МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
21 января 2021 г., протокол № 6

Заведующий кафедрой

_________________________ В.И. Иванов

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ) ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

«Алгебра и аналитическая геометрия»

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-21

Тула 2021 год

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ
фонда оценочных средств (оценочных материалов)

Разработчик:

Ларин Н.В., доцент каф. ПМиИ, к.ф.-м.н.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

1 Описание фонда оценочных средств (оценочных материалов)

Фонд оценочных средств (оценочные материалы) включает в себя контрольные задания и (или) вопросы, которые могут быть предложены обучающемуся в рамках текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю). Указанные контрольные задания и (или) вопросы позволяют оценить достижение обучающимся планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), установленных в соответствующей рабочей программе дисциплины (модуля), а также сформированность компетенций, установленных в соответствующей общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

Полные наименования компетенций и индикаторов их достижения представлены в общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

2 Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)

Первый семестр

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)

1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами, их свойства. Выражение координат суммы векторов и произведения вектора на число.
2. Линейно зависимые системы векторов на плоскости и в пространстве. Геометрический смысл линейной зависимости.
3. Базисы на плоскости и в пространстве. Ортонормированные базисы. Разложение вектора по базису на плоскости и в пространстве.
4. Скалярное произведение двух векторов, его свойства и выражение через координаты сомножителей.
5. Векторное произведение двух векторов, его свойства и выражение через координаты сомножителей.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)

1.Следом квадратной матрицы A (обозначают trA) называют сумму ее элементов, стоящих на главной диагонали, т.е. $trA = a_{11} + a_{22} \dots + a_{nn}$. Доказать, что $tr(AB) = tr(BA)$.

2. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент умножить на число α?

3. Как изменится определитель, если каждый его элемент a_{ij} умножить на λ^{i-j}, где $\lambda \neq 0$.

4. Как изменится определитель порядка n если его строки переписать в обратном порядке?

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)

1. Сформулируйте определение вектора. Что такое начало и конец вектора?
2. Сформулируйте определение длины вектора.
3. Сформулируйте определение нулевого вектора. Какую длину и направление имеет нулевой вектор?
4. Сформулируйте определение коллинеарных векторов. Каким векторам коллинеарен нулевой вектор?
5. Сформулируйте определение равных векторов. Каким векторам равен нулевой вектор?

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.1)

1. Расстояние от точки до прямой на плоскости и от точки до плоскости в пространстве.
2. Угол между двумя прямыми на плоскости и в пространстве, между плоскостями в пространстве, между прямой и плоскостью.
3. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
4. Определение координат проекции точки на прямую на плоскости, проекции точки на плоскость в пространстве.
5. Определение координат пересечения прямой и плоскости в пространстве.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.2)

1. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ при различных значениях λ?

2. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A переставить i-ю и j-ю строки?

3. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A i-ю строку умножить на число $\lambda \neq 0$?

4. Выразите через определитель матрицы A определитель ее союзной матрицы.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.3)

1. Сформулируйте определение частного комплексных чисел. При каком условии частное комплексных чисел существует?
2. Сформулируйте определение операции возведения комплексного числа в целую степень.
3. Что такое комплексная плоскость? Что такое вещественная ось, мнимая ось?
Как на комплексной плоскости расположены комплексно-сопряжённые числа?
4. Сформулируйте определение модуля и аргумента комплексного числа. Что такое главное значение аргумента?
5. Сформулируйте определение тригонометрической формы комплексного числа. Какие комплексные числа можно представить в тригонометрической форме?

Второй семестр

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)

1. Смешанное произведение трех векторов, его свойства и выражение через координаты сомножителей.

2. Уравнение прямой на плоскости и плоскости в пространстве, ортогональных данному вектору и проходящих через данную точку.

3. Общее уравнение первого порядка на плоскости и в пространстве, его исследование.

4. Нормальное уравнение прямой на плоскости и плоскости в пространстве. Приведение общего уравнения первого порядка к нормальному виду.

5. Различные формы уравнений прямой в пространстве, переход из одной формы в другую.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)

1. Элементы матрицы равны ± 1. Доказать, что ее определитель — число четное.

2. Элементы матрицы третьего порядка равны ± 1. Может ли ее определитель быть равен 6?

3. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется кососимметрической, если ее элементы удовлетворяют условию $a_{ij} = -a_{ji}$. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.

4. Найти определитель порядка n, элементы которого заданы условиями:

а) $a_{ij} = \min(i, j)$; б) $a_{ij} = \max(i, j)$; в) $a_{ij} = |i - j|$.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)

1. Сформулируйте два определения суммы векторов (правило треугольника и правило параллелограмма). Для сложения каких векторов применимо каждое из них?

2. Сформулируйте определение линейной комбинации векторов. Что такое коэффициенты линейной комбинации?

3. Сформулируйте определение линейно зависимых и линейно независимых векторов.

4. Сформулируйте определение упорядоченной пары векторов.

5. Сформулируйте определение базиса на плоскости. Что такое координаты вектора относительно данного базиса?

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.1)

1. Эллипс, вывод канонического уравнения, исследование формы эллипса. Директрисы и эксцентриситет.

2. Гипербола, вывод канонического уравнения, исследование формы. Директрисы, асимптоты и эксцентриситет.

3. Парабола, вывод канонического уравнения, исследование формы.

4. Приведение общего уравнения второго порядка на плоскости к каноническому виду в случае центральных кривых. Инварианты кривой.

5. Приведение общего уравнения второго порядка на плоскости к каноническому виду в случае нецентральных кривых. Инварианты кривой.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.2)

1. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

2. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

и два решения этой системы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Найти систему линейных уравнений с теми же коэффициентами при неизвестных, как в данной системе и имеющую решением

а) сумму решений: $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n$;

б) произведение первого из данных решений на число λ: $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n$.

3. При каком условии линейная комбинация решений системы линейных неоднородных уравнений снова будет решением этой системы?

4. Что можно сказать о системе m линейных неоднородных уравнений с n неизвестными, если все столбцы ее расширенной матрицы кроме первого пропорциональны? (совместна или нет? Если совместна, то определена или не определена; можно ли указать значение каких-либо неизвестных?)

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.3)

1. Запишите формулу Эйлера.

2. Сформулируйте определение показательной формы комплексного числа. Какие комплексные числа можно представить в показательной форме?

3. Сформулируйте определение корня n-й степени из комплексного числа.

4. Сформулируйте определение вектора нормали к прямой.

5. Сформулируйте определение направляющего вектора прямой.

3 Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)

Первый семестр

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)

1. Цилиндрические поверхности. Уравнение цилиндрической поверхности. Цилиндры второго порядка.
2. Конические поверхности. Уравнение конической поверхности. Конусы второго порядка.
3. Поверхности вращения. Уравнение поверхности вращения относительно заданной оси. Поверхности вращения второго порядка.
4. Канонические уравнения эллипсоидов и гиперболоидов, исследование их формы по каноническому уравнению.
5. Канонические уравнения параболоида, исследование его формы по каноническому уравнению.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)

1. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \le \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\cdot(c_1^2+c_2^2+c_3^2)}$$

2. Даны ненулевой вектор $\bar{a}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\bar{x},\bar{a})=p$. (Подсказка: вектор характеризуется направлением и длиной; так как требуется найти любое решение, то одну из этих характеристик можно выбрать произвольно).

3. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Представить вектор $\bar{b}$ в виде суммы двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, так, чтобы вектор $\bar{x}$ был коллинеарен вектору $\bar{a}$, а вектор $\bar{y}$ был ортогонален вектору $\bar{a}$.

4. Даны два неколлинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Найти вектор $\bar{x}$, компланарный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и удовлетворяющий условиям $(\bar{a},\bar{x})=1$, $(\bar{b},\bar{x})=0$.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)

1. Сформулируйте определение алгебраического дополнения к элементу определителя *n*-го порядка. Приведите пример.
2. Сформулируйте определение верхней треугольной матрицы. Приведите пример.
3. Сформулируйте определение нижней треугольной матрицы. Приведите пример.
4. Сформулируйте определение диагональной матрицы. Приведите пример.
5. Сформулируйте определение вырожденной квадратной матрицы.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.1)

1. Разложение определителя по строке и по столбцу.
2. Теорема об определителе произведения матриц.
3. Обратная матрица и ее свойства. Вычисление обратной матрицы.
4. Обратимые матрицы, критерий обратимости.
5. Линейная зависимость и литейная независимость строк и столбцов матрицы. Критерий линейной зависимости строк (столбцов).

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.2)

1. Какие из следующих множеств образуют подпространства линейного пространства $\mathbb{R}^n$:

а) $M_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0\}$;
б) $M_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1\}$;
в) $M_3 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_n = 0\}$;
г) $M_4 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 = 1\}$;
д) $M_5 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 = \alpha_n\}$;
е) $M_6 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 = \alpha_n = 0\}$;
ж) $M_7 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 \cdot \alpha_n = 0\}$;
з) $M_8 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n = 0\}$
и) $M_9 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \ldots = 0\}$;
к) $M_{10} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n\}$;
л) $M_{11} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \ldots\}$;
м) $M_{12} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbb{Z},\ \forall i\}$.

2. Какие из следующих множеств образуют подпространство линейного пространства $V^{(3)}$:

а) множество свободных векторов пространства, координаты которых в декартовом базисе – целые числа;
б) множество свободных векторов пространства, параллельных оси Ox;
в) множество радиус-векторов, концы которых лежат на фиксированной прямой;
г) множество радиус-векторов, концы которых лежат в первой и третьей четверти;
д) множество векторов, образующих с данным ненулевым вектором угол α.

3. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n[x]$ рассматриваются множества многочленов, удовлетворяющих условиям:

а) $f(0) = 0$; б) $f(1) = 0$; в) $f(0) = f(1) = 0$.

4. Докажите, что каждое из этих подмножеств является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^n[x]$ и найдите его размерность.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.3)

1. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии линейной зависимости n векторов.
2. Сформулируйте теорему о связи линейной зависимости и компланарности трёх векторов.
3. Сформулируйте теорему о связи декартовых координат вектора на плоскости и его проекций на координатные оси.
4. Сформулируйте теорему о связи декартовых координат вектора в пространстве и его проекций на координатные оси.
5. Перечислите свойства скалярного произведения.

Второй семестр

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.1)

1. Прямоугольные матрицы, линейные операции над матрицами. Свойства линейных операций.
2. Операция транспонирования матриц, ее свойства. Сопряженные матрицы и их свойства.
3. Умножение матриц и свойства этой операции.
4. Определитель матрицы n-го порядка. Определитель транспонированной и сопряженной матриц.
5. Свойства определителя, связанные с перестановкой и линейными операциями над строками и столбцами матрицы.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.2)

1. Даны неколлинеарные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\bar{x},\bar{a},\bar{b}) = p$. (Подсказка: вектор характеризуется направлением и длиной; так как требуется найти любое решение, то одну из этих характеристик можно выбрать произвольно).
2. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$. Доказать, что $[\bar{a},\bar{b}]=[\bar{b},\bar{c}]=[\bar{c},\bar{a}]$.
3. Доказать, что если три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ попарно неколлинеарные и $[\bar{a},\bar{b}]=[\bar{b},\bar{c}]=[\bar{c},\bar{a}]$, то они удовлетворяют соотношению $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$.
4. Доказать, что если векторы $[\bar{a},\bar{b}]$, $[\bar{b},\bar{c}]$, $[\bar{c},\bar{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-1 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-1.3)

1. Сформулируйте определение невырожденной квадратной матрицы.

2. Сформулируйте определение обратной матрицы. При каком условии она существует и единственна?

3. Сформулируйте определение базисного минора матрицы. У всякой ли матрицы существует базисный минор? Какие строки и столбцы матрицы называются базисными? Что такое ранг матрицы? Чему равен ранг нулевой матрицы?

4. Запишите систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Как её записать в матричном виде? Что такое основная матрица системы; расширенная матрица системы? Какая система называется однородной; неоднородной? Какое решение однородной системы линейных алгебраических уравнений называется тривиальным; нетривиальным?

5. Запишите систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Какие переменные называются базисными; свободными? Сформулируйте определение фундаментальной совокупности решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.1)

1. Понятие ранга матрицы. Теорема о базисном миноре.
2. Критерий равенства нулю определителя.
3. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы.
4. Элементарные преобразования матриц. Вычисление ранга матрицы.
5. Общее понятие системы линейных алгебраических уравнений. Решения системы, совместные и несовместные системы, эквивалентность систем. Матричная запись системы линейных уравнений.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.2)

1. Докажите, что пересечение двух подпространств линейного пространства снова является подпространством этого пространства.

Пусть L_1 и L_2 – подпространства линейного пространства L. Суммой подпространств L_1 и L_2(обозначают L_1+L_2) называется подмножество L, элементы которого могут быть записаны в виде x_1+x_2, где $x_1\in L_1$, $x_2\in L_2$. Доказать, что L_1+L_2 тоже является подпространством линейного пространства L.

2. Доказать, что если а) некоторая подсистема данной системы векторов линейно зависима, то и сама система линейно зависима; б) если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.

3. Пусть x, y, z – линейно независимая система векторов. Будет ли линейно независимой система векторов $x-y$, $y-z$, $z-x$?

4. Пусть x, y, z – линейно независимая система векторов. Доказать, что векторы x, $x+y$, $x+y+z$ также линейно независимы.

Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ОПК-2 (контролируемый индикатор достижения компетенции ОПК-2.3)

1. Запишите выражение скалярного произведения векторов через их декартовы координаты на плоскости.

2. Запишите выражение скалярного произведения векторов через их декартовы координаты в пространстве.

3. Перечислите свойства векторного произведения.

4. Запишите выражение векторного произведения векторов через их правые декартовы координаты в пространстве.

5. Сформулируйте теорему о связи смешанного произведения векторов и объёма параллелепипеда.