ...VI разбита на шесть равных частей, которые проецируются на горизонтальную плоскость H секторами. Рассмотрим построение приближенной развертки одной части (доли) сферы, ограниченной меридианами I и VI (выделено красным цветом). Средний меридиан  $1'0'$  является главным меридианом и очерком поверхности сферы на фронтальной плоскости проекций  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ,  $0''$ . Эту долю сферы заменяют описанной цилиндрической поверхностью, которая касается поверхности сферы по линии среднего меридиана доли  $1, 2, 3, 0$ . Главный меридиан делят на шесть равных частей точками  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ,  $0''$ , тем самым заменяют цилиндрическую поверхность вписанной призматической поверхностью. Для этого через точки  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  проводят образующие, перпендикулярные среднему меридиану доли.

Для построения развертки спрямляют средний меридиан этой доли, отложив  $\frac{1}{6}$  его длины (отрезок  $v_1$ ) шесть раз на прямой  $0-0$  (построение красным цветом). Через точки деления  $1, 2, 3$  проводят прямые перпендикулярные  $0-0$ , на которых откладывают натуральные величины образующих цилиндрической поверхности, заменяющей сферическую (отрезки\*, \*\* и\*\*\*). Соединив плавной кривой линией концы образующих, получают приближенную развертку одной доли сферы, равной  $\frac{1}{6}$  всей ее поверхности. Развертка остальных долей сферы строится аналогично.

# Построение развертки сферы

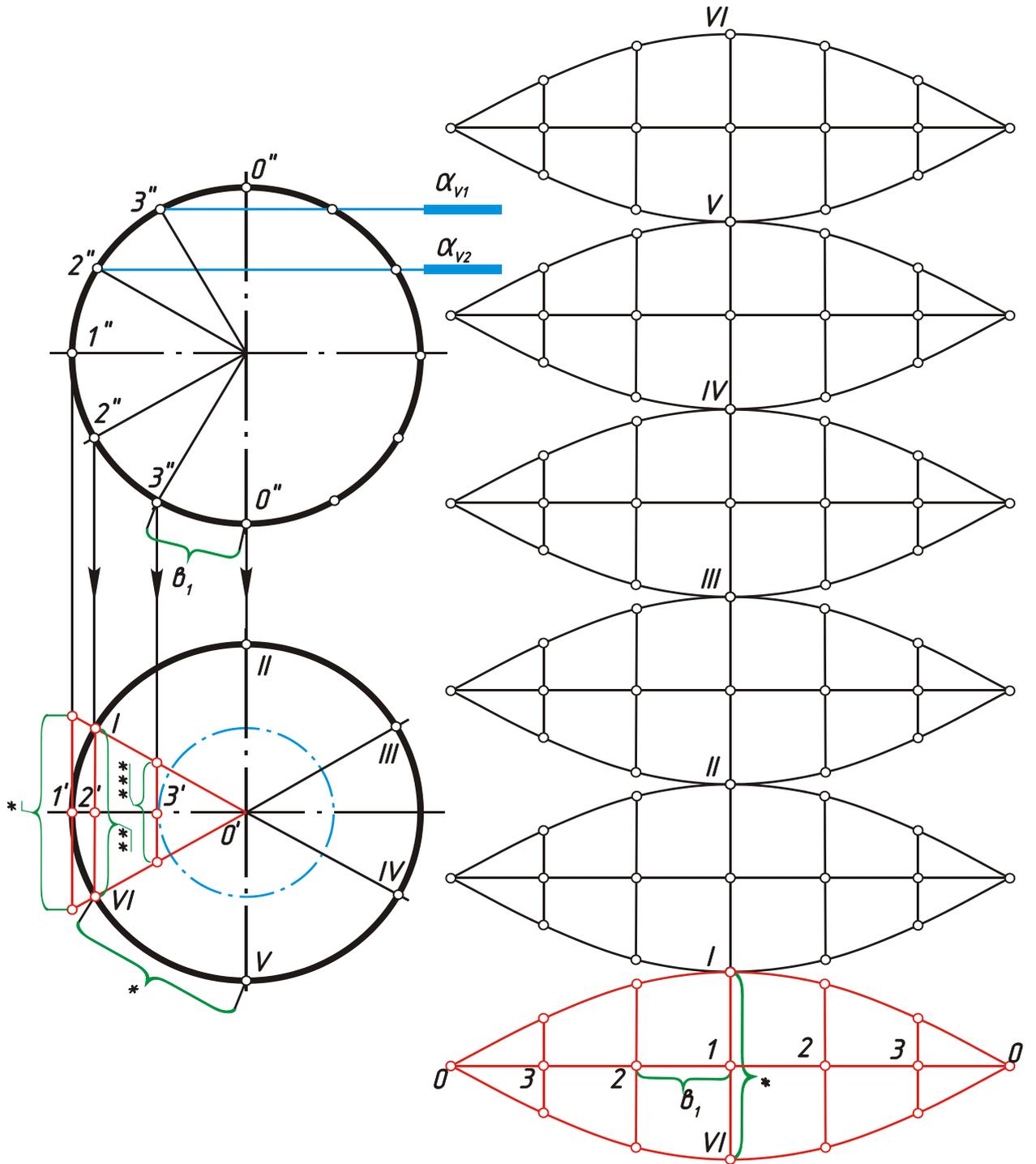


Рис. 8

## Библиографический список

1. Чекмарев, А.А. Начертательная геометрия и черчение : учебник для вузов / А.А.Чекмарев .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Высшее образование, 2006 .— 471 с. : ил. — (Основы наук) .— Библиогр. в конце кн. — ISBN 5-9692-0090-5.
2. Короев, Ю. И. Начертательная геометрия : учебник / Ю. И. Короев .— 3-е изд., стер — Москва : Кнорус, 2011 .— 422 с. : ил .— (Специальность "Архитектура") .— Библиогр.: с. 415 .— Предм. указ.: с. 416-418 .— ISBN 978-5-406-00571-2.
3. Васина Н.В., Лобанова С.В. РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ для лекционных, практических занятий и самостоятельной работы студентов по дисциплине «Начертательная геометрия и инженерная графика». – Тула, ТулГУ, ЭБС «БиблиоТех», 2019. – 57 с. <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2019022510272387515300004587>
4. Короев, Ю. И. Начертательная геометрия: учебник / Ю. И. Короев. — 3-е изд., стер. — Москва: Кнорус, 2013. — 423 с. — ISBN 978-5-406-03181-0
5. Королёв, Ю. И. Начертательная геометрия и графика: для бакалавров и специалистов: учебное пособие для вузов / Ю. И. Королёв, С. Ю. Устюжанина. — Москва [и др.]: Питер, 2013. — 186 с. : ил. — (Учебное пособие) (Стандарт третьего поколения). — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-496-00016-1
6. Лобанова С.В., Васина Н.В. Методические указания для практических занятий и самостоятельной работы студентов по теме «Пересечение поверхностей». – Тула, ТулГУ, ЭБС «БиблиоТех», 2019. – 23 с. <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2019022511214738289900003407>

# Приложение

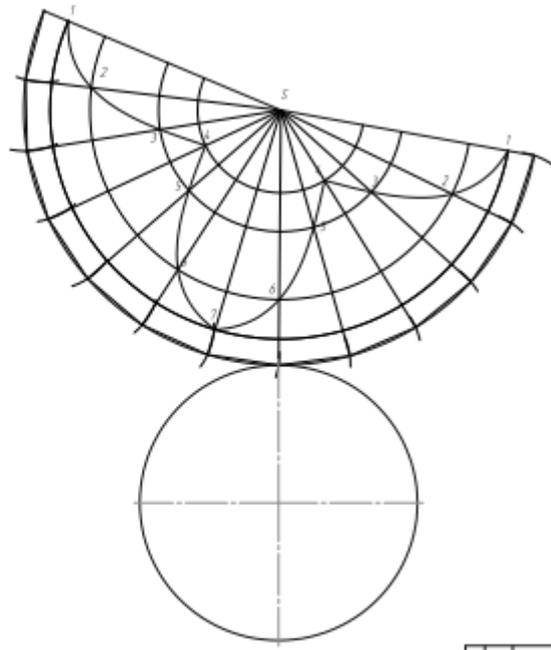
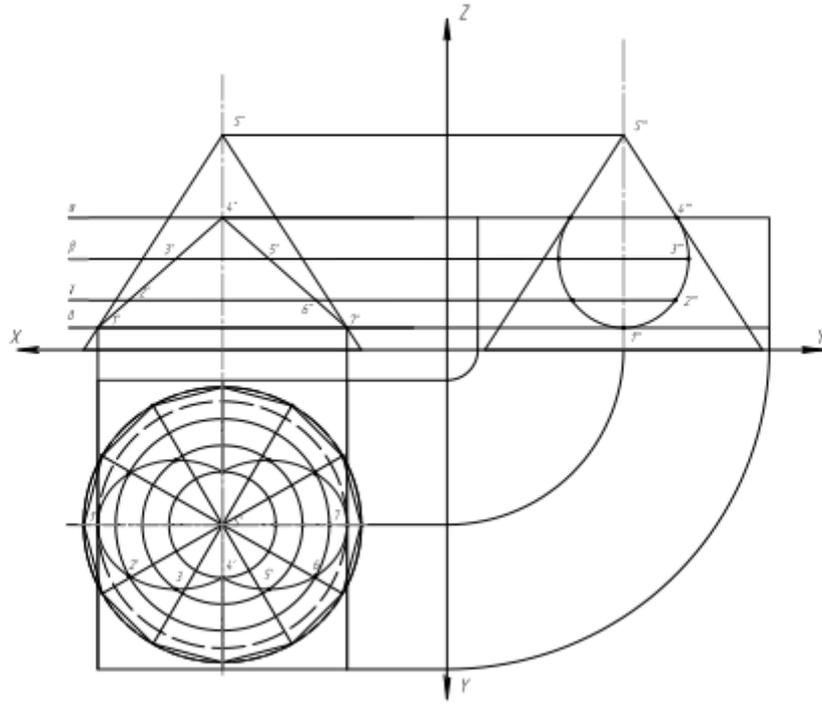
The drawing illustrates the intersection of two surfaces. It consists of several views:

- Plan View (Top):** Shows two overlapping circles. The intersection curve is marked with points 1 through 8. A vertical dashed line represents the axis of symmetry.
- Side View (Middle):** Shows the intersection curve as a smooth curve connecting two points on a horizontal line. Points 1 through 8 are marked along the curve.
- Development (Bottom):** Shows the surface unfolded into a flat shape, with the intersection curve as a smooth curve connecting two points on a horizontal line. Points 1 through 8 are marked along the curve.

The drawing is annotated with points 1 through 8 and letters a, b, g, y. The letters a, b, g, y are located on the left side of the drawing, indicating specific points or lines.

Имя	Лист	№ докум.	Дата	Лист	Пересечение поверхностей	Лист	Масса	Масштаб
Разработ								1:1
Проект						Лист	Листов	1
Г.контр.								
Н.контр.								
Испол.								

Копирован Формат А3



Лист 1	Лист 2	Лист 3	Лист 4	Лист 5	Лист 6	Лист 7	Лист 8	Лист 9	Лист 10	Лист 11	Лист 12	Лист 13	Лист 14	Лист 15	Лист 16	Лист 17	Лист 18	Лист 19	Лист 20	Лист 21	Лист 22	Лист 23	Лист 24	Лист 25	Лист 26	Лист 27	Лист 28	Лист 29	Лист 30	Лист 31	Лист 32	Лист 33	Лист 34	Лист 35	Лист 36	Лист 37	Лист 38	Лист 39	Лист 40	Лист 41	Лист 42	Лист 43	Лист 44	Лист 45	Лист 46	Лист 47	Лист 48	Лист 49	Лист 50	Лист 51	Лист 52	Лист 53	Лист 54	Лист 55	Лист 56	Лист 57	Лист 58	Лист 59	Лист 60	Лист 61	Лист 62	Лист 63	Лист 64	Лист 65	Лист 66	Лист 67	Лист 68	Лист 69	Лист 70	Лист 71	Лист 72	Лист 73	Лист 74	Лист 75	Лист 76	Лист 77	Лист 78	Лист 79	Лист 80	Лист 81	Лист 82	Лист 83	Лист 84	Лист 85	Лист 86	Лист 87	Лист 88	Лист 89	Лист 90	Лист 91	Лист 92	Лист 93	Лист 94	Лист 95	Лист 96	Лист 97	Лист 98	Лист 99	Лист 100
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	----------

				Вариант 8				
Имя	Фамилия	Группа	Дата	Пересечение поверхностей		Лист	Масштаб	Экземпляр
								11
Проверено						Лист	Листов	
Дата								