МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 14 » января 2021 г., протокол № 5

с учетом изменений и дополнений,
утвержденных на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«17» июня 2021г., протокол №10,
вступающих в силу с 1 сентября 2021 года

Заведующий кафедрой
________________________ В.В.Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий по дисциплине (модулю)

"Математика"

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
08.03.01 Строительство

с направленностью (профилем)
Городское строительство и хозяйство

Форма обучения: заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-03-21
Тула 2021

Разработчик(и) методических указаний

Боницкая О.В., доцент, к.ф.м.н.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

Аналитическая геометрия в пространстве R^3

Векторная алгебра

Некоторые сведения из теории

Вектор – направленный отрезок.

Равенство

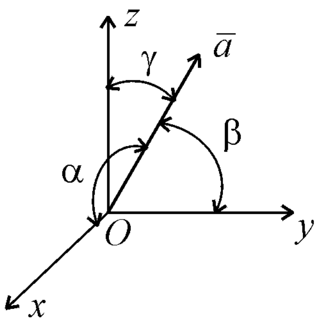
$$\vec{a} = (x,\, y,\, z) \tag{1}$$

означает, что $x, y, z -$ проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2}$$

позволяет по координатам вектора определить его модуль.



Если $\alpha, \beta, \gamma -$ углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то $cos\alpha,\ cos\beta,\ cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

$$x = |\,\vec{a}\,|cos\alpha, \quad y = |\,\vec{a}\,|cos\beta, \quad z = |\,\vec{a}\,|cos\gamma, \tag{3}$$

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1. \tag{4}$$

Если известны начало вектора $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и конец $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$, то координаты вектора находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1. \tag{5}$$

Если $\vec{a} = (x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2,\, y_2,\, z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2,\, y_1 \pm y_2,\, z_1 \pm z_2) \tag{6}$$

и $\alpha\vec{a} = (\alpha x_1,\, \alpha y_1,\, \alpha z_1)$, где $\alpha -$ любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Признак коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{7}$$

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом:

$$\left|\vec{i}\,\right| = \left|\vec{j}\,\right| = \left|\vec{k}\,\right| = 1.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по осям соответственно Ox, Oy, Oz в положительную сторону.

Любой вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{8}$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi, \tag{9}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}, \tag{10}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \tag{11}$$

т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{12}$$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{13}$$

$$cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{14}$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа этой силы определяется

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}. \tag{15}$$

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\varphi$, где $\varphi -$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3. вектор $\vec{c}$ образует с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \tag{16}$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|, \tag{17}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{18}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, в частности, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (19)$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке M, а вектор $\vec{a}$ идет из некоторой точки O в точку M, то вектор $\vec{a} \times \vec{F}$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки O:

$$m_{\circ}\vec{F} = \vec{a} \times \vec{F}. \qquad (20)$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right). \qquad (21)$$

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$$V = \pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}. \qquad (22)$$

Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0. \qquad (23)$$

Для векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (24)$$

Задача 1. На материальную точку действуют силы:

$$\boxed{\phantom{\vec{F}_1 = (2, -1, 1)}}, \quad \vec{F}_2 = (-1, 2, 2), \quad \vec{F}_3 = (1, 1, -2).$$

Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

Решение. Найдем равнодействующую

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2 - 1 + 1, -1 + 2 + 1, 1 + 2 - 2) = (2, 2, 1).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (4 - 2, 1 + 1, -1 - 0) = (2, 2, -1).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W = \vec{R} \cdot \vec{S} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7.$$

Задача 2. Дана сила $\vec{F} = (3,\ 4,\ -2)$ и точка ее приложения $A(2,\ -1,\ 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. По формуле (20) $m_{\circ}\vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$. Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ по формуле (5) имеет координаты $\vec{r} = (2,\ -1,\ 3)$, по формуле (19)

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 13\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Итак, $m_{\circ}\vec{F} = (-10,\ 13,\ 11)$. Модуль момента находим по формуле (2):

$$\left| m_{\circ}\vec{F} \right| = \sqrt{(-10)^2 + (13)^2 + (11)^2} = \sqrt{390} \approx 19{,}748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$\cos\alpha = \frac{-10}{19{,}748} = -0{,}506, \quad \cos\beta = \frac{13}{19{,}748} = 0{,}658, \quad \cos\gamma = \frac{11}{19{,}748} = 0{,}557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha = 120^{\circ}24', \qquad \beta = 48^{\circ}51', \qquad \gamma = 56^{\circ}9'.$$

Контроль: должно быть $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. У нас:

$$(-0{,}506)^2 + (0{,}658)^2 + (0{,}557)^2 = 0{,}999.$$

Задача 3. Написать разложение вектора $\vec{x} = (5,\ 16,\ 2)$ по векторам $\vec{p} = (2,\ 1,\ 0)$, $\vec{q} = (0,\ -2,\ 0)$, $\vec{r} = (-1,\ 5,\ 2)$.

Решение.

1. Разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{p} + \alpha_2\vec{q} + \alpha_3\vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 q_1 + \alpha_3 r_1 \\ x_2 = \alpha_1 p_2 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 r_2 \\ x_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 q_3 + \alpha_3 r_3. \end{cases}$$

2. С учетом числовых значений координат векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ и $\vec{x}$ получим систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} 2\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 - 1\cdot\alpha_3 = 5 \\ 1\cdot\alpha_1 - 2\cdot\alpha_2 + 5\cdot\alpha_3 = 16 \\ 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 5 + \alpha_3 \\ 2\alpha_2 = \alpha_1 + 5\alpha_3 - 16 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

3. Разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид:

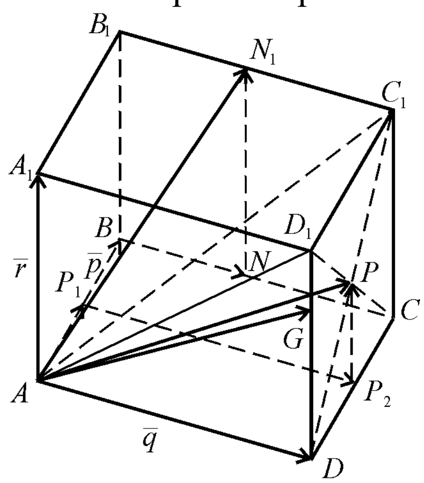
$$\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}$.

Задача 4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$ образуют базис. Разложить векторы $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN_1}$ по выбранному базису, если точка G делит ребро DD_1 в отношении 1:2; точка P – точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C; точка N_1 – середина ребра B_1C_1.

Решение.

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r}$,

$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}$.

Прямая и плоскость

Плоскость. Ее уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ - \tag{25}$$

общее уравнение плоскости.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) + C(z - z_\circ) = 0 \ - \tag{26}$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ,\, y_\circ,\, z_\circ)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A,\, B,\, C)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \ - \tag{27}$$

уравнение плоскости «в отрезках». Здесь $a,\, b,\, c\ -$ величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \ - \tag{28}$$

нормальное уравнение плоскости.

$$d = \frac{|\,Ax_\circ + By_\circ + Cz_\circ + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ - \tag{29}$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ,\, y_\circ,\, z_\circ)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \ - \tag{30}$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$, $A_{21}(x_2,\, y_2,\, z_2)$, $A_3(x_3,\, y_3,\, z_3)$.

Прямая. Ее уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \ - \tag{31}$$

общее уравнение прямой (прямая задана пересечением двух плоскостей).

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} = \frac{z - z_\circ}{p} \ - \tag{32}$$

каноническое уравнение прямой, где $M_\circ(x_\circ,\, y_\circ,\, z_\circ)$ – точка, принадлежащая прямой, $\vec{a} = (m,\, n,\, p)\ -$ направляющий вектор прямой (вектор, параллельный прямой).

$$\begin{cases} x = x_\circ + mt \\ y = y_\circ + nt \\ z = z_\circ + pt \end{cases} \quad - \qquad (33)$$

параметрические уравнения прямой.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad - \qquad (34)$$

уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2 + p_1{}^2} \cdot \sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2 + p_2{}^2}} \quad - \qquad (35)$$

угол между двумя прямыми, где $\vec{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ – направляющие векторы прямых.

$$sin\psi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + c^2}} \quad - \qquad (36)$$

угол между прямой и плоскостью, где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\left| \overrightarrow{A_1A_2} \ \overrightarrow{A_1A_3} \ \overrightarrow{A_1A_4} \right|$ – объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$, где $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ – координаты вершин пирамиды.

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \qquad (37)$$

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, $A_4(0, 8, 0)$. Найти:

1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
3) объем пирамиды V;
4) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$;
5) точку A_4', симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$;
6) точку A_4'', симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3.

Решение.

1) Угол между ребрами находим по формуле (35).

$\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = \left(3-2,\ 0-1,\ 1-(-1)\right) = (1,\ -1,\ 2)$ − направляющий вектор прямой A_1A_2;

$\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_4} = \left(0-2,\ 2-1,\ 0-(-1)\right) = (-2,\ 7,\ 1)$ − направляющий вектор прямой A_1A_4.

$$cos\varphi = \frac{1\cdot(-2) - 1\cdot 7 + 2\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+7^2+1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}} = -\frac{7}{18}.$$

2) Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через три точки $A_1(2,\ 1,\ -1)$, $A_2(3,\ 0,\ 1)$, $A_3(2,\ -1,\ 3)$, по формуле (30)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & 0-1 & 1+1 \\ 2-2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot 0 - (y-1)\cdot 4 + (z+1)\cdot(-2) = 0,$$

$$-4y + 4 - 2z - 2 = 0,$$

$4y + 2z - 2 = 0$ − уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

$\vec{n} = (0,\ 2,\ 1)$ − нормальный вектор плоскости;

$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_4} = (-2,\ 7,\ 1)$ − направляющий вектор прямой A_1A_4.

Находим угол ψ между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ по формуле (36)

$$sin\psi = \frac{0\cdot(-2) + 2\cdot 7 + 1\cdot 1}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+7^2+1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{54}} = 0{,}9114.$$

3) Находим объем пирамиды по формуле (37)

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1,\ -1,\ 2); \quad \overrightarrow{A_1A_3} = (0,\ -2,\ 4); \quad \overrightarrow{A_1A_4} = (-2,\ 7,\ 1).$$

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(-2+8-8-28) = -\frac{1}{6}(-30) = 15.$$

4) Расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$ находим по формуле (29).

$$d = \frac{|\,2\cdot 8 + 0 - 1\,|}{\sqrt{4+1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}69.$$

5) Чтобы найти точку A_4', симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, сделаем следующее.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через точку A_4 по формуле (32). За направляющий вектор прямой $\vec{a}=\vec{n}=(0,\,2,\,1)$ берем нормальный вектор плоскости, т.к. прямая перпендикулярна плоскости:

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-8}{2}=\frac{z-0}{1},\qquad \frac{x}{0}=\frac{y-8}{2}=\frac{z}{1}.$$

Составим параметрические уравнения этой прямой по формуле (33):

$$\begin{cases} x=0\\ y=2t+8\\ z=t. \end{cases}$$

Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью $A_1A_2A_3$

$$\begin{cases} x=0\\ y=2t+8\\ z=t\\ 2y+z-1=0 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} x=0\\ y=-6+8=2\\ z=t \end{cases}\quad\Rightarrow\quad 2(2t+8)+t-1=0,$$

$$5t+15=0,\qquad t=-3.$$

Получаем точку $M(0,\,2,\,-3)$; т.к. точка A_4' симметрична точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, то точка M является серединой отрезка A_4A_4', поэтому

$$x_M=\frac{x_4+x_4'}{2},\qquad 0=\frac{0+x_4'}{2},\qquad x_4'=0;$$

$$y_M=\frac{y_4+y_4'}{2},\qquad 2=\frac{8+y_4'}{2},\qquad y_4'=-4;$$

$$z_M=\frac{z_4+z_4'}{2},\qquad -3=\frac{0+z_4'}{2},\qquad z_4'=-6.$$

$$A_4'(0,\,-4,\,-6).$$

6) Чтобы найти точку A_4'', симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3, составим уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_1A_3 по формуле (26). За нормальный вектор плоскости $\vec{n}=\vec{a}=(0,\,-2,\,4)$ берем направляющий вектор прямой A_1A_3, т.к. плоскость перпендикулярна прямой.

$$0\cdot(x-0)-2\cdot(y-3)+4\cdot(z-0)=0,\quad -2y+16+4z=0,\quad y=2z-8=0.$$

Уравнение прямой A_1A_3 составляем по формуле (34).

$$\frac{x-2}{2-2}=\frac{y-1}{-1-1}=\frac{z+1}{3+1},\qquad \frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{4}.$$

Параметрические уравнения прямой A_1A_3:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1. \end{cases}$$

Находим точку N пересечения прямой A_1A_3 и плоскости:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1 \\ y - 2z - 8 = 0, \end{cases}$$

$$-2t + 1 - 2(4t - 1) - 8 = 0, \quad -10t - 5 = 0, \quad t = -\frac{1}{2},$$

$$x = 2, \quad y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2, \quad z = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3.$$

Итак, точка $N(2, 2, -3)$. Так как точка A_4'' симметрична точке A_4 относительно прямой A_1A_3, то точка N является серединой отрезка A_4A_4'', тогда

$$x_N = \frac{x_4 + x_4''}{2}, \quad 2 = \frac{0 + x_4''}{2}, \quad x_4'' = 4,$$

$$y_N = \frac{y_4 + y_4''}{2}, \quad 2 = \frac{8 + y_4''}{2}, \quad y_4'' = -4,$$

$$z_N = \frac{z_4 + z_4''}{2}, \quad -3 = \frac{0 + z_4''}{2}, \quad z_4'' = -6, \quad \text{точка } A_4''(4, -4, -6).$$

Аналитическая геометрия на плоскости

Некоторые сведения из теории

Прямая линия. Ее уравнение

$$Ax + By + C = 0 \ - \qquad (38)$$

общее уравнение прямой.

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} \ - \qquad (39)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ,\, y_\circ)$, $\vec{a} = (m,\, n)$ – вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) = 0 \ - \qquad (40)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ,\, y_\circ)$ с перпендикулярным вектором $\vec{n} = (A,\, B)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \ - \qquad (41)$$

уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1,\, y_1)$ и $M_2(x_2,\, y_2)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ - \qquad (42)$$

уравнение прямой в «отрезках», где $a,\, b$ – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \ - \qquad (43)$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\varphi$ и отрезком b – отсекаемым на оси Oy.

$$y - y_\circ = k(x - x_\circ) \ - \qquad (44)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ,\, y_\circ)$ с угловым коэффициентом k.

$$d = \frac{|\, Ax_\circ + By_\circ + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ - \qquad (45)$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ,\, y_\circ)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

$$\delta = \frac{Ax_\circ + By_\circ + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ - \qquad (45а)$$

отклонение точки $M_\circ(x_\circ,\, y_\circ)$ от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} \ - \qquad (46)$$

угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$.

$$k_1 = k_2 \ - \qquad (47)$$

условие параллельности прямых.

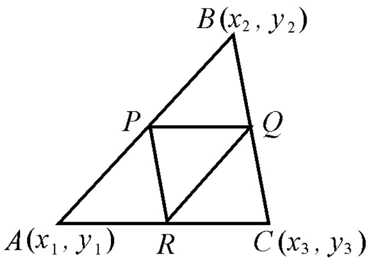
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \ - \tag{48}$$

условие перпендикулярности прямых.

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \ - \tag{49}$$

угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2.

<u>Задача 6.</u> Даны середины сторон треугольника $P(1,\ 2),\ Q(5,\ 1),\ R(-4,\ 3)$. Составить уравнения его сторон.



<u>1 способ.</u> Так как точки $P,\ Q,\ R$ являются серединами отрезков $AB,\ AC,\ BC$, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 6, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{array}{lll} x_1 = -8 & y_1 = 6 & \\ x_2 = 0 & y_2 = 0 & A(-8,\ 6), \quad B(10,\ -2), \quad C(0,\ 0). \\ x_3 = 10, & y_3 = -2, & \end{array}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение AB:

$$\frac{x+8}{10+8} = \frac{y-6}{-2-6}, \qquad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC:

$$\frac{x-10}{0-10} = \frac{y+2}{0+2}, \qquad x + 5y = 0.$$

Уравнение AC:

$$\frac{x+8}{0+8} = \frac{y-6}{0-6}, \qquad 3x + 4y = 0.$$

<u>2 способ.</u> Не определяя координат точек $A,\ B,\ C$, составим уравнение каждой из сторон треугольника ABC, как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника PQR параллельно противолежащей стороне.

Уравнение AB: прямая AB проходит через точку P параллельно вектору $\overrightarrow{QR} = (-9,\ 4)$. Используем уравнение (39).

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y-2}{4} \quad \Rightarrow \quad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC: прямая BC проходит через точку Q параллельно вектору $\overrightarrow{PR} = (-5,\ 1)$.

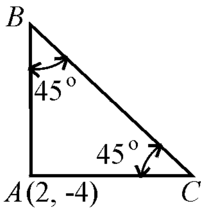
$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y+1}{1} \quad \Rightarrow \quad x + 5y = 0.$$

Уравнение AC: прямая AC проходит через точку R параллельно вектору $\overrightarrow{PQ} = (4,\ -3)$.

$$\frac{x+4}{4} = \frac{y-3}{-3} \quad \Rightarrow \quad 3x + 4y = 0.$$

Ответ: $4x + 9y - 22 = 0, \quad x + 5y = 0, \quad 3x + 4y = 0.$

Задача 7. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x + 3y - 5 = 0$ и вершину прямого угла $(2,\ -1)$.



$AB = BC$ (по условию), поэтому $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$, $k_{BC} = -\dfrac{2}{3}$ (по формуле (46)). Уравнения катетов AB и BC составляем по формуле (44): $y + 1 = k(x-2)$.

$$tg45^\circ = \left| \frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} \right|, \tag{49}$$

$$\frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} = \pm 1.$$

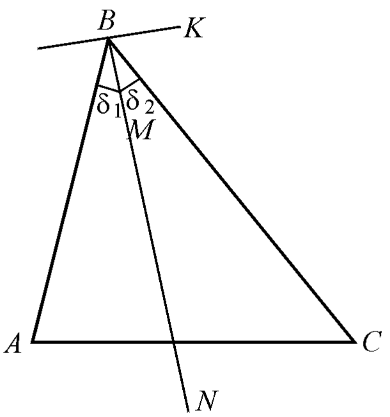
Решая эти уравнения, получим:

$$k = \frac{1}{5}, \quad y + 1 = \frac{1}{5}(x-2), \quad 5y + 5 = x - 2, \qquad x - 5y - 7 = 0.$$

$$k = -5, \quad y + 1 = -5(x-2), \quad y + 1 = -5x + 10, \quad 5x + y - 9 = 0.$$

Ответ: $x - 5y - 7 = 0, \qquad 5x + y - 9 = 0.$

Задача 8. В треугольнике с вершинами $A(3,\ -2)$, $B(-1,\ 1)$, $C(5,\ -7)$ найти биссектрису внутреннего угла $\angle ABC$.



1) Составим уравнения сторон угла $\angle ABC$, воспользовавшись формулой (41).

Сторона BA:

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-1}{-2-1}, \qquad -3x-4y+1=0.$$

Сторона BC:

$$\frac{x+1}{5+1}=\frac{y-1}{-4-1}, \qquad -8x-6y-2=0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Приравняем расстояния от произвольной точки биссектрисы $M(x,\, y)$ до сторон угла BA и BC, вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-8x-6y-2|}{\sqrt{8^2+6^2}}, \qquad \frac{|-3x-4y+1|}{5}=\frac{|-8x-6y-2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x-4y+1)=-8x-6y-2 \quad \text{и} \quad 2(-3x-4y+1)=-(-8x-6y-2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине B треугольника ABC:

$$x-y+3=0 \qquad \text{(а)}$$

и

$$x+y=0. \qquad \text{(б)}$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника BN отклонения вершин треугольника A и C имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла BK – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек A и C от прямой (а) по формуле (40,а):

$$\delta_A=\frac{3-(-2)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}>0, \qquad \delta_C=\frac{5-(-7)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{2}}>0,$$

следовательно, уравнение (а) – это уравнение прямой BK. Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника ABC при вершине B:

$$x+y=0.$$

Ответ: $x+y=0$.

Линии второго порядка

Окружность. Уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (50)$$

определяет окружность радиуса R с центром $C(a,\, b)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $a=b=0$, то уравнение окружности примет вид

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (51)$$

Общее алгебраическое уравнение второй степени

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

есть уравнение окружности, если $A=C\neq 0,\quad B=0,$ т.е.

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (52)$$

Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ - \qquad (53)$$

уравнение эллипса (канонический вид).

$$b^2=a^2-c^2, \qquad a>b. \qquad (54)$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1(-c,\, 0) \text{ и } F_2(c,\, 0). \qquad (55)$$

Начало координат $O-$ центр симметрии эллипса, а оси координат – оси симметрии эллипса. Точки $A_1(-a,\, 0)$, $A_2(a,\, 0)$, $B_1(0,\, -b)$, $B_2(0,\, b)$ называются вершинами эллипса, a и $b-$ большая и малая полуоси. Величина

$$\varepsilon=\frac{c}{a}<1 \qquad (56)$$

называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, т.к. выражается через отношение его полуосей

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,. \qquad (57)$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a=b$, т.е. $\varepsilon=0.$

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}\ - \qquad (58)$$

уравнения директрис.

Если фокусы эллипса расположены на оси Oy, то уравнение эллипса имеет тот же вид (58), но $b>a$. Фокусы имеют координаты: $F_1(0,\, -c)$ и $F_2(0,\, c)$. Уравнения директрис

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon}. \qquad (59)$$

<u>Гипербола.</u>

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; - \qquad (60)$$

каноническое уравнение гиперболы.

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad a < c. \qquad (61)$$

Фокусы имеют координаты $F_1(-c,\, 0)$ и $F_2(c,\, 0)$. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка $O -$ центр симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a,\, 0)$, $A_2(a,\, 0)$, которые называются ее действительными вершинами, а величина $a -$ действительной полуосью гиперболы. Точки $B_1(0,\, -b)$ и $B_2(0,\, b)$ называются мнимыми вершинами, а $b -$ мнимая полуось. Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (62)$$

являются асимптотами гиперболы, т.е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1. \qquad (63)$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\,. \qquad (64)$$

Если $a = b$, гипербола называется равносторонней. В этом случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \; - \qquad (65)$$

директрисы гиперболы.

Если уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad (66)$$

то асимптоты гиперболы:

$$x = \pm \frac{b}{a} y, \qquad (67)$$

фокусы $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$.

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon} \; - \tag{68}$$

уравнения директрис.

Парабола.

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \qquad (p > 0), \tag{69}$$

где p – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2},\, 0\right)$. Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

В ряде случаев рассматривают параболы:

а) $y^2 = -2px,\;\; F\left(-\frac{p}{2},\, 0\right)$ – фокус, $x = \frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (70)

б) $x^2 = 2py,\;\; F\left(0,\, \frac{p}{2}\right)$ – фокус, $y = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (71)

в) $x^2 = -2py,\;\; F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ – фокус, $y = \frac{p}{2}$ – уравнение директрисы. (72)

Для всех случаев $p > 0$.

Задача 9. Среди прямых параллельных прямой $2x + y = 0$, выделить касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Уравнение всякой прямой, параллельной данной, можно записать в виде

$$2x + y + c = 0.$$

Касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку, поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно иметь только один ответ.

Из уравнения прямой $y = -2x - c$.

$$\begin{cases} y = -2x - c \\ x^2 + y^2 = 1, \qquad x^2 + (-2x - c)^2 = 1, \qquad 5x^2 + 4cx + c^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда дискриминант равен нулю: $(4c)^2 - 4\cdot 5\cdot\left(c^2 - 1\right) = 0$, откуда $c = \pm\sqrt{5}$.

Итак, искомые касательные имеют уравнения

$$2x + y + \sqrt{5} = 0, \qquad\qquad 2x + y - \sqrt{5} = 0.$$

Задача 10. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

Решение. Делим на 225, получаем

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Отсюда следует по формуле (53), что $a=5,\ b=3.$ Из формулы (54):

$$c^2=a^2-b^2=25-9=16,\quad c=\pm 4.$$

По формуле (55): $F_1(-4,\ 0),\quad F_2(4,\ 0).$

Эксцентриситет (56): $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}.$

Уравнения директрис согласно (58): $x=\pm\frac{5}{4/5}=\pm\frac{25}{4}.$

Ответ: $a=5,\ b=3$; $F_1(-4,\ 0),\quad F_2(4,\ 0)$; $\varepsilon=\frac{4}{5}$; $x=\pm\frac{25}{4}.$

Задача 11. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая полуось $2\sqrt{6}$, а расстояние между фокусами $F_1F_2=8$.

Решение. $b=2\sqrt{6},\quad F_1F_2=2c=8,\quad c=4.$

По формуле (54): $a^2=b^2+c^2$, $a^2=\left(2\sqrt{6}\right)^2+4^2=40,\ a=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$

Уравнение эллипса согласно (53): $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1.$

Задача 12. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $4y\pm 3x=0$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать ее каноническое уравнение.

Решение. Уравнения асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$, согласно формуле (62): $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}.$ Кроме того $F_1F_2=2c=20,\ c=10.$ По формуле (61): $c^2=a^2+b^2,$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{3}{4}\\ a^2+b^2=100.\end{cases}$$

Решая ее, получаем $a=8,\ b=6.$ Следовательно, каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$

Задача 13. Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=-1.$ Найти координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

Решение. Фокусы данной гиперболы расположены на оси Oy.

$$a=1,\ b=3,\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}. \qquad (61)$$

Значит фокусы имеют координаты $F_1\left(0, -\sqrt{10}\right)$, $F_2\left(0, \sqrt{10}\right)$. Вершины $A_1(0, -1)$, $A_2(0, 1)$, $B_1(-3, 0)$, $B_2(3, 0)$. Эксцентриситет по формуле (64):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}, \quad \varepsilon = \sqrt{10}.$$

Уравнения асимптот: $x = \pm\frac{b}{a}y \Rightarrow x = \pm 3y$.

Уравнения директрис: $y = \pm\frac{b}{c} \Rightarrow y = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Задача 14. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(1, -2)$ и симметрична относительно оси Oy. Написать ее уравнение. Найти фокус и директрису.

Решение. Уравнение искомой параболы по формуле (72) имеет вид $x^2 = -2py$. Точка $A(1, -2)$ лежит на параболе. Подставляем координаты точки A в уравнение: $1 = -2p\cdot(-2) \Rightarrow p = \frac{1}{4}$. Следовательно, искомое уравнение будет $x^2 = -\frac{1}{2}y$ или $y = -2x^2$.

Фоку параболы: $F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$. Уравнение директрисы согласно (72): $y = \frac{1}{8}$.

Задача 15. На параболе $y^2 = 4x$ найти точки, расстояния которых от директрисы равно 5.

Решение. Уравнение директрисы данной параболы $x = -\frac{p}{2}$,
$2p = 4,\ p = 2,\ x = -1$. Тогда расстояние от оси Oy до искомой
$\ell = 4 - \frac{p}{2} = 5 - 1 = 4$ точки и это расстояние определит координату x данной точки, т.е. $x = 4$. Координату y найдем из уравнения параболы:

$y^2 = 4x, \quad y^2 = 4\cdot 4 = 16, \quad y = \pm 4.$

Итак, $M_1(4,4)$, $M_2(4, -4)$.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{ определитель системы,}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} -$$

вспомогательные системы.

1. Пусть $\Delta \neq 0$, тогда система (1) имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

2. Пусть $\Delta = 0$. Возможны два случая:

а) если хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система (1) не имеет решений;

б) если все вспомогательные определителя равны нулю, то система (1) либо не имеет решений, либо имеет их бесконечно много.

<u>Пример.</u> Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3(5-1) - 2(5+4) + 1(-1-4) = -11 \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение. Составим вспомогательные определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 11, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -33, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -22.$$

Тогда $x = -1,\ y = 3,\ z = 2.$

Матрицы и действия над ними. Решение систем линейных уравнений средствами матричного исчисления

Матрицей порядка $m \times n$ называется прямоугольная система чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right).$$

<u>*Сложение.*</u> Суммой матриц $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$, где $i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$, называется матрица $C = \left(c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right).$

Очевидно, что складывать можно матрицы только одного порядка.

<u>*Умножение матриц на число.*</u> Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ на число $k \neq 0$ называется матрица $C = \left(c_{ij}\right) = \left(ka_{ij}\right).$

<u>*Умножение матриц.*</u> Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ $(i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n)$ на матрицу $B = \left(b_{ij}\right)$ $(i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, k)$ называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)$ порядка $m \times k$, где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, то есть c_{ij} есть сумма произведений элементов $i-$ой строки матрицы A на соответствующие элементы $j-$ого столбца матрицы B.

Операция умножения матриц, вообще говоря, не коммутативна, т.е. $AB \neq BA.$

<u>*Обращение матриц.*</u> Пусть определитель квадратной матрицы A отличен от нуля. В этом случае матрица называется невырожденной. Для всякой невырожденной матрицы существует обратная матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E,$ где $E -$ единичная матрица.

1. Транспонируем матрицу A, т.е. заменим ее строки на столбцы с теми же номерами:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

2. Заменим все элементы матрицы A их алгебраическими дополнениями:

$$\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Обратная матрица находится по формуле: $A^{-1} = \frac{A}{|A|}$, где $|A|$ – определитель матрицы A.

Запишем систему (1) в виде $AX = B$, где $A = \left(a_{ij}\right)$ – матрица системы, которая предполагается невырожденной, B – вектор-столбец свободная членов, X – вектор-столбец неизвестных. Тогда

$$X = A^{-1}B. \tag{2}$$

Отыскание решения по формуле (2) и называют матричным методом решения системы (1).

Пример 1. Найти связь между координатами векторов $X = (x_1, x_2)$ и CX, где $C = f(A, B)$.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; f(A, B) = 2A^2 + 7AB.$$

Решение.

$$2A^2 = 2\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 25+3 & 5+1 \\ 15+3 & 3+1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 18 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 12 \\ 36 & 8 \end{pmatrix},$$

$$7AB = 7\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 70 \\ -21 & 42 \end{pmatrix},$$

$$C = f(a, b) = \begin{pmatrix} 21 & 82 \\ 15 & 50 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21x_1 + 82x_2 \\ 15x_1 + 50x_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Решить систему средствами матричного исчисления:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Решение. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$|a| = -11 \neq 0$, поэтому существует матрица A^{-1}. Найдем ее.

1. $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/11 & 1 & 3/11 \\ 9/11 & -1 & -4/11 \\ 5/11 & -1 & -1/11 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/11 & 1 & 3/11 \\ 9/11 & -1 & -4/11 \\ 5/11 & -1 & -1/11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20/11+9/11 \\ 45/11-12/11 \\ 25/11-3/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли

Определение. Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров (т.е. определителей k-го порядка, составленных из элементов, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов матрицы A).

Обозначения: $r(A),\ rangA.$

При вычислении ранга обычно используют следующие элементарные преобразования, которые не меняют его:

1) перемена местами двух строк или столбцов;
2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3) прибавление к строки (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на произвольной, отличное от нуля, число;
4) выбрасывание нулевой строки (столбца).

При этом стараются привести матрицу к треугольному или квазитреугольному виду.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y+\ldots+a_{1n}t = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y+\ldots+a_{2n}t = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x + a_{m2}y+\ldots+a_{mn}t = b_m. \end{cases} \qquad (3)$$

Пусть $A = \left(a_{ij}\right)$, где $i = 1, 2, \ldots, m,\quad j = 1, 2, \ldots, n$, – матрица системы.

Матрица

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называется расширенной матрицей системы.

Теорема Кронекера-Капелли. Система (3) совместна, т.е. имеет хотя бы одно решение, тогда и только тогда, когда $rangA = rangB.$

Пример. Установить совместность или несовместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 5y + 4z + 8t = 1 \\ 2x - y + 2z - t = 0 \\ 5x + 3y + 8z + t = 1. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & | & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & | & 0\\ 5 & 3 & 8 & 1 & | & 1\end{pmatrix}.$$

Вычтем из 3-й строки 1-ю:

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & | & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & | & 0\\ 4 & -2 & 4 & -2 & | & 0\end{pmatrix}.$$

Разделим элементы третьей строки на 2 и вычтем из полученной 3-й строки 2-ю:

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & | & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0\end{pmatrix}.$$

Вычеркнем 3-ю строку:

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & 3 & | & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1 & | & 0\end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $rangA = rangB = 2$, т.к., например, отличен от нуля минор второго порядка

$$\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix},$$

следовательно, система совместна. (заметим, что эта система имеет бесконечно много решений, т.к. ранг ее матрицы при этом меньше числа неизвестных).

Линейные операторы и их матрицы

Определение. Говорят, что в линейном пространстве R^n задан оператор A (преобразование A), если каждому вектору $x\in R^n$ поставлен в соответствие по некоторому закону единственный вектор $y\in R^n$.

Оператор A называется *линейным*, если

1) $A(x+y) = Ax + Ay,$

2) $A(kx) - kAx.$

Пусть $e_1, e_2, e_3 -$ базис в пространстве R^3. Так как $Ae_1, Ae_2, Ae_3 -$ векторы пространства R^3, то каждый из них можно единственным образом разложить по базису:

$$Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$$

$$Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3$$

$$Ae_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного оператора (линейного преобразования A в базисе e_1, e_2, e_3. Ее j-й столбец составлен из координат Ae_j. (Линейные операторы и их матрицы мы будем обозначать одинаковыми буквами).

Пусть $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in R^3$. Тогда $Ax = x_1'e_1 + x_2'e_2 + x_3'e_3$, где

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Над операторами можно производить действия сложения, умножения на число, умножения и обращения, при этом соответствующие действия производятся над их матрицами. Заметим, что произведение операторов AB есть последовательное применение оператора B, а затем A:
$(AB)x = A(BX)$.

Преобразование базиса. Изменение координат вектора при переходе к новому базису. Изменение матрицы оператора. Пусть в пространстве R^3 даны два базиса: $e_1,\ e_2, e_3$ и $e_1',\ e_2', e_3'$, связанные соотношениями

$$e_1' = b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + b_{31}e_3$$

$$e_2' = b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + b_{32}e_3$$

$$e_3' = b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3.$$

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от старого базиса $e_1,\ e_2, e_3$ к новому базису $e_1',\ e_2', e_3'$.

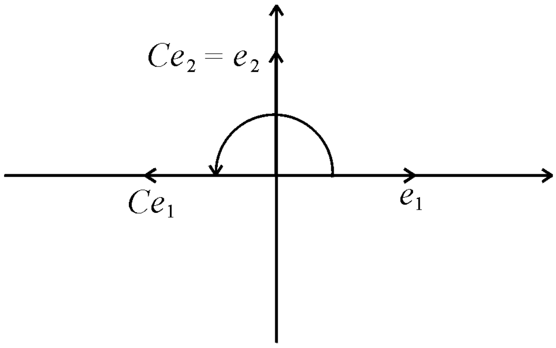
Пусть $x_1,\ x_2, x_3$ – координаты вектора x в базисе $e_1,\ e_2, e_3$, а $x_1',\ x_2', x_3'$ – его координаты в базисе $e_1',\ e_2', e_3'$. Тогда

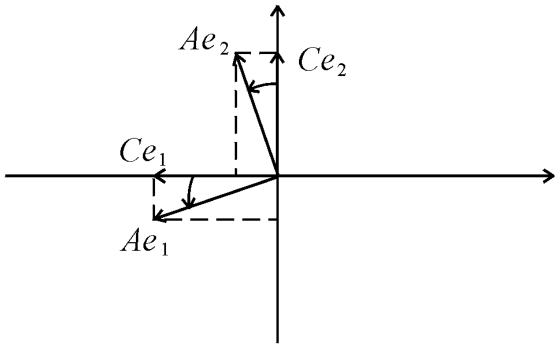
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть A – матрица оператора в старом базисе e_1, e_2, e_3, тогда матрица A' – этого оператора в новом базисе e_1', e_2', e_3' находится по формуле $A' = S^{-1}AS$.

<u>Пример 1.</u> Построить матрицу оператора A в пространстве R^2: A – оператор зеркального отражения относительно оси Oy и последующего поворота на угол $30°$ против часовой стрелки.

<u>Решение.</u> Для того, чтобы построить матрицу оператора, нужно знать, как он действует на базисные векторы. Сделаем чертежи. Пусть C – оператор зеркального отражения, B – оператор поворота. Тогда $A = BC$.





Из рисунков ясно, что

$$Ae_1 = B(Ce_1) = -\cos 30°\, e_1 - \sin 30°\, e_2 = -\sqrt{3}/2e_1 - 1/2e_2,$$

$$Ae_2 = B(Ce_2) = -\sin 30°\, e_1 + \cos 30°\, e_2 = -1/2e_1 + \sqrt{3}/2e_2,$$

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

(Напомним, что координаты вектора Ae_1 записываются в первый столбец матрицы A, а координаты вектора Ae_2 – во второй).

<u>Пример 2.</u> В базисе e_1, e_2 дан вектор $x = (4, -2)$. Записать матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2' и найти координаты вектора x в новом базисе, если $e_1' = -5e_1 - 3e_2$, $e_2' = 2e_1 - 7e_2$.

<u>Решение.</u> Имеем:

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -7/29 & -2/29 \\ -3/29 & -5/29 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/29 & -2/29 \\ -3/29 & -5/29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24/29 \\ -2/29 \end{pmatrix}, \qquad x = (-0{,}83, \ -0{,}07).$$

<u>Пример 3.</u> Найти матрицу A' линейного оператора A в базисе e_1', e_2', если известен ее вид в базисе e_1, e_2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1' = -5e_1 + 3e_2, \ e_2' = 2e_1 - 7e_2.$$

<u>Решение.</u>

$$B=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -7\end{pmatrix}, \qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}-7/29 & -2/29\\ -3/29 & -5/29\end{pmatrix},$$

$$A'=S^{-1}AS=\begin{pmatrix}-7/29 & -2/29\\ -3/29 & -5/29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7/29 & -2/29\\ -3/29 & -5/29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-14 & 23\\ 20 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Собственные значения и собственные векторы линейных операторов и их матриц

Определение. Ненулевой вектор $x\in R^n$ называется собственным вектором линейного оператора A (матрицы A), если существует такое число λ, что выполняется равенство $Ax=\lambda x$. Число λ называется собственным значением оператора A, отвечающим собственному вектору x.

Пусть $A=\left(a_{ij}\right),\quad i=1,2,\ldots,m,\quad j=1,2,\ldots,n$ – матрица оператора A в некотором базисе. Собственные значения λ_i являются решениями характеристического уравнения n-ой степени

$$|\,A-\lambda E\,|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0. \qquad (1)$$

Координаты собственного вектора $x_i=\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\right)$, соответствующего собственному значения λ_i, находятся из системы уравнений

$$\begin{cases}\left(a_{11}-\lambda\right)\xi_1+a_{12}\xi_2+\ldots+a_{1n}\xi_n=0\\ a_{21}\xi_1+\left(a_{22}-\lambda\right)\xi_2+\ldots+a_{2n}\xi_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\ldots+\left(a_{nn}-\lambda\right)\xi_n=0.\end{cases} \qquad (2)$$

Замечание. В качестве координат собственного вектора можно брать ненулевые алгебраические дополнения элементов любой строки матрицы $\left(A-\lambda_i E\right)$.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей A:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 8 & 9\end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение (1):

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 8 & 9-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \lambda^2-14\lambda+13=0.$$

Отсюда находим собственные значения $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 13.$ Для $\lambda_1 = 1$ составим систему уравнений (2):

$$\begin{cases} 4\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ 8\xi_1 + 8\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечно много решений $\xi_1 = t,\ \xi_2 = -t,$ где t – произвольное число. Поэтому в качестве собственного вектора можно взять, например, вектор $x_1 = (1,\ -1).$ (Все собственные векторы, соответствующие собственному значению 1, будут иметь вид $t(1,\ -1)$ и будут лежать на одной прямой, которая называется собственным направлением преобразования A).

Для $\lambda_2 = 13$ аналогично получим:

$$\begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ 8\xi_1 - 4\xi_2 = 0, \end{cases} \lambda_1 = 1$$

т.е. $\xi_2 = 2\xi_1$. Полагая $\xi_1 = t$, получаем $\xi_2 = 2t$. В качестве собственного вектора возьмем, например, $x_2 = (1,\ 2).$

Можно поступить и по-другому. Для $\lambda_1 = 1$

$$A - 1E = \begin{pmatrix} 5-1 & 4 \\ 8 & 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

В качестве координат собственного вектора x_1 возьмем алгебраические дополнения элементов первой строки этой матрицы: $x_1 = (8,\ -8).$ Для $\lambda_2 = 13$

$$A - 13E = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

и $x_1 = (-4,\ -8).$

Квадратичные формы. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка

Определение. Квадратичной формой $F(x,\ y)$ называется однородный многочлен второй степени относительно $x,\ y$:

$$F(x,\ y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы. Заметим, что матрица A является симметрической, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$, поэтому ее собственные значения действительны, а соответствующие собственные векторы ортогональны.

Пусть

$$g_1 = b_{11}e_1 + b_{21}e_2,$$
$$g_2 = b_{12}e_1 + b_{22}e_2$$

– нормированные собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям λ_1, λ_2 в ортонормированном базисе e_1, e_2. Векторы g_1, g_2, в свою очередь, образуют ортонормированный базис. Матрица S перехода от базиса e_1, e_2 к базису g_1, g_2 определяет поворот системы координат на угол φ против часовой стрелки, который можно определить из равенства

$$S = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы сохранить ориентацию осей координат, матрицу S следует строить так, чтобы ее определитель был равен $+1$. Если $|S| = -1$, то нужно поменять местами строки (поменять местами векторы g_1, g_2).

Формулы преобразования координат при переходе к новому базису имеют вид

$$x = b_{11}x_1 + b_{12}y_1,$$
$$y = b_{21}x_1 + b_{22}y_1.$$

При помощи этих формул квадратичная форма $F(x, y)$ преобразуется к так называемому *каноническому виду*

$$F(x_1, y_1) = \lambda_1 {x_1}^2 + \lambda_2 {y_1}^2.$$

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = b,$$

левой частью которого является квадратичная форма. Повторяя приведенные выше рассуждения, мы приведем это уравнение к *каноническому виду*, из которого легко определяется тип соответствующей кривой.

Замечание. Если в уравнении второго порядка есть линейные члены, то кроме преобразования поворота необходимо осуществить еще сдвиг системы координат (для этого следует выделить полные квадраты по переменным x_1, y_1).

<u>Пример</u> Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка, построить ее, указать угол поворота: $-x^2 - y^2 + 4xy = 1$.

<u>Решение.</u> Запишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (-1-\lambda)^2 - 4 = 0, \; \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = -3.$$

Определим собственные векторы. Для $\lambda_1 = 1$ матрица $A - \lambda_1 E$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим собственный вектор $e_1 = (-2, -2)$. Для $\lambda_2 = -3$

$$A - (-3)E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

и $e_2 = (2, -2)$. Нормируем собственные векторы:

$$g_1 = e_1 / |e_1| = \left(-2/\sqrt{8},\ -2/\sqrt{8}\right) = \left(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}\right),$$

$$g_2 = e_2 / |e_2| = \left(2/\sqrt{8},\ -2/\sqrt{8}\right) = \left(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}\right).$$

Запишем матрицу перехода к новому базису (матрицу оператора поворота):

$$S = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Угол поворота равен $225°$. Форму преобразования координат имеют вид

$$x = -1/\sqrt{2}x_1 + 1/\sqrt{2}y_1,$$

$$y = -1/\sqrt{2}x_1 - 1/\sqrt{2}y_1.$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$-\left(-1/\sqrt{2}x_1 + 1/\sqrt{2}y_1\right)^2 - \left(-1/\sqrt{2}x_1 - 1/\sqrt{2}y_1\right)^2 +$$

$$+ 4\left(-1/\sqrt{2}x_1 + 1/\sqrt{2}y_1\right)\left(-1/\sqrt{2}x_1 - 1/\sqrt{2}y_1\right) =$$

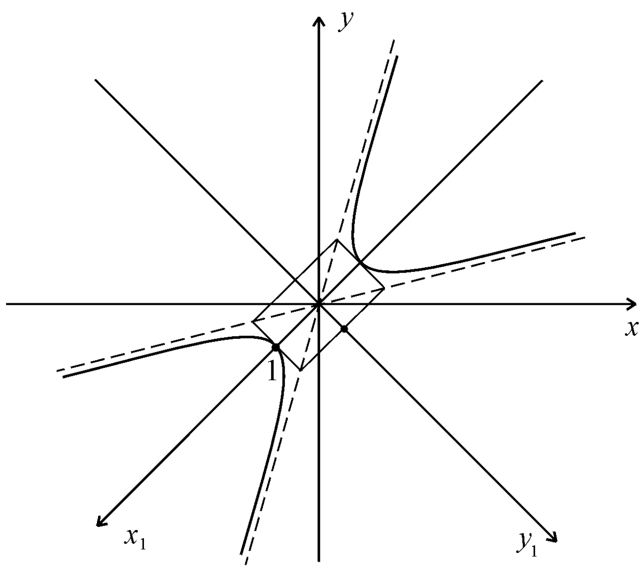
$$= -1/2\left(y_1{}^2 - 2x_1y_1 + x_1{}^2\right) - 1/2\left(x_1{}^2 + 2x_1y_1 + y_1{}^2\right) +$$

$$+ 2\left(x_1{}^2 - y_1{}^2\right) = x_1{}^2 - 3y_1{}^2 = 1.$$

Итак, мы получили каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x_1{}^2}{1} - \frac{y_1{}^2}{1/3} = 1.$$

Построим ее.



ПРЕДЕЛЫ

1. Пределы

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \dots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число u_n. Тогда говорят, что определена последовательность чисел $u_1, u_2, u_3, \dots$ или, короче, последовательность $\{u_n\}$. Отдельные числа u_n называются ее элементами.

Определение 1.1. Число a называется пределом последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется зависящее от него натуральное число N такое, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство: $|u_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Определение 1.2. Говорят, что функция $f(x)$ стремится к A $(f(x) \to A)$ при стремлении к a $(x \to a)$, где A и a – числа, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta(M)$, где M – произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.

1. Если существуют конечные $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

$$а)\ \lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x)$$

$$б)\ \lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$в)\ \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \qquad \left(\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0\right).$$

2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = 0$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty,$$

если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взять соответственно две последовательности: $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения. Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 0^0; 1^∞; ∞^0.

<u>Пример 1.1.</u> При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x\to\infty$ или n при $n\to\infty$ для последовательностей (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$) оба члена соотношения полезно предварительно разделить на x^m или, соответственно, n^m где m – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-1}{5x^4+3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}}=\frac{3+0+0}{5+0+0}=\frac{3}{5},$$ старшая степень $m=4$, делится на x^4.

б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{9n^4-2n^3+2}+4\sqrt[3]{8n^3+21}}{\sqrt[4]{n^4-3}+2\sqrt{4n^4+9n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{n^4\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+4\cdot\sqrt[3]{n^3\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^4\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{n^4\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 \cdot \sqrt{\left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4}\right)} + 4n \cdot \sqrt[3]{\left(8 + \frac{21}{n^3}\right)}}{n \cdot \sqrt[4]{\left(1 - \frac{3}{n^4}\right)} + 2n^2 \cdot \sqrt{\left(4 + \frac{9}{n^3}\right)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot \sqrt{\left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4}\right)} + \frac{4}{n} \cdot \sqrt[3]{\left(8 + \frac{21}{n^3}\right)}}{\frac{1}{n} \cdot \sqrt[4]{\left(1 - \frac{3}{n^4}\right)} + 2 \cdot \sqrt{\left(4 + \frac{9}{n^3}\right)}} = \frac{3 \cdot \sqrt{9 - 0 + 0} + 0 \cdot \sqrt[3]{8 + 0}}{0 \cdot \sqrt[4]{1 - 0} + 2 \cdot \sqrt{4 + 0}} = \frac{9}{4}$$

(неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, старшая степень $m = 2,$ делится на n^2).

в) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x+1)\left[\sqrt{x^2 + 4x + 5} - \sqrt{x^2 + 4x + 7}\,\right] = \left[\infty \cdot (\infty - \infty)\,\right] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(3x+1)\left[\sqrt{x^2 + 4x + 5} - \sqrt{x^2 + 4x - 7}\,\right] \cdot \left[\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 + 4x - 7}\,\right]}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 + 4x - 7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(3x+1)\left(x^2 + 4x + 5 - x^2 - 4x + 7\right)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 + 4x - 7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(3x+1) \cdot 12}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 + 4x - 7}} \left(\frac{:x}{:x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{12\left(3 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2}}} = \frac{12 \cdot 3}{1 + 1} = 18.$$

<u>Пример 1.2.</u> Если $P(x)$ и $Q(x)$ – целые многочлены $x,$ $P(a) \neq 0$ или $Q(a) \neq 0,$ то предел рациональной дроби P / Q при $x \to a$ находится непосредственно. Если же $P(a) = Q(a) = 0$ (неопределенность $\frac{0}{0}$), то дробь P / Q рекомендуется сократить один или несколько раз на $(x - a)$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2 + x - 2\right)}{(x-1)\left(x^3 + x^2 + x - 3\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3} =$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1+2}{1+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

<u>Пример 1.3.</u> Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность $\frac{0}{0}$).

$$a)\ \lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt[3]{5-x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to4}\frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{9-5-x}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\lim_{x\to4}\frac{1}{3+\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{1-5+x}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{x-4}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to4}\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}(1+1+1)=-\frac{1}{2}.$$

$$б)\ \lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(x^2-7x-8\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to8}\frac{x-8}{(x-8)(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim_{x\to8}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\frac{1}{9\cdot12}=\frac{1}{108}.$$

<u>Пример 1.4.</u> При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

следствием которого являются пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arxtgx}{x}=1.$$

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left[ctg^2 3x-ctg^2 5x\right]\cdot\frac{tg^2 4x\cdot\arcsin^2 x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x}-\frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x}\right]\cdot\frac{\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2\cdot 16x^2\cdot\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2\cdot x^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}16x^2\cdot\left[\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x}-\frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x}\right]\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos^2 3x\cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 9x^2}-\frac{\cos^2 5x\cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2\cdot 25x^2}\right]\cdot 1^2\cdot 1^2=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{16}{9}\cos 3x-\frac{16}{25}\cos^2 5x\right]=\frac{16}{9}\cdot 1-\frac{16}{25}\cdot 1=\frac{256}{225}.$$

$$б)\ \lim_{x\to 0}\frac{tg^2 2x\cdot\sqrt{1-\cos 4x}}{x^2\cdot\arcsin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2\cdot 4x^2\cdot\sqrt{2\sin^2 2x}}{x^2\cdot\left(\frac{\arcsin 3x}{3x}\right)\cdot 3x}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\cdot 2x}{3x}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

<u>Пример 1.5.</u> При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда $x\to a$ и $a\neq 0$, рекомендуется предварительно провести замену $x-a=y$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cos\frac{\pi\cdot x}{6}}{x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=(x-3=y,\ y\to 0\ \text{ при }\ x\to 3)=$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\cos\frac{\pi\cdot(y+3)}{6}}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot y}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}} =$$

$$= -\frac{\pi}{6}\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}} = -\frac{\pi}{6}\cdot 1 = -\frac{\pi}{6}.$$

<u>Пример 1.6.</u> При вычислении пределов вида $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = c$ необходимо иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы $A = \lim_{x\to a} f(x),\ B = \lim_{x\to a}\varphi(x),$ то $c = A^B\ \ (A > 0);$
2) если $\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 1,\ \ \lim_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty,$ то вопрос о нахождении предела c решается непосредственно;
3) если $\lim_{x\to a} f(x) = 1,\ \ \lim_{x\to a}\varphi(x) = \infty,$ то следует воспользоваться «вторым замечательным пределом»: $\lim_{x\to a}\left(1+g(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}} = e,$ где $g(x)\to 0$ при $x\to a$ и $e = 2{,}718\ldots$.

а) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}} = 0,$ т.к.

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1} = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1} = -\infty.$

б) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{x+3} = 4^3 = 64,$ т.к. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\cdot 4 = 4,$ $\lim_{x\to 0}(x+3) = 3.$

в) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x} = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{2x} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}\cdot\frac{7}{3x-6}\cdot 2x} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x}{3x-6}} = e^{14/3}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{3}{x-3}} = \left(1^{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 3}\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{3}{x-3}} =$

$$= \lim_{x\to 3}\left\{\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{1}{6-2x}}\right\}^{\frac{(6-2x)\cdot 3}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{18-6x}{x-3}} = e^{-6}.$$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

<u>Определение 2.1.</u> Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,$ то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в окрестности точки $x = a$ (при $x \to a$).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть также бесконечно малая при $x \to a$.

<u>Определение 2.2.</u> Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = c,$ где c – некоторое число, отличное от нуля, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$, если $c = 0,$ то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$.

Бесконечно малая $f(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g^n(x)} = c, \qquad 0 < |c| < +\infty.$$

<u>Пример 2.1.</u> При $x \to 0$ определить порядок малости функции $tgx - sinx$ относительно x.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - sinx}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx\left(\frac{1}{cosx}-1\right)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{sinx(1-cosx)}{x^n\, cosx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2sinx\cdot sin^2\frac{x}{2}}{x^n\, cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{4sin^3\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}}{x^n\, cosx} = 4\lim_{x\to 0}\frac{sin^3\frac{x}{2}}{x^n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{cos\frac{x}{2}}{cosx} =$$

$$= 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{x^n}\cdot 1 = 4\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot 2^n} = \frac{4}{2^n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n}.$$

Этот предел будет равен константе $c \neq 0$ при $n = 3$, следовательно, функция $tgx - \sin x$ имеет порядок малости $n = 3$ относительно x при $x \to 0$.

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

Пример 2.2. Определить порядок малости относительно x при $x \to 0$ суммы $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$.

Слагаемое $\sqrt[3]{x^2}$ имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x, а слагаемое $\sqrt{x^3}$ – порядок $\frac{3}{2}$, следовательно, сумма имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x при $x \to 0$.

Определение 2.3. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$: $f(x) \sim g(x)$.

Например, при $x \to 0$ будем иметь:

$$\sin x \sim x, \quad tgx \sim x, \quad \arcsin x \sim x, arctgx \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x\cdot \ln a \ (a \neq 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

Пример 2.3.

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{3^{4tg^2x} - 5^{3\arcsin^2 3x}}{3\sin^2 4x + 7arctg^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3^{4tg^2x} - 1\right) - \left(5^{3\arcsin^2 x} - 1\right)}{3\cdot(4x)^2 + 7\cdot(x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4tg^2x\cdot \ln 3 - 3\arcsin^2 3x\cdot \ln 5}{55x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4\ln 3\cdot x^2 - 3\ln 5\cdot (3x)^2}{55x^2} =$$

$$= \frac{4\ln 3 - 27\ln 5}{55}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4\,arcsin\,2x}{3tg8x}\right)^{\frac{ln(1+3x)}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4\cdot 2x}{3\cdot 8x}\right)^{\frac{3x}{x}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3} = \dfrac{1}{27}.$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(3-5x)-ln(3+7x)}{2\,sin\,x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\left[3\left(1-\frac{5}{3}x\right)\right]-ln\left[3\left(1+\frac{7}{3}x\right)\right]}{2x} =$

$$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\,3+ln\left(1-\frac{5}{3}x\right)-ln\,3-ln\left(1+\frac{7}{3}x\right)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}x}{2x} = -2.$$

Определение 2.4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$.

Подобно тому, как .то сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

Пример 2.4. Пусть $x\to\infty$. Определить порядок бесконечно большой $f(x)=\dfrac{x^5}{x+2}$ по сравнению с x.

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^5}{x+2}:x^n\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^n(x+2)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}+x^n\cdot 2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}} = 1$$

при $n=4$.

Определение 2.5.

1) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x\to\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{c\cdot x^{\alpha}}=1,$ где c и α – константы, тогда функция $y=cx^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x\to\infty$.

2) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x\to a$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{c\cdot(x-a)^{\alpha}}=1,$ где c и α – константы, тогда функция $y=c(x-a)^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x\to a$.

Пример 2.5.
а) Найти асимптотику (асимптотическое представление) функции $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to\infty$.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\sim\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot x^{1/2}},$$

следовательно, асимптотикой функции $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to\infty$ является функция $\frac{1}{2}x^{-1/2}$; $c=\frac{1}{2}$; $\alpha=-\frac{1}{2}$.

б) Найти асимптотику функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x\to 1$.

При $x\to 1$ функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ является бесконечно большой:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{3(1-x)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}(1-x)^{1/3}}.$$

Асимптотикой в данном случае является функция $y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(1-x)^{-1/3}$.

в) Найти асимптотику функции $f(x)=x^3-3x+2$ при $x\to 1$.

В данном случае при $x\to 1$ функция $f(x)$ является бесконечно малой; $f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\sim 3(x-1)^2$.

Получаем асимптотику $y=3(x-1)^2$; $c=3$; $\alpha=2$.

3. Непрерывность функции.

Определение 3.1. Если $x<a$ и $x\to a$, то условно пишут $x\to a-0$, аналогично, если $x>a$ $x\to a$, то $x\to a+0$. Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ называют соответственно пределом слева функции $f(x)$ в точке a и пределом справа функции $f(x)$ в точке a (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство: $f(a-0)=f(a+0)$.

Определение 3.2. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке a, если

1) она определена в этой точке;

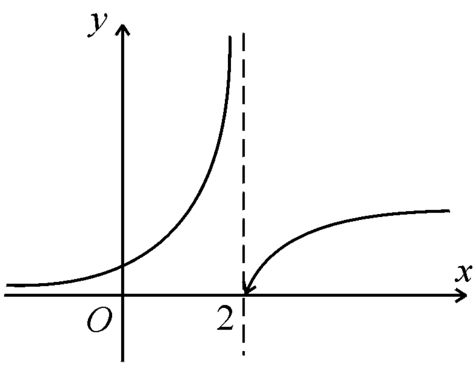
2) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a).$

Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются точками разрыва.

<u>Пример 3.1.</u>

а) Найти точки разрыва функции $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$, пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.

Функция $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ имеет разрыв в точке $x = 2,$ т.к. она в этой точке не определена. При этом:



$$\lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

б) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y = \frac{2^{\frac{1}{x+3}} + 4x - 8}{2^{\frac{1}{x+3}} + 4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка $x = -3,$ т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to -3-0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = \frac{2^{-\infty} - 12 - 8}{2^{-\infty} + 4} = \frac{0 - 20}{0 + 4} = -5;$$

$$\lim_{x\to -3+0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = 1, \text{ т.к. при } x \to -3 + 0 \text{ имеем:}$$

$$2^{1/(x+3)} + 4x - 8 \sim 2^{1/(x+3)}; \qquad 2^{1/(x+3)} + 4 \sim 2^{1/(x+3)}.$$

Величина скачка $\Delta = 1 - (-5) = 6.$

в) Найти точки разрыва, величину скачка Δ и построить график функции

$$y = \begin{cases} -3x, & x \le 0 \\ 4\sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \dfrac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

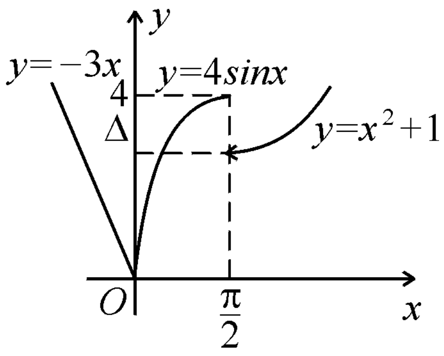
Данная функция непрерывна для $x \in (-\infty;\ \ 0) \cup \left(0;\ \ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ \ +\infty\right)$.

Исследуем только точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$, т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (-3x) = 0; \qquad \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (4 \sin x) = 0;$$

$f(0) = -3x\Big|_{x=0} = 0$, следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} (4 \sin x) = 4; \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4;$$



$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \left(x^2 + 1\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1 = 3{,}467,$$

следовательно, точка $x = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва.

Величина скачка

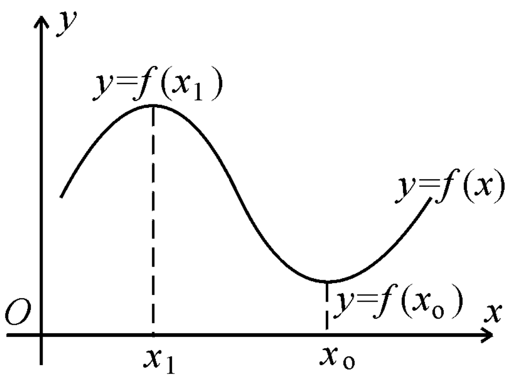
$$\Delta = 4 - \left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right) = 3 - \frac{\pi^2}{4} \approx 0{,}533.$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек x_1, x_2, принадлежащих данному интервале (отрезку), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ при $a < x < b,$ то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a;\ b]$.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками x (где $f'(x) = 0$ или же $f'(x)$ не существует).



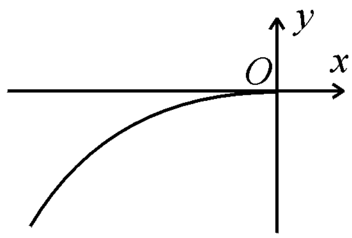
Если существует такая двусторонняя окрестность точки x_o, что для всякой точки $x \neq x_o$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_o)$, то точка x_o называется точкой минимума функции $y = f(x)$, а число $f(x_o)$ – минимумом функции $y = f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_1$ некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то x_1 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, а $f(x_1)$ – максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции – экстремумом функции. Если x_o – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_o) = 0$ или же $f'(x_o)$ не существует (*необходимое условие существования экстремума*). Обратное утверждение не верно: точки, в которых $f'(x_o) = 0$ или $f'(x_o)$ не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$.

Достаточный признак существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ следующий: если существует такая окрестность $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ критической точки x_o, что $f'(x) > 0$ при $x_o - \delta < x < x_o$ и $f'(x) < 0$ при $x_o < x < x_o + \delta$, то x_o – точка максимума функции $f(x)$; если же $f'(x)<0$ при $x_o-\delta<x<x_o$ и $f'(x)>0$ при $x_o<x<x_o+\delta$, то x_o – точка минимума функции $f(x)$. Если, наконец, найдется такое положительное число δ, что $f'(x)$ сохраняет неизменный знак при $x_o-\delta<x<x_o+\delta$, то точка x_o не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Наименьшее (*наибольшее*) *значение* непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a;\, b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a;\, b]$.

Пример 1.1. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = x\cdot\sqrt{-5x}.$$



Область существования: $-5x\ge 0 \;\Rightarrow\; x\le 0$.

Находим критические точки:

$$y' = \sqrt{-5x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{-5x}}\cdot(-5) = \sqrt{-5x} - \frac{5x}{2\sqrt{-5x}} =$$

$$= \frac{-10x-5x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{-15x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3\cdot(-5x)}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{-5x}\ge 0.$$

При $x\le 0$ функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке $x=0$: $y(0)=0$.

Пример 1.2. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = \sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}.$$

Область существования: $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

Находим критические точки:

$$y' = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)(x+1)}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}},$$

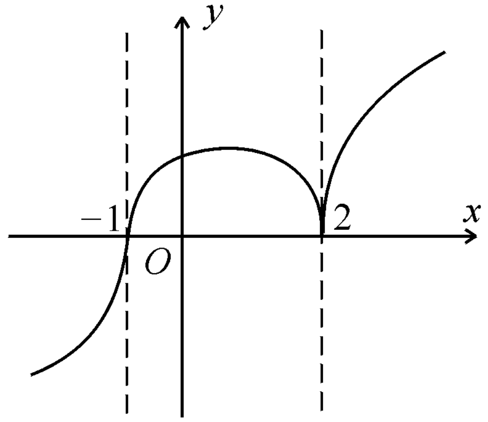
$y'=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0,$

y' не существует $\Rightarrow x_2=-1;\ x_3=2$. Получили три критические точки.

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ \ 0)$	0	$(0;\ \ 2)$	2	$(2;\ \ +\infty)$
y'	+	не сущ.	+	0	–	не сущ.	+
y	↗		↗	max	↘	min	↗

$$\lim_{x\to 2+0} y'(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = -\infty.$$



$$\lim_{x\to 1-0} y'(x) = \lim_{x\to 1+0} y'(x) = +\infty.$$

Так как $y'(x) = k,$ где $k -$ угловой коэффициент касательной, то при $x = -1$ и $x = 2$ касательная к графику функции перпендикулярна оси Ox.

$y(-1) = 0; \quad y(0) = \sqrt[3]{4}; \quad y(2) = 0.$

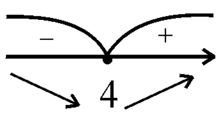
<u>Пример 1.3.</u> Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом 256 м^3 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть $a -$ сторона квадрата основания, $h -$ глубина бассейна;

$$a^2 h = 256 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{256}{h}, \quad a = \frac{16}{\sqrt{h}}, \quad h > 0;$$

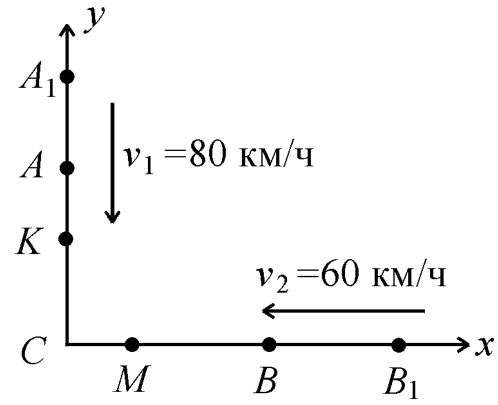
$$S = S_{бок} + S_{дна} = 4ah + a^2 = 4 \cdot \frac{16}{\sqrt{h}} \cdot h + \frac{256}{h} = 64\sqrt{h} + \frac{256}{\sqrt{h}} = F(h);$$

$$F'(h) = \frac{64}{2\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32}{\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32h^{3/2} - 256}{h^2} = \frac{32}{h^2}\left(h^{3/2} - 8\right);$$



$F'(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad h^{3/2} = 8; \quad h = 4.$ При $h = 4$ величина $F(h) = S$ будет наименьшей.

Пример 1.4. Две прямые железные дороги AA_1 и BB_1 перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте C, причем $AC = 800$ км и $BC = 700$ км. Из пунктов A и B по направлению к C одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно 80 км/ч и 60 км/ч. Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим ?



Отметим положение поездов в момент $t > 0$ точками K и M.

$AK = 80t$; $BM = 60t$;

$CK = AC - AK = 800 - 80t$;

$CM = CB - BM = 700 - 60t$;

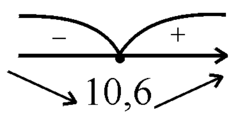
$(KM)^2 = (CK)^2 + (CM)^2 =$

$= (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2$; KM минимально, если минимальна величина

$(KM)^2 = F(t) = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2$;

$F(t) = 2(800 - 80t)\cdot(-80) + 2(700 - 60t)\cdot(-60) =$

$= -128000 + 12800t - 84000t + 7200t = 20000t - 212000 = 0$; $t = 10{,}6$;



$t = 10{,}6$ – точка минимума функции $F(t)$. Через 10,6 часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.

АСИМПТОТЫ

Если точка $(x;\ y)$ непрерывно перемещается по кривой $y = f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Если существует число a такое, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_1$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1$, то прямая $y = k_1 x + b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_2$ и $\lim\limits_{x \to -2} \left[f(x) - k_2 x \right] = b_1$, то прямая $y = k_2 x + b_2$ будет асимптотой (*левая наклонная асимптота*).

График функции $y = f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

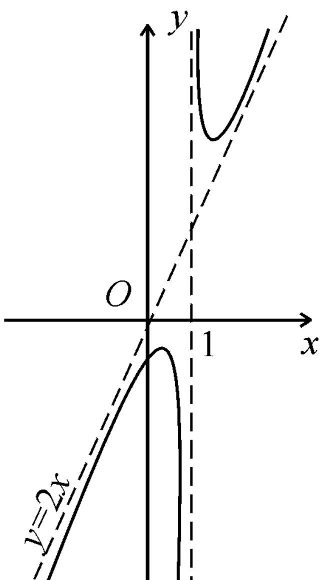
Пример 2.1. Найти асимптоты и построить график функции
$y = 2x + \dfrac{3\cos(x-1)}{x-1}$.

Область существования: $x \neq 1$.
Ищем вертикальные асимптоты.
Функция имеет разрыв в точке $x = 1$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \to 1-0} \left(2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{-0} = 2 - \infty = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 1+0} \left(2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{+0} = 2 + \infty = +\infty;$$

следовательно, $x = 1$ – вертикальная асимптота.
Ищем наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$.



$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \left(2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} \right) =$$

$$= 2 + 0 = 2; \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} - 2x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3\cos(x-1)}{x-1} = 0.$$

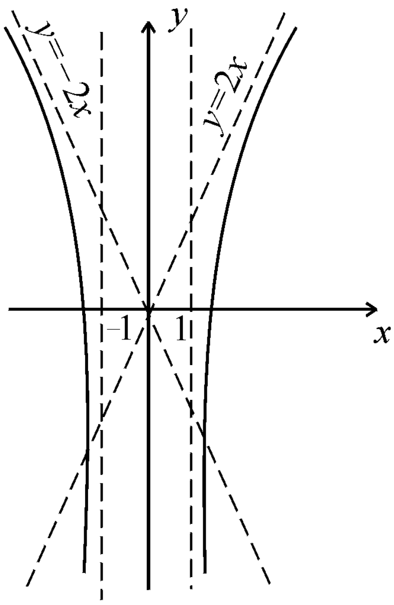
Следовательно, при $x \to \pm\infty$ существует асимптота $y = 2x$.

Пример 2.2. Найти асимптоты и построить график функции $y = \dfrac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Область существования: $x^2 - 1 > 0$; $x^2 > 1$; $x > 1$ и $x < -1$.

$$y=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}};\quad y(-x)=\frac{2(-x)^2-9}{\sqrt{(-x)^2-1}}=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}\quad\Rightarrow\quad y(x)=y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при $x>1$, а затем отразить его симметрично относительно оси Oy.



$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2-9}{+0}=-\infty\quad\Rightarrow\quad x=1-$$

вертикальная асимптота при $x\to 1+0$.

Пусть $x\to 1+\infty$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x^2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{9}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=2.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9-2x\cdot\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2-9\right)^2-4x^2\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(2x^2-9+2x\cdot\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-32x^2+81}{x^3\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(2-\frac{9}{x^2}+2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=0.$$

При $x\to+\infty$ получаем асимптоту $y=2x$. График данной функции пересекает ось Ox при $2x^2-9=0$, т.е. в точках $x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$.

<u>Пример 2.3.</u> Найти асимптоты и построить график функции

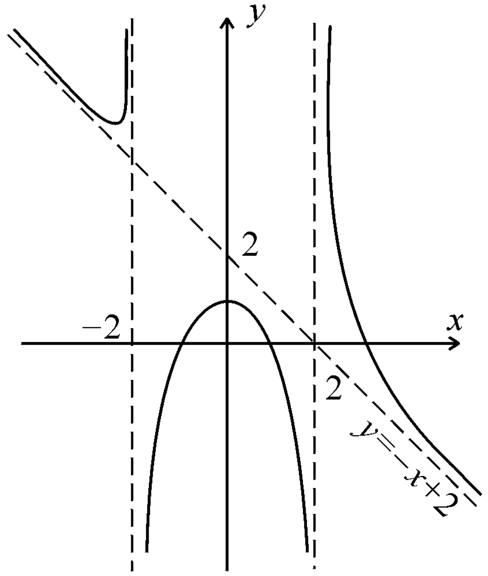
$$y=\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}.$$

Область существования: $4-x^2\neq 0\quad\Rightarrow\quad x\neq 2$ и $x\neq -2$.

В точках $x_1=-2$ и $x_2=+2$ функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{-8-8+6+2}{-0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{-8-8+6+2}{+0}=-\infty;$$



$x=-2$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{8-8-6+2}{+0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{8-8-6+2}{-0}=+\infty;$$

$x=2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x\to\pm\infty$ ищем в виде: $y=kx+b.$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{x\left(4-x^2\right)}=$$

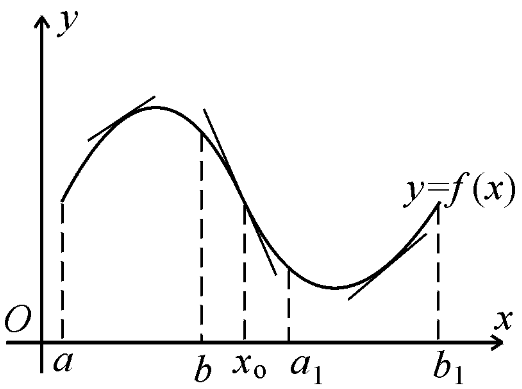
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{1}{-1}=-1;\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+x+2}{4-x^2}=2.$$

При $x\to\pm\infty$ получаем асимптоту $y=-x+2.$

НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y=f(x)$ *вогнут вниз* на интервале $(a;\ b)$ (*вогнут вверх* на интервале $(a_1;\ b_1)$), если при $a<x<b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при



$a_1<x<b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала $(a;\ b)$ (или интервала $(a_1;\ b_1)$). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y=f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства

$f'(x)<0 \qquad (f'(x)>0).$

Точка $(x_o,\ f(x_o))$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба.* Для абсциссы точки перегиба x_o графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_o) = 0$ или $f''(x_o)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками* 2-*го рода*. Критическая точка 2-го рода x_o является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_o - \delta < x < x_o$ и $x_o < x < x_o + \delta$, где $\delta -$ некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

Пример. Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

Имеем: $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}$. Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают всю область существования функции $(-\infty;\ +\infty)$ на три интервала.

x	$\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	–
y	$\cup$	перегиб	$\cap$	перегиб	$\cup$

Получили: кривая вогнута вверх при $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$ и вогнута вверх при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right) -$ точки перегиба.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область существования этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области существования. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются): четность, периодичность и т.д.

Далее нужно найти точки разрыва, асимптоты, точки экстремума функции, точки перегиба и т.д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции.

Пример 4.1. Провести полное исследование и построить график функции $y = x\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Область существования: $x \in (-\infty;\quad +\infty)$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

Так как функция определена при всех x, и у нее нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} = +\infty,$$ следовательно, наклонных асимптот также нет.

Исследуем функцию по первой производной.

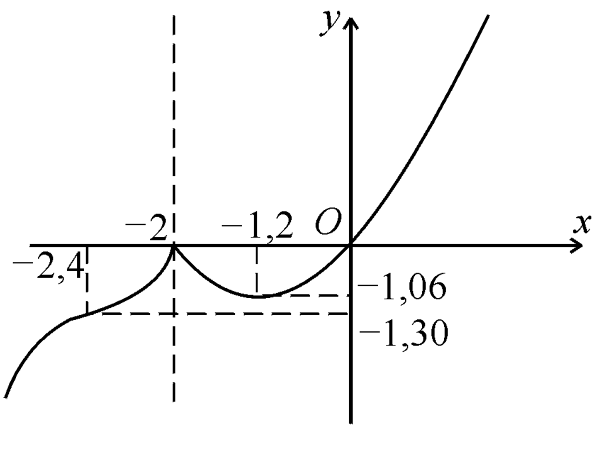
$$y' = \left[x\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}\right] = (x+2)^{2/3} + x\cdot\frac{2}{3}\cdot(x+2)^{-1/3} = \frac{3(x+2)+2x}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

$y' = 0 \quad\Rightarrow\quad 5x+6=0,\quad x=-1{,}2;$

y' не существует $\quad\Rightarrow\quad x+2=0,\quad x=-2.$

x	$(-\infty;\ -2)$	-2	$(-2;\ -1{,}2)$	$-1{,}2$	$(-1{,}2;\ +\infty)$
y'	+	не сущ.	–	0	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$y_{max} = y(-2) = 0$ (касательная в этой точке перпендикулярна оси Ox).



$y_{min} = y(-1{,}2) = -1{,}2\cdot\sqrt[3]{0{,}64} \approx -1{,}06$ (касательная в этой точке параллельна оси Ox).

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = \left[\frac{5x+6}{(x+2)^{2/3}}\right] = \frac{5\cdot\sqrt[3]{x+2} - (5x+6)\cdot\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{15(x+2)-(5x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{10x+24}{3\cdot\sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

$y'' = 0$ при $x = -2{,}4$; y'' не существует при $x = -2$.

x	$(-\infty;\ -2{,}4)$	$-2{,}4$	$(-2{,}4;\ -2)$	-2	$(-2;\ +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	не сущест.	$+$
y	$\cap$	перегиб	$\cup$		$\cup$

$$y_{перегиба} = y(-2{,}4) = -2{,}4 \cdot \sqrt[3]{(-2{,}4)^2} \approx -1{,}30; \qquad y(0) = 0.$$

Пример 4.2. Провести полное исследование и построить график функции $y = \left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^2$.

Область существования: $x \neq -2$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

$x = -2$ – точка разрыва, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \to 2-0} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \left(\frac{4+1}{-0}\right)^2 = +\infty; \qquad \lim_{x \to 2+0} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \left(\frac{4+1}{+0}\right)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x = 2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = 0;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = 4.$$

При $x \to \pm\infty$ получаем асимптоту $y = 4$.

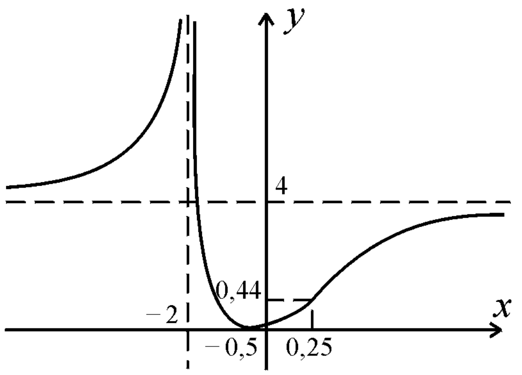
Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2}\right) \cdot \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{6(2x+1)}{(x+2)^2};$$

$y' = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0,\ x = -0{,}5$;

y' не существует $\Rightarrow x = -2$.

x	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ -0{,}5)$	$-0{,}5$	$(-0{,}5;\ +\infty)$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$



$y_{min} = y(-0{,}5) = 0.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = 6 \cdot \frac{2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 \cdot (2x+1)}{(x+2)^6} =$$

$$= 6 \cdot \frac{2(x+2) - 3(2x+1)}{(x+2)^4} = \frac{6(1-4x)}{(x+2)^4};$$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 4x = 0; \qquad x = 0{,}25;$

y'' не существует $\quad \Rightarrow \quad x = -2.$

x	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ \ 0{,}25)$	$0{,}25$	$(0{,}25;\ \ +\infty)$
y''	$+$	$+$	0	$-$
y	$\cup$	$\cup$	перегиб	$\cap$

$$y_{перегиба} = y(0{,}25) = \left(\frac{1{,}5}{2{,}25}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

Пример 4.3. Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{e^{x-3}}{x-3}.$

Область существования: $x - 3 \neq 0; \quad x \neq 3.$

$y(x) \neq y(-x)$ – функция общего вида.

В точке $x = 3$ функция терпит разрыв, т.к. в ней она не определена.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{e^{x-3}}{x-3} = -\infty, \\ \lim\limits_{x \to 3+0} \dfrac{e^{x-3}}{x-3} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = 3 \ - \text{ вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

1) $x \to +\infty,$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{\left(x^2 - 3x\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{2x-3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{(2x-3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{2} = +\infty,$$ следовательно, при $x \to +\infty$ наклонных асимптот нет.

2) $x \to -\infty,$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2-3x} = \frac{0}{+\infty} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x-3} = 0,$$

при $x \to -\infty$ получаем асимптоту $y = 0$.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left(\frac{e^{x-3}}{x-3}\right)' = \frac{e^{x-3}\cdot(x-3) - e^{x-3}}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-3-1}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2},$$

$y' = 0 \;\Rightarrow\; x - 4 = 0,\; x = 4;$ $\quad y'$ не существует $\Rightarrow x = 3$.

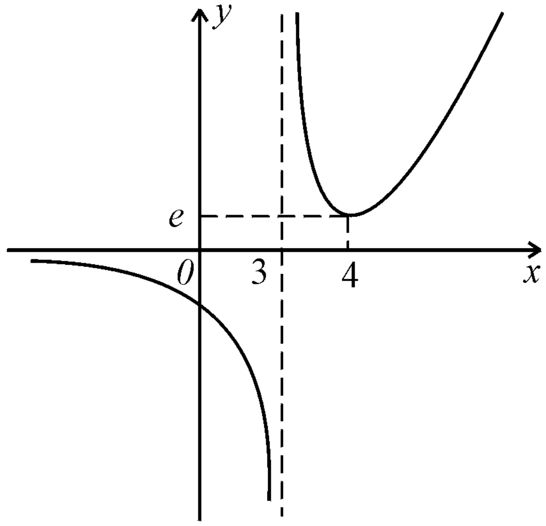
x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ 4)$	4	$(4;\ +\infty)$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$y_{min} = y(4) = e \approx 2{,}72.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = e^{x-3}\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2} + e^{x-3}\cdot\frac{(x-3)^2 - (x-4)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{e^{x-3}}{(x-3)^2}\cdot\frac{x^2 - 7x + 12 - x + 5}{x-3} = \frac{e^{x-3}\cdot\left(x^2 - 8x + 17\right)}{(x-3)^3}; \qquad y'' \neq 0;$$



y'' не существует $\Rightarrow$ $x = 3.$

x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ \ +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

$$y(0) = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \approx —,02.$$

<u>Пример 4.4.</u> Провести полное исследование и построить график функции $y = ln\dfrac{x+6}{x} - 1.$

Область существования: $\dfrac{x+6}{x} > 0.$

$x > 0,\ \ x < -6.$

Функция общего вида.

$$\lim_{x\to -6-0}\left[ln\frac{x+6}{x} - 1\right] = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = -6 \ -\ \text{вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x\to -+0}\left[ln\frac{x+6}{x} - 1\right] = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = -0 \ -\ \text{вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ln\dfrac{x+6}{x} - 1}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[ln\frac{x+6}{x} - 1\right] = -1.$$

При $x \to \pm\infty$ получаем асимптоту $y = -1.$

Исследуем функцию по первой производной.

x	$(-\infty;\ -6)$	$(0;\ \ +\infty)$
y'	$-$	$-$
y	$\searrow$	$\searrow$

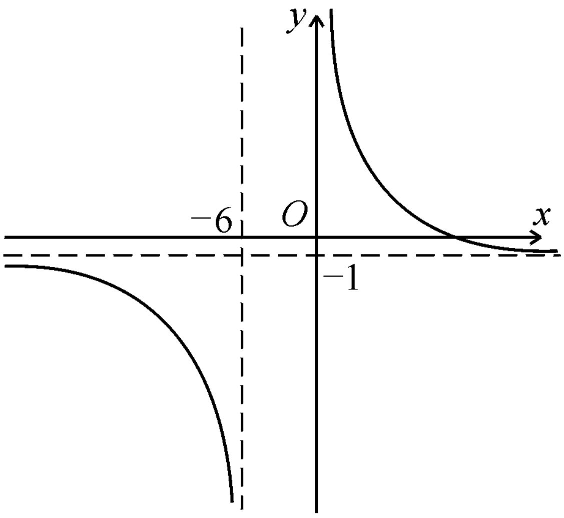
$$y' = \frac{x}{x+6}\cdot\frac{x - x - 6}{x^2} = \frac{-6}{x(x+6)} \neq 0.$$

Экстремумов у функции нет.

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = -6\cdot\frac{-(x+6+x)}{x^2(x+6)^2} = \frac{6(2x+6)}{x^2(x+6)^2} = \frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2};$$

$y''=0 \quad\Rightarrow\quad x+3=0; \qquad x=-3$ − не входит в область существования.



x	$(-\infty;\ -6)$	$(0;\ +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

Точек перегиба нет.

$ln\frac{x+6}{x}-1=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{6}{e-1};$

$y\left(\frac{6}{e-1}\right)=0.$

Определенный и неопределенный интегралы

Теоретические сведения.

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x)=f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x)+C\ .$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ − подынтегральным выражением, $F(x)$ − результат интегрирования, C − произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int(u(x)+v(x))dx=\int u(x)dx+\int v(x)dx$.

2. $\int A\cdot f(x)dx = A\cdot\int f(x)dx$, где A − постоянная.

3. Если $\int f(x)dx=F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$, то $\int f(u)du=F(u)+C$.

Таблица простейших интегралов:

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0)$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C, (A \neq 0)$.

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

Основные методы интегрирования:

1. Подведение под знак дифференциала:

а) под знаком дифференциала можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) + A)$;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель: $df(x)=\frac{1}{A}d(Af(x))$; в) под знак дифференциала подводится функция по правилу: $f'(x)dx=df(x)$.

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$\int udv=uv-\int vdu$, где $u=u(x), v=v(x)$.

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а) $\int a^x\cdot P_n(x)dx$, $u=P_n(x)$, $dv=a^x dx$.

б) $\int \sin ax\cdot P_n(x)dx$, $u=P_n(x)$, $dv=\sin axdx$.

в) $\int \cos ax\cdot P_n(x)dx$, $u=P_n(x)$, $dv=\cos axdx$,

где $P_n(x)-$ многочлен n-ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, где $x=\varphi(t)$.

Пример выполнения задания.

Найти неопределенные интегралы:
а) $\int\frac{(\arcsin x)^2+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$; в) $\int(3x+4)e^{3x}dx$.

Решение.

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\int\frac{(\arcsin x)^2+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\int(\arcsin x)^2 d(\arcsin x)+\left(-0{,}5\right)\int(1-x^2)^{-0,5}d(1-x^2)=$$

$$=\frac{1}{3}(\arcsin x)^3-0{,}5\cdot\frac{(1-x^2)^{0,5}}{0{,}5}+C=\frac{1}{3}(\arcsin x)^3-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3-\sqrt{1-x^2}+C\right)'=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 3(\arcsin x)^2\cdot(\arcsin x)'-0{,}5(1-x^2)^{-0,5}(1-x^2)'+C'=$$

$$=\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+0=\frac{(\arcsin x)^2+x}{\sqrt{1-x^2}},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) в этом случае подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-17 & \underline{x^2-4x+3} \\
\underline{x^3-4x^2+3x} & x+4 \\
4x^2-3x-17 & \\
\underline{4x^2-16x-12} & \\
13x-29 &
\end{array}$$

Тогда

$$\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx=\int\left(x+4+\frac{13x-29}{x^2-4x+3}\right)dx=\int xdx+\int 4dx+\int\frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx.$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3},\quad 13x-29=A(x-3)+B(x-1).$$

При $x=3$ имеем $13\cdot 3-29=B(3-1)$, откуда $B=5$;

при $x=1$ имеем $13\cdot 1-29=A(1-3)$, откуда $A=8$.

Получаем $\dfrac{13x-29}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{5}{x-3}$ и интегрируем

$$\int\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}dx=\int\frac{8}{x-1}dx+\int\frac{5}{x-3}dx=8\int\frac{dx}{x-1}+5\int\frac{dx}{x-3}=8\ln|x-1|+5\ln|x-3|+C$$

и окончательно получаем

$$\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx=\frac{x^2}{2}+4x+8\ln|x-1|+\ln|x-3|+C.$$

Проверим результаты дифференцированием:

$$\left(\frac{x^2}{2}+4x+8\ln|x-1|+\ln|x-3|+C\right)'=\frac{2x}{2}+4+\frac{8}{x-1}+\frac{5}{x-3}=\frac{x^3-17}{x^2-4x+3},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Замечание.

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\int\frac{A_1}{x-a}dx=A_1\ln|x-a|+C;\qquad \int\frac{A_k}{(x-a)^k}dx=\frac{A_k}{(-k+1)}(x-a)^{-k+1}+C,\ (k=2,3,\ldots);$$

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

в) этот интеграл находим методом интегрирования по частям.

Примем $u=3x+4$, $dv=e^{3x}dx$, тогда $du=3dx$, $v=\dfrac{1}{3}e^{3x}$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int(3x+4)e^{3x}dx=(3x+4)\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}\cdot 3dx=\frac{3x+4}{3}e^{3x}-\int e^{3x}dx=$$

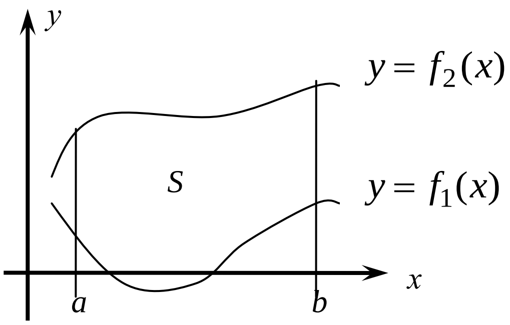
$$= \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3}e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C\,.$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1)+C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}(3x+4)\,,$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Приложения определенных интегралов



Теоретические сведения.

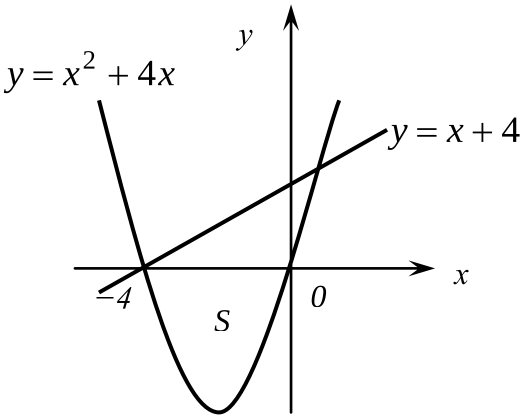
Если на плоскости Oxy задана фигура, ограниченная двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь S такой фигуры может быть вычислена по формуле $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$.

Пример выполнения задания.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение.

Заданные линии ограничивают на плоскости Оху криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}$, $x^2 + 4x = x + 4$, $x^2 + 3x - 4 = 0$, откуда $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int (4 - 3x - x^2)dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (}\textit{кв. ед.}\text{)}.$$

Теоретические сведения.

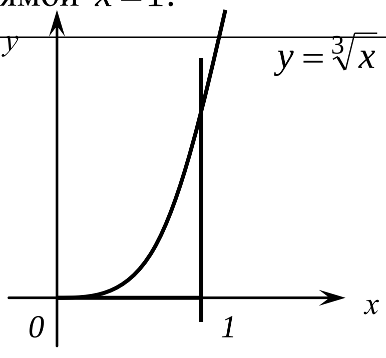
Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$,

1) вокруг оси Ox, вычисляются по формуле $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$;

2) вокруг оси Oy, вычисляются по формуле $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.

***Пример выполнения задания*.**

Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей Ox и Oy криволинейного треугольника, образованного кривой $y = \sqrt[3]{x}$, осью Ox и прямой $x = 1$.



Решение.

1) объем тела, полученного вращением

вокруг оси Ox, равен

$$V_x = \pi \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \pi \left. \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} \right|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \ (\textit{куб. ед.})$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy, равен

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x} dx = 2\pi \left. \frac{x^{7/3}}{7/3} \right|_0^1 = \frac{6\pi}{7} \ (\textit{куб. ед.}).$$

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из некоторой области $D(x, y)$ соответствует определенное число $z \in E \subset \mathbf{R}$. Тогда z называется функцией двух переменных x и y, x, y – независимыми переменными или аргументами, D – областью определения или существования функции, а множество E всех значений функции – областью ее значений. Символически функция двух переменных записывается в виде равенства $z = f(x,y)$, в котором f обозначает закон соответствия. Этот закон может быть задан аналитически (формулой), с помощью таблицы или графика. Так как всякое уравнение $z = f(x,y)$ определяет, вообще говоря, в пространстве, в котором введена декартова система координат $Oxyz$, некоторую поверхность, то под графиком функции двух переменных будем понимать поверхность, образованную множеством точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x,y)$ (рис. 1).

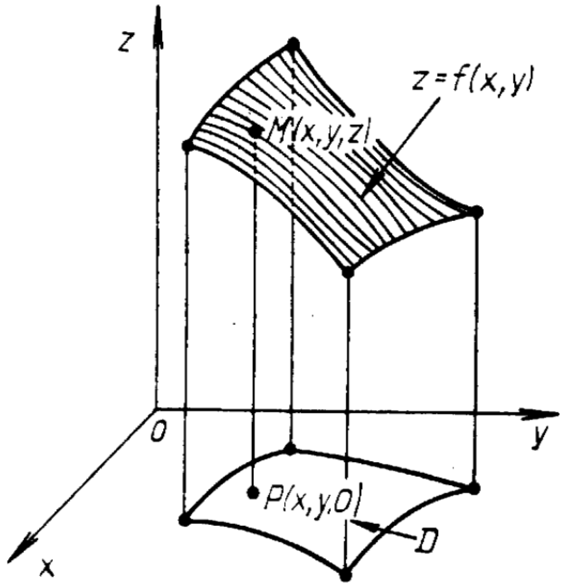


Рис. 1

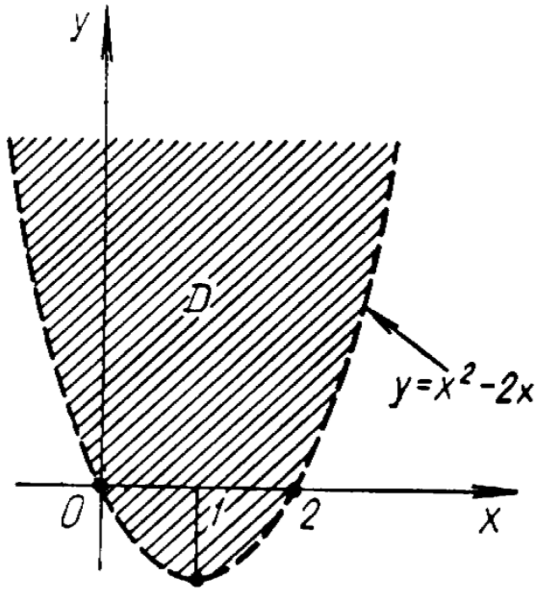


Рис. 2

Геометрически область определения функции D обычно представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется замкнутой и обозначается D, во втором – открытой.

Определение функции двух переменных легко обобщить на случай трех и большего числа переменных. Величина y называется функцией переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, если каждой совокупности $(x_1, x_2, ..., x_n)$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ из некоторой области n-мерного пространства соответствует определенное значение y, что символически записывается в виде $y=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$. Так как совокупность значений независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ определяет точку n-мерного пространства $M\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, то всякую функцию нескольких переменных обычно рассматривают как функцию точек M пространства соответствующей размерности: $y = f(M)$.

Число A называется пределом функции $z=f\left(x,y\right)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого ε > 0 существует δ > 0, такое, что при всех x, y, удовлетворяющих условиям $\left|x-x_0\right|<\delta$ и $\left|y-y_0\right|<\delta$, справедливо неравенство

$$\left|f\left(x,y\right)-A\right|<\varepsilon.$$

Если A – предел функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, то пишут:

$$A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f\left(x,y\right)=\lim_{M\to M_0} f\left(x,y\right).$$

Функция $z=f\left(x,y\right)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если справедливо равенство

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f\left(x,y\right)=f\left(x_0,y_0\right).$$

Например, функция $z=1\Big/\left(2x^2+y^2\right)$ непрерывна в любой точке плоскости, за исключением точки $M(0, 0)$, в которой функция терпит бесконечный разрыв.

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области D, называется непрерывной в данной области.

Если переменной x дать некоторое приращение Δx а y оставить постоянной, то функция $z=f\left(x,y\right)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое частным приращением функции z по переменной x:

$$\Delta_x z=f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right).$$

Аналогично, если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то частное приращение функции z по переменной y

$$\Delta_y z=f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right).$$

Если существуют пределы:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{x}\equiv\frac{\partial z}{\partial x}\equiv z'_x\equiv f'_x\left(x,y\right),$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{y}\equiv\frac{\partial z}{\partial y}\equiv z'_y\equiv f'_y\left(x,y\right),$$

они называются частными производными функции $z=f\left(x,y\right)$ по пе ременным x и y соответственно.

Аналогично определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Так как частная производная по любой переменной является производной по этой переменной, найденной при условии, что остальные переменные – постоянны, то все правила и формулы дифференцирования функций одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Полным приращением функции $z = f(x,y)$ называется разность

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y).$$

Главная часть полного приращения функции $z = f(x,y)$, линейно зависящая от приращений независимых переменных Δx и Δy, называется полным дифференциалом функции и обозначается dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{1}$$

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ – произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами.

Для функции n переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ полный дифференциал определяется выражением

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n. \tag{2}$$

Полный дифференциал часто используется для приближенных вычислений значений функции, так как $\Delta z \approx dz$, т. е.

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0).$$

Функция $z = f(u,v)$, где $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$, называется сложной функцией переменных x и y. Для нахождения частных производных сложных функции используются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3}$$

В случае, когда $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$, вторая из формул (3) исчезает (т. е. превращается в тождественный нуль), а первая пре образуется к виду

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{4}$$

Если же $u = x$, $v = y = \psi(x)$, то формула (4) имеет вид

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

В последней формуле $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной функции (в отличие от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$).

Если уравнение $F(x,y)=0$ задает некоторую функцию $y(x)$ в неявном виде и $F'_y(x,y)\neq 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{6}$$

Если уравнение $F(x,y,z)=0$ задает функцию двух переменных $z(x, y)$ в неявном виде и $F'_z(x,y,z)=0$, то справедливы формулы:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ \frac{dz}{dy} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{7}$$

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Частными производными второго порядка называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x,y).$$

Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков. Запись $\frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ означает, что функция z k раз продифференцирована по переменной x и $n-k$ раз по переменной y.

Частные производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ называются смешанными. Значения смешанных производных равны в тех точках, в которых эти производные непрерывны.

Полный дифференциал второго порядка d^2z функции $z=f(x,y)$ выражается формулой

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Если поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к данной поверхности:

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0) \tag{8}$$

а канонические уравнения нормали, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0)$ поверхности:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{9}$$

В случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявном виде: $F(x,y,z) = 0$, и $F(x_0,y_0,z_0) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0, \tag{10}$$

а уравнение нормали –

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \tag{11}$$

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $z = f(x,y)$, если для всех точек $M(x, y)$, отличных от $M_0(x_0, y_0)$ и принадлежащих достаточно малой ее окрестности, выполняется неравенство $f(x_0,y_0) \ge f(x,y) \left(f(x_0,y_0) \le f(x,y) \right)$.

Максимум или минимум функции называется ее экстремумом. Точка, в которой достигается экстремум функции, называется точкой экстремума функции.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума функции $f(x, y)$, то $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$ или хотя бы одна из этих производных не существует.

Точки, для которых эти условия выполнены, называются стационарными или критическими. Точки экстремума всегда являются стационарными, но стационарная точка может и не быть точкой экстремума. Чтобы стационарная точка была точкой экстремума, должны выполняться достаточные условия экстремума.

Для того чтобы сформулировать достаточные условия экстремума функции двух переменных, введем следующие обозначения: $A = f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0,y_0)$, $\Delta = AC - B^2$.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в некоторой области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума для данной функции, причем M_0 будет точкой максимума при $A < 0$ ($C < 0$) и точкой минимума при $A > 0$ ($C > 0$);

2) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;

3) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а мажет и не быть. Отметим, что случай 3 требует дополнительных исследований.

Экстремум функции $z = f(x,y)$, найденный при условии $\varphi(x,y) = 0$, называется условным. Уравнение $\varphi(x,y) = 0$ называется уравнением связи. Геометрически задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремальных точек кривой, по которой поверхность $z = f(x,y)$ пересекается с цилиндром $\varphi(x,y) = 0$.

Если из уравнения связи $\varphi(x,y) = 0$ найти $y = y(x)$ и подставить в функцию $z = f(x,y)$, то задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремума функции одной переменной $z = f(x, y(x))$.

Дифференцируемая функция в ограниченной замкнутой области D достигает своего наибольшего (наименьшего) значения либо в стационарной точке, лежащей внутри области D, либо на границе этой области. Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области D необходимо найти все критические точки, лежащие внутри данной области и на ее границе, вычислить значения функции в этих точках, а также во всех остальных точках границы, а затем путем сравнения полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее из них.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

1. Найти область определения D и область значений E функции $z = ln(y - x^2 + 2x)$.

Данная функция определена в тех точках плоскости Oxy, в которых $y - x^2 + 2x > 0$, или $y > x^2 - 2x$. Точки плоскости, для которых $y = x^2 - 2x$, образуют границу области D. Уравнение $y = x^2 - 2x$ задает параболу (рис. 1, поскольку парабола не принадлежит области D, то она изображена штриховой линией). Далее, легко проверить непосредственно, что точки, для которых $y > x^2 - 2x$, расположены выше параболы. Область D является открытой (на рис. 2 она заштрихована) и ее можно задать с помощью системы неравенств:

$$D: \left\{ -\infty < x < +\infty,\ x^2 - 2x < y < +\infty \right\}.$$

Так как выражение под знаком логарифма может принимать сколь угодно малые и сколь угодно большие положительные значения, то область значений функции

$$E:\{-\infty < z < +\infty\}.$$

2. Вычислить предел

$$A = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$$

Преобразовав выражение под знаком предела, получим

$$A = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right) = 2.$$

3. Вычислить приближенно $(1{,}02)^{3{,}01}$.

Рассмотрим функцию $z = x^y$. При $x_0 = 1$ и $y_0 = 3$ имеем $z_0 = 1^3 = 1$, $\Delta x = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$, $\Delta y = 3{,}01 - 3 = 0{,}01$. Находим полный дифференциал функции $z = x^y$ в любой точке:

$$dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y.$$

Вычисляем его значение в точке $M(2, 3)$ при данных приращениях $\Delta x = 0{,}02$ и $\Delta y = 0{,}01$:

$$dz = 3 \cdot 1^2 \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}02 = 0{,}06.$$

Тогда $z = (1{,}02)^{3{,}01} \approx z_0 + dz = 1 + 0{,}06 = 1{,}06.$

4. Найти уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке $M_0(1, 2, -1)$.

Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(1, 2, -1)$:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) = \left(3x^2 + yz\right)\Big|_{M_0} = 1,$$

$$F'_y(x_0, y_0, z_0) = \left(3y^2 + xz\right)\Big|_{M_0} = 11,$$

$$F'_z(x_0, y_0, z_0) = \left(3z^2 + xy\right)\Big|_{M_0} = 5.$$

Подставляя их в уравнения (10) и (11), получаем соответственно уравнение касательной плоскости

$$(x-1) + 11(y-2) + 5(z+1) = 0$$

и каноническое уравнение нормали

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}.$$

5. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, полная поверхность которого имеет данную площадь S.

Объем прямоугольного параллелепипеда $V = xyz$, где x, y, z – измерения параллелепипеда, а площадь его поверхности $S = 2\left(xy + xz + yz\right)$, откуда

$$z = \frac{S - 2xy}{2\left(x + y\right)}, \ V = \frac{Sxy - 2x^2y^2}{2\left(x + y\right)} = V\left(x, y\right).$$

Найдем экстремум функции $V = V(x, y)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2\left(S - 2x^2 - 4xy\right)}{2\left(x + y\right)^2} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2\left(S - 2y^2 - 4xy\right)}{2\left(x + y\right)^2} = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} S - 2x^2 - 4xy = 0, \\ S - 2y^2 - 4xy = 0. \end{aligned}\right\}$$

Так как $x > 0$, $y > 0$, то из последней системы следует, что $x = y = \sqrt{S/6}$. Получили единственную стационарную точку $M_0\left(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}\right)$, которая является точкой максимума функции $V = V(x, y)$ (т. е. задача имеет решение), поэтому проверять выполнение достаточных условий максимума нет необходимости. Далее находим

$$z = \frac{S - S/3}{4\sqrt{S/6}} = \frac{2S/3}{4\sqrt{S/6}} = \sqrt{S/6}.$$

Таким образом, наибольший объем имеет куб с ребром, равным $\sqrt{S/6}$.

6. Вычислить значения частных производных $f'_x\left(M_0\right)$, $f'_y\left(M_0\right)$, $f'_z\left(M_0\right)$ для данной функции $f\left(x, y, z\right) = \sqrt{xy}\,cos\,z$ в точке $M_0(1, 1, \pi/3)$ с точностью до двух знаков после запятой.

Находим частные производные данной функции, затем вычисляем их значения в точке $M_0(1, 1, \pi/3)$:

$$f'_x\left(x, y, z\right) = \frac{y}{2\sqrt{xy}}cos\,z, \ f'_x\left(1, 1, \pi/3\right) = 0{,}25,$$

$$f'_y\left(x, y, z\right) = \frac{x}{2\sqrt{xy}}cos\,z, \ f'_y\left(1, 1, \pi/3\right) = 0{,}25,$$

$$f'_z\left(x, y, z\right) = -\sqrt{xy}\,sin\,z, \ f'_z\left(1, 1, \pi/3\right) = -0{,}86.$$

7. Вычислить значение производной сложной функции $z = arccos\frac{x^2}{y}$, где $x = 1 + lnt$, $y = -2e^{-t^2+1}$, при t_0 = 1 с точностью до двух знаков после запятой.

На основании формулы (4) имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^4/y^2}}\frac{2x}{y}\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^4/y^2}}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\left(-2e^{-t^2+1}\right)(-2t).$$

При t_0 = 1 получаем, что x = 1, y = –2,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

8. Вычислить значения частных производных функции $z(x,y)$, заданной неявно уравнением $4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz = 3 - z^2$ в точке M_0(0, 1, –1) с точностью до двух знаков после запятой.

В данном случае $F(x,y,z) = 4x^3 - 3y^3 + 2xyz - 4xz + z^2 - 3$, поэтому

$$F'_x = 12x^2 + 2yz - 4z, \quad F'_y = -9y^2 + 2xz, \quad F'_z = 2xy - 4x + 2z.$$

Следовательно по формулам (7):

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{12x^2 + 2yz - 4z}{2xy - 4x + 2z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-9y^2 + 2xz}{2xy - 4x + 2z}.$$

Вычисляем значения $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ в точке M_0(0, 1, –1):

$$\frac{dz(0,1,-1)}{dx} = 1, \quad \frac{dz(0,1,-1)}{dy} = -4{,}5.$$

9. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = xy(x + y - 2)$.

Находим первые частные производные данной функции:

$$z'_x = 2xy + y^2 - 2y, \quad z'_y = x^2 + 2xy - 2x.$$

Приравнивая их нулю, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y(2x + y - 2) = 0, \\ x(x + 2y - 2) = 0, \end{aligned}\right\}$$

из которой определяем стационарные точки данной функции: M_1(0, 0), M_2(2, 0), M_3(0, 2), M_4(2/3, 2/3). С помощью теоремы 2 из § 4 выясним, какие из этих точек являются точками экстремума. Для этого вначале найдем вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx} = 2y, \quad z''_{xy} = 2x + 2y - 2, \quad z''_{yy} = 2x.$$

Подставляя в полученные выражения для производных координаты стационарных точек и используя достаточные условия экстремума (см. § 4), имеем: для точки M_1 $\Delta = -4 < 0$, т. е. экстремума нет, для точки M_2 $\Delta = -4 < 0$, т. е. экстремума нет, для точки M_3 $\Delta = -4 < 0$, т. е. экстремума нет, для точки M_4 $\Delta = 12/9 > 0$, $A = 4/3 > 0$, т. е. имеем точку локального минимума функции, в которой $z_{min} = z(2/3,\ 2/3) = -8/27$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ в области $\overline{D}$, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$ (рис. 3).

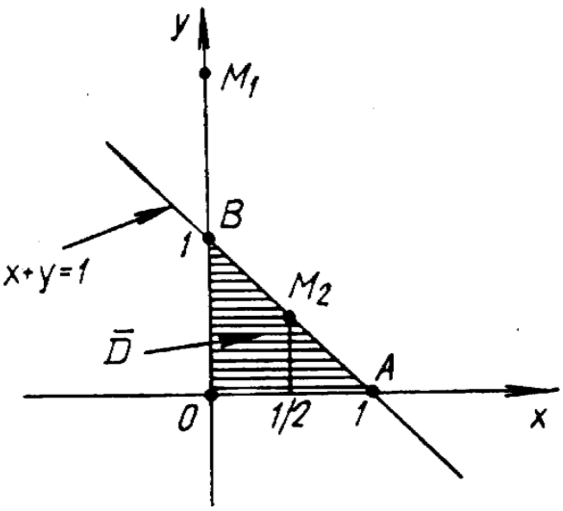


Рис. 3

Выясним, существуют ли стационарные точки, лежащие внутри данной области $\overline{D}$, т. е. внутри треугольника *OAB*. Имеем:

Решая полученную систему уравнений, находим стационарную точку *M*(–10, –3). Она лежит вне области $\overline{D}$, следовательно, при решении задачи мы ее не учитываем. Исследуем значения функции на границе области $\overline{D}$. На стороне *OA* ($y = 0$, $0 \le x \le 1$) треугольника *OAB* функция z имеет вид $z = 3x$. Стационарных точек на отрезке *OA* нет, так как $z' = 3$. В точках *O* и *A* соответственно $z(0,\ 0) = 0$, $z(1,\ 0) = 3$. На стороне *OB* ($x = 0$, $0 \le y \le 1$) треугольника функция $z = -y^2 + 4y$, $z' = -2y + 4$. Находим стационарную точку из уравнения $-2y + 4 = 0$; получаем, что $y = 2$. Таким образом, точка $M_1(0, 2)$ не принадлежит области $\overline{D}$. Значение функции в точке *B* $z(0, 1) = 3$. Находим наибольшее и наименьшее значения на стороне *AB*: $x + y = 1$. Здесь $y = 1 - x$, $z = -2x^2 + 2x + 3$, тогда $z' = -4x + 2$ и из $z' = 0$ следует $x = 1/2$, т. е. стационарная точка $M_2(1/2,\ 1/2)$ принадлежит границе области $\overline{D}$. Значение функции в ней $z(1/2,\ 1/2) = 3{,}5$. Сравнивая все полученные значения функции, видим, что

$$z_{наиб} = z(1/2, 1/2) = 3{,}5,\quad z_{наим} = z(0, 0) = 0.$$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнения вида $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$ или

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \qquad (1.1)$$

где $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right)$ и $f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ известные функции, а $y = y(x)$ – искомая функция, называется ***дифференциальным уравнением n-го порядка.*** Уравнение (1.1) называется уравнением, разрешенным относительно старшей производной.

Функция

$$y = y(x, C_1, C_2, .., C_n), \qquad (1.2)$$

содержащая n независимых произвольных постоянных и удовлетворяющая уравнению (1.1), называется ***общим решением*** уравнения (1.1). Придавая в соотношении (1.1) постоянным $C_1, C_2, .., C_n$ определенные значения, получаем ***частное решение*** уравнения (1.1).

Если для искомого частного решения дифференциального уравнения заданы ***начальные условия* (*задача Коши*)**

$$y(x_o) = y_o, \quad y'(x_o) = y'_o, \; ..., \; y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)}, \qquad (1.3)$$ и

известно общее решение уравнения, то произвольные постоянные $C_1, C_2, .., C_n$ определяются, если это возможно, из системы уравнений

$$\begin{cases} y_o = y(x_o, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y'_o = y(x_o, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_o^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_o, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

I. Виды дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка с неизвестной функцией $y(x)$, разрешенное относительно y', имеет вид

$$y' = f(x, y), \qquad (2.1)$$

где $f(x, y)$ – заданная функция. В некоторых случаях выгодно за искомую функцию считать переменную x и записывать уравнение (2.1) в виде

$$x' = g(x, y), \qquad (2.1')$$

где $g(x, y) = 1 / f(x, y)$.

Учитывая, что $y' = \dfrac{d\,y}{d\,x}$ и $x' = \dfrac{d\,x}{d\,y}$, дифференциальные уравнения (2.1) и (2.1') можно записать в симметричной форме

$$P(x,\,y)d\,x + Q(x,\,y)dy = 0\,, \qquad (2.2)$$

где $P(x,\,y)$ и $Q(x,\,y)$ − известные функции.

Начальные условия (1.3) в этом случае принимают вид

$$y(x_o) = y_o \quad \text{или} \quad y(x)\Big|_{x=x_o} = y_o.$$

Общим решением является функция $y = y(x,\,C)$, где C − произвольная постоянная, удовлетворяющая условию (2.1) или (2.2).

II. Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)\cdot g(y), \qquad (2.3)$$

а так же в виде

$$M(x)\cdot N(y)d\,x = P(x)\cdot Q(y)d\,y. \qquad (2.4)$$

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, а в другую только y, и затем проинтегрировать обе части.

(2.3) $\Rightarrow$ $\dfrac{d\,y}{d\,x} = f(x)\cdot g(x),\quad \dfrac{d\,y}{g(y)} = f(x)d\,x,\quad \displaystyle\int\frac{d\,y}{g(y)} = \int f(x)d\,x.$

(2.4) $\Rightarrow$ $\dfrac{M(x)}{P(x)}d\,x = \dfrac{Q(y)}{N(y)}d\,y,\quad \displaystyle\int\frac{M(x)}{P(x)}d\,x = \int\frac{Q(y)}{N(y)}d\,y.$

Замечание. При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие эти выражения в ноль.

Пример 2.1. Решить уравнение $x^2y^2y' + 1 = y.$

Решение. Приводим это уравнение к виду (2.4):

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1;\qquad x^2y^2d\,y = (y-1)d\,x.$$

Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}d\,y = \frac{d\,x}{x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y^2}{y-1}d\,y = \int\frac{d\,x}{x^2};\qquad \int\left(y + 1 + \frac{1}{y-1}\right)d\,y = \int\frac{d\,x}{x^2};$$

$$\frac{y^2}{2}+y+ln\left|y-1\right|=-\frac{1}{x}+C.$$

При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x=0$ и $y-1=0$, т.е. $y=1.$ Непосредственной подстановкой в исходное уравнение этих функций убеждаемся, что $y=1$ – решение уравнения, а $x=0$ – нет.

III. Однородные уравнения.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется однородным, если его можно записать в виде $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ или в виде $M(x,\, y)d\,x+N(x,\, y)d\,y=0$, где $M(x,\, y),\ N(x,\, y)$ – однородные функции одной и той же степени k, т.е. $M(tx,\, ty)=t^k M(x,\, y)$ и $N(tx,\, ty)=t^k N(x,\, y)$ при любом k.

Чтобы решить однородное уравнение, можно сделать замену $y(x)=u(x)\cdot x$, после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

<u>Пример 2.2.</u> Решить уравнение $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y.$

<u>Решение.</u> Перепишем уравнение в виде $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$ Полагаем $y(x)=u(x)\cdot x$, тогда $y'=u'\cdot x+u.$ Подставляя в уравнение, получим

$u'\cdot x+u=e^u+u;\quad u'\cdot x=e^u;\quad x\cdot du=e^u d\,x$ или $e^{-u}du=\frac{d\,x}{x};$

$\int e^{-u}du=\int\frac{d\,x}{x};\quad -e^{-u}=ln\left|x\right|-ln\left|C\right|$ или $e^{-u}=-ln\left|x\right|+ln\left|C\right|;$

$e^{-u}\ ln\left|\frac{C}{x}\right|;\quad -u=ln\left(ln\left|\frac{C}{x}\right|\right);\quad u=-ln\left(ln\left|\frac{C}{x}\right|\right).$

Возвращаясь к старым переменным $x,\, y,$ получим:

$$\frac{y}{x}=-ln\left(ln\left|\frac{C}{x}\right|\right)\quad\text{или}\quad y=-x\,ln\left(ln\left|\frac{C}{x}\right|\right).$$

IV. Линейные уравнения 1-го порядка и уравнения Бернулли.

Уравнения вида

$$y'+p(x)\cdot y=q(x)\tag{2.5}$$

называется линейным, заметим, что при $q(x)=0$ линейное уравнение становится уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^{\alpha} \qquad (2.6)$$

при $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ называется уравнением Бернулли (при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ получаем линейное уравнение).

Оба эти уравнения можно решить с помощью подстановки

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Тогда уравнение (2.5), например, примет вид

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x) \text{ или}$$

$$u' \cdot v + u \cdot \left[v' + p(x) \cdot v \right] = q(x). \qquad (2.7)$$

Если потребовать, чтобы

$$v' + p(x) \cdot v = 0, \qquad (2.8)$$

то из (2.8) найдем v, а затем из (2.7) получим $u' \cdot v = q(x)$ и найдем u, а, следовательно, и $y = u \cdot v$.

Пример 2.3. Найти частное решение уравнения

$$y' - y \cdot tgx = \frac{1}{cos\,x}, \qquad y(0) = 1.$$

Решение. Используем подстановку $y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тогда уравнение принимает вид

$$u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v \cdot tgx = \frac{1}{cos\,x}, \qquad u' \cdot v + u \cdot (v' - v \cdot tgx) = \frac{1}{cos\,x},$$

отсюда

$$\begin{cases} v' - v \cdot tgx = 0 \\ u' \cdot v = \dfrac{1}{cos\,x}. \end{cases} \qquad (2.9)$$

Решаем первое из уравнений (2.9):

$$v' = v \cdot tgx; \qquad \frac{dv}{v} = tgx \cdot dx; \qquad \int \frac{dv}{v} = \int tgx \cdot dx; \qquad ln|\,v\,| = -\,ln|\,cos\,x\,|,$$

(при вычислении этих интегралов произвольная постоянная не пишется), откуда

$$v = \frac{1}{cos\,x}.$$

Из второго уравнения (2.9) находим $u(x)$:

$$u' \cdot \frac{1}{cos\,x} = \frac{1}{cos\,x}, \qquad u' = 1, \qquad \int du = \int dx, \qquad u = x + C.$$

Следовательно,

$$y = u \cdot v = (x + C) \cdot \frac{1}{cos\,x}.$$

Найдем частное решение. Так как $y(0) = 1$, то

$$1=(0+C)\cdot\frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad C=1.$$

Подставляем это значение в общее решение:

$$y=(x+1)\cdot\frac{1}{\cos x}.$$

Это и есть искомое частное решение.

Пример 2.4. Найти общее решение уравнения

$$y'-\frac{4}{x}\cdot y=x\cdot\sqrt{y}.$$

Решение. Это уравнение Бернулли $(\alpha=1/2)$. Заметим, что данное уравнение имеет решение $y=0$. Чтобы найти решение, отличное от нулевого, проведем замену $y=u\cdot v,\quad y'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Получим:

$$u'\cdot v+u\cdot v'-\frac{4}{x}\cdot u\cdot v=x\sqrt{u\cdot v} \quad \text{или}$$

$$u'\cdot v+u\cdot\left(v'-\frac{4}{x}\cdot v\right)=x\sqrt{u\cdot v}.$$

Для определения u и v имеем:

$$\begin{cases} v'-\dfrac{4}{x}\cdot v=0 \\ u'\cdot v=x\sqrt{u\cdot v}. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Из первого уравнения (2.10) находим:

$$\frac{dv}{v}=\frac{4}{x}dx; \qquad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{4}{x}dx; \qquad \ln|v|=4\ln|x|; \qquad v=x^4,$$

тогда из второго уравнения (2.10):

$$u'\cdot x^4=x\cdot\sqrt{u\cdot x^4}; \quad u'\cdot x=\sqrt{u}; \quad \frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{dx}{x}; \quad 2\sqrt{u}=\ln|x|+2C;$$

$$\sqrt{u}=\frac{1}{2}\ln|x|+C; \qquad u=\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)^2,$$

следовательно, общее решение получим в виде:

$$y=0; \qquad y=x^4\cdot\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)^2.$$

V. Уравнения в полных дифференциалах.

Уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (2.11)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е. $u'_x=M(x,y),\quad u'_y=N(x,y)$. Это имеет мести, если

$$\left[M(x,\,y)\right]'_y \equiv \left[N(x,\,y)\right]'_x.$$

Чтобы решить уравнение (2.11), надо найти функцию $u(x,\,y)$. Тогда общее решение уравнения можно записать в виде $u(x,\,y)=C$, где C – произвольная постоянная.

Пример 2.5. Решить уравнение

$$\left(2x+3x^2y\right)dx+\left(x^3-3y^2\right)dy=0.$$

Решение. Так как

$$\left(2x+3x^2y\right)'_y=3x^2 \quad \text{и} \quad \left(x^3-3y^2\right)'_x=3x^2,$$

то это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $u(x,\,y)$, полный дифференциал которой $du=u'_x dx+u'_y dy$ был бы равен левой части уравнения, т.е.

$$u'_x=2x+3x^2y, \quad u'_y=x^3-3y^2. \qquad (2.12)$$

Интегрируем по x первое из уравнений (2.12), считая y постоянным; при этом вместо постоянной интегрирования надо поставить $\varphi(y)$ – неизвестную функцию от y.

$$u(x,\,y)=\int\left(2x+3x^2y\right)dy=x^2+x^3y+\varphi(y).$$

Подставляя это выражение для $u(x,\,y)$ во второе из уравнений (2.12), найдем $\varphi(y)$:

$$\left(x^2+x^3y+\varphi(y)\right)'_y=x^3-3y^2, \quad x^3+\varphi'(y)=x^3-3y^2,$$

$$\varphi'(y)=-3y^2; \qquad \varphi(y)=-y^3.$$

Следовательно, можно взять

$$u(x,\,y)=x^2+x^3y-y^3,$$

и общее решение уравнения будет иметь вид

$$x^2+x^3y-y^3=C.$$

УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

I. Если $y'' = f(x)$, то

$$y = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2.$$

II. Если дифференциальное уравнение явно не содержит y, т.е. $F(x, y', y'') = 0$, то, полагая $y'(x) = p(x)$, $y''(x) = p'(x)$, получим уравнение первого порядка относительно функции $p(x)$.

Пример 3.1. Найти частное решение уравнения

$$xy'' + y' + x = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 1$.

Решение. Так как уравнение явно не содержит y, то, полагая $y' = p(x)$, имеем $y'' = p'$, откуда

$$x p' + p + x = 0, \text{ т.е. } p' + \frac{1}{x}p = -1.$$

Решаем это уравнение как линейное относительно функции $p(x)$:

$$p(x) = u \cdot v, \quad p' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad u' \cdot v + u \cdot \left(v' + \frac{1}{x}v\right) = -1,$$

$$\begin{cases} v' + \dfrac{1}{x}v = 0 \\ u' \cdot v = -1. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение относительно v.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v; \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \qquad ln|v| = -ln|x|; \qquad v = \frac{1}{x}.$$

Из второго уравнения находим u:

$$u' \cdot \frac{1}{x} = -1; \quad u' = -x; \quad \int du = -\int xdx; \quad u = -\frac{x^2}{2} + C_1, \text{ т.е.}$$

$$p(x) = u \cdot v = \frac{1}{x}\left(C_1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2}.$$

Из условия $y' = p = 0$ при $x = 1$ имеем:

$$0 = C_1 - \frac{1}{2}, \text{ т.е. } C_1 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)$, откуда

$$d\,y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)d\,x \quad \text{или} \quad y=\frac{1}{2}\left(ln|\,x\,|-\frac{x^2}{2}\right)+C_2.$$

Полагая $y=0$ при $x=1$, находим:

$$0=\frac{1}{2}\left(ln1-\frac{1}{2}\right)+C_2; \qquad -\frac{1}{4}+C_2=0; \qquad C_2=\frac{1}{4}.$$

Получаем требуемое частное решение: $y=\dfrac{1}{2}\left(ln|\,x\,|-\dfrac{x^2}{2}\right)+\dfrac{1}{4}.$

III. Если дифференциальное уравнение явно не содержит x, т.е. $F(y,\,y',\,y'')=0,$ то, полагая $y'=p(y),\quad y''=\dfrac{dp}{d\,y}\cdot p=p'p$, получим уравнение первого порядка $F(y,\,p,\,p')=0$ относительно $p(y)$.

Пример 3.2. Найти частное решение уравнения $y''=2y^3$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=y'(0)=1.$

Решение. Так как уравнение явно не содержит $x,$ то, полагая $y'=p(y),\quad y''=p'p$, получим: $p'p=2y^3$ или $pdp=2y^3d\,y$, откуда

$$\frac{p^2}{2}=\frac{1}{2}y^4+\frac{C_1}{2}, \quad p^2=y^4+C_1.$$

Так как $y'=p=1$ и $y=1$ при $x=0,$ то

$$1=1+C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1=0.$$

Следовательно, $p^2=y^4;\quad p=\pm y^2;\quad y'=\pm y^2;\quad \dfrac{d\,y}{y^2}=\pm d\,x;$

$$-\frac{1}{y}=\pm x+C_2.$$

Подставляя начальные условия, находим C_2:

$$-11=0+C_2; \qquad C_2=-1.$$

Получаем частное решение: $-\dfrac{1}{y}=\pm x-1$ или $y=\dfrac{-1}{\pm x-1}=\dfrac{1}{1\mp x}$, т.е. либо $y=\dfrac{1}{1-x}$ либо $y=\dfrac{1}{1+x}$.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

I. Уравнение вида

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \tag{4.1}$$

где p, q – постоянные, $y(x)$ – неизвестная функция, называется ***линейным однородным*** дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Если $k_1,\ k_2$ – корни ***характеристического уравнения***

$$k^2 + p \cdot k + q = 0, \tag{4.2}$$

то общее решение уравнения (4.1) записывается в одном из следующих трех видов:

1) $y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}$, если $k_1,\ k_2$ –вещественны и $k_1 \neq k_2$;

2) $y = e^{kx}\left(C_1 + xC_2\right)$, если $k_1 = k_2 = k$;

3) $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$, если $k_1 = \alpha + i\beta,\quad k_2 = \alpha - i\beta,$

$\beta \neq 0,\quad i$ – мнимая единица $\left(i^2 = -1\right)$.

$C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные.

Пример 4.1. Найти общие решения уравнений:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

б) $y'' + 2y' + 5y = 0$;

в) $y'' + 2y' + y = 0$.

Решение.

а) Решаем характеристическое уравнение: $k^2 - 3k + 2 = 0,$

$$k_{1,2} = 1{,}5 \pm 0{,}5;\qquad k_1 = 1,\quad k_2 = 2,$$

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$ – общее решение.

б) Решаем характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 5 = 0,$

$$k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i;\qquad k_1 = -1 + 2i,\quad k_2 = -1 - 2i,$$

$$\alpha = -1,\qquad \beta = 2.$$

$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$ – общее решение.

в) Решаем характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 1 = 0,$

$$k_1 = k_2 = k = -1.$$

$y = e^{-x}\left(C_1 + xC_2\right)$ – общее решение.

II. Общее решение ***линейного неоднородного*** дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \qquad (4.3)$$

можно записать в виде

$$y = y_o + y_*,$$

где y_o − общее решение соответствующего однородного уравнения (4.1), определяемое по формулам 1) – 3), а y_* − какое-либо частное решение данного неоднородного уравнения (4.3).

1). Функция y_* может быть найдена методом вариации произвольных постоянных, если решение y_o записано в виде $y_o = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Согласно этому методу решение y_* ищется в виде:

$$y_* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2,$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x), \quad C_1' = \dfrac{dC_1}{dx}, \quad C_2' = \dfrac{dC_2}{dx}. \end{cases}$$

Пример 4.2. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Решение Решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

$k^2 + 1 = 0; \quad k = \pm i \;\Rightarrow\; \alpha = 0, \;\; \beta = 1,$ следовательно,

$$y_o = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

тогда $y_1 = \cos x, \;\; y_2 = \sin x,$ и частное решение заданного неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_* = C_1(x) \cdot \cos x + C_2(x) \cdot \sin x.$$

Относительно функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot \cos x + C_2'(x) \cdot \sin x = 0 \\ C_1'(x) \cdot (-\sin x) + C_2'(x) \cdot \cos x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Из первого уравнения $C_2' = -C_1' \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x}$, подставляя это выражение для C_2' во второе уравнение, получим

$$-C_1' \cdot \sin x - C_1' \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} \quad \text{или} \quad -C_1' \cdot \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x},$$

$$C_1' = -1 \;\Rightarrow\; C_1 = -x,$$

$$C_2' = 1 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \;\Rightarrow\; C_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x|.$$

Решение y_* принимает вид:

$$y_* = -x \cdot cos x + sin x \cdot ln|\, sin x\,|.$$

Получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = y_o + y_* = C_1 \cdot cos x + C_2 \cdot sin x - x \cdot cos x + sin x \cdot ln|\, sin x\,| =$$
$$= \left(C_1 - x\right) \cdot cos x + \left(C_2 + ln|\, sin x\,|\right) \cdot sin x.$$

2). Частное решение y_* может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в случаях, когда $f(x)$ имеет специальный вид.

а) $f(x) = P_m(x),$ где

$$P_m(x) = A_o x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m \quad - \tag{4.4}$$

заданный многочлен степени m $\left(A_o \neq 0\right)$.

Частное решение y_* в этом случае следует искать в виде:

$$y_* = Q_m(x) = b_o x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m, \tag{4.5}$$

если число $k = 0$ не является корнем характеристического уравнения (4.2);

$$y_* = x \cdot Q_m(x),$$

если число $k = 0$ является один раз корнем характеристического уравнения (4.2) и

$$y_* = x^2 \cdot Q_m(x),$$

если число $k = 0$ является два раза корнем характеристического уравнения (4.2).

Коэффициенты $b_o,\ b_1, \ldots, b_m$ находятся методом неопределенных коэффициентов.

<u>Пример 4.3.</u> Решить уравнение $y'' + y' = 2x + 3$.

<u>Решение.</u> Находим сначала общее решение соответствующего однородного уравнения.

$$y'' + y' = 0, \quad k^2 + k = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -1,$$
$$y_o = C_1 + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Так как число $k = 0$ является один раз корнем характеристического уравнения, и $f(x) = 2x + 3$ − многочлен степени $m = 1$, то частное решение y_* ищем в виде

$$y_* = x \cdot \left(b_o x + b_1\right) = b_o x^2 + b_1 x.$$

Подставляя y_* в исходное уравнение, получим:

$$2b_o + 2b_o x + b_1 = 2x + 3 \quad \text{или} \quad 2b_o x + \left(2b_o + b_1\right) = 2x + 3 \quad \Rightarrow$$
$$2b_o = 2 \quad \text{и} \quad 2b_o + b_1 = 3,$$

следовательно, $b_o = 1$ и $b_1 = 1$, тогда $y_* = x(x + 1)$.

Общее решение исходного уравнения

$$y = y_o + y_* = C_1 + C_2 \cdot e^{-x} + x(x+1).$$

б) $f(x) = e^{ax} \cdot P_m(x)$, где $a = const$, $P_m(x)$ определяется соотношением (4.4).

В этом случае

$$y_* = e^{ax} \cdot Q_m(x),$$

если число $k = a$ не является корнем характеристического уравнения (4.2),

$$y_* = e^{ax} \cdot Q_m(x) \cdot x,$$

если число $k = a$ является один раз корнем характеристического уравнения (4.2) и

$$y_* = e^{ax} \cdot Q_m(x) \cdot x^2,$$

если число $k = a$ является два раза корнем характеристического уравнения (4.2).

Многочлен $Q_m(x)$ имеет вид (4.5).

Пример 4.4. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = x \cdot e^x$.

Решение. Находим сначала y_o.

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad k^2 - 2k + 1 = 0, \quad k_1 = k_2 = 1,$$

$$y_o = e^x \cdot (C_1 + xC_2).$$

Так как $a = 1$ является два раза корнем характеристического уравнения, и $m = 1$, то решение y_* ищем в виде

$$y_* = e^x \cdot (b_o x + b_1)x^2 = e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2\right).$$

Тогда $y_*' = e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2 + 3b_o x^2 + 2b_1 x\right)$,

$$y_*'' = e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2 + 6b_o x^2 + 4b_1 x + 6b_o x + 2b_1\right),$$

из исходного уравнения получим

$$e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2 + 6b_o x^2 + 4b_1 x + 6b_o x + 2b_1\right) -$$

$$-2e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2 + 3b_o x^2 + 2b_1 x\right) + e^x \cdot \left(b_o x^3 + b_1 x^2\right) = x \cdot e^x,$$

$$b_o x^3 + b_1 x^2 + 6b_o x^2 + 4b_1 x + 6b_o x + 2b_1 - 2b_o x^3 - 2b_1 x^2 - 6b_o x^2 -$$

$$-4b_1 x + b_o x^3 + b_1 x^2 = x,$$

$$6b_o x + 2b_1 = x,$$

$$6b_o = 1, \quad 2b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_o = \frac{1}{6}, \quad b_1 = 0.$$

Следовательно, $y_* = \dfrac{1}{6} x^3 \cdot e^x$, и общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = y_o + y_* = e^x \cdot \left(C_1 + xC_2\right) + \frac{1}{6}x^3 \cdot e^x .$$

в) $f(x) = e^{ax} \cdot \left[P_m(x) cos\, bx + R_s(x) sin\, bx\right]$, где $P_m(x)$ и $R_s(x)$ – многочлены степени m и s соответственно. Тогда

$$y_* = e^{ax} \cdot \left[S_N(x) cos\, bx + T_N(x) sin\, bx\right],$$

если число $k = a + ib$ не является корнем характеристического уравнения (4.2), и

$$y_* = x \cdot e^{ax} \cdot \left[S_N(x) cos\, bx + T_N(x) sin\, bx\right],$$

если число $k = a + ib$ является корнем характеристического уравнения (4.2), при этом $N = max(m, s)$, $S_N(x)$ и $T_N(x)$ – многочлены степени N с неопределенными коэффициентами.

Пример 4.5. решить уравнение $y'' + 4y = 4(sin\, 2x + cos\, 2x)$.

Решение. решаем соответствующее однородное уравнение.

$$y'' + 4y = 0, \quad k^2 + 4 = 0, \quad k = \pm 2i, \quad k_1 = 2i, \quad k_2 = -2i,$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2,$$

$$y_o = C_1 \, cos\, 2x + C_2 \, sin\, 2x.$$

Так как $P_m(x) = R_s(x) = 4,$ то $m = s = 0, \quad N = 0, \quad a = 0, \quad b = 2 \quad \Rightarrow$ $a + ib = 2i$ – один раз корень характеристического уравнения, частное решение y_* ищем в виде

$$y_* = x \cdot \left(b_o \, cos\, 2x + c_o \, sin\, 2x\right).$$

$$y_*' = b_o \, cos\, 2x + c_o \, sin\, 2x + 2x \cdot \left(-b_o \, sin\, 2x + c_o \, cos\, 2x\right),$$

$$y_*'' = 4 \cdot \left(-b_o \, sin\, 2x + c_o \, cos\, 2x\right) - 4x \cdot \left(b_o \, cos\, 2x + c_o \, sin\, 2x\right).$$

Подставляем в уравнение:

$$4 \cdot \left(-b_o \, sin\, 2x + c_o \, cos\, 2x\right) - 4x \cdot \left(b_o \, cos\, 2x + c_o \, sin\, 2x\right) +$$
$$+ 4x \cdot \left(b_o \, cos\, 2x + c_o \, sin\, 2x\right) = 4(sin\, 2x + cos\, 2x),$$

$$-b_o \, sin\, 2x + c_o \, cos\, 2x = sin\, 2x + cos\, 2x, \text{ откуда}$$

$$b_o = -1, \quad c_o = 1 \quad \text{и}$$

$$y_* = x \cdot \left(sin\, 2x - cos\, 2x\right).$$

Выписываем общее решение:

$$y = y_o = y_* = C_1 \, cos\, 2x + C_2 \, sin\, 2x + x \cdot \left(sin\, 2x - cos\, 2x\right).$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} x'_t = a_{11}x + a_{12}y \\ y'_t = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – заданные константы, а $x'_t = \dfrac{dx}{dt}$, $y'_t = \dfrac{dy}{dt}$.

Один из методов решения таких систем состоит в сведении ее к одному линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Это можно сделать, например, следующим способом.

Из первого уравнения системы находим $y = \dfrac{1}{a_{12}}\left(x'_t - a_{11}x\right)$, тогда $y'_t = \dfrac{1}{a_{12}}\left(x''_{tt} - a_{11}x'_t\right)$. Подставляя y и y'_t во второе уравнение, получим:

$$\frac{1}{a_{12}}\left(x''_{tt} - a_{11}x'_t\right) = a_{21}x + \frac{a_{22}}{a_{12}}\left(x'_t - a_{11}x\right) \quad \text{или}$$

$$x''_{tt} - a_{11}x'_t = a_{12}a_{21}x + a_{22}x'_t - a_{22}a_{11}x,$$

$$x''_{tt} - \left(a_{11} + a_{22}\right)x'_t - \left(a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22}\right)x = 0.$$

Полученное уравнение решаем, как показано в § 4. По найденному $x(t)$ вычисляем $y(t)$.

<u>Пример 5.1.</u> Решить систему $\begin{cases} x'_t = x - y \\ y'_t = -4x + y. \end{cases}$

<u>Решение.</u> Из первого уравнения находим

$$y = x - x'_t, \quad y'_t = x'_t - x''_{tt}.$$

Подставляем во второе уравнение:

$$x'_t - x''_{tt} = -4x + x - x'_t, \quad x''_{tt} - 2x'_t - 3x = 0.$$

Получаем однородное линейное уравнение. Находим его общее решение.

$$k^2 - 2k - 3 = 0, \quad k = 1 \pm 2, \quad k_1 = -1, \quad k_2 = 3,$$

$$x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}.$$

Тогда

Вы $y(t) = x - x'(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + C_1e^{-t} - 3C_2e^{3t} = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$.

Выписываем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} \\ y(t) = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}. \end{cases}$$

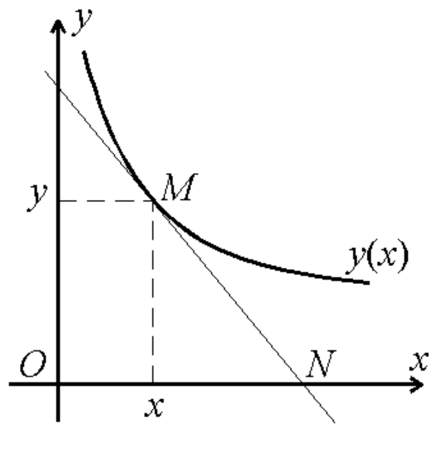
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Чтобы решить геометрические задачи, надо построить чертеж, обозначить искомую кривую через $y = y(x)$ (если задача решается в прямоугольных координатах) и выразить все упоминаемые в задаче величины через x, y, y'. Тогда данное в условии задачи соотношение превращается в дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию $y(x)$.

В физических задачах надо прежде всего решить, какую из величин взять за независимое переменное, а какую – за искомую функцию. Затем надо выразить, на сколько изменится искомая функция y, когда независимое переменное x получит приращение Δx, т.е. выразить разность $y(x+\Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию. В большинстве задач содержатся условия, с помощью которых модно определить значения постоянных, входящих в общее решение дифференциального уравнения. Иногда дифференциальное уравнение можно составить более простым путем, воспользовавшись физическим смыслом производной (если независимое переменное – время t, то $\frac{dy}{dt}$ есть скорость изменения величины y).

<u>Пример 6.1.</u> Найти кривую, проходящую через точку (2.1), у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

<u>Решение.</u>



$M(x, y) -$ точка касания; $N -$ точка пересечения касательной с осью абсцисс; $O -$ начало координат. По условию $|ON| = |MN|$. Если $X, Y -$ текущие координаты, $y = y(x) -$ искомая кривая, то уравнение касательной, проходящей через точку M, запишется в виде

$$Y - y = y'(x) \cdot (X - x).$$

Находим координаты точки N (точки пересечения касательной с осью абсцисс): $Y = 0 \;\; \Rightarrow \;\; X = x - \frac{y}{y'}$, тогда

$$|\,ON\,| = \left| x - \frac{y}{y'} \right|; \qquad |\,MN\,| = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2} = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2}.$$

Следовательно,

$$\left| x - \frac{y}{y'} \right| = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2}.$$

Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$x^2 - \frac{2xy}{y'} + \frac{y^2}{y'^2} = \frac{y^2}{y'^2} + y^2,$$

$$y'x^2 - 2xy = y'y^2 \quad \text{или} \quad y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Получили однородное уравнение. Проводим замену $y(x) = x \cdot u(x)$, $y' = u' \cdot x + u$, подставляем в уравнение:

$$u' \cdot x + u = \frac{2ux^2}{x^2\left(1-u^2\right)}, \qquad u' \cdot x + u = \frac{2u}{1-u^2},$$

$$u' \cdot x = \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{u+u^3}{1-u^2},$$

$$\int \frac{\left(1-u^2\right)du}{u+u^3} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2} \right) du = \int \frac{dx}{x},$$

$$ln|\,u\,| - ln\left(1+u^2\right) = ln|\,x\,| + ln|\,C\,|,$$

$$\frac{u}{1+u^2} = Cx \qquad \text{или} \qquad \frac{y}{x\left(1 + y^2/x^2\right)} = Cx, \text{ откуда}$$

$$y = C\left(x^2 + y^2\right).$$

Так как кривая проходит через точку с координатами $(2;\ 1)$, то

$$1 = C \cdot (4+1), \qquad C = \frac{1}{5}.$$

Окончательно получаем:

$$y = \frac{1}{5}\left(x^2 + y^2\right) \text{ или } x^2 + (y-2{,}5)^2 = 6{,}25 \ -$$

окружность радиуса $R = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$ с центром в точке $(0;\ 2{,}5)$.

Пример 6.2. Сосуд объемом в 20 литров содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 литр азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота ?

Решение. В качестве независимой переменной возьмем время t. Пусть $y(t)$ – количество азота (в литрах) в сосуде через время t с момента начала втекания азота в сосуд. Найдем, на сколько изменится количество азота за промежуток времени $[t;\ t+\Delta t]$.

За время Δt секунд в сосуд поступает $0{,}1\cdot\Delta t$ азота. Концентрация азота в момент t равна $p = y(t)/20$, следовательно, за время Δt вытекает вместе со смесью количество азота, равное

$$0{,}1\cdot p\cdot\Delta t = y(t)\cdot\Delta t/200.$$

Приращение количества азота за время Δt равно

$$y(t+\Delta t) - y(t) = 0{,}1\cdot\Delta t - y(t)\cdot\Delta t/200.$$

После деления на Δt получим

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = 0{,}1 - \frac{y(t)}{200}.$$

Переходя в этом уравнении к пределу при $\Delta t\to 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = y'(t)$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$y'(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{200}y(t) \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{200}(y-20) \quad\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y-20} = -\frac{1}{200}dt \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{y-20} = -\frac{1}{200}\int dt \quad\Rightarrow$$

$$ln|y-20| = -\frac{1}{200}t + C_1,$$ где C_1 – произвольная постоянная,

$$y-20 = e^{-\frac{1}{200}t+C_1}, \qquad y = 20 + e^{-\frac{1}{200}t}\cdot e^{C_1}.$$

Обозначим $e^{C_1} = C$ и перепишем решение в виде

$$y = 20 + C\cdot e^{-\frac{1}{200}t}.$$

В начальный момент $t=0$ содержание азота по условию задачи составляет 80%, т.е. концентрация равна 0,8, следовательно,

$$0{,}8 = \frac{y(0)}{20} \quad\Rightarrow\quad 0{,}8 = \frac{1}{20}\left(20 + C\cdot e^0\right) \quad\Rightarrow\quad C = -4.$$

Значит $y(t) = 20 - 4\cdot e^{-\frac{1}{200}t}$.

Теперь найдем момент времени t, когда концентрация азота становится равной 0,99.

$$0{,}99=\frac{y(t)}{20} \quad \Rightarrow \quad 0{,}99=\frac{1}{20}\left(20-4\cdot e^{-\frac{1}{200}t}\right);$$

$$19{,}8=20-4\cdot e^{-\frac{1}{200}t}; \qquad 4\cdot e^{-\frac{1}{200}t}=0{,}2;$$

$$4\cdot e^{-\frac{1}{200}t}=0{,}05; \qquad -\frac{1}{200}t=ln\,0{,}05;$$

$t=-200\cdot ln\,0{,}05=200\cdot ln(0{,}05)^{-1}=200\cdot ln\,20\approx 600$ секунд или

$t\approx 10$ минут

РЯДЫ
ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение. Рядом называется сумма бесконечного множества слагаемых

$$U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+\ldots \qquad (1)$$

Символы U_1, U_2, $\ldots U_n$ называются членами ряда.
Они могут быть числами, функциями, матрицами, а соответствующие ряды называются числовыми, функциональными, матричными.

Сокращено ряд обозначается так: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$.

Член U_n называется общим членом ряда.
Сумма n-первым членом ряда

$$S_n=U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n \qquad (2)$$

называется частичной суммой.
Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся S-суммой ряда.
Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то ряд расходится и суммы не имеет.

Необходимый признак сходимости ряда.
Если ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

Это признак не является достаточным, т.е. из стремления к нулю общего члена нельзя еще сделать заключение, что ряд сходится. Но если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Признаки сходимости рядов

Признак сравнения.
Теорема 1. А) Пусть ряды

$$U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+\ldots \qquad (3)$$
$$V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n+\ldots \qquad (4)$$

положительны. Если ряд (4) сходится, а члены ряда (3), начиная с некоторого, меньше соответствующих членов ряда (4), то ряд (4) сходится; б) Если ряд (4) расходится, а члены ряда (3), начиная с некоторого, больше соответствующих членов ряда (4), то ряд (3) расходится.

Теорема 2. Два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ одновременно сходятся или расходятся, если отношение U_n:V_n при $n \to \infty$ стремится к конечному и отличному от нуля пределу.

Признак Даламбера.

Если члены ряда знакоположительны и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = k \text{, то}$$

при k<1 ряд сходится, а при k>1 расходится.
Если k=1, то заключение о сходимости ряда сделать нельзя. Требуются дополнительные условия.

Радикальный признак Коши.
Если члены ряда положительны и $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{V_n} = k$, то при k<1 ряд сходится, а при k>1 расходится. При k=1 требуются дополнительные исследования.
Замечание. При исследовании сходимости ряда применение признака Даламбера оказывается практически более простым, чем признак Коши. Но радикальный признак Коши более сильный, чем признак Даламбера (он реже дает в ответе 1).

Интегральный признак Коши.
Если функция f(x) непрерывна, монотонно убывает и положительна для $x \geq a$, то ряд
F(1)+f(2)+f(3)+…+f(n)+...
сходится, если сходится несобственный интеграл
$\int_a^\infty f(x)dx$, т.е. он имеет конечное значение и ряд расходится, если этот интеграл равен ∞.
Замечание. Интегральный признак Коши позволяет сделать вывод о сходимости ряда, когда признаки Даламбера и Коши оказываются бессильными.
Тем не менее на практике применение интегрального признака часто вызывает затруднения, связанные с вычислением несобственного интеграла.

Знакочередующиеся ряды.
Определение. Ряд называется знакочередующимся, если два его соседних члена имеют противоположные знаки. Исследование сходимости знакочередующихся рядов проводится на основании теоремы Лейбница.
Теорема. Знакочередующийся ряд сходится, если: 1) Его члены убывают по абсолютной величине и 2) его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$.
Определение. Знакочередующийся ряд называется абсолютно сходящимся если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.
Если же ряд из абсолютных величин расходится, то знакочередующийся ряд сходится условно.
Оценка остатка знакочередующегося ряда.
Для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего теореме Лейбница, ошибка приближенного равенства $S \approx S_n$ ведет по абсолютной величине меньше первого отброшенного члена $|R_{n+1}| < U_{n+1}$, где

$R_n=U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots$

Остаток этого ряда имеет знак своего первого члена U_{n+1}.

Степенной ряд. Радиус сходимости.

Степенной ряд имеет вид

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (5)$$

где a_n-коэффициент степенного ряда. Сходимость степенного ряда зависит от величины x.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (5) сходится при некотором значении $x=x_0$, то он сходится, и притом абсолютно при всех значениях $|x| < |x_0|$. Если степенной ряд расходится при $x=x_0$, то он расходится и при всех $|x| > |x_0|$.

Определение. Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал (-R, R) такой, что для всякой точки x, которая лежит внутри этого интервала, ряд сходится, и к тому же абсолютно, а для точек x, лежащих вне его, ряд расходится.

Число R называется радиусом сходимости.

Радиус сходимости степенного ряда (5) можно определить через его коэффициенты

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (6)$$

или

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}\,. \qquad (7)$$

Радиус может быть равен 0, если интервал сходимости вырождается в точку, $R=\infty$, если ряд сходится на всей числовой оси.

Следует также исследовать сходимость ряда на концах интервала, т.е. при $x=\pm R$. Для рядов вида (8), (9) и (10)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^3 + \ldots + a_n x^{2n\ 1} + \ldots \qquad (8)$$

$$a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_n x^{2n} + \ldots \qquad (9)$$

$$a_0 + a_1 (x-\lambda) + a_2 (x-\lambda)^2 + \ldots + a_n (x-\lambda)^n + \ldots \qquad (10)$$

интервал сходимости находится по признаку Даламбера,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| < 1 \qquad (11)$$

Разложение функции в ряд Тейлора и Маклорена.

Рядом Тейлора функции f(x), которая определена в окрестности точки x_0 и в этой точке имеет конечные производные любого порядка, называется степенной ряд

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+... \qquad (12)$$

Если в формуле (12) положить x_0=0, то получится ряд Маклорена

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(0)x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+... \qquad (13)$$

Помещаем для справок разложения функций ℓ^x, sinx, cosx, ln(1+x) и $(1+x)^m$ в ряд Маклорена

$$\ell^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \quad (14)$$

x-любое

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+... \qquad (15)$$

x-любое

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+... \qquad (16)$$

x-любое

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+... \qquad (17)$$

-1<x<1

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+$$

$$+\frac{m(m-1)...(m-(n-1)m)}{n!}+... \qquad (18)$$

-1<x<1

Разлагать в ряды Тейлора и Маклорена можно непосредственно и используя известные размножения (14-18). Примеры разложения приведены ниже.

Пример 1. Найти сумму ряда.

Доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Представим общий член ряда U_n в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

.

Умножая на знаменатель левой части, придем к тождеству

1=A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1).

Полагая последовательно n = 0, -1, -2 находим

$$n = 0 \qquad 1 = 2A, \qquad A = \frac{1}{2}$$

$$n = -1 \qquad 1 = -B, \qquad B = -1$$

$$n = -2 \qquad 1 = 2C, \qquad C = \frac{1}{2}$$

Таким образом

$$U_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$

или

$$U_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}).$$

Отсюда

$$U_1 = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3})$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4})$$

$$U_3 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5})$$

$$S_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2})$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, ряд сходится и имеет суммой $\frac{1}{4}$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}$.

Применим признак Даламбера

$$U_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}; \qquad U_{n+1} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)(3n+1)}{2^{n+1}\cdot (n+1)!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot4\cdot7...(3n-2)(3n+1)\cdot2^{n+1}\cdot n!}{2^{n+2}\cdot(n+1)!\cdot1\cdot4\cdot7...(3n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}=\frac{3}{2}>1.$$

Так как предел равен $\frac{3}{2}>1$, то этот ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{10n+9}$ - знакочередующийся.

Члены ряда по абсолютной величине убывают

$$\frac{2}{19}>\frac{3}{29}>\frac{4}{39}>\frac{5}{49}>...$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{10+\frac{9}{n}}=\frac{1}{10}\neq0.$$

Теорема Лейбница для данного ряда не выполняется, значит данный ряд расходится.

Пример 4. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n-1)^2}$.

Члены данного ряда по абсолютной величине убывают.

$$\frac{1}{2^2}>\frac{1}{5^2}>\frac{1}{8^2}>\frac{1}{11^2}>...$$

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n-1)^2}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Следовательно, данный ряд сходится по теореме Лейбница.

Чтобы решить вопрос об абсолютной сходимости этого ряда, составим ряд из абсолютных величин его членов.

Получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)^2}$;

Применим интегральный признак Коши

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(3x-1)^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{(3x-1)^2}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x-1}\right)\Bigg|_1^b=-\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3b-1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}.$$

Интеграл сходится, поэтому сходится ряд из абсолютных величин. Значит, заданный ряд сходится абсолютно.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n+2}$.

Применим признак сравнения рядов.

Для сравнения возьмем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ который расходится, как часть известного расходящегося гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+2},$$

значит по теореме сравнения рядов данный ряд тоже расходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^{n^2}$.

Применим радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3+2n}{n+1}\cdot 4\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4(2n+3)}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+12}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8+\frac{12}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = 8^{\infty} = \infty > 1.$$

Значит, данный ряд расходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

Сначала сравним ряды

$$\frac{n}{(n^2-1)\ln n} > \frac{n}{n^2\ln n} = \frac{1}{n\ln n}.$$

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Применим интегральный признак Коши к этому ряду:

$$\int_2^{\infty}\frac{dn}{n\ln n} = \int_2^{\infty}\frac{d(\ln n)}{\ln n} = \ln\ln n\Big|_2^{\infty} = \infty - \ln\ln 2 = \infty.$$

Так как $\frac{n}{(n^2-1)\ln n} > \frac{1}{n\ln n}$, то данный ряд расходится так же, как $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Пример 8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n+2}x^n$.

Найдем радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+3)}{(n+2)(n+1)^3} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}}_{1} = 1.$$

Так как R = 1, то ряд сходится в промежутке (-1; 1).
Проверим концы этого промежутка.

(-1): подставим в данный ряд, получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{n+2}$ - знакочередующийся.
Исследуем его по теореме Лейбница.

1) $\frac{1}{3}<\frac{8}{4}<\frac{27}{5}<...$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = \frac{1}{0} = \infty$.

Ни одно условие теоремы Лейбница не выполняется, значит ряд расходится. Значит x = -1 не входит в интеграл сходимости.

(+1): подставим в данный ряд, получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n+2}$.

По необходимому признаку сходимости этот ряд расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n+2} = \infty.$$

Значит ряд сходится при –1 < x < 1.

<u>Пример 9</u>. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$.

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}\cdot 2^n(n+3)}{2^{n+1}(n+4)(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|}{2}\cdot\frac{n+3}{n+4} = \frac{|x-1|}{2} < 1.$$

$$\frac{|x-1|}{2} < 1;$$

$$|x-1| < 2;$$

$$-2 < x - 1 < 2;$$

$$-1 < x < 3.$$

Проверим концы этого интервала

(-1): $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1-1)^n}{2^n(n+3)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n(n+3)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}$.

Этот ряд сходится по теореме Лейбница, т.к.

$$\frac{1}{4}>\frac{1}{5}>\frac{1}{6}>\frac{1}{7}>...$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}=\frac{1}{\infty}=0.$$

(+3): $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-1)^n}{2^n(n+3)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n(n+3)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$.

Полученный ряд расходится, как часть гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Значит интервал сходимости $-1\le x<3$.

<u>Пример 10</u>. Пользуясь основными разложениями, написать разложение в степенной ряд (ряд Маклорена) функции $y=\sqrt{1+x}$.

Применим биноминальную формулу.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\ldots n}x^n+\ldots\ .$$

Формула верна для всех x, удовлетворяющих условию $-1 < x < 1$.

Так как $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$, то $m=\frac{1}{2}$.

Тогда

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\ldots$$

После упрощения получим

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}x^n+\ldots$$

Это разложение верно в $-1 < x < 1$, так же как и биноминальное разложение.

<u>Пример 11</u>. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$ функцию $y=\frac{1}{x}$.

Запишем ряд Тейлора для функции f(x).

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\ldots$$

Найдем производные от функции $y=\frac{1}{x}$.

$$y=\frac{1}{x} \qquad y(3)=\frac{1}{3}$$

$$y'=-\frac{1}{x^2} \qquad y'(3)=-\frac{1}{3^2}$$

$$y''=\frac{2}{x^3} \qquad y''(3)=\frac{2}{3^3}$$

$$y'''=-\frac{2\cdot 3}{x^4} \qquad y'''(3)=-\frac{2\cdot 3}{3^4}$$

Подставим в ряд Тейлора

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2\cdot 1!}(x-3)+\frac{2}{3^3\cdot 2!}(x-3)^2-\frac{2\cdot 3}{3^4\cdot 3!}(x-3)^3+\ldots$$

После преобразования получим

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{x-3}{3^2}+\frac{(x-3)^2}{3^3}-\frac{(x-3)^3}{3^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$$

Найдем интервал сходимости полученного ряда. Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^n\cdot 3^n}{3^{n+1}(x-3)^{n-1}}\right|=\frac{1}{3}|x-3|<1;$$

$$|x-3|<3;$$

$$-3 < x-3 < 3;$$

$$0 < x < 6.$$

Исследуем концы этого интервала. Подставим x = 0 в данный ряд, получим

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{3^2}{3^3}+\frac{3^3}{3^4}+\ldots=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots$$

Данный ряд расходится, т.к. у него $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\frac{1}{3}\neq 0$.

Исследуем точку x = 6.

$$\frac{1}{3}-\frac{3}{3^2}+\frac{3^2}{3^3}-\frac{3^3}{3^4}+\ldots=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots$$

Данный ряд расходится, как колеблющийся ряд.

Значит, полученное разложение в ряд Тейлора функции $y=\frac{1}{x}$ в окрестности точки $x_0 = 3$ справедливо в (0; 6).

Пример 12. Вычислить $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью 0,001. Известно, что

$$\sin x=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Тогда, разделив почленно на x, получим, что

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$$

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\frac{x^9}{9\cdot 9!}+\cdots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\frac{1}{9\cdot 9!}-\cdots=1-0{,}0555+0{,}0016-0{,}00003\approx 0{,}946$$

При вычислении интеграла мы взяли только 3 члена ряда, т.к. четвертый член 0,00003<0,001 точности, с которой требуется вычислить.

<u>Пример 13</u>. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Разложим подинтегральную функцию в степенной ряд, используя разложение $\left(1+x\right)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots$ у нас x~x^4,

m=-$\frac{1}{2}$, тогда получим

$$\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^4+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^8+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^{12}+\cdots$$

$$=1-\frac{x^4}{2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^8-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^{12}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^{16}+\cdots$$

Подставим полученное разложение под знак интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x^4}{2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^8-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^{12}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^{16}+\cdots\right)dx=$$

$$=x-\frac{x^5}{5\cdot 2}+\frac{1\cdot 3x^9}{2^2\cdot 2!\cdot 9}-\frac{1\cdot 3\cdot 5x^{13}}{2^3\cdot 3!\cdot 13}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7x^{17}}{2^4\cdot 4!\cdot 17}+\cdots\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}\approx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^5\cdot 5\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 9\cdot 3^9}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!\cdot 3^{13}\cdot 13}+\cdots\approx$$

$$\approx 0{,}3333-0{,}0004+0{,}00002\approx 0{,}333$$

т.к. 0,000)4<00,001, поэтому второй член ряда можно отбросить.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Комбинаторика

Размещения – комбинации, составленные из N различных элементов по n элементам, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех различных размещений из N элементов по n элементам равно:

$$(A_N^n)_{без\ повт.} = \frac{N!}{(N-n)!}.$$

Число размещений с повторениями:

$$(A_N^n)_{с\ повт.} = N^n.$$

Перестановки – комбинации, состоящие из одних и тех же N различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Другими словами, перестановками из N элементов называется размещение при n = N. Число всех перестановок из N элементов:

$$(P_N)_{без\ повт.} = A_N^N = N!.$$

Число перестановок с повторениями:

$$(P_N)_{с\ повт.} = N^N.$$

Сочетания – комбинации, составленные из N различных элементов по n элементам, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число всех сочетаний из N по n равно:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Случайные события

Событие, которое может произойти, а может и не произойти, называется случайным событием. Если может произойти и событие A, и событие B, то события умножаются AB, если происходит или событие A, или событие B, то события складываются A + B.

Аксиоматическое определение вероятности : числовая функция P, определенная на классе событий S, называется вероятностью, если верны аксиомы:

A1) S – алгебра событий,

A2) аксиома неотрицательности $P(A) \geq 0\ \forall A \in S$,

A3) аксиома нормированности $P(\Omega) = 1$, Ω - пространство элементарных событий,

A4) аксиома конечной аддитивности $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если A и B несовместны (т.е. $A \cap B = \varnothing$), А5) аксиома непрерывности : $\forall\{A_n\}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, $A_n \in S$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ имеет место

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0.$$

Аксиоматическое определение вероятности предложено академиком А.Н. Колмогоровым в 1933 году.

Свойства вероятности (следуют из А2 по А4).

1. Вероятность противоположного события
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. Вероятность невозможного события
$P(\varnothing) = 0$.
3. Если $A \subset B$, то $P(B - A) = P(B) - P(A)$ и $P(A) \le P(B)$.
4. Для каждого случайного события $0 \le P(A) \le 1$.
5. Теорема сложения двух произвольных событий $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, то же
для трех событий: $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

Классическое определение вероятности : $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$, (1)

где $|A|$ - число элементарных событий, входящих в событие А,

$|\Omega|$ - общее число элементарных событий.

Формула (1) справедлива, если множество элементарных событий конечно, а элементарные события равновероятны.

Геометрическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{mA}{m\Omega}, \tag{2}$$

где mA - мера множества А;

$m\Omega$ - мера множества Ω.

В качестве меры обычно принимают для одномерных множеств – длину, для двумерных – площадь, для трехмерных – объем.

Формула (2) справедлива, когда множество элементарных событий бесконечно, а точка равномерно распределена на множестве Ω.

Условной вероятностью события В при условии, что произошло событие А, называется:

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) \ne 0.$$

Два события А и В независимы, если

$P(B \mid A) = P(B)$, если $P(A) \ne 0$

или

$P(A \mid B) = P(A)$, если $P(B) \ne 0$.

Условие независимости событий удобно записывать в симметричном виде:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема произведения вероятностей

$$P(AB) = P(A)\, P(B|A).$$

То же для трех событий

$$P(ABC) = P(A)\, P(B|A)\, P(C|AB).$$

Формула полной вероятности: если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – разбиения (т.е. $A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega$, $A_iA_j=\varnothing$, $\forall i, j \quad i \neq j$) и $P(A_i)>0$, то $\forall$ B

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k).$$

Формула Байеса: если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – разбиения и $P(A_i) > 0$ $\forall i$, $P(B) > 0$, то

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}.$$

Случайные величины

Случайная величина – величина, принимающая те или иные значения в зависимости от случая. Случайные величины обозначаются греческими буквами ξ, η, ζ … (в некоторых случаях большими латинскими буквами X, Y, Z, …) Значения, которые принимают случайные величины, обозначаются малыми латинскими буквами x, y, z,…

Функцией распределения случайной величины ξ называется функция:

$$F_\xi(x) = P(\xi<x).$$

Она обладает следующими свойствами:

1. $F_\xi(x)$ – неубывающая функция на $(-\infty,+\infty)$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$.
4. $F_\xi(x)$ - непрерывна слева: $F_\xi(x-0) = F_\xi(x)$.

Закон распределения случайной величины ξ называется дискретным, если существует конечное или счетное множество значений $x_1, x_2, \ldots$, которые может принимать случайная величина, таких, что:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi = x_n) = 1,$$

а случайная величина, имеющая дискретный закон распределения, называется дискретной случайной величиной.

Закон распределения случайной величины ξ называется абсолютно непрерывным, если существует неотрицательная кусочно - непрерывная функция p_ξ (x), называемая плотностью распределения (вероятностей) случайной величины ξ, такая, что:

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx,$$

а случайная величина, имеющая абсолютно непрерывный закон распределения, называется абсолютно непрерывной случайной величиной.

В некоторых случаях функция распределения обозначается F(x), а плотность распределения - f (x).

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. $p_\xi(x)=F'_\xi(x)$ в точках непрерывности $p_\xi(x)$;
2. $p_\xi(x) \geq 0, \forall x$;
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1.$

Вероятности событий:

$$P(\xi \geq x)=1 - F_\xi(x)= \int\limits_{x}^{+\infty} p_\xi(x)dx;$$

$$P(x_1 \leq \xi < x_2)=F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)= \int\limits_{x_1}^{x_2} p_\xi(x)dx, \qquad (3)$$

$$P(\xi = x)=F_\xi(x+0)- F_\xi(x)=0.$$

Первое равенство в формулах (3) справедливо для любых случайных величин, второе равенство - для абсолютно непрерывных случайных величин.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется число:

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P(\xi = x_n),$$

если ряд абсолютно сходится. Математическим ожиданием абсолютно непрерывной случайной величины называется число:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx,$$

если интеграл абсолютно сходится.

Свойства математического ожидания:

1. MC = C, если C - неслучайная величина.
2. $M(C\xi) = CM\xi$.
3. $M(\xi_1 \pm \xi_2) = M\xi_1 \pm M\xi_2$.
4. $M(\xi_1\xi_2)=M\xi_1 \cdot M\xi_2$, если ξ_1, ξ_2 - независимые случайные величины.

Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называется число $D\xi=M(\xi - M\xi)^2$, если математическое ожидание существует. Величина $\sigma_\xi=\sqrt{D\xi}$ называется средним квадратическим отклонением.

Для вычисления дисперсии используется формула:

$$D\xi=M\xi^2 - (M\xi)^2 .$$

Свойства дисперсии:

1. $D\xi \geq 0$.
2. $DC=0$.
3. $D(C\xi)=C^2 D\xi$.
4. $D(\xi_1 \pm \xi_2)=D\xi_1+ D\xi_2$, если ξ_1,ξ_2 – независимы.

Наиболее важные распределения

Дискретные:

1. Биномиальное распределение. Схема испытаний, в которой производится n независимых испытаний, каждое из которых может иметь два исхода: «успех» с вероятностью p и «неудача» с вероятностью $q = 1 - p$, называется схемой Бернулли. Вероятностью события, что при n независимых испытаниях по схеме Бернулли произойдет равно k успехов, равна (формула Бернулли):

$$P_n(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,\ldots,n . \qquad (4)$$

Значение $k = k_0$, при котором вероятность (4) принимает наибольшее значение, называется наивероятнейшим числом «успехов», которое определяется:

$$k_0 = \begin{cases} [(n+1)p], \text{если } (n+1)p - \text{не целое}, \\ (n+1)p-1, (n+1)p, \text{если } (n+1)p - \text{целое}, \end{cases}$$

здесь [a] – означает целую часть числа a.

Математическое ожидание $M\xi = np$, дисперсия $D\xi = npq$.

Теорема Пуассона. Если в схеме Бернулли $n \to \infty$ и $p \to 0$, так, что $np = \lambda\in(0,+\infty)$, то $\forall к = 0, 1,\ldots$ $$\lim_{n \to \infty} P_n(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} .$$

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если в схеме Бернулли $n\to\infty, 0 < p < 1$, p - постоянная величина, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ ограничена, то:

$$P_n(\xi = k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$,

Интегральная теорема Муавра - Лапласа. Если $0 < p < 1$ и p - постоянно, то при $n\to\infty$:

$$P_n(k_1 \leq \xi \leq k_2)=\Phi(x_2) - \Phi(x_1) ,$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-x^2/2}dx,$

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}, x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функции φ(x) и Φ(x) затабулированы, и таблицы есть во многих учебниках по теории вероятностей. Однако здесь надо знать, что если x < 0, то нужно воспользоваться четностью φ(-x)=φ(x) функции φ(x) и нечетностью Φ(-x) = -Φ(x) функции Φ(x). Если x >5, то принимают с большой степенью точности Φ(x)=0,5.

2. Геометрическое распределение. Если производятся независимые испытания, в каждом из которых возможны два исхода - «успех» с вероятностью p или «неудача» с вероятностью q = 1-p, то вероятность, что будет произведено k испытаний до первого появления «успеха» будет равна: $P(\xi=k)=q^{k-1}p$.

3. Гипергеометрическое распределение. Пусть в урне N шаров, из них K белых, N- K черных. Наудачу из урны взято n шаров. Тогда вероятность того, что среди них будет ровно k белых шаров, равна:

$$P(\xi=k)=\frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

4. Распределение Пуассона с параметром λ>0

$$P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,\ldots$$

Математическое ожидание Mξ = λ, дисперсия D ξ = λ.

Распределением Пуассона описывается простейший поток событий.

Абсолютно непрерывные законы распределения.

1. Нормальное распределение с параметрами a, σ > 0

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание Mξ = a, дисперсия Dξ = σ^2. Вероятность попадания в заданный интервал:

$$P(x_1<\xi<x_2)=P(x_1\le\xi\le x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right). \quad (5)$$

Правило «трех сигм»

$$P(|\xi-M\xi|<3\sigma)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973.$$

2. Показательное распределение с параметром λ > 0

$$p_\xi(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0.\end{cases}$$

Математическое ожидание Mξ = 1/λ, дисперсия Dξ = 1/λ^2.

3. Равномерное распределение:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Математическое ожидание Mξ = $\dfrac{a+b}{2}$, дисперсия Dξ = $\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Примеры решения задач

Задача 1.

Чему равняется вероятность открыть с первого раза автоматическую камеру хранения?

Решение.

Пусть событие А - открытие камеры хранения с первого раза. Воспользуемся классическим определением вероятности, т.к. набор любого номера от А000 до К999 равновероятен: $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$,

где $|A| = 1$, т. к. существует единственный номер, открывающий камеру хранения;

$|\Omega| = (A_{10}^4)_{\text{с повт.}} = 10^4$.

Ответ: P(A)=0,0001.

Задача 2.

В ящике 30 деталей, среди которых 27 деталей не бракованных. В ОТК наудачу извлекают 5 деталей. Найти вероятность, что брак не будет обнаружен.

Решение.

Событие А - брак не будет обнаружен. Опять используем классическое определение вероятности: $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$,

где $|A| = C_{27}^5 = \dfrac{27!}{5!22!}$ – число, показывающее, сколькими способами можно достать из 27 небракованных 5 небракованных деталей; $|\Omega| = C_{30}^5 = \dfrac{30!}{5!25!}$ – число, показывающее, сколькими способами можно достать любые 5 деталей из 30 деталей.

$$P(A) = \frac{27!25!}{22!30!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{30 \cdot 29 \cdot 28} = 0{,}567.$$

Ответ: 0,567.

Замечание. Учитывая, что $C_3^0 = 1$, искомую вероятность можно записать в виде:

$$P(A) = \frac{C_{27}^5 \cdot C_3^0}{C_{30}^5} = P(\xi = 5),$$

при этом случайная величина ξ имеет гипергеометрическое распределение.

<u>*Задача 3 (задача о встрече).*</u>

Два студента условились встретиться в библиотеке между 16 и 17 часами. Пришедший первым ждет другого в течении получаса, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если равновероятен их приход в любой момент времени в течении часа.

Решение.

Так как приход студентов в течении часа равновероятен, то применим геометрическое определение вероятности:

$$P(A) = \frac{mA}{m\Omega} \ .$$

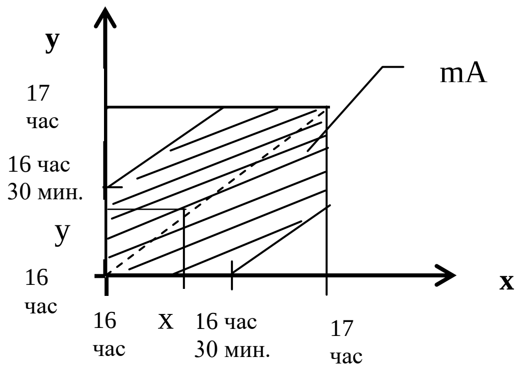


Рис. 1. К задаче о встрече.

Пусть х – время прихода первого студента, у – время прихода второго студента. Если точка (х,у) попала в заштрихованную область (рис. 1), то студенты встретятся, если нет, то один уйдет раньше, чем второй придет. Поэтому mA равно площади заштрихованной области: mA = 0,75 час^2, mΩ равна площади квадрата: mΩ = 1 час^2. Тогда

$$P(A) = \frac{mA}{m\Omega} = 0{,}75 \, .$$

Ответ: 0,75.

<u>*Задача 4.*</u>

Студент выучил 41 из 50 вопросов предлагающихся на экзамене. Найти вероятность того, что он ответит верно на 3 вопроса и получит отличную оценку (событие А), не ответит ни на один вопрос и получит неудовлетворительную оценку (событие В).

Решение:

1) Пусть A_1 – студент отвечает верно на первый вопрос, A_2 – то же, но на второй вопрос,

A_3 – то же, но на третий вопрос. Очевидно, что $A = A_1 A_2 A_3$, ибо студент должен ответить верно на все три вопроса.

По теореме умножения вероятностей:

$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2)$,

$P(A_1) = 41/50$, $P(A_2 | A_1) = 40/49$, $P(A_3 | A_1 A_2) = 39/48$.

$P(A) = (41/50) \cdot (40/49) \cdot (39/48) = 0{,}544$.

2) Пусть B_i – студент не ответит на i – ый вопрос, $i = 1, 2, 3$.

$P(B) = P(B_1 B_2 B_3) = P(B_1) P(B_2 | B_1) P(B_3 | B_1 B_2) = 9/50 \cdot 8/49 \cdot 7/48 = 0{,}004$.

Ответ: $P(A) = 0{,}544$, $P(B) = 0{,}004$.

<u>*Задача 5.*</u>

Три охотника независимо друг от друга одновременно стреляют по волку. Вероятность попадания в цель первого охотника равна 0,6, второго – 0,7, третьего – 0,8. Определить вероятность того, что волк будет убит (событие А), волк будет убит, но шкура будет испорчена (больше одного попадания) (событие В).

Решение:

Пусть A_i – i-ый охотник попал в цель, $\overline{A_i}$ - i-ый охотник не попал в цель. Распишем пространство элементарных событий:

$$\Omega = \overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1A_2A_3.$$

Событие, например, $\overline{A_1}\overline{A_2}A_3$ означает, что третий охотник попал в цель, а остальные не попали.

Событие

$$A = A_1\overline{A_2}\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1A_2A_3 = \Omega - \overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}.$$

Событие $B = \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + A_1A_2A_3$.

По свойству вероятности 3:

$P(A) = P(\Omega - \overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}) = P(\Omega) - P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3})$.

По аксиоме А3 $P(\Omega) = 1$, а по теореме умножения вероятностей:

$P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})\ P(\overline{A_2} | \overline{A_1})\ P(\overline{A_3} | \overline{A_1}\overline{A_2})$. Так события A_1, A_2, A_3 независимы, то независимы и события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$.

Поэтому $P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})\ P(\overline{A_2})\ P(\overline{A_3})$.

Но $P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Итак, $P(A) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}976$.

По теореме сложения вероятностей (события $\overline{A_1}A_2A_3, A_1\overline{A_2}A_3, A_1A_2\overline{A_3}, A_1A_2A_3$ несовместны) и по теореме умножения независимых событий:

P(B) = $P(\overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2\overline{A}_3 + A_1 A_2 A_3) = P(\overline{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1\overline{A}_2 A_3) +$
$+ P(A_1 A_2\overline{A}_3) + P(A_1 A_2 A_3) =$ P$(\overline{A}_1)$P(A_2) P(A_3) + P(A_1) P$(\overline{A}_2)$P(A_3) + P(A_1) P(A_2) P$(\overline{A}_3)$+ +P(A_1) P(A_2) P(A_3) =0,4 · 0,7 · 0,8 + 0,6 · 0,3 · 0,8 + 0,6 · 0,7 · 0,2 + 0,6 · 0,7 · 0,8 = 0,788.

Ответ: P(A) = 0,976, P(B) = 0,788.

Задача 6.

При одном цикле осмотра радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект будет обнаружен с вероятностью 0,7. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Проведено 10 циклов осмотра. Какова вероятность того, что объект будет обнаружен?

Решение:

Пусть A – объект будет обнаружен (хотя бы в одном цикле), A_i – объект будет обнаружен в i – том цикле. Можно записать:

$\Omega = A + \overline{A}$, $A = \Omega - \overline{A}$.

Но $\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2 ... \overline{A}_{10}$.

Тогда P(A) = P$(\Omega - \overline{A})$= P(Ω) – P $(\overline{A})$ = 1 - P $(\overline{A})$ = 1 – P$(\overline{A}_1)$ P$(\overline{A}_2)$ … P$(\overline{A}_{10})$.

А так как P$(\overline{A}_1)$ = P$(\overline{A}_2)$ = … = P$(\overline{A}_{10})$ = 1 – 0,7 = 0,3 ,

P(A) = 1 – $0{,}3^{10}$ =0,9999940951.

Ответ: 0,9999940951.

Задача 7.

Два стрелка A и B по очереди стреляют по цели. Выигрывает тот, кто попадет первым. Вероятность попадания при одном выстреле для первого стрелка равна 0,2, для второго - 0,3. Первым стреляет A. Найти вероятность выигрыша для каждого стрелка.

Решение.

Пусть:

A - выигрыш стрелка A;

B - выигрыш стрелка B;

A_i - стрелок A попал при i - ом выстреле;

B_i - стрелок B попал при i - ом выстреле;

Тогда:

$$A = A_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1 A_2 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2 A_3 + \ldots$$

$$B = \overline{A}_1 B_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2 B_2 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{A}_3 B_3 + \ldots$$

Применяя теоремы сложения и умножения вероятностей, получим:

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(A_2) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{B}_2)P(A_3) + \ldots =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2 + 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2 + \ldots =$$
$$= 0{,}2\left[1 + 0{,}8\cdot 0{,}7 + (0{,}8\cdot 0{,}7)^2 + \ldots\right] \quad .$$

В квадратных скобках стоит сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q = 0,8 · 0,7 = 0,56 и первым членом b_1 = 1. Тогда

$$P(A) = 0{,}2\frac{1}{1-0{,}56} = 0{,}455.$$

Аналогично:

$$P(B) = P(\overline{A}_1)P(B_1) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(B_2) + P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{B}_2)P(\overline{A}_3)P(B_3)+\ldots=$$

$$= 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 + 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 + \ldots =$$

$$= 0{,}8\cdot 0{,}3\left[1 + 0{,}8\cdot 0{,}7 + (0{,}8\cdot 0{,}7)^2 + \ldots\right] = 0{,}24\cdot\frac{1}{1-0{,}56} = 0{,}545.$$

Заметим, что вероятность того, что стрельба будет длиться бесконечно долго(событие С) равна нулю:

$$P(C) = P(\Omega - A - B) = P(\Omega) - P(A) - P(B) = 1 - 0{,}455 - 0{,}545 = 0.$$

Ответ: P(A) = 0,455, P(B) = 0,545.

Задача 8.

Изделия проверяются двумя контролерами. Вероятность того, что изделие попадет к первому контролеру, равна 0,6; второму – 0,4. Вероятность того, что годное изделие будет забраковано, для первого контролера равна 0,06, для второго – 0,02. При проверке брака наудачу взятое изделие оказалось годным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось первым контролером.

Решение.

В этой задаче нельзя использовать классическое определение, т.к. элементарные события не равновероятны, хотя их число конечно. Для таких задач пригодна формула Байеса.

Пусть:

A_1 - изделие попало к первому контролеру;

A_2 - изделие попало ко второму контролеру;

B - изделие годное.

Тогда $P(A_1) = 0{,}6$, $P(A_2) = 0{,}4$, $P(B/A_1) = 0{,}94$, $P(B/A_2) = 0{,}98$ и

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94 + 0{,}4\cdot 0{,}98} = 0{,}590.$$

Заметим, что $P(A_1) + P(A_2) = 1$, т.е. A_1 и A_2 - разбиения. Именно в этом случае справедливы формулы полной вероятности и Байеса.

Ответ: 0,590.

Задача 9.

Два равносильных шахматиста играют в шахматы, причем ничьи во внимание не принимаются. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести?

Решение:

Задача удовлетворяет схеме Бернулли: производятся n (4 или 6) независимых испытаний (шахматные партии), в каждом из которых два исхода: выигрыш или проигрыш, причем выигрыш с вероятностью p = ½ (т.к. противники равносильны) и проигрыш с вероятностью q = 1 – p = ½.

По формуле Бернулли:

$P_4(\xi=2) = C_4^2\, p^2 q^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^2} = \frac{3}{8}$.

$P_6(\xi=3) = C_6^3\, p^3 q^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^3} = \frac{5}{16}$.

Ответ: $P_4(\xi=2) > P_6(\xi=3)$.

Задача 10.

Вероятность рождения мальчика равна 0,515 (статистические данные). Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных будет 50 мальчиков (событие A), от 40 до 60 мальчиков (событие B). Определить наивероятнейшее число мальчиков.

Решение:

Задача соответствует схеме Бернулли, однако использовать формулу Бернулли затруднительно, т.к. n = 100 велико. Применим локальную теорему Муавра – Лапласа (теорема Пуассона неприменима, т.к. p = 0,515 и к нулю не стремится)

$P(A) = P_{100}(\xi=50) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Здесь k = 50, n = 100, p = 0,515, q = 0,485 .

Тогда $x = \frac{50-100\cdot 0{,}515}{\sqrt{100\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}} = -\frac{1{,}500}{5{,}000} = -0{,}3$, $\varphi(-0{,}3) = \varphi(0{,}3) = 0{,}3814$ (найдено по таблице [5], хотя можно вычислить на калькуляторе по формуле

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$),

$P(A) = \frac{0{,}3814}{5{,}000} = 0{,}0763$.

По интегральной теореме Муавра – Лапласа:

$P(B) = P_{100}(40 \le \xi \le 60) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,

$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40-100\cdot 0{,}515}{5{,}000} = -2{,}30$,

$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{60-100\cdot 0{,}515}{5{,}000} = 1{,}70$,

$P(B) = \Phi(1{,}70) - \Phi(-2{,}30) = \Phi(1{,}70) + \Phi(2{,}30) = 0{,}4554+0{,}4893 = 0{,}9447$.

Функция Φ(x) найдена по таблице [5]. Так как (n + 1) p = (100 + 1) · 0,515 = 52,015 – число нецелое, то наивероятнейшее число мальчиков равно $k_0 = [(n+1)p] = [52{,}015] = 52$.

Ответ: P(A) = 0,0763, P(B) = 0,9447, $k_0 = 52$.

Задача 11.

Устройство состоит из четырех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение

Пусть случайная величина ξ - число отказавших элементов в одном опыте. Тогда по формуле Бернулли:

$$P_4(\xi = 0) = C_4^0 p^0 q^4 = 1 \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561 \ ,$$

$$P_4(\xi = 1) = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916 ,$$

$$P_4(\xi = 2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2!2!} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486 ,$$

$$P_4(\xi = 3) = C_4^3 p^3 q^1 = 4 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9 = 0{,}0036 ,$$

$$P_4(\xi = 4) = C_4^4 p^4 q^0 = 1 \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001 .$$

Закон (ряд) распределения.

ξ	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{4} P(\xi = k) = 1{,}0000$.

Математическое ожидание:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{4} kP(\xi = k) = 0 \cdot 0{,}6561 + 1 \cdot 0{,}2916 + 2 \cdot 0{,}0486 + 3 \cdot 0{,}0036 + 4 \cdot 0{,}0001 = 0{,}4000 .$$

Найдем $M\xi^2 = \sum\limits_{k=0}^{4} k^2 P(\xi = k) =$

$$= 0^2 \cdot 0{,}6561 + 1^2 \cdot 0{,}2916 + 2^2 \cdot 0{,}0486 + 3^2 \cdot 0{,}0036 + 4^2 \cdot 0{,}0001 = 0{,}5200 .$$

Дисперсия: $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 0{,}52 - (0{,}4)^2 = 0{,}36$.

Ответ: $M\xi = 0{,}4$, $D\xi = 0{,}36$.

Задача 12.

Точка M равномерно распределена в круге радиуса R. Пусть ξ - расстояние от точки M до центра круга. Найти функцию распределения $F_\xi(x)$, плотность распределения $p_\xi(x)$, построить их графики, вычислить $M\xi$, $D\xi$, а также вероятность попасть в кольцо $\frac{R}{3} \le \xi \le \frac{R}{2}$.

Решение.

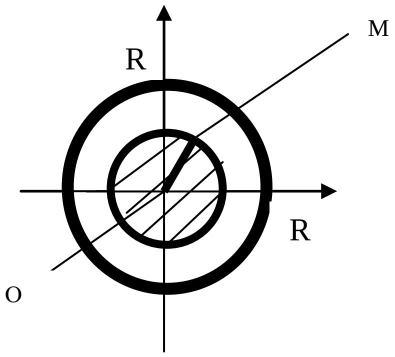


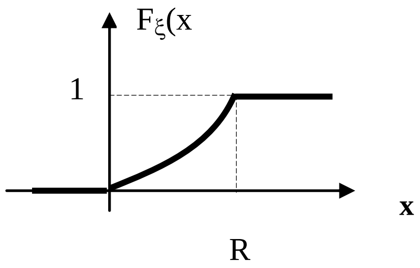
Рис. 2. К определению функции распределения.

Функция распределения $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \dfrac{mA(x)}{m\Omega} = \dfrac{\pi x^2}{\pi R^2} = \dfrac{x^2}{R^2}, x \in [0, R]$.

Итак, $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{R^2}, 0 < x \le R \\ 1, x > R. \end{cases}$

Плотность вероятности $p_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{2x}{R^2}, 0 < x \le R \\ 0, x > R \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2x}{R^2}, x \in [0, R] \\ 0, x \notin [0, R]. \end{cases}$

Графики функций $F_\xi(x)$ *и* $p_\xi(x)$ представлены на рис. 3.



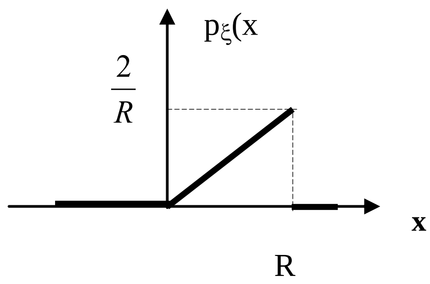


Рис. 3. Графики функций $F_\xi(x)$ *и* $p_\xi(x)$ (к задаче 12)

Математическое ожидание:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx = \int_0^R x \frac{2x}{R^2} dx = \frac{2}{R^2} \int_0^R x^2 dx = \frac{2}{R^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^R = \frac{2R^3}{3R^2} = \frac{2}{3} R,$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x)dx = \int_0^R x^2 \frac{2x}{R^2} dx = \frac{2}{R^2} \int_0^R x^3 dx = \frac{2}{R^2} \frac{x^4}{4} \Bigg|_0^R = \frac{R^2}{2}.$$

Дисперсия:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{4}{9}R^2 = \frac{1}{18}R^2 .$$

Вероятность:

$$P(\frac{R}{3} \le \xi \le \frac{R}{2}) = \int_{\frac{R}{3}}^{\frac{R}{2}} p_\xi(x)dx = \frac{2}{R^2}\int_{\frac{R}{3}}^{\frac{R}{2}} xdx = \frac{2}{R^2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{R}{3}}^{\frac{R}{2}} = \frac{1}{R^2}(\frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{9}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} =$$

$$= \frac{5}{36} = 0{,}139 .$$

Ответ: $F_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{R^2},\ 0 < x \le R \\ 1,\ x > R. \end{cases}$, $p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{R^2}, x \in [0, R] \\ 0, x \notin [0, R] \end{cases}$, $M\xi = \frac{2}{3}R$, $D\xi = \frac{1}{18}R^2$,

$P(\frac{R}{3} \le \xi \le \frac{R}{2}) = 0{,}139$.

<u>Задача 13.</u>

Плотность вероятности случайной величины ξ задана формулой $p_\xi(x) = \frac{A}{1+x^2}$ (распределение Коши). Найти А, функцию распределения, математическое ожидание, вероятность Р $(-1 \le \xi \le 1)$.

Решение:

Константу А найдем из условия:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{1+x^2}dx = A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = A\, arctg\, x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = A(\lim_{x\to+\infty} arctg\, x - \lim_{x\to-\infty} arctg\, x) =$$

$$= A\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = A\pi = 1,$$

$$A = \frac{1}{\pi}.$$

Функция распределения:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{x}\frac{\frac{1}{\pi}}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}arctgx\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(arctgx - \lim_{x\to-\infty} arctgx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(arctgx + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}arctgx .$$

Графики $F_\xi(x)$ и $p_\xi(x)$ изображены на рисунке 4.

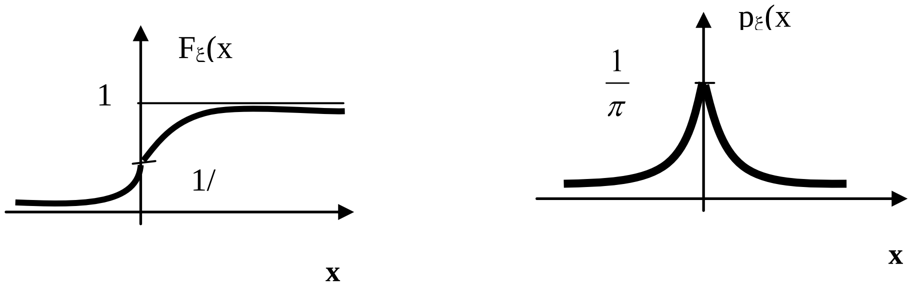


Рис. 4. Графики функций $F_\xi(x)$ и $p_\xi(x)$ (к задаче 13)

Математическое ожидание:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = 0,$$ т.к. функция $\frac{x}{1+x^2}$ нечетная.

$$P(-1 \le \xi \le 1) = \int_{-1}^{1} p_\xi(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{\pi}}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} arctgx \,\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} arctg1 = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Другой способ:

$$P(-1 \le \xi \le 1) = F_\xi(1) - F_\xi(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\, 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\,(-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $A = \frac{1}{\pi}$, $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\, x$, $M\xi = 0$, $P(-1 \le \xi \le 1) = \frac{1}{2}$.

Задача 14.

Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения

ξ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
P	0,2	0,7	0,1

Построить ряд распределения случайной величины $\eta = \sin\xi$.

Решение:

ξ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
η	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Тогда P (η = $\frac{\sqrt{2}}{2}$) = P $\left(\xi = \frac{\pi}{4} \quad \text{или} \quad \xi = \frac{3\pi}{4}\right)$ = P $\left(\xi = \frac{\pi}{4}\right)$+ P $\left(\xi = \frac{3\pi}{4}\right)$ =

= 0,2 + 0,1 = 0,3.

Тогда закон распределения η запишется:

η	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
P	0,3	0,7

Задача 15.

Законы распределения числа очков, выбиваемых каждым из двух стрелков, имеют вид:

ξ	8	9	10
P	0,6	0,3	0,1

η	8	9	10
P	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайной величины равной сумме очков, выбиваемых двумя стрелками.

Решение.

$P(\xi+\eta=16) = P(\xi=8)P(\eta=8) = 0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}30$,

$P(\xi+\eta=17) = P(\xi=8)P(\eta=9) + P(\xi=9)P(\eta=8) = 0{,}6\cdot 0{,}3 + 0{,}3\cdot 0{,}5 = 0{,}33$,

$P(\xi+\eta=18) = P(\xi=8)P(\eta=10) + P(\xi=9)P(\eta=9) + P(\xi=10)P(\eta=8) =$

$= 0{,}6\cdot 0{,}2 + 0{,}3\cdot 0{,}3 + 0{,}1\cdot 0{,}5 = 0{,}26$,

$P(\xi+\eta=19) = P(\xi=9)P(\eta=10) + P(\xi=10)P(\eta=9) = 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}3 = 0{,}09$,

$P(\xi+\eta=20) = P(\xi=10)P(\eta=10) = 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}02$.

Закон распределения:

ξ + η	16	17	18	19	20
P	0,30	0,33	0,26	0,09	0,02

Проверка: сумма вероятностей 0,30 + 0,33 + 0,26 + 0,09 + 0,02 = 1.

Задача 16.

Автомат штампует детали. Длина детали ξ распределена нормально с Mξ = 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали больше 55 мм.

Решение.

Используем правило «трех сигм»:

$$P(32 \le \xi \le 68) = 0{,}9973\ ,$$

откуда найдем параметр σ нормального распределения. Используем формулу (5),

$$P(32 \le \xi \le 68) = \Phi\left(\frac{68-50}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{32-50}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right),$$

$$\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) = 0{,}49865.$$

По таблице [5] для функции Ф(x) $\frac{18}{\sigma} = 3{,}0, \quad \sigma = 6{,}0$.

Искомая вероятность:

$$P(\xi > 55) = P(55 \le \xi < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{55-50}{6}\right) = 0{,}5 - 0{,}38493 = 0{,}11507.$$

Ответ: 0,11507.

Библиографический список.

Основная литература

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учебник для вузов/Е.С.Вентцель.-7-е изд., стер.-М.:Высш.шк.,2001.-575с.:ил.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика:Учеб.пособие для вузов/В.Е.Гмурман.-9-е изд.,стер.-М.: Высш.шк.,2003.-479с.:ил.
3. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра:Справ.пособие к решению задач/ А. А.Гусак.-2-е изд.,стер.-Минск: ТетраСистемс,2001.-288с.:ил.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учебное пособие / Л.А.Кузнецов. – 7-е изд., перераб. – М.: Высш.шк. – 2004. – 175 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник для втузов:В 2 т./Н.С.Пискунов.-Изд.стер.-М.: Интеграл-Пресс.-Т.1.-2001.-416с.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник для втузов:В 2 т./Н.С.Пискунов.-Изд.стер.-М.: Интеграл-Пресс.-Т.2.-2001.-544с.

Дополнительная литература

1. Гусак А.А. Теория вероятностей: Справ.Г 96 пособие к решению задач/А.А.Гусак,Е.А. Бричикова.- 3- е изд.,стер.-Минск:Тетра-Системс,2002.-288с.:ил.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 т.: Учеб.пособие. / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш.шк. – Т.1 – 2004. – 304 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 т.: Учеб.пособие. / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш.шк. – Т.2 – 2004. – 415 с.
4. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учеб. пособие для вузов/ С.Б.Кадомцев.-М.:Физматлит,2001.- 160с.:ил.
5. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и К 795 математическая статистика: Учебник для вузов/Н.Ш.Кремер.-2-е изд.,перераб.и доп.-М.:Юнити-Дана,2004.-573с.:ил.
6. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учебное пособие / Л.А.Кузнецов. – 7-е изд., перераб. – М.: Высш.шк. – 2004. – 175 с.
10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник для втузов:В 2 т./Н.С.Пискунов.-Изд.стер.-М.: Интеграл-Пресс.-Т.1.-2001.-416с.
11. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник для втузов:В 2 т./Н.С.Пискунов.-Изд.стер.-М.: Интеграл-Пресс.-Т.2.-2001.-544с.