


МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры  
«Прикладная математика и информатика»  
« 21 » января 2021 г., протокол № 6

Заведующий кафедрой

 В.И. Иванов

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ (ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ) ДЛЯ  
ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ И  
ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО  
ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**«Вариационное исчисление и оптимальное управление»**

**основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки

**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

с направленностью (профилем)

**Прикладная математика и информатика**

Форма обучения: очная

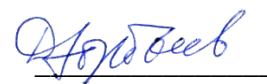
Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-21

Тула 2021 год

**ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ**  
**фонда оценочных средств (оценочных материалов)**

**Разработчик:**

Горбачев Дмитрий Викторович, профессор, д.ф.-м.н.  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

  
(подпись)

## **1. Описание фонда оценочных средств (оценочных материалов)**

Фонд оценочных средств (оценочные материалы) включает в себя контрольные задания и (или) вопросы, которые могут быть предложены обучающемуся в рамках текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине (модулю). Указанные контрольные задания и (или) вопросы позволяют оценить достижение обучающимся планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), установленных в соответствующей рабочей программе дисциплины (модуля), а также сформированность компетенций, установленных в соответствующей общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

Полные наименования компетенций и индикаторов их достижения представлены в общей характеристике основной профессиональной образовательной программы.

## **2. Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения текущего контроля успеваемости обучающихся по дисциплине (модулю)**

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-6 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-6.1)**

1. Введение в задачи вариационного типа.
2. Исторический экскурс, задача о брахистохроне.
3. Изопериметрическая задача, распространение лучей света.
4. Основные определения, слабый и сильный экстремумы
5. Простейшая задача вариационного исчисления. Постановка задачи.

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-9 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-9.1)**

1. Варианты простейшей задачи.
2. Интегралы уравнения Эйлера, решение задачи о брахистохроне.
3. Векторный случай, пример.
4. Задача со старшими производными, уравнение Эйлера–Пуассона, пример
5. Задача Больца. Постановка задачи Больца. Необходимое условие экстремума. Примеры

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-6 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-6.2)**

1. Достаточные условия слабого экстремума в простейшей задаче.
2. Условие Лежандра.
3. Условие Якоби. Примеры.
4. Достаточные условия сильного экстремума в простейшей задаче.
5. Примеры слабых и сильных экстремумов.

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-9 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-9.2)**

1. Изопериметрическая задача. Постановка задачи. Необходимое условие экстремума. Примеры.
2. Примеры изопериметрических задач.
3. Классическая изопериметрическая задача. Задача Дидоны.
4. Задача о цепной линии
5. Задача с подвижными границами. Постановка задачи с подвижными границами. Необходимое условие экстремума. Примеры.

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-6 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-6.3)**

1. Задача Лагранжа. Постановка задачи, связь с изученными задачами.
2. Теорема Эйлера–Лагранжа. Пример
3. Примеры задач Лагранжа.
4. Задача Дидоны с подвижными границами.
5. Задачи со вторыми производными. Вывод уравнения Эйлера–Пуассона

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-9 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-9.3)**

1. Введение в задачи оптимального управления. Исторический экскурс, задача о быстродействии.
2. Основные определения, управление, постановка задачи в лагранжевой форме.
3. Принцип максимума Понтрягина, пример
4. Некоторые задачи оптимального управления. Задача о быстродействии.
5. Аэродинамическая задача Ньютона. Другие примеры

**3. Оценочные средства (оценочные материалы) для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине (модулю)**

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-6 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-6.1)**

1. Уравнение Эйлера, вывод методом ломаных. Примеры.
2. Вывод уравнения Эйлера при помощи вариантов основной леммы.
3. Случай леммы Лагранжа.
4. Случай леммы Дюбуа-Реймона.
5. Примеры, доказательство экстремальности непосредственной проверкой

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-9 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-9.1)**

1. Условие Вейерштрасса. Примеры
2. Решить задачи:

$$1. \int_0^1 (x'^2 - x) dt - \frac{x^2(1)}{2} \rightarrow \text{extr}.$$

$$2. \int_0^1 (x'^2 + x^2) dt - 2x(1) \operatorname{sh} 1 \rightarrow \text{extr}.$$

$$3. \int_0^\pi (x'^2 + x^2 - 4x \sin t) dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \rightarrow \text{extr}.$$

$$4. \int_0^{\pi/2} (x'^2 - x^2) dt + x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4x\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \text{extr}.$$

$$5. \int_0^{\pi/2} (x'^2 - x^2 - 2x) dt - 2x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \text{extr}.$$

3. Решить задачи:

1.  $\int_0^1 x'^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0.$
2.  $\int_0^1 (x'^2 - x) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$
3.  $\int_0^1 (x'^2 + tx) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = -1, \quad x(1) = 0.$
4.  $\int_0^1 (x'^2 - t^2 x) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0.$
5.  $\int_1^e tx'^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(1) = 0, \quad x(e) = 1.$

4. Решить задачи:

1.  $\int_0^1 (x^{(3)})^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = 3, \quad x''(1) = 6.$
2.  $\int_0^e (t+1)tx''^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(1) = 0, \quad x'(1) = 1, \quad x(e) = e, \quad x'(e) = 2.$
3.  $\int_0^1 e^{-t}x''^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x(1) = e, \quad x'(1) = 2e.$
4.  $\int_0^1 (x''^2 + x'^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = \text{ch } 1, \quad x'(1) = \text{sh } 1.$
5.  $\int_0^{\pi/2} (x''^2 - x'^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

5. Задача с дифференциальными связями. Постановка задачи. Необходимое условие экстремума.

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-6 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-6.2)**

1. Задача с дифференциальными связями. Примеры, задача Чаплыгина
2. Решить задачи:

1.  $\int_0^1 x'^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^1 tx dt = 1, \quad x(0) = 0.$
2.  $\int_0^{\pi} x'^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^{\pi} x \sin t dt = 1, \quad x(0) = 0.$
3.  $\int_0^{\pi} x'^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^{\pi} x \sin t dt = 0, \quad x(0) = 1.$
4.  $\int_0^1 x dt \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^1 \sqrt{1+x'^2} dt = \frac{\pi}{2}, \quad x(1) = 0.$
5.  $\int_0^1 x dt \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^1 \sqrt{1+x'^2} dt = 0, \quad x(1) = \frac{\pi}{2}.$

3. Решить задачи:

1.  $\int_0^T x'^2 dt \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^T x dt = 1, \quad x(T) = \frac{1}{3}.$
2.  $T \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^T x'^2 dt = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x'(T) = 1.$
3.  $T \rightarrow \text{extr}, \quad \int_0^T x'^2 dt = 1, \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x'(T) = 0.$
4.  $\int_0^1 (x''^2 + x'^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \text{sh } 1, \quad x'(1) = \text{ch } 1.$
5.  $\int_0^1 (x''^2 + x'^2) dt \rightarrow \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \text{ch } 1, \quad x'(1) = \text{sh } 1.$

4. Прямые методы вариационного исчисления. Введение.
5. Конечно-разностный метод Эйлера. Примеры.

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-9 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-9.2)**

1. Прямые методы Ритца и Галеркина. Метод Ритца.
2. Метод Галеркина. Примеры
3. Решить задачи:
  1.  $T \rightarrow \min, \quad -3 \leq x'' \leq 1, \quad x(0) = 3, \quad x(T) = -5, \quad x'(0) = x'(T) = 0.$
  2.  $T \rightarrow \min, \quad 0 \leq x'' \leq 1, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x(T) = x'(T) = 0.$
  3.  $T \rightarrow \min, \quad |x''| \leq 2, \quad x(-1) = 1, \quad x(T) = -1, \quad x'(-1) = x'(T) = 0.$
  4.  $T \rightarrow \min, \quad -3 \leq x'' \leq 1, \quad x(0) = 3, \quad x(T) = -5, \quad x'(0) = x'(T) = 0.$
  5.  $T \rightarrow \min, \quad 0 \leq x'' \leq 1, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = -1, \quad x(T) = x'(T) = 0.$
4. Задача со старшими производными, пример.
5. Уравнение Эйлера–Пуассона, пример.

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-6 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-6.3)**

1. Задача Больца. Постановка задачи Больца.
2. Необходимое условие экстремума. Примеры.
3. Классическая изопериметрическая задача.
4. Задача Дидоны.
5. Задача о цепной линии.

**Перечень контрольных заданий и (или) вопросов для оценки сформированности компетенции ПК-9 (контролируемый индикатор достижения компетенции ПК-9.3)**

1. Задача с подвижными границами.
2. Постановка задачи с подвижными границами.
3. Принцип максимума Понтрягина.
4. Задача о быстродействии.
5. Аэродинамическая задача Ньютона.