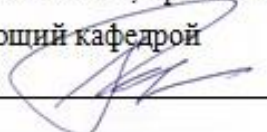


Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное
общеобразовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Вычислительная механика и математика»

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«17» июня 2021г., протокол № 10
Заведующий кафедрой

 В.В.Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий по дисциплине (модулю)
«Математика»

**Основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
09.03.02 Информационные системы и технологии

с направленностью (профилем)
Информационные системы

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 090302-01-21

Тула 2021 год

Разработчик методических указаний

Инченко О.В., к.ф.-м.н.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

Аналитическая геометрия в пространстве R^3

Векторная алгебра

Некоторые сведения из теории

Вектор – направленный отрезок.

Равенство

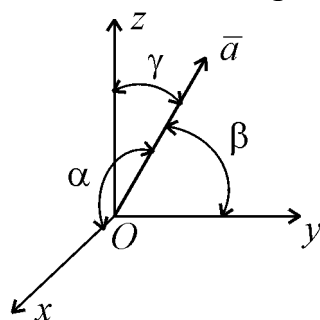
$$\vec{a} = (x, y, z) \quad (1)$$

означает, что x, y, z – проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2)$$

позволяет по координатам вектора определить его модуль.



Если α, β, γ – углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются направляющими косинусами вектора \vec{a} .

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma, \quad (3)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4)$$

Если известны начало вектора $M_1(x_1, y_1, z_1)$

и конец $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1. \quad (5)$$

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad (6)$$

и $\alpha \vec{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$, где α – любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Признак коллинеарности векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (7)$$

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по осям соответственно Ox, Oy, Oz в положительную сторону.

Любой вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (8)$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (9)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}, \quad (10)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \quad (11)$$

т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (12)$$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (13)$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (14)$$

Если вектор \vec{F} изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора \vec{S} , то работа этой силы определяется

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}. \quad (15)$$

Векторным произведением вектора \vec{a} на \vec{b} называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ;
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;
3. вектор \vec{c} образует с векторами \vec{a} и \vec{b} «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (16)$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} :

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad (17)$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (18)$$

Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, в частности, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$,

$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Если вектор \vec{F} изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке M , а вектор \vec{a} идет из некоторой точки O в точку M , то вектор $\vec{a} \times \vec{F}$ представляет собой момент силы \vec{F} относительно точки O :

$$m_o \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F}. \quad (20)$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$, умноженному скалярно на вектор \vec{c} , т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (21)$$

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$$V = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}. \quad (22)$$

Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0. \quad (23)$$

Для векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Задача 1. На материальную точку действуют силы:

$$\vec{F}_1 = (2, -1, 1), \quad \vec{F}_2 = (-1, 2, 2), \quad \vec{F}_3 = (1, 1, -2).$$

Найти работу равнодействующей этих сил \vec{R} при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

Решение. Найдем равнодействующую

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2 - 1 + 1, -1 + 2 + 1, 1 + 2 - 2) = (2, 2, 1).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (4 - 2, 1 + 1, -1 - 0) = (2, 2, -1).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W = \vec{R} \cdot \vec{S} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7.$$

Задача 2. Дана сила $\vec{F} = (3, 4, -2)$ и точка ее приложения $A(2, -1, 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. По формуле (20) $m_o \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$. Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ по формуле (5) имеет координаты $\vec{r} = (2, -1, 3)$, по формуле (19)

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 13\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Итак, $m_o \vec{F} = (-10, 13, 11)$. Модуль момента находим по формуле (2):

$$|m_o \vec{F}| = \sqrt{(-10)^2 + (13)^2 + (11)^2} = \sqrt{390} \approx 19,748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$\cos \alpha = \frac{-10}{19,748} = -0,506, \quad \cos \beta = \frac{13}{19,748} = 0,658, \quad \cos \gamma = \frac{11}{19,748} = 0,557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha = 120^\circ 24', \quad \beta = 48^\circ 51', \quad \gamma = 56^\circ 9'.$$

Контроль: должно быть $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. У нас:

$$(-0,506)^2 + (0,658)^2 + (0,557)^2 = 0,999.$$

Задача 3. Написать разложение вектора $\vec{x} = (5, 16, 2)$ по векторам $\vec{p} = (2, 1, 0)$, $\vec{q} = (0, -2, 0)$, $\vec{r} = (-1, 5, 2)$.

Решение.

1. Разложение вектора \vec{x} по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{p} + \alpha_2 \vec{q} + \alpha_3 \vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 q_1 + \alpha_3 r_1 \\ x_2 = \alpha_1 p_2 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 r_2 \\ x_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 q_3 + \alpha_3 r_3. \end{cases}$$

2. С учетом числовых значений координат векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ и \vec{x} получим систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} 2 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 - 1 \cdot \alpha_3 = 5 \\ 1 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot \alpha_2 + 5 \cdot \alpha_3 = 16 \\ 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 2 \alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 5 + \alpha_3 \\ 2\alpha_2 = \alpha_1 + 5\alpha_3 - 16 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

3. Разложение вектора \vec{x} по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид:

$$\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}.$$

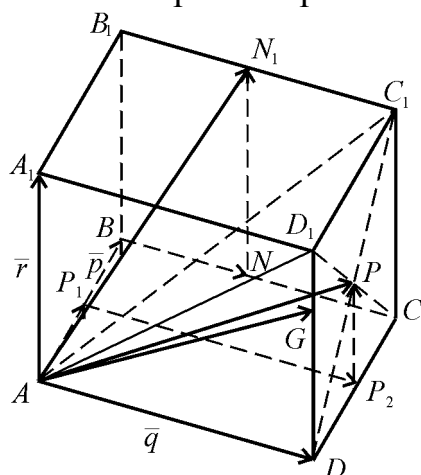
Ответ: $\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}$.

Задача 4. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$ образуют базис. Разложить векторы \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{AP} , $\overrightarrow{AN_1}$ по выбранному базису, если точка G делит ребро DD_1 в отноше-

нии 1:2; точка P – точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C ; точка N_1 – середина ребра B_1C_1 .

Решение.

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}, \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$

$$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Прямая и плоскость **Плоскость. Ее уравнения**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad - \quad (25)$$

общее уравнение плоскости.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad - \quad (26)$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad - \quad (27)$$

уравнение плоскости «в отрезках». Здесь a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad - \quad (28)$$

нормальное уравнение плоскости.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad - \quad (29)$$

расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad - \quad (30)$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Прямая. Ее уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad - \quad (31)$$

общее уравнение прямой (прямая задана пересечением двух плоскостей).

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad - \quad (32)$$

каноническое уравнение прямой, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, принадлежащая прямой, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой (вектор, параллельный прямой).

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad - \quad (33)$$

параметрические уравнения прямой.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad - \quad (34)$$

уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\cos \varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad - \quad (35)$$

угол между двумя прямыми, где $\vec{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ – направляющие векторы прямых.

$$\sin \psi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad - \quad (36)$$

угол между прямой и плоскостью, где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_1A_4} \right| \quad - \text{объем пирамиды } A_1A_2A_3A_4,$$

где $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ – координаты вершин пирамиды.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \quad (37)$$

- Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, $A_4(0, 8, 0)$. Найти:
- 1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 ;
 - 2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
 - 3) объем пирамиды V ;
 - 4) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$;
 - 5) точку A'_4 , симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$;
 - 6) точку A''_4 , симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3 .

Решение.

- 1) Угол между ребрами находим по формуле (35).

$\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = (3-2, 0-1, 1-(-1)) = (1, -1, 2)$ – направляющий вектор прямой A_1A_2 ;

$\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_4} = (0-2, 8-1, 0-(-1)) = (-2, 7, 1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4 .

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot (-2) - 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}} = -\frac{7}{18}.$$

- 2) Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через три точки $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, по формуле (30)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & 0-1 & 1+1 \\ 2-2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \cdot 0 - (y-1) \cdot 4 + (z+1) \cdot (-2) = 0, \\ -4y + 4 - 2z - 2 = 0,$$

$4y + 2z - 2 = 0$ – уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

$\vec{n} = (0, 2, 1)$ – нормальный вектор плоскости;

$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_4} = (-2, 7, 1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4 .

Находим угол ψ между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ по формуле (36)

$$\sin \psi = \frac{0 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{54}} = 0,9114.$$

3) Находим объем пирамиды по формуле (37)

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = (1, -1, 2); \quad \overrightarrow{A_1 A_3} = (0, -2, 4); \quad \overrightarrow{A_1 A_4} = (-2, 7, 1).$$

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} (-2 + 8 - 8 - 28) = -\frac{1}{6} (-30) = 15.$$

4) Расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1 A_2 A_3$ находим по формуле (29).

$$d = \frac{|2 \cdot 8 + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \approx 6,69.$$

5) Чтобы найти точку A'_4 , симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1 A_2 A_3$, сделаем следующее.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $A_1 A_2 A_3$, проходящей через точку A_4 по формуле (32). За направляющий вектор прямой $\vec{a} = \vec{n} = (0, 2, 1)$ берем нормальный вектор плоскости, т.к. прямая перпендикулярна плоскости:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-0}{1}, \quad \frac{x}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{1}.$$

Составим параметрические уравнения этой прямой по формуле (33):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t. \end{cases}$$

Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью $A_1 A_2 A_3$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 + 8 = 2 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow 2(2t + 8) + t - 1 = 0,$$

$$5t + 15 = 0, \quad t = -3.$$

Получаем точку $M(0, 2, -3)$; т.к. точка A'_4 симметрична точке A_4 относительно плоскости $A_1 A_2 A_3$, то точка M является серединой отрезка $A_4 A'_4$, поэтому

$$x_M = \frac{x_4 + x'_4}{2}, \quad 0 = \frac{0 + x'_4}{2}, \quad x'_4 = 0;$$

$$y_M = \frac{y_4 + y'_4}{2}, \quad 2 = \frac{8 + y'_4}{2}, \quad y'_4 = -4;$$

$$z_M = \frac{z_4 + z'_4}{2}, \quad -3 = \frac{0 + z'_4}{2}, \quad z'_4 = -6.$$

$$A'_4(0, -4, -6).$$

6) Чтобы найти точку A''_4 , симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3 , составим уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_1A_3 по формуле (26). За нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \vec{a} = (0, -2, 4)$ берем направляющий вектор прямой A_1A_3 , т.к. плоскость перпендикулярна прямой.

$$0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 3) + 4 \cdot (z - 0) = 0, \quad -2y + 16 + 4z = 0, \quad y = 2z - 8 = 0.$$

Уравнение прямой A_1A_3 составляем по формуле (34).

$$\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z+1}{3+1}, \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

Параметрические уравнения прямой A_1A_3 :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1. \end{cases}$$

Находим точку N пересечения прямой A_1A_3 и плоскости:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1 \\ y - 2z - 8 = 0, \end{cases}$$

$$-2t + 1 - 2(4t - 1) - 8 = 0, \quad -10t - 5 = 0, \quad t = -\frac{1}{2},$$

$$x = 2, \quad y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2, \quad z = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3.$$

Итак, точка $N(2, 2, -3)$. Так как точка A''_4 симметрична точке A_4 относительно прямой A_1A_3 , то точка N является серединой отрезка $A_4A''_4$, тогда

$$x_N = \frac{x_4 + x''_4}{2}, \quad 2 = \frac{0 + x''_4}{2}, \quad x''_4 = 4,$$

$$y_N = \frac{y_4 + y''_4}{2}, \quad 2 = \frac{8 + y''_4}{2}, \quad y''_4 = -4,$$

$$z_N = \frac{z_4 + z_4''}{2}, \quad -3 = \frac{0 + z_4''}{2}, \quad z_4'' = -6, \quad \text{точка } A_4''(4, -4, -6).$$

Аналитическая геометрия на плоскости

Некоторые сведения из теории

Прямая линия. Ее уравнение

$$Ax + By + C = 0 \quad - \quad (38)$$

общее уравнение прямой.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad - \quad (39)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{a} = (m, n)$ – вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad - \quad (40)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с перпендикулярным вектором $\vec{n} = (A, B)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad - \quad (41)$$

уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad - \quad (42)$$

уравнение прямой в «отрезках», где a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \quad - \quad (43)$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \varphi$ и отрезком b – отсекаемым на оси Oy .

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad - \quad (44)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом k .

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad - \quad (45)$$

расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad - \quad (45a)$$

отклонение точки $M_0(x_0, y_0)$ от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} \quad (46)$$

угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$.

$$k_1 = k_2 \quad (47)$$

условие параллельности прямых.

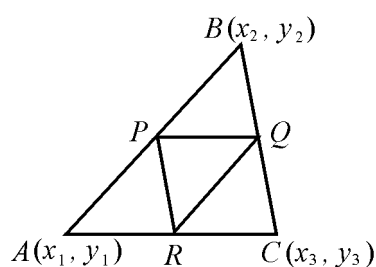
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad (48)$$

условие перпендикулярности прямых.

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \quad (49)$$

угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 .

Задача 6. Даны середины сторон треугольника $P(1, 2)$, $Q(5, 1)$, $R(-4, 3)$. Составить уравнения его сторон.



1 способ. Так как точки P , Q , R являются серединами отрезков AB , AC , BC , то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 = -8, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 6, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= -8 & y_1 &= 6 \\ x_2 &= 0 & y_2 &= 0 & A(-8, 6), \quad B(10, -2), \quad C(0, 0). \\ x_3 &= 10, & y_3 &= -2, \end{aligned}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение AB :

$$\frac{x + 8}{10 + 8} = \frac{y - 6}{-2 - 6}, \quad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC :

$$\frac{x - 10}{0 - 10} = \frac{y + 2}{0 + 2}, \quad x + 5y = 0.$$

Уравнение AC :

$$\frac{x + 8}{0 + 8} = \frac{y - 6}{0 - 6}, \quad 3x + 4y = 0.$$

2 способ. Не определяя координат точек A, B, C , составим уравнение каждой из сторон треугольника ABC , как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника PQR параллельно противоположной стороне.

Уравнение AB : прямая AB проходит через точку P параллельно вектору $\overrightarrow{QR} = (-9, 4)$. Используем уравнение (39).

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y-2}{4} \Rightarrow 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC : прямая BC проходит через точку Q параллельно вектору $\overrightarrow{PR} = (-5, 1)$.

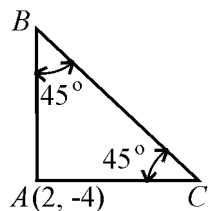
$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y+1}{1} \Rightarrow x + 5y = 0.$$

Уравнение AC : прямая AC проходит через точку R параллельно вектору $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$.

$$\frac{x+4}{4} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow 3x + 4y = 0.$$

Ответ: $4x + 9y - 22 = 0$, $x + 5y = 0$, $3x + 4y = 0$.

Задача 7. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x + 3y - 5 = 0$ и вершину прямого угла $(2, -1)$.



$AB = BC$ (по условию), поэтому $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$,

$k_{BC} = -\frac{2}{3}$ (по формуле (46)). Уравнения катетов AB и

BC составляем по формуле (44): $y + 1 = k(x - 2)$.

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} \right|, \quad (49)$$

$$\frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} = \pm 1.$$

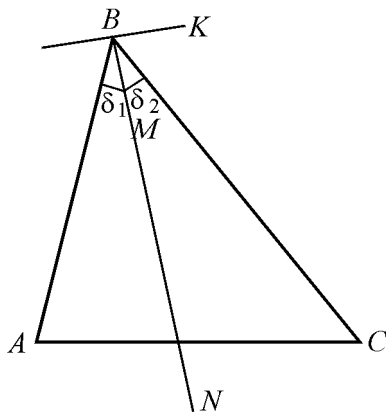
Решая эти уравнения, получим:

$$k = \frac{1}{5}, \quad y + 1 = \frac{1}{5}(x - 2), \quad 5y + 5 = x - 2, \quad x - 5y - 7 = 0.$$

$$k = -5, \quad y + 1 = -5(x - 2), \quad y + 1 = -5x + 10, \quad 5x + y - 9 = 0.$$

Ответ: $x - 5y - 7 = 0$, $5x + y - 9 = 0$.

Задача 8. В треугольнике с вершинами $A(3, -2)$, $B(-1, 1)$, $C(5, -7)$ найти биссектрису внутреннего угла $\angle ABC$.



1) Составим уравнения сторон угла $\angle ABC$, воспользовавшись формулой (41).

Сторона BA :

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-1}{-2-1}, \quad -3x - 4y + 1 = 0.$$

Сторона BC :

$$\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-1}{-4-1}, \quad -8x - 6y - 2 = 0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Приравняем расстояния от произвольной точки биссектрисы $M(x, y)$ до сторон угла BA и BC , вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-8x - 6y - 2|}{\sqrt{8^2 + 6^2}}, \quad \frac{|-3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|-8x - 6y - 2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x - 4y + 1) = -8x - 6y - 2 \quad \text{и} \quad 2(-3x - 4y + 1) = -(-8x - 6y - 2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине B треугольника ABC :

$$x - y + 3 = 0 \quad (a)$$

и
$$x + y = 0. \quad (б)$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника BN отклонения вершин треугольника A и C имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла BK – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек A и C от прямой (a) по формуле (40,a):

$$\delta_A = \frac{3 - (-2) + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} > 0, \quad \delta_C = \frac{5 - (-7) + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} > 0,$$

следовательно, уравнение (a) – это уравнение прямой BK . Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника ABC при вершине B :

$$x + y = 0.$$

Ответ: $x + y = 0$.

Линии второго порядка

Окружность. Уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (50)$$

определяет окружность радиуса R с центром $C(a, b)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $a = b = 0$, то уравнение окружности примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (51)$$

Общее алгебраическое уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

есть уравнение окружности, если $A = C \neq 0$, $B = 0$, т.е.

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (52)$$

Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \quad (53)$$

уравнение эллипса (канонический вид).

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad a > b. \quad (54)$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1(-c, 0) \text{ и } F_2(c, 0). \quad (55)$$

Начало координат O – центр симметрии эллипса, а оси координат – оси симметрии эллипса. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$

называются вершинами эллипса, a и b – большая и малая полуоси. Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1 \quad (56)$$

называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, т.к. выражается через отношение его полуосей

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (57)$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a = b$, т.е. $\varepsilon = 0$.

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} - \quad (58)$$

уравнения директрис.

Если фокусы эллипса расположены на оси Oy , то уравнение эллипса имеет тот же вид (58), но $b > a$. Фокусы имеют координаты:

$F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$. Уравнения директрис

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon}. \quad (59)$$

Гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \quad (60)$$

каноническое уравнение гиперболы.

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad a < c. \quad (61)$$

Фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка O – центр симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, которые называются ее действительными вершинами, а величина a – действительной полуосью гиперболы. Точки $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ называются мнимыми вершинами, а b – мнимая полуось. Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad (62)$$

являются асимптотами гиперболы, т.е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1. \quad (63)$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (64)$$

Если $a = b$, гипербола называется равносторонней. В этом случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad - \quad (65)$$

директрисы гиперболы.

Если уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (66)$$

то асимптоты гиперболы:

$$x = \pm \frac{b}{a} y, \quad (67)$$

фокусы $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$.

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon} \quad - \quad (68)$$

уравнения директрис.

Парабола.

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \quad (p > 0), \quad (69)$$

где p – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение директрисы

$x = -\frac{p}{2}$, координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

В ряде случаев рассматривают параболы:

а) $y^2 = -2px$, $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус, $x = \frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (70)

б) $x^2 = 2py$, $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ – фокус, $y = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (71)

в) $x^2 = -2py$, $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ – фокус, $y = \frac{p}{2}$ – уравнение директрисы. (72)

Для всех случаев $p > 0$.

Задача 9. Среди прямых параллельных прямой $2x + y = 0$, выделить касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Уравнение всякой прямой, параллельной данной, можно записать в виде

$$2x + y + c = 0.$$

Касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку, поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно иметь только один ответ.

Из уравнения прямой $y = -2x - c$.

$$\begin{cases} y = -2x - c \\ x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + (-2x - c)^2 = 1, \quad 5x^2 + 4cx + c^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда дискриминант равен нулю: $(4c)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (c^2 - 1) = 0$, откуда $c = \pm\sqrt{5}$.

Итак, искомые касательные имеют уравнения

$$2x + y + \sqrt{5} = 0, \quad 2x + y - \sqrt{5} = 0.$$

Задача 10. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

Решение. Делим на 225, получаем

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отсюда следует по формуле (53), что $a = 5$, $b = 3$. Из формулы (54):

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, \quad c = \pm 4.$$

По формуле (55): $F_1(-4, 0), \quad F_2(4, 0)$.

Эксцентриситет (56): $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Уравнения директрис согласно (58): $x = \pm \frac{5}{4/5} = \pm \frac{25}{4}$.

Ответ: $a = 5, \quad b = 3; \quad F_1(-4, 0), \quad F_2(4, 0); \quad \varepsilon = \frac{4}{5}; \quad x = \pm \frac{25}{4}$.

Задача 11. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая полуось $2\sqrt{6}$, а расстояние между фокусами $F_1F_2 = 8$.

Решение. $b = 2\sqrt{6}, \quad F_1F_2 = 2c = 8, \quad c = 4$.

По формуле (54): $a^2 = b^2 + c^2, \quad a^2 = (2\sqrt{6})^2 + 4^2 = 40, \quad a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Уравнение эллипса согласно (53): $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$.

Задача 12. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $4y \pm 3x = 0$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать ее каноническое уравнение.

Решение. Уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$, согласно формуле (62):

$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$. Кроме того $F_1F_2 = 2c = 20, \quad c = 10$. По формуле (61):

$c^2 = a^2 + b^2$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $a = 8, \quad b = 6$. Следовательно, каноническое уравне-

ние гиперболы: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Задача 13. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = -1$. Найти координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

Решение. Фокусы данной гиперболы расположены на оси Oy .

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}. \quad (61)$$

Значит фокусы имеют координаты $F_1(0, -\sqrt{10}), \quad F_2(0, \sqrt{10})$. Вершины $A_1(0, -1), \quad A_2(0, 1), \quad B_1(-3, 0), \quad B_2(3, 0)$. Эксцентриситет по формуле (64):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}, \quad \varepsilon = \sqrt{10}.$$

Уравнения асимптот: $x = \pm \frac{b}{a}y \Rightarrow x = \pm 3y$.

Уравнения директрис: $y = \pm \frac{b}{c} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Задача 14. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(1, -2)$ и симметрична относительно оси Oy . Написать ее уравнение. Найти фокус и директрису.

Решение. Уравнение искомой параболы по формуле (72) имеет вид $x^2 = -2py$. Точка $A(1, -2)$ лежит на параболы. Подставляем координаты точки A в уравнение: $1 = -2p \cdot (-2) \Rightarrow p = \frac{1}{4}$. Следовательно, искомое уравнение будет $x^2 = -\frac{1}{2}y$ или $y = -2x^2$.

Фоку параболы: $F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$. Уравнение директрисы согласно (72): $y = \frac{1}{8}$.

Задача 15. На параболы $y^2 = 4x$ найти точки, расстояния которых от директрисы равно 5.

Решение. Уравнение директрисы данной параболы $x = -\frac{p}{2}$, $2p = 4$, $p = 2$, $x = -1$. Тогда расстояние от оси Oy до искомой $\ell = 4 - \frac{p}{2} = 5 - 1 = 4$ точки и это расстояние определит координату x данной точки, т.е. $x = 4$. Координату y найдем из уравнения параболы: $y^2 = 4x$, $y^2 = 4 \cdot 4 = 16$, $y = \pm 4$.
Итак, $M_1(4, 4)$, $M_2(4, -4)$.

Введение в анализ

1. Пределы

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \dots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число u_n . Тогда говорят, что определена последовательность чисел u_1, u_2, u_3, \dots или, короче, последовательность $\{u_n\}$. Отдельные числа u_n называются ее элементами.

Определение 1.1. Число a называется пределом последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется зависящее от него натуральное число N такое, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство: $|u_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.

Определение 1.2. Говорят, что функция $f(x)$ стремится к A ($f(x) \rightarrow A$) при стремлении к a ($x \rightarrow a$), где A и a – числа, или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Аналогично, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta(M)$, где M – произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.

1. Если существуют конечные $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$, то

$$a) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

$$б) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$в) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0 \right).$$

2. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = 0$ (A – конечно), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty,$$

если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \infty$ (A – конечно), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взять соответственно две последовательности: $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, при-

ходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения. Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0 .

Пример 1.1. При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x \rightarrow \infty$ или n при $n \rightarrow \infty$ для последовательностей (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$) оба члена соотношения полезно предвари-

тельно разделить на x^m или, соответственно, n^m где m – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{5x^4 + 3x + 2} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left(5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^4}} = \frac{3 + 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}, \quad \text{старшая степень } m = 4, \\ &\text{делится на } x^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{9n^4 - 2n^3 + 2} + 4\sqrt[3]{8n^3 + 21}}{\sqrt[4]{n^4 - 3} + 2\sqrt{4n^4 + 9n}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt{n^4 \left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} \right)} + 4 \cdot \sqrt[3]{n^3 \left(8 + \frac{21}{n^3} \right)}}{\sqrt[4]{n^4 \left(1 - \frac{3}{n^4} \right)} + 2 \cdot \sqrt{n^4 \left(4 + \frac{9}{n^3} \right)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 \cdot \sqrt{\left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} \right)} + 4n \cdot \sqrt[3]{\left(8 + \frac{21}{n^3} \right)}}{n \cdot \sqrt[4]{\left(1 - \frac{3}{n^4} \right)} + 2n^2 \cdot \sqrt{\left(4 + \frac{9}{n^3} \right)}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt{\left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4}\right)} + \frac{4}{n} \cdot \sqrt[3]{\left(8 + \frac{21}{n^3}\right)}}{\frac{1}{n} \cdot \sqrt[4]{\left(1 - \frac{3}{n^4}\right)} + 2 \cdot \sqrt{\left(4 + \frac{9}{n^3}\right)}} = \frac{3 \cdot \sqrt{9-0+0} + 0 \cdot \sqrt[3]{8+0}}{0 \cdot \sqrt[4]{1-0} + 2 \cdot \sqrt{4+0}} = \frac{9}{4}$$

(неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, старшая степень $m = 2$, делится на n^2).

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+1) \left[\sqrt{x^2+4x+5} - \sqrt{x^2+4x+7} \right] &= [\infty \cdot (\infty - \infty)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1) \left[\sqrt{x^2+4x+5} - \sqrt{x^2+4x-7} \right] \cdot \left[\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7} \right]}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)(x^2+4x+5-x^2-4x+7)}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1) \cdot 12}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7}} \left(\frac{:x}{:x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 \left(3 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2}}} = \frac{12 \cdot 3}{1+1} = 18. \end{aligned}$$

Пример 1.2. Если $P(x)$ и $Q(x)$ – целые многочлены x , $P(a) \neq 0$ или $Q(a) \neq 0$, то предел рациональной дроби P/Q при $x \rightarrow a$ находится непосредственно. Если же $P(a) = Q(a) = 0$ (неопределенность $\frac{0}{0}$), то дробь P/Q рекомендуется сократить один или несколько раз на $(x-a)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3} = \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 1.3. Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность $\frac{0}{0}$).

$$\begin{aligned}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt[3]{5-x}} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{5+x})(3 + \sqrt{5+x})}{(1 - \sqrt[3]{5-x})(3 + \sqrt{5+x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{9 - 5 - x}{(1 - \sqrt[3]{5-x})(3 + \sqrt{5+x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{1 - \sqrt[3]{5-x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{3 + \sqrt{5+x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{1 - \sqrt[3]{5-x}} \cdot \frac{1}{6} = \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x) \left(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2} \right)}{(1 - \sqrt[3]{5-x}) \left(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2} \right)} = \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x) \left(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2} \right)}{1 - 5 + x} = \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x) \left(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2} \right)}{x - 4} = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \left(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2} \right) = \\
 &= -\frac{1}{6} (1 + 1 + 1) = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - 7x - 8} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(x^2 - 7x - 8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{(x - 8)(x + 1)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(x + 1)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \\
 &= \frac{1}{9 \cdot 12} = \frac{1}{108}.
 \end{aligned}$$

Пример 1.4. При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

следствием которого являются пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} [\operatorname{ctg}^2 3x - \operatorname{ctg}^2 5x] \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 4x \cdot \arcsin^2 x}{x^2} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} - \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x} \right] \cdot \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \right)^2 \cdot 16x^2 \cdot \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2 \cdot x^2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 16x^2 \cdot \left[\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} - \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos^2 3x \cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \cdot 9x^2} - \frac{\cos^2 5x \cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)^2 \cdot 25x^2} \right] \cdot 1^2 \cdot 1^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{16}{9} \cos^2 3x - \frac{16}{25} \cos^2 5x \right] = \frac{16}{9} \cdot 1 - \frac{16}{25} \cdot 1 = \frac{256}{225}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x \cdot \sqrt{1 - \cos 4x}}{x^2 \cdot \arcsin 3x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4x^2 \cdot \sqrt{2 \sin^2 2x}}{x^2 \cdot \left(\frac{\arcsin 3x}{3x} \right) \cdot 3x} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \right)^2}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{3x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{2} \sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{2} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) \cdot 2x}{3x} = \frac{8\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Пример 1.5. При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда $x \rightarrow a$ и $a \neq 0$, рекомендуется предварительно провести замену $x - a = y$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos \frac{\pi \cdot x}{6}}{x - 3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = (x - 3 = y, y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 3) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi \cdot (y + 3)}{6}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \cdot \cos \left(\frac{\pi \cdot y}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot y}{6}}{\frac{\pi \cdot y}{6}} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\pi}{6} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi \cdot y}{6}}{\frac{\pi \cdot y}{6}} = -\frac{\pi}{6} \cdot 1 = -\frac{\pi}{6}.$$

Пример 1.6. При вычислении пределов вида $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} = c$ необходимо иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$,

то $c = A^B$ ($A > 0$);

2) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \pm\infty$, то вопрос о нахождении предела c решается непосредственно;

3) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$, то следует воспользоваться

«вторым замечательным пределом»: $\lim_{x \rightarrow a} (1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e$, где

$g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ и $e = 2,718\dots$.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2}{x-1}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2} \right)^{+\infty}} = 0, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^{x+3} = 4^3 = 64, \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \right) \cdot 4 = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+3) = 3.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{2x} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{\frac{3x-6}{7} \cdot \frac{7}{3x-6} \cdot 2x} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{\frac{3x-6}{7}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x}{3x-6}} = e^{14/3}.$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 3} (7-2x)^{\frac{3}{x-3}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 3} [1 + (6-2x)]^{\frac{3}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \left[1 + (6 - 2x) \right]^{\frac{1}{6-2x}} \right\}^{\frac{(6-2x) \cdot 3}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{18-6x}{x-3}} = e^{-6}.$$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 2.1. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в окрестности точки $x = a$ (при $x \rightarrow a$).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ есть также бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Определение 2.2. Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow a$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, где c – некоторое число, отличное от нуля, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x \rightarrow a$, если $c = 0$, то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $g(x)$ при $x \rightarrow a$.

Бесконечно малая $f(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с $g(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g^n(x)} = c, \quad 0 < |c| < +\infty.$$

Пример 2.1. При $x \rightarrow 0$ определить порядок малости функции $\operatorname{tg} x - \sin x$ относительно x .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^n \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^n \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{x^n \cos x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x} = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot 1 = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^n \cdot 2^n} = \frac{4}{2^n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^n}. \end{aligned}$$

Этот предел будет равен константе $c \neq 0$ при $n = 3$, следовательно, функция $\operatorname{tg} x - \sin x$ имеет порядок малости $n = 3$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

Пример 2.2. Определить порядок малости относительно x при $x \rightarrow 0$ суммы $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$.

Слагаемое $\sqrt[3]{x^2}$ имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x , а слагаемое $\sqrt{x^3}$ – порядок $\frac{3}{2}$, следовательно, сумма имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

Определение 2.3. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \rightarrow a$: $f(x) \sim g(x)$.

Например, при $x \rightarrow 0$ будем иметь:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \quad (a \neq 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

Пример 2.3.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{4\operatorname{tg}^2 x} - 5^{3\arcsin^2 3x}}{3\sin^2 4x + 7\operatorname{arctg}^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^{4\operatorname{tg}^2 x} - 1) - (5^{3\arcsin^2 3x} - 1)}{3 \cdot (4x)^2 + 7 \cdot (x)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\operatorname{tg}^2 x \cdot \ln 3 - 3\arcsin^2 3x \cdot \ln 5}{55x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\ln 3 \cdot x^2 - 3\ln 5 \cdot (3x)^2}{55x^2} = \\ &= \frac{4\ln 3 - 27\ln 5}{55}. \end{aligned}$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4\arcsin 2x}{3\operatorname{tg} 8x} \right)^{\frac{\ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \cdot 2x}{3 \cdot 8x} \right)^{\frac{3x}{x}} = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3-5x) - \ln(3+7x)}{2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[3 \left(1 - \frac{5}{3}x \right) \right] - \ln \left[3 \left(1 + \frac{7}{3}x \right) \right]}{2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3 + \ln \left(1 - \frac{5}{3}x \right) - \ln 3 - \ln \left(1 + \frac{7}{3}x \right)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}x}{2x} = -2.
 \end{aligned}$$

Определение 2.4. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$.

Подобно тому, как это сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

Пример 2.4. Пусть $x \rightarrow \infty$. Определить порядок бесконечно большой

$$f(x) = \frac{x^5}{x+2} \text{ по сравнению с } x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^5}{x+2} : x^n \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^n(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^{n+1} + x^n \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^{n+1}} = 1$$

при $n = 4$.

Определение 2.5.

1) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x \rightarrow \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{c \cdot x^\alpha} = 1$, где c и α – константы, тогда функция $y = cx^\alpha$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

2) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x \rightarrow a$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{c \cdot (x-a)^\alpha} = 1$, где c и α – константы, тогда функция $y = c(x-a)^\alpha$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$.

Пример 2.5.

а) Найти асимптотику (асимптотическое представление) функции $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ при $x \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot x^{1/2}},\end{aligned}$$

следовательно, асимптотикой функции $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ при $x \rightarrow \infty$ является функция $\frac{1}{2}x^{-1/2}$; $c = \frac{1}{2}$; $\alpha = -\frac{1}{2}$.

б) Найти асимптотику функции $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x \rightarrow 1$.

При $x \rightarrow 1$ функции $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ является бесконечно большой: $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}(1-x)^{1/3}}.$

Асимптотикой в данном случае является функция $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(1-x)^{-1/3}$.

в) Найти асимптотику функции $f(x) = x^3 - 3x + 2$ при $x \rightarrow 1$.

В данном случае при $x \rightarrow 1$ функция $f(x)$ является бесконечно малой; $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \sim 3(x-1)^2$.

Получаем асимптотику $y = 3(x-1)^2$; $c = 3$; $\alpha = 2$.

3. Непрерывность функции.

Определение 3.1. Если $x < a$ и $x \rightarrow a$, то условно пишут $x \rightarrow a-0$, аналогично, если $x > a$ и $x \rightarrow a$, то $x \rightarrow a+0$. Числа

$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ называют соответственно

пределом слева функции $f(x)$ в точке a и пределом справа функции $f(x)$ в точке a (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство: $f(a-0) = f(a+0)$.

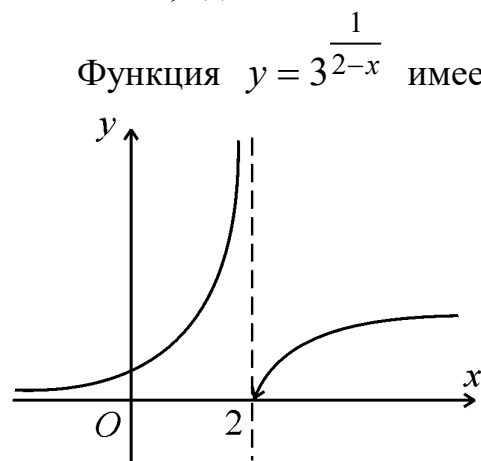
Определение 3.2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a , если

- 1) она определена в этой точке;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются точками разрыва.

Пример 3.1.

а) Найти точки разрыва функции $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$, пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.



Функция $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ имеет разрыв в точке $x = 2$, т.к. она в этой точке не определена. При этом:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

б) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y = \frac{2^{\frac{1}{x+3}} + 4x - 8}{2^{\frac{1}{x+3}} + 4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка $x = -3$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1/(x+3)} + 4} = \frac{2^{-\infty} - 12 - 8}{2^{-\infty} + 4} = \frac{0 - 20}{0 + 4} = -5;$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1/(x+3)} + 4} = 1, \text{ т.к. при } x \rightarrow -3+0 \text{ имеем:}$$

$$2^{1/(x+3)} + 4x - 8 \sim 2^{1/(x+3)}; \quad 2^{1/(x+3)} + 4 \sim 2^{1/(x+3)}.$$

$$\text{Величина скачка } \Delta = 1 - (-5) = 6.$$

в) Найти точки разрыва, величину скачка Δ и построить график функции

$$y = \begin{cases} -3x, & x \leq 0 \\ 4 \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \frac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

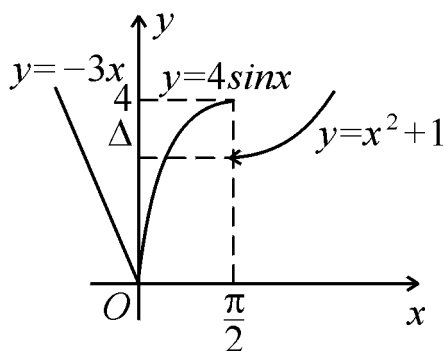
Данная функция непрерывна для $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$.

Исследуем только точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$, т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-3x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (4 \sin x) = 0;$$

$f(0) = -3x|_{x=0} = 0$, следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (4 \sin x) = 4; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4;$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} (x^2 + 1) = \frac{\pi^2}{4} + 1 = 3,467,$$

следовательно, точка $x = \frac{\pi}{2}$ — точка разрыва. Величина скачка

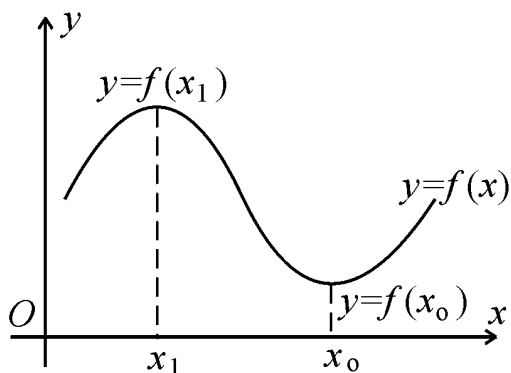
$$\Delta = 4 - \left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right) = 3 - \frac{\pi^2}{4} \approx 0,533.$$

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек x_1, x_2 , принадлежащих данному интервалу (отрезку), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при $a < x < b$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками x (где $f'(x) = 0$ или же $f'(x)$ не существует).



Если существует такая двусторонняя окрестность точки x_0 , что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой минимума функции $y = f(x)$, а число $f(x_0)$ — минимумом функции $y = f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_1$ некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то x_1 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, а $f(x_1)$ — максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции — экстремумом функции. Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ или же $f'(x_0)$ не существует (необходимое условие существования экстремума). Обратное утверждение не верно: точки, в которых $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует (критические точки), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$.

Достаточный признак существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ следующий: если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ критической точки x_0 , что $f'(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$; если же $f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 — точка минимума функции $f(x)$. Если, наконец, найдется такое положительное число δ , что $f'(x)$ сохраняет неизменный знак при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, то точка x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

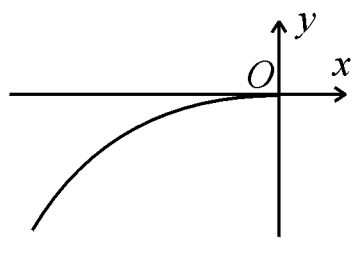
Наименьшее (наибольшее) значение непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a; b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a; b]$.

Пример 1.1. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = x \cdot \sqrt{-5x}.$$

Область существования: $-5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Находим критические точки:



$$y' = \sqrt{-5x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{-5x}} \cdot (-5) = \sqrt{-5x} - \frac{5x}{2\sqrt{-5x}} =$$

$$= \frac{-10x - 5x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{-15x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3 \cdot (-5x)}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{-5x} \geq 0.$$

При $x \leq 0$ функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке $x = 0$: $y(0) = 0$.

Пример 1.2. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = \sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}.$$





Область существования: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Находим критические точки:

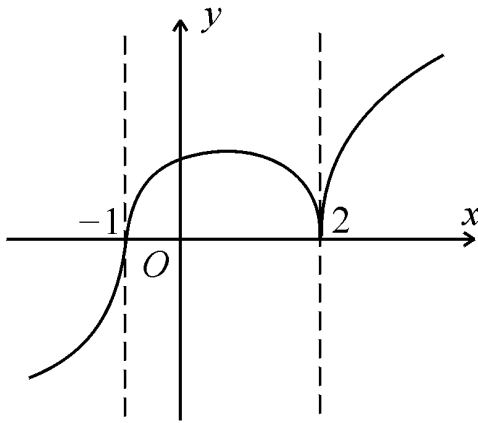
$$y' = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)(x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}},$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0,$$

y' не существует $\Rightarrow x_2 = -1; x_3 = 2$. Получили три критические точки.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	не сущ.	+	0	-	не сущ.	+
y				max		min	

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = -\infty.$$



$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} y'(x) = +\infty.$$

Так как $y'(x) = k$, где k – угловой коэффициент касательной, то при $x = -1$ и $x = 2$ касательная к графику функции перпендикулярна оси Ox .

$$y(-1) = 0; \quad y(0) = \sqrt[3]{4}; \quad y(2) = 0.$$

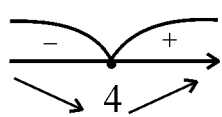
Пример 1.3. Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом 256 м^3 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть a – сторона квадрата основания, h – глубина бассейна;

$$a^2 h = 256 \Rightarrow a^2 = \frac{256}{h}, \quad a = \frac{16}{\sqrt{h}}, \quad h > 0;$$

$$S = S_{\text{бок}} + S_{\text{дна}} = 4ah + a^2 = 4 \cdot \frac{16}{\sqrt{h}} \cdot h + \frac{256}{h} = 64\sqrt{h} + \frac{256}{\sqrt{h}} = F(h);$$

$$F'(h) = \frac{64}{2\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32}{\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32h^{3/2} - 256}{h^2} = \frac{32}{h^2}(h^{3/2} - 8);$$



$F'(h) = 0 \Rightarrow h^{3/2} = 8; \quad h = 4.$ При $h = 4$ величина $F(h) = S$ будет наименьшей.

Пример 1.4. Две прямые железные дороги AA_1 и BB_1 перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте C , причем $AC = 800 \text{ км}$ и $BC = 700 \text{ км}$. Из пунктов A и B по направлению к C одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно 80 км/ч и 60 км/ч . Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим?

Отметим положение поездов в момент

$t > 0$ точками K и M .

$$AK = 80t; \quad BM = 60t;$$

$$CK = AC - AK = 800 - 80t;$$

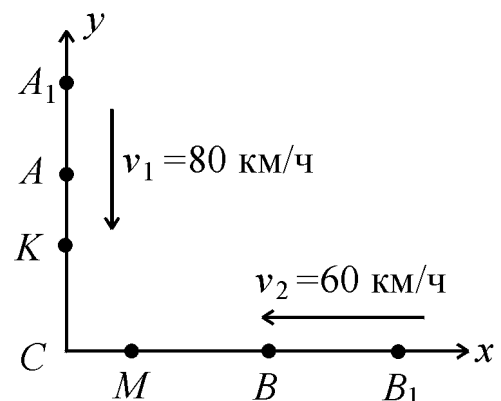
$$CM = CB - BM = 700 - 60t;$$

$$(KM)^2 = (CK)^2 + (CM)^2 =$$

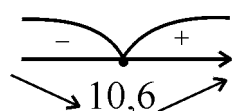
$$= (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2; \quad KM \text{ ми-}$$

нимально, если минимальна величина

$$(KM)^2 = F(t) = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2;$$



$$F(t) = 2(800 - 80t) \cdot (-80) + 2(700 - 60t) \cdot (-60) = \\ = -128000 + 12800t - 84000t + 7200t = 20000t - 212000 = 0; \quad t = 10,6;$$



$t = 10,6$ – точка минимума функции $F(t)$. Через 10,6 часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.

2. АСИМПТОТЫ

Если точка $(x; y)$ непрерывно перемещается по кривой $y = f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Если существует число a такое, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1x] = b_1$, то прямая $y = k_1x + b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2x] = b_2$, то прямая $y = k_2x + b_2$ будет асимптотой (*левая наклонная асимптота*).

График функции $y = f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

Пример 2.1. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = 2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1}.$$

Область существования: $x \neq 1$.

Ищем вертикальные асимптоты.

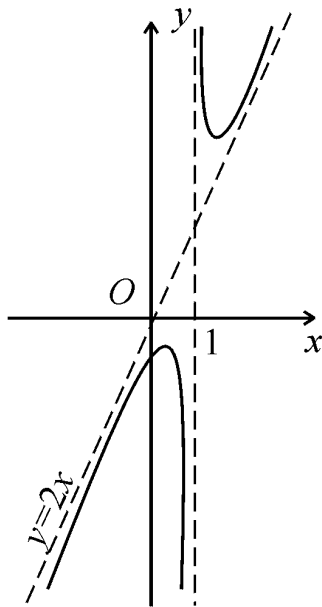
Функция имеет разрыв в точке $x = 1$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{-0} = 2 - \infty = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \left(2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{+0} = 2 + \infty = +\infty;$$

следовательно, $x = 1$ – вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$.



$$\begin{aligned}
 k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \left(2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} \right) = \\
 &= 2 + 0 = 2; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} - 2x \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3\cos(x-1)}{x-1} = 0.
 \end{aligned}$$

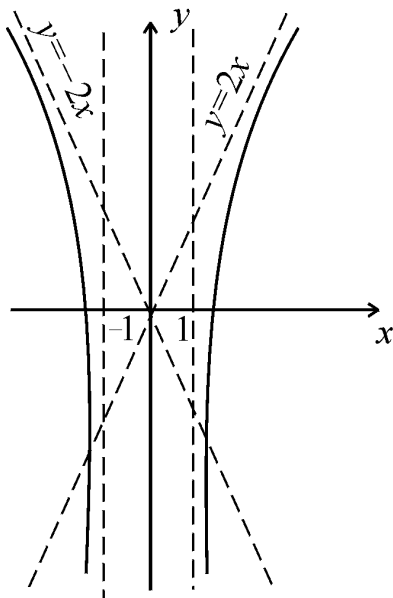
Следовательно, при $x \rightarrow \pm\infty$ существует асимптота $y = 2x$.

Пример 2.2. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Область существования: $x^2 - 1 > 0$; $x^2 > 1$; $x > 1$ и $x < -1$.

$$y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad y(-x) = \frac{2(-x)^2 - 9}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow y(x) = y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при $x > 1$, а затем отразить его симметрично относительно оси Oy .



$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2 - 9}{+0} = -\infty \Rightarrow x = 1 -$$

вертикальная асимптота при $x \rightarrow 1+0$.

Пусть $x \rightarrow 1+\infty$.

$$\begin{aligned}
 k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9}{x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{9}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 2.
 \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2x \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9 - 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 - 9)^2 - 4x^2(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}(2x^2 - 9 + 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1})} =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-32x^2 + 81}{x^3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \left(2 - \frac{9}{x^2} + 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)} = 0.$$

При $x \rightarrow +\infty$ получаем асимптоту $y = 2x$. График данной функции пересекает ось Ox при $2x^2 - 9 = 0$, т.е. в точках $x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Пример 2.3. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}.$$

Область существования: $4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ и $x \neq -2$.

В точках $x_1 = -2$ и $x_2 = +2$ функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{-8 - 8 + 6 + 2}{-0} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{-8 - 8 + 6 + 2}{+0} = -\infty;$$

$x = -2$ — вертикальная асимптота.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{8 - 8 - 6 + 2}{+0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{8 - 8 - 6 + 2}{-0} = +\infty;$$

$x = 2$ — вертикальная асимптота.

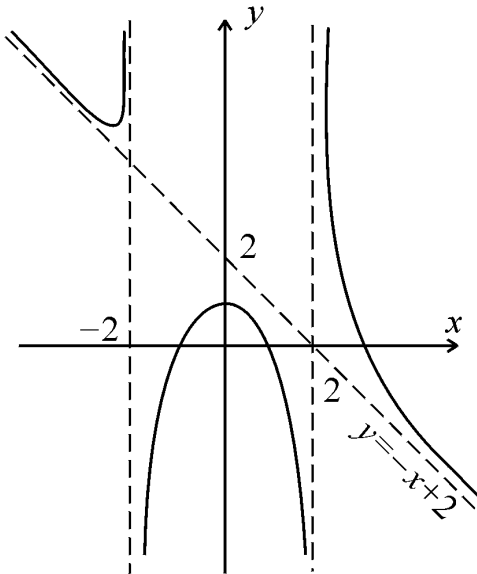
Наклонные асимптоты при $x \rightarrow \pm \infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{x(4 - x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - kx] =$$

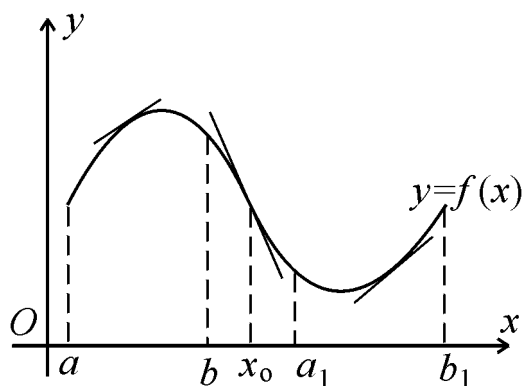
$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2 + x + 2}{4 - x^2} = 2.$$

При $x \rightarrow \pm \infty$ получаем асимптоту $y = -x + 2$.



3. НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ *вогнут вниз* на интервале $(a; b)$ (*вогнут вверх* на интервале $(a_1; b_1)$), если при $a < x < b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при



$a_1 < x < b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала $(a; b)$ (или интервала $(a_1; b_1)$). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y = f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$).

Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба*. Для абсциссы точки перегиба x_0 графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками 2-го рода*. Критическая точка 2-го рода x_0 является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_0 - \delta < x < x_0$ и $x_0 < x < x_0 + \delta$, где δ — некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

Пример. Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

Имеем: $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода:

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают всю область существования функции $(-\infty; +\infty)$ на три интервала.

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$
y''	+	0	—	0	—
y	∪	перегиб	∩	перегиб	∪

Получили: кривая вогнута вверх при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ и вогнута вниз при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Точки $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба.

4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область существования этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области существования. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются): четность, периодичность и т.д.

Далее нужно найти точки разрыва, асимптоты, точки экстремума функции, точки перегиба и т.д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции.

Пример 4.1. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}.$$

Область существования: $x \in (-\infty; +\infty)$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

Так как функция определена при всех x , и у нее нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты при $x \rightarrow \pm \infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} = +\infty, \text{ следовательно, наклонных}$$

асимптот также нет.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left[x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2} \right]' = (x+2)^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{-1/3} = \frac{3(x+2) + 2x}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

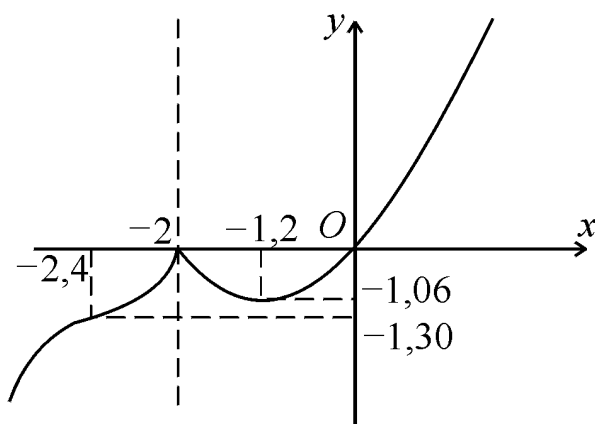
$$y' = 0 \Rightarrow 5x + 6 = 0, \quad x = -1,2;$$

$$y' \text{ не существует} \Rightarrow x + 2 = 0, \quad x = -2.$$

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1,2)$	$-1,2$	$(-1,2; +\infty)$
y'	$+$	не сущ.	$-$	0	$+$

y		max		min	
-----	--	-----	--	-----	--

$y_{\max} = y(-2) = 0$ (касательная в этой точке перпендикулярна оси Ox).



$y_{\min} = y(-1,2) = -1,2 \cdot \sqrt[3]{0,64} \approx -1,06$ (касательная в этой точке параллельна оси Ox).

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = \left[\frac{5x+6}{(x+2)^{2/3}} \right] = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{x+2} - (5x+6) \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{15(x+2) - (5x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{10x+24}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

$y'' = 0$ при $x = -2,4$; y'' не существует при $x = -2$.

x	$(-\infty; -2,4)$	$-2,4$	$(-2,4; -2)$	-2	$(-2; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	не сущест.	$+$
y	\cap	перегиб	\cup		\cup

$$y_{\text{перегиба}} = y(-2,4) = -2,4 \cdot \sqrt[3]{(-2,4)^2} \approx -1,30; \quad y(0) = 0.$$

Пример 4.2. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2.$$

Область существования: $x \neq -2$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

$x = -2$ — точка разрыва, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left(\frac{4+1}{-0} \right)^2 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left(\frac{4+1}{+0} \right)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow x = -2$ — вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x \rightarrow \pm \infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = 4.$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ получаем асимптоту $y = 4$.

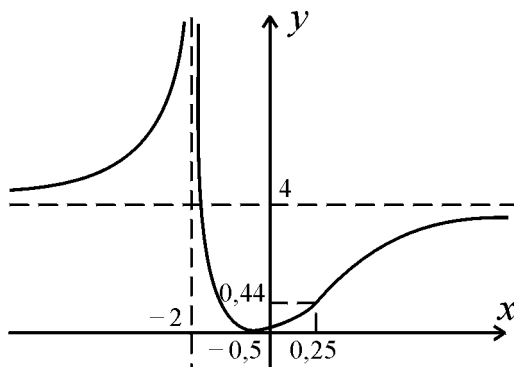
Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2} \right) \cdot \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{6(2x+1)}{(x+2)^2};$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0, \quad x = -0,5;$$

$$y' \text{ не существует} \Rightarrow x = -2.$$

x	$(-\infty; -2)$	$(-2; -0,5)$	$-0,5$	$(-0,5; +\infty)$
y'	+	-	0	+



y			min	
-----	--	--	-----	--

$$y_{\min} = y(-0,5) = 0.$$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = 6 \cdot \frac{2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 \cdot (2x+1)}{(x+2)^6} =$$

$$= 6 \cdot \frac{2(x+2) - 3(2x+1)}{(x+2)^4} = \frac{6(1-4x)}{(x+2)^4};$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 1 - 4x = 0; \quad x = 0,25;$$

$$y'' \text{ не существует} \Rightarrow x = -2.$$

x			0,25	
-----	--	--	------	--

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0,25)$		$(0,25; +\infty)$
y''	+	+	0	-
y	\cup	\cup	перегиб	\cap

$$y_{\text{перегиба}} = y(0,25) = \left(\frac{1,5}{2,25}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0,44.$$

Пример 4.3. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \frac{e^{x-3}}{x-3}.$$

Область существования: $x-3 \neq 0$; $x \neq 3$.

$y(x) \neq y(-x)$ – функция общего вида.

В точке $x = 3$ функция терпит разрыв, т.к. в ней она не определена.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{e^{x-3}}{x-3} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{e^{x-3}}{x-3} &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 3 - \text{вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b$.

1) $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x-3})'}{(x^2 - 3x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{2x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x-3})'}{(2x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{2} = +\infty, \text{ следовательно, при } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

наклонных асимптот нет.

2) $x \rightarrow -\infty$,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \frac{0}{+\infty} = 0;$$




$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-3}}{x-3} = 0,$$

при $x \rightarrow -\infty$ получаем асимптоту $y = 0$.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left(\frac{e^{x-3}}{x-3} \right)' = \frac{e^{x-3} \cdot (x-3) - e^{x-3}}{(x-3)^2} = e^{x-3} \cdot \frac{x-3-1}{(x-3)^2} = e^{x-3} \cdot \frac{x-4}{(x-3)^2},$$

$$y' = 0 \Rightarrow x-4=0, x=4; \quad y' \text{ не существует} \Rightarrow x=3.$$

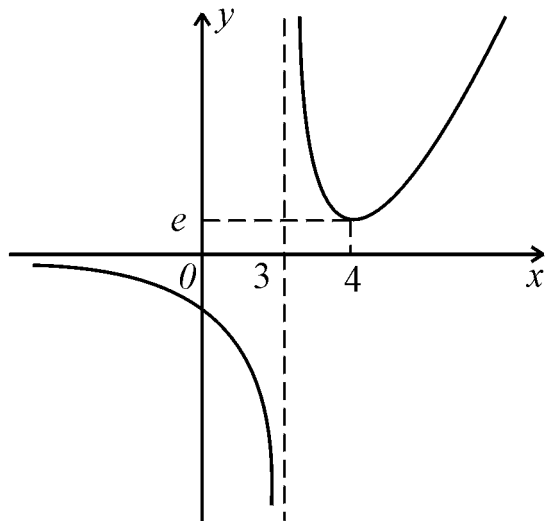
x	$(-\infty; 3)$	$(3; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y'	-	-	0	+
y			min	

$$y_{\min} = y(4) = e \approx 2,72.$$



Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = e^{x-3} \cdot \frac{x-4}{(x-3)^2} + e^{x-3} \cdot \frac{(x-3)^2 - (x-4) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{e^{x-3}}{(x-3)^2} \cdot \frac{x^2 - 7x + 12 - x + 5}{x-3} = \frac{e^{x-3} \cdot (x^2 - 8x + 17)}{(x-3)^3}; \quad y'' \neq 0;$$



$$y'' \text{ не существует} \Rightarrow x=3.$$

x	$(-\infty; 3)$	$(3; +\infty)$
y''	-	+
y		

$$y(0) = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \approx -0,02.$$

Пример 4.4. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \ln \frac{x+6}{x} - 1.$$

$$\text{Область существования: } \frac{x+6}{x} > 0.$$

$$x > 0, \quad x < -6.$$

Функция общего вида.



$$\lim_{x \rightarrow -6-0} \left[\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = -\infty \Rightarrow x = -6 - \text{вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -6+0} \left[\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = +\infty \Rightarrow x = -6 - \text{вертикальная асимптота.}$$



Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \frac{x+6}{x} - 1}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = -1.$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ получаем асимптоту $y = -1$.

Исследуем функцию по первой производной.

x	$(-\infty; -6)$	$(0; +\infty)$
y'	$-$	$-$
y		

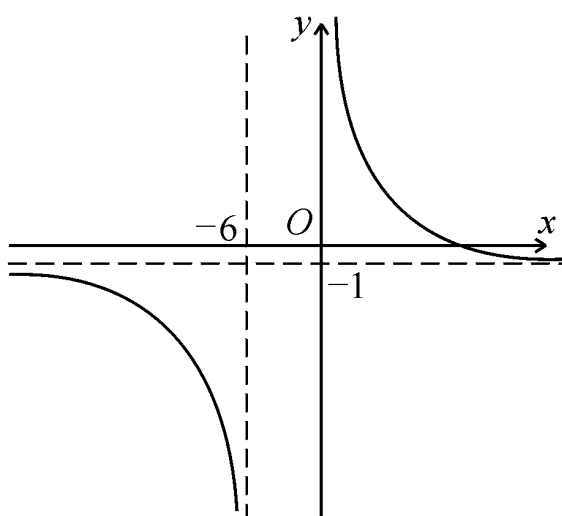
$$y' = \frac{x}{x+6} \cdot \frac{x-x-6}{x^2} = \frac{-6}{x(x+6)} \neq 0.$$



Экстремумов у функции нет.

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = -6 \cdot \frac{-(x+6+x)}{x^2(x+6)^2} = \frac{6(2x+6)}{x^2(x+6)^2} = \frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2};$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x + 3 = 0; \quad x = -3 - \text{не входит в область существования.}$$



x	$(-\infty; -6)$	$(0; +\infty)$
y''	$-$	$+$
y		

Точек перегиба нет.

$$\ln \frac{x+6}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{e-1};$$

$$y\left(\frac{6}{e-1}\right) = 0.$$

1. Неопределенный интеграл

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $F(x)$ – результат интегрирования, C – произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$.
2. $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$, где A – постоянная.
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица простейших интегралов:

- | | |
|--|--|
| 1. $\int dx = x + C$. | 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$. |
| 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$. | 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$. |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. | 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$. |
| 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \int e^x dx = e^x + C$. | 10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$. |
| 5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. | 11. |
| $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0)$. | |

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C, (A \neq 0).$$

Основные методы интегрирования:

1. Подведение под знак дифференциала:

а) к функции, стоящей под знаком дифференциала, можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) \pm A)$;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель:

$$df(x) = \frac{1}{A} d(A \cdot f(x));$$

в) под знак дифференциала подводится функция по правилу:

$$f'(x)dx = df(x).$$

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ где } u = u(x), v = v(x).$$

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а) $\int a^x \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = a^x dx.$

б) $\int \sin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \sin ax dx.$

в) $\int \cos ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \cos ax dx,$

г) $\int \ln ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \ln ax, \quad dv = P_n(x) dx,$

д) $\int \arcsin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \arcsin ax, \quad dv = P_n(x) dx,$

е) $\int \arctg ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \arctg ax, \quad dv = P_n(x) dx,$

где $P_n(x)$ – многочлен n -ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \text{ где } x = \varphi(t).$$

Пример выполнения задания.

Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx; \quad \text{в) } \int (3x + 4)e^{3x} dx.$$

Решение.

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \left(-\frac{1}{2}\right) \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \\ &= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C \right)' &= \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3(\arcsin x)^2 \cdot (\arcsin x)' - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' + C' = \\ &= \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 17 & x^2 - 4x + 3 \\
 \hline
 x^3 - 4x^2 + 3x & x + 4 \\
 \hline
 4x^2 - 3x - 17 & \\
 \hline
 4x^2 - 16x + 12 & \\
 \hline
 13x - 29 &
 \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx &= \int \left(x + 4 + \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} \right) dx = \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx.
 \end{aligned}$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x - 29}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)},$$

значит $13x - 29 = A(x - 3) + B(x - 1)$.

При $x = 3$ имеем $13 \cdot 3 - 29 = B(3 - 1)$, откуда $B = 5$;

при $x = 1$ имеем $13 \cdot 1 - 29 = A(1 - 3)$, откуда $A = 8$.

Получаем $\frac{13x - 29}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{8}{x - 1} + \frac{5}{x - 3}$ и интегрируем

$$\begin{aligned}
 \int \frac{13x - 29}{(x - 1)(x - 3)} dx &= \int \frac{8}{x - 1} dx + \int \frac{5}{x - 3} dx = 8 \int \frac{d(x - 1)}{x - 1} + 5 \int \frac{d(x - 3)}{x - 3} = \\
 &= 8 \ln|x - 1| + 5 \ln|x - 3| + C
 \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 8 \ln|x - 1| + \ln|x - 3| + C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + \ln|x-3| + C \right)' = \frac{2x}{2} + 4 + \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3} =$$

$$= \frac{(x+4)(x-1)(x-3) + 8(x-3) + 5(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Замечание.

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C; \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(-k+1)} (x-a)^{-k+1} + C,$$

$(k=2,3,\dots)$.

в) применим методом интегрирования по частям.

Примем $u = 3x + 4$, $dv = e^{3x} dx$, тогда $du = 3dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int (3x+4)e^{3x} dx = (3x+4) \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 3dx = \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \int e^{3x} dx =$$

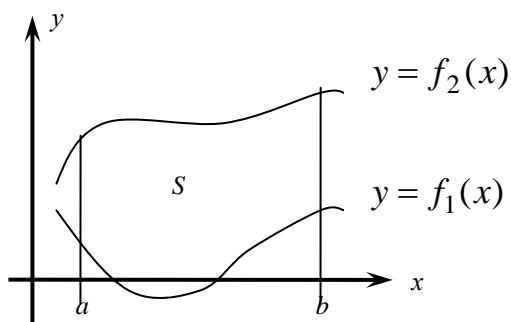
$$= \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3}e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C.$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1) + C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}(3(x+1) + 1) = e^{3x}(3x+4),$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

2. Определенный интеграл



Если на плоскости Oxy задана фигура, ограниченная двумя непрерывными линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и верти-

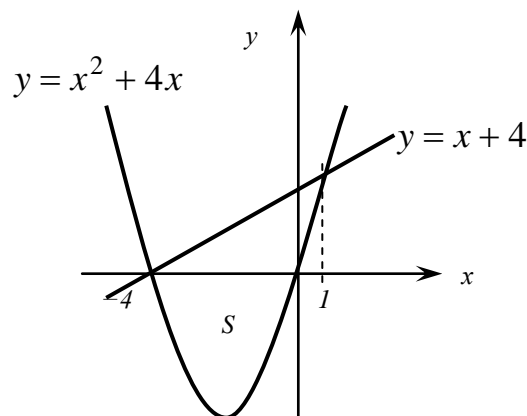
кальными прямыми $x=a$, $x=b$, то площадь S такой фигуры может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx, \text{ где } f_2(x) \geq f_1(x) \text{ на отрезке } [a, b].$$

Пример 2.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение.

Заданные линии ограничивают на плоскости Оху криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^1 (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int_{-4}^1 (4 - 3x - x^2)dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^1 = \\ &= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

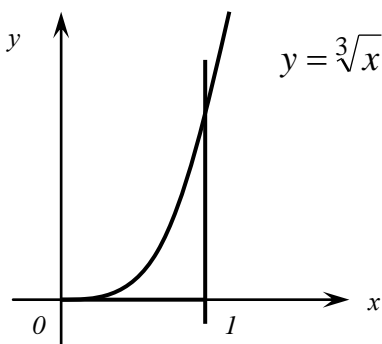
Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$,

1) вокруг оси Ox , вычисляются по формуле $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$;

2) вокруг оси Oy , вычисляются по формуле $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$.

Пример.2.2 Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей Ox и Oy криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y = \sqrt[3]{x}$, осью Ox и прямой $x = 1$.

Решение.



1) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox , равен

$$V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} \bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \text{ (куб. ед.)}$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy , равен

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x} dx = 2\pi \frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} \bigg|_0^1 = \frac{6\pi}{7} \text{ (куб. ед.)}.$$

Функции нескольких переменных

Переменная величина z называется *функцией двух переменных* x и y , если каждой паре значений (x, y) из данной области соответствует единственное определенное значение $z = f(x, y)$.

Для функции $z = f(x, y)$ вводятся понятия *частных производных* первого порядка, которые определяются выражениями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

и *частных производных* второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ *максимум* (*минимум*), если значение этой функции в точке M_0 больше (меньше), чем значения функции в любой точке из окрестности точки M_0 .

Необходимыми условиями существования *экстремума* (максимума или минимума) дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ является равенство нулю ее частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Точки, в которых частные производные обращаются в ноль, называются *стационарными точками* функции $z = f(x, y)$. Для того чтобы стационарная точка являлась экстремумом, в ней должны выполняться *достаточные условия*.

Обозначим $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_0}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0}$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_0}$,

$$\Delta = AC - B^2.$$

Если в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$

$\Delta > 0, A > 0$, то M_0 есть точка минимума;

$\Delta > 0, A < 0$, то M_0 есть точка максимума;

$\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;

$\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример. Исследовать на экстремум функцию
 $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 + 6$.

Решение.

1. Найдем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2y.$$

2. Запишем необходимые условия существования экстремума

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 4 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

значит точка $M(1;2)$ является стационарной точкой функции.

3. Проверим выполнение в точке M достаточного условия. Для этого найдем вторые частные производные функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

В точке $M(1;2)$ $A = -2, B = 0, C = -2$ и $\Delta = (-2) \cdot (-2) - 0 = 4$. Поскольку $\Delta = 4 > 0, A = -2 < 0$, точка $M(1;2)$ является точкой максимума. Значение функции в этой точке $z|_M = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1^2 - 2^2 + 6 = 11$.

Функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$ принимает наибольшее и наименьшее значения в области D , ограниченной линией $\varphi(x, y) = 0$, либо в стационарных точках, расположенных внутри области D , либо на границе этой области.

Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ в заданной области D решается по следующему плану:

1. Определяем стационарные точки функции, расположенные внутри области D , и вычисляем значения функции в этих точках.

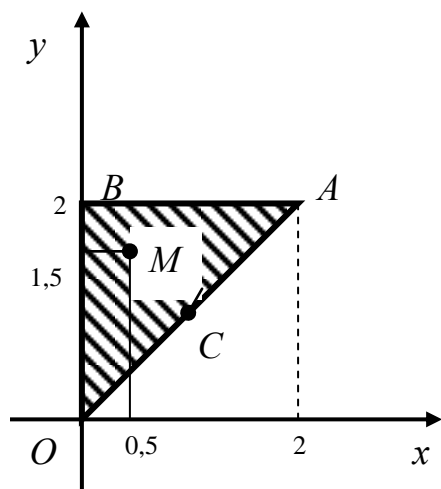
2. Находим стационарные точки функции на границе $\varphi(x, y) = 0$ области или на отдельных ее участках, заданных различными уравнениями, и вычисляем значения функции в этих точках.

3. Из всех вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x - y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 2$, $y = x$.

Решение.

1. Найдем стационарные точки функции из условий равенства нулю частных производных функции



$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 1,5 \end{cases}$$

Стационарная точка $M(0,5; 1,5)$ лежит внутри заданной области OAB .

Значение функции в точке M равно

$$z|_M = 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 1,5 - 4 \cdot 0,5 - 1,5 = -1,75.$$

2. Исследуем поведение функции на границах области:

а) на границе OA $y = x$, $0 \leq x \leq 2$, $z = x^2 + 2x \cdot x - 4 \cdot x - x$ или $z = 3x^2 - 5x$;

$$z' = 6x - 5, \quad z' = 0 \quad \text{при} \quad x = \frac{5}{6}, \quad \text{тогда} \quad y = \frac{5}{6} \quad (\text{так как } y=x).$$

$$\text{В точке } C\left(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right) \text{ значение функции равно } z|_C = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} = -\frac{25}{12}.$$

Вычислим значения функции в крайних точках отрезка OA .

В точке $O(0;0)$ $z|_O = 0$, в точке $A(2;2)$ значение функции равно

$$z|_A = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 = 2.$$

б) на границе BA $y = 2$, $0 \leq x \leq 2$, $z = x^2 + 2x \cdot 2 - 4x - 2$ или $z = x^2 - 2$;

$z' = 2x$, $z' = 0$ при $x = 0$, а $y = 2$ согласно уравнению прямой BA .

В точке $B(0;2)$ значение функции равно $z|_B = 3 \cdot 0^2 - 2 = -2$.

в) на границе OB $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$, $z = -y$;

$z' = -1 \neq 0$ при всех $y \in [0;2]$, следовательно, стационарных точек на линии OB нет.

3. Из всех вычисленных значений заданной функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$z|_A = 2$ — наибольшее значение функции в области OAB

$z|_C = -\frac{25}{12}$ — наименьшее значение функции в области OAB

Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называют дифференциальными уравнениями с *разделяющимися переменными*:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x)}{f_1(y)} \rightarrow f_1(y)dy = f_2(x)dx, \quad (1)$$

или в дифференциальной форме

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0. \quad (2)$$

Разделим обе части уравнения (2) на произведение функций

$$f_2(y)f_3(x)$$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0 \quad (2')$$

и, после интегрирования, получим общий интеграл (общее решение) уравнения:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = C.$$

При делении на $f_2(y)f_3(x)$ может произойти потеря некоторых частных решений. Пусть, например, при $y = y_0$ имеем $f_2(y_0) = 0$, тогда функция $y = y_0$ является решением уравнения (2'), т.к. $dy = dy_0 = 0$. Решением может также быть функция $x = x_0$, если $f_3(x_0) = 0$.

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка $x(y+1)dx - (x^2+1)ydy = 0$.

Решение:

Данное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, причем $f_1(x) = x$; $f_2(y) = y+1$; $f_3(x) = x^2+1$; $f_4(y) = -y$. Разделим обе части уравнения на произведение

$$f_2(y)f_3(x) = (y+1)(x^2+1)$$

и получим

$$\frac{xdx}{x^2+1} - \frac{ydy}{y+1} = 0.$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = C,$$

используя подведение под знак дифференциала

$$\int \frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{x^2+1} - \int dy + \int \frac{d(y+1)}{y+1} = C,$$

получим общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2} \ln|x^2+1| - y + \ln|y+1| = C.$$

При делении на $f_2(y) = y+1$ потеряно частное решение: $y = -1$.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (3)$$

линейное относительно искомой функции и её производной, называется *линейным*.

Уравнение (3) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными следующим образом. Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций: $y = u(x) \cdot v(x)$. Одна из этих функций может быть абсолютно произвольной, а вторая определяется в зависимости от первой так, чтобы их произведение удовлетворяло уравнению (3).

Из равенства $y = u \cdot v$ находим $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тогда в соответствие с (3) имеем $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. Выберем в качестве $v(x)$ какое-нибудь частное решение уравнения

$$v' + p(x)v = 0, \quad (4)$$

тогда для отыскания $u(x)$ получим уравнение

$$u'v = q(x). \quad (5)$$

Найдем $v(x)$, разделяя переменные в (4):

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \text{ откуда } \ln v = -\int p(x)dx \text{ и } v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Зная $v(x)$, найдем $u(x)$ из уравнения (5):

$$\frac{du}{dx} v = q(x) \Rightarrow du = e^{\int p(x) dx} q(x) dx, \text{ тогда } u = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C.$$

Общее решение линейного уравнения (3) имеет вид

$$y = uv = e^{-\int p(x) dx} \left[\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right].$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y' - 2y = 1$.

Решение.

Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций:

$$y = u(x) \cdot v(x), \text{ тогда } y' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

и подставим полученные выражения в заданное уравнение

$$u'v + uv' - 2uv = 1.$$

Вынесем за скобки $u(x)$

$$u'v + u(v' - 2v) = 1$$

и, приравнявая к нулю выражение в скобках, получим и решим два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' - 2v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = 2dx$$

$$\ln v = 2x$$

$$v = e^{2x}$$

$$u'v = 1$$

$$\frac{du}{dx} e^{2x} = 1$$

$$du = e^{-2x} dx$$

$$u = \int e^{-2x} dx,$$

$$u = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

Запишем общее решение заданного дифференциального уравнения в виде

$$y = uv = \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) \cdot e^{2x}, \text{ или } y = -\frac{1}{2} + C e^{2x}.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (6)$$

называется неоднородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами a_1 и a_2 .

Общее решение этого уравнения $y = \bar{y} + y^*$, где \bar{y} – общее решение соответствующего однородного уравнения; y^* – частное решение уравнения (6). Дифференциальное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (7)$$

является однородным и называется соответствующим неоднородному уравнению (6). Общее решение однородного уравнения (7) находят по корням характеристического уравнения

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение может иметь три случая для корней r_1 и r_2 :

- 1) *корни характеристического уравнения действительные и различные: $r_1 \neq r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\bar{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные;*
- 2) *корни характеристического уравнения действительные и равные: $r_1 = r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\bar{y} = e^{r_1 x} (C_1 + C_2 x)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные;*
- 3) *корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа $r_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i, \beta \neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.*

Частное решение y^* неоднородного уравнения (6) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в зависимости от вида правой части уравнения $f(x)$.

Первый случай. Правая часть уравнения (6) имеет вид $f(x) = P(x)e^{mx}$, где $P(x)$ – многочлен. Тогда уравнение (6) имеет частное решение вида

$$y^* = x^k Q(x) e^{mx}, \quad (8)$$

где $Q(x)$ – полный многочлен той же степени от x , что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами;

$k = 0$, если число m не является корнем характеристического уравнения;

$k = 1$, если число m является простым корнем характеристического уравнения;

$k = 2$, если число m является двукратным корнем характеристического уравнения.

Правило сохраняет свою силу и при $m = 0$, когда $f(x) = P(x)$ – многочлен.

Неопределенные коэффициенты в многочлене $Q(x)$ определяют подстановкой функции (8) и ее производных в уравнение (6) с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' - 3y' - 4y = 4x - 1, \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2 - 3r - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня $r_1 = -1$, $r_2 = 4$, следовательно, $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$. Правая часть уравнения имеет вид

$f(x) = 4x - 1 = (4x - 1) \cdot e^{0 \cdot x}$, где $m = 0$ и не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение при $k = 0$ ищем в виде $y^* = x^0 \cdot (Ax + B) \cdot e^{0 \cdot x} = Ax + B$, $(y^*)' = A$, $(y^*)'' = 0$. После подстановки в дифференциальное уравнение получаем

$$\begin{aligned} 0 - 3A - 4(Ax + B) &= 4x - 1; \\ -3A - 4Ax - 4B &= 4x - 1; \\ -4A \cdot x + (-3A - 4B) &= 4 \cdot x + (-1); \end{aligned}$$

$$x^1: -4A = 4; \quad A = -1$$

$$x^0: -3A - 4B = -1, \quad -4B = -1 + 3A = -4, \quad B = 1$$

Частным решением является функция $y^* = Ax + B = -1 \cdot x + 1 = 1 - x$. Общим решением является функция $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - x + 1$.

Найдем значение констант C_1, C_2 из начальных условий. Для этого определим $y' = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x} - 1$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} y|_{x=0} = C_1 + C_2 + 1 = 2, \\ y'|_{x=0} = -C_1 + 4C_2 - 1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Искомым частным решением является функция $y = e^{4x} - x + 1$.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 4 = 0$ имеет двукратный корень $r_1 = 2$, следовательно, $\bar{y} = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = e^{2x}$, $m = 2$ является двукратным ($k = 2$) корнем характеристического уравнения, тогда частное решение ищем в виде

$$y^* = x^2 \cdot Ae^{2x}, \quad (y^*)' = x^2 \cdot 2Ae^{2x} + 2x \cdot Ae^{2x} = 2Ae^{2x}(x^2 + x),$$

$$(y^*)'' = 4Ae^{2x}(x^2 + x) + 2Ae^{2x}(2x + 1) = Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2).$$

После подстановки y^* и ее производных в исходное дифференциальное уравнение получаем

$$Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2) - 4 \cdot 2Ae^{2x}(x^2 + x) + 4Ae^{2x} \cdot x^2 = e^{2x},$$

$$Ae^{2x}(\cancel{4x^2} + \cancel{8x} + 2 - \cancel{8x^2} - \cancel{8x} + \cancel{4x^2}) = e^{2x},$$

$$2Ae^{2x} = e^{2x},$$

$$2A = 1, \quad A = \frac{1}{2}.$$

Частным решением является функция $y^* = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2$.

Общим решением является функция

$$y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2.$$

Найдем значение констант C_1, C_2 из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = e^{2x}(2C_1 + 2C_2x + C_2) + e^{2x}(x^2 + x),$$

и получим систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y|_{x=0} = e^0 \cdot C_1 = 2, \quad C_1 = 2$$

$$y'|_{x=0} = e^0(2C_1 + C_2) = 3, \quad C_2 = -1$$

Искомым решением является функция $y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(2 - x) + \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2$.

Второй случай. Правая часть уравнения (6) имеет вид $f(x) = a \cos nx + b \sin nx$.

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то

$$y^* = A \cos nx + B \sin nx.$$

Если числа $\pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y^* = (A \cos nx + B \sin nx) \cdot x.$$

В частных случаях, когда a или b равно нулю, решение всё равно надо искать в указанном общем виде.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' + 4y' + 13y = 5 \sin 3x, \quad y|_{x=0} = \frac{1}{8}, \quad y'|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 13 = 0$ имеет корни

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i,$$

тогда $\bar{y} = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Числа $\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому

$$y^* = A \sin 3x + B \cos 3x,$$

$$(y^*)' = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x,$$

$$(y^*)'' = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x.$$

Подставляем y^* и ее производные в исходное уравнение и получаем

$$\begin{aligned} -9A \sin 3x - 9B \cos 3x + 4(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) + 13(A \sin 3x + B \cos 3x) &= C, \\ (4A - 12B) \sin 3x + (4B + 12A) \cos 3x &= 5 \cdot \sin 3x + 0 \cdot \cos 3x; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 3x: 4A - 12B &= 5 \\ \cos 3x: 4B + 12A &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{8} \\ B &= -\frac{3}{8} \end{aligned} \right\}.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{3}{8} \cos 3x.$$

Найдем значение констант C_1, C_2 из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = -2e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-2x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) + \frac{3}{8} \cos 3x + \frac{9}{8} \sin 3x$$

и запишем систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y|_{x=0} = e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) - \frac{3}{8} = \frac{1}{8},$$

$$y'|_{x=0} = -2e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 (C_1 \cdot 0 + 3C_2) + \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}, \\ C_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8} \right) = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Искомым решением является функция

$$y = e^{-2x} \left(\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{3}{8} \sin 3x \right) + \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{3}{8} \cos 3x.$$

Ряды

Степенным рядом называют ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (9)$$

расположенный по степеням двучлена $(x-a)$.

В соответствии с теоремой Абеля ряд (9) сходится на интервале $x \in (a-R, a+R)$, а для всех x , лежащих вне этого интервала, ряд расходится. Число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда. На концах

интервала (при $x = a - R$ и при $x = a + R$) вопрос о сходимости и расходимости данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда. У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ($R = 0$), у других охватывает всю ось Ox ($R = \infty$).

Согласно признаку Даламбера радиус сходимости определяют по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (10)$$

Если воспользоваться признаком Коши, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

Пример. Найти интервал сходимости ряда и исследовать его

сходимость на краях интервала $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}$

Решение.

Радиус сходимости определим по формуле (10):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 10^{n+1}}{n \cdot 10^{n+1}} \right| = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 10.$$

На концах интервала: при $x = -10$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n \cdot 10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

который является знакочередующимся и сходится по теореме Лейбница, так как его члены убывают по абсолютной величине

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \text{ При } x = 10 \text{ получим гармонический ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится. Таким образом, данный степенной ряд сходится при $x \in [-10; 10)$.

Основные элементарные функции имеют простые разложения по степеням x , которые представлены ниже:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1].$$

При приближенных вычислениях определенных интегралов требуется разложить подынтегральную функцию в степенной ряд, который в пределах интервала сходимости может быть почленно проинтегрирован. Используя формулу Ньютона – Лейбница, определенный интеграл вычисляют как частичную сумму получающегося числового ряда. Если ряд знакопеременный, то точность приближенных вычислений не превосходит первого из отброшенных членов.

Пример. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда:

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Решение.

Используем разложение в ряд для функции $\sin x$ и подставим его в подынтегральное выражение

$$\begin{aligned}
\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{0,5} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\
&= \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)} + \dots \right) \Bigg|_0^{0,5} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 3!3} + \frac{1}{2^5 5!5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{2n-1} (2n-1)!(2n-1)} + \dots \approx \\
&\approx 0,5 - 0,0069 + 0,00005 \approx 0,5 - 0,0069 \approx 0,4931 \approx 0,493.
\end{aligned}$$

В вычислениях приведены первые три члена ряда с сохранением четырех знаков после запятой, так как заданная точность составляет 0,001. Третий член ряда отброшен, так как он по величине меньше заданной точности $(0,00005) < 0,001$. В окончательном результате проведено округление до трех знаков после запятой.

Функция одной переменной $y = f(x)$ – это правило, по которому каждому значению независимой переменной x (из области определения) соответствует одно и только одно значение функции y . Естественно, «икс» и «игрек» – действительные числа.

В комплексном случае функциональная зависимость задается аналогично:

Однозначная функция комплексной переменной $w = f(z)$ – это правило, по которому каждому *комплексному* значению независимой переменной z (из области определения) соответствует одно и только одно *комплексное* значение функции w . В теории рассматриваются также многозначные и некоторые другие типы функций, но для простоты я остановлюсь на одном определении.

Чем отличается функция комплексной переменной?

Главное отличие: числа комплексные. Я не иронизирую. От таких вопросов нередко выпадают в ступор, в конце статьи историю прикольную расскажу. мы рассматривали комплексное число в виде $z = a + bi$. Поскольку сейчас буква «зет» стала переменной, то её мы будем обозначать следующим образом: $z = x + yi$, при этом «икс» и «игрек» могут принимать различные *действительные* значения. Грубо говоря, функция комплексной переменной $w = f(z) = f(x + yi)$ зависит от переменных x и y , которые принимают «обычные» значения. Из данного факта логично вытекает следующий пункт:

Действительная и мнимая часть функции комплексной переменной

Функцию комплексной переменной можно записать в виде:

$w = u(x, y) + v(x, y) \cdot i$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – две функции двух действительных переменных.

Функция $u(x, y)$ называется **действительной частью** функции w .

Функция $v(x, y)$ называется **мнимой частью** функции w .

То есть, функция комплексной переменной $w = f(z)$ зависит от двух действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Чтобы окончательно всё прояснить рассмотрим практические примеры:

Пример 1

Найти действительную и мнимую часть функции $w = z^2 + 2z$

Решение: Независимая переменная « z », как вы помните, записывается в виде $z = x + yi$, поэтому:

$$\begin{aligned} w &= (x + yi)^2 + 2(x + yi) = x^2 + 2xyi + (yi)^2 + 2x + 2yi = x^2 + 2xyi - y^2 + 2x + 2yi = \\ &= x^2 - y^2 + 2x + 2xyi + 2yi = x^2 - y^2 + 2x + (2xy + 2y)i \end{aligned}$$

(1) В исходную функцию $w = z^2 + 2z$ подставили $z = x + yi$.

(2) Для первого слагаемого использовали формулу сокращенного умножения $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. В слагаемом $2(x + yi)$ – раскрыли скобки.

(3) Аккуратно возвели в квадрат $(yi)^2$, не забывая, что $i^2 = -1$

(4) Перегруппировка слагаемых: сначала переписываем слагаемые, **в которых нет мнимой единицы** (первая группа), затем слагаемые, где есть i (вторая группа). Следует отметить, что перетасовывать слагаемые не обязательно, и данный этап можно пропустить (фактически выполнив его устно).

(5) У второй группы выносим i за скобки.

В результате наша функция оказалась представлена в виде $w = u(x, y) + v(x, y) \cdot i$

Ответ:

$u = x^2 - y^2 + 2x$ – действительная часть функции w .

$v = 2xy + 2y$ – мнимая часть функции w .

получились функции двух переменных, от которых можно найти такие популярные **частные производные**. Без пощады – находить будем. Но чуть позже.

Пример 2

Найти действительную и мнимую часть функции $w = 3iz - z^2$

Это пример для самостоятельного решения. Перед тем как с шашками наголо браться в бой на комплексной плоскости, позвольте дать самый важный совет по теме:

В Примере 1 было выяснено, что $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$.

Теперь куб. Используя формулу сокращенного умножения $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, выведем:

$$z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i.$$

Рекомендую переписать в тетрадь две рабочие формулы:

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$$

Формулы очень удобно использовать на практике, поскольку они значительно ускоряют процесс решения.

Дифференцирование функций комплексной переменной. Условия Коши-Римана

Для функции комплексной переменной $w = f(z)$ справедливы правила дифференцирования и таблица производных элементарных функций. Таким образом, производная берётся точно так же, как и в случае функции действительной переменной $y = f(x)$.

для многих функций комплексной переменной производной не существует вообще, и приходится выяснять, дифференцируема ли та или иная функция.

Рассмотрим функцию комплексной переменной $w = u(x, y) + v(x, y) \cdot i$. Для того, чтобы данная функция была дифференцируема необходимо и достаточно:

1) Чтобы существовали частные производные первого порядка u'_x, u'_y, v'_x, v'_y . Об этих обозначениях сразу забудьте, поскольку в теории функции комплексного переменного традиционно используется другой вариант записи:

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

2) Чтобы выполнялись так называемые **условия Коши-Римана**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Только в этом случае будет существовать производная!

Пример 3

Определить действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ часть функции $w = f(z) = 3z - iz^2$. Проверить выполнение условий Коши-Римана. В случае выполнения условий Коши-Римана, найти производную функции.

Решение раскладывается на три последовательных этапа:

1) Найдём действительную и мнимую часть функции. Данное задание было разобрано в предыдущих примерах, поэтому запишу без комментариев:

Так как $z = x + yi$, то:

$$\begin{aligned} f(z) &= 3(x + yi) - i(x + yi)^2 = 3x + 3yi - i(x^2 + 2xyi - y^2) = \\ &= 3x + 3yi - ix^2 + 2xy + y^2i = 3x + 2xy + (3y - x^2 + y^2)i \end{aligned}$$

Таким образом:

$u(x, y) = 3x + 2xy$ – действительная часть функции $f(z)$;

$v(x, y) = 3y - x^2 + y^2$ – мнимая часть функции $f(z)$.

Остановлюсь еще на одном техническом моменте: *в каком порядке* записывать слагаемые в действительной и мнимой частях? Да, в принципе, без разницы. Например, действительную часть можно записать так: $u(x, y) = 2xy + 3x$, а мнимую – так: $v(x, y) = -x^2 + y^2 + 3y$.

2) Проверим выполнение условий Коши-Римана. Их два.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Начнем с проверки условия $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. Находим **частные производные**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (3x + 2xy)'_x = 3 + 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (3y - x^2 + y^2)'_y = 3 - 0 + 2y = 3 + 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Таким образом, условие выполнено.

Несомненно, приятная новость – частные производные почти всегда очень простые.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} ;$$

Проверяем выполнение второго условия

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (3x + 2xy)'_y = 0 + 2x = 2x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (3y - x^2 + y^2)'_x = 0 - 2x + 0 = -2x$$

Получилось одно и то же, но с противоположными знаками, то есть, усло-

вие $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ также выполнено.

Условия Коши-Римана выполнены, следовательно, функция дифференцируема.

3) Найдём производную функции. Производная тоже очень простая и находится по обычным правилам:

$$f'(z) = (3z - iz^2)' = 3 - 2iz$$

Мнимая единица при дифференцировании считается константой.

Ответ: $u(x, y) = 3x + 2xy$ – действительная часть, $v(x, y) = 3y - x^2 + y^2$ – мнимая часть.

Условия Коши-Римана выполнены, $f'(z) = 3 - 2iz$.

Существуют еще два способа нахождения производной, они, конечно, применяются реже, но информация будет полезна для понимания второго урока – **Как найти функцию комплексной переменной?**

Производную можно найти по формуле:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot i$$

В данном случае: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3 + 2y, \frac{\partial v}{\partial x} = -2x$

Таким образом $f'(z) = 3 + 2y - 2xi$

Предстоит решить обратную задачу – в полученном выражении нужно вычленить $x + yi = z$. Для того, чтобы это сделать, необходимо в $-2xi$ и $2y$ вынести $-2i$ за скобку:

$$f'(z) = 3 + 2y - 2xi = 3 - 2i(x + yi) = 3 - 2iz$$

Обратное действие, как многие заметили, выполнять несколько труднее, для проверки всегда лучше взять выражение $3 - 2i(x + yi)$ и на черновике либо устно раскрыть обратно скобки, убедившись, что получится именно $3 + 2y - 2xi$

Зеркальная формула для нахождения производной:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot i$$

В данном случае: $\frac{\partial v}{\partial y} = 3 + 2y$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, поэтому:
 $f'(z) = 3 + 2y - 2xi = 3 - 2i(x + yi) = 3 - 2iz$

Пример 4

Определить действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ часть функции $w = f(z) = \frac{z^2}{2} - 5i$. Проверить выполнение условий Коши-Римана. В случае выполнения условий Коши-Римана, найти производную функции.

Пример 5

Определить действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ часть функции $w = f(z) = 3z^2 - iz^3$. Проверить выполнение условий Коши-Римана. Вычислить $f'(i)$

Решение: Алгоритм решения полностью сохраняется, но в конце добавится новый пункт: нахождение производной в точке. Для куба нужна формула уже выведена: $z^3 = (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$

Определим действительную и мнимую часть данной функции:

Так как $z = x + yi$, то:

$$\begin{aligned} f(z) &= 3(x + yi)^2 - i(x + yi)^3 = 3(x^2 + 2xyi - y^2) - i(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i) = \\ &= 3x^2 + 6xyi - 3y^2 - ix^3 + 3x^2y + 3xy^2i - y^3 = 3x^2 - 3y^2 + 3x^2y - y^3 + (6xy - x^3 + 3xy^2)i \end{aligned}$$

Таким образом:

$u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 3x^2y - y^3$ – действительная часть функции $f(z)$;
 $v(x, y) = 6xy - x^3 + 3xy^2$ – мнимая часть функции $f(z)$.

Проверим выполнение условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (3x^2 - 3y^2 + 3x^2y - y^3)'_x = 3 \cdot 2x - 0 + 3 \cdot 2xy - 0 = 6x + 6xy,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (6xy - x^3 + 3xy^2)'_y = 6x - 0 + 3x \cdot 2y = 6x + 6xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Проверка второго условия:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (3x^2 - 3y^2 + 3xy - y^3)'_y = 0 - 3 \cdot 2y + 3x^2 - 3y^2 = -6y + 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (6xy - x^3 + 3xy^2)'_x = 6y - 3x^2 + 3y^2$$

Получилось одно и то же, но с противоположными знаками, то есть усло-

вие $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ также выполнено.

Условия Коши-Римана выполнены, следовательно, функция является дифференцируемой:

$$f'(z) = (3z^2 - iz^3)' = 6z - 3iz^2$$

Вычислим значение производной в требуемой точке:

$$f'(i) = 6i - 3i \cdot i^2 = 6i + 3i = 9i$$

Ответ: $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 3xy - y^3$, $v(x, y) = 6xy - x^3 + 3xy^2$, условия Коши-Римана выполнены, $f'(i) = 9i$

Пример 5.1. Вычислить $\int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz$ по параболе $y=x^2$ от точки $z_1=0$ до точки $z_2=1+i$.

■ Найдем действительную и мнимую части подынтегральной функции. Для этого подставим в выражение для $f(z)$ $z=x+iy$:

$$f(z) = 1 + i - 2\bar{z} = 1 + i - (x - iy) = (1 - 2x) + i(1 + 2y).$$

Тогда $u = 1 - 2x$, $v = 1 + 2y$.

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz = \int_C (1 - 2x) dx - (1 + 2y) dy + i \int_C (1 + 2y) dx + (1 - 2x) dy.$$

Так как $y=x^2$, то $dy=2x$, $x \in [0;1]$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\int_C (1+i-2\bar{z})dz &= \int_0^1 \left((1-2x) - (1+2x^2)2x \right) dx + i \int_0^1 \left((1+2x^2) + (1-2x)2x \right) dx = \\
&= \int_0^1 (-4x^3 - 4x + 1) dx + i \int_0^1 (-2x^2 + 2x + 1) dx = \\
&= \left(-x^4 - 2x^2 + x \right) \Big|_0^1 + i \left(-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \\
&= -2 + \frac{4}{3}i. \blacksquare
\end{aligned}$$

Литература

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/91080> — Загл. с экрана.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2017. — 224 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/92615> — Загл. с экрана.
3. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 240 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/4549> — Загл. с экрана.
4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов. Т.1 / Н.С.Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2010. — 416 с.
5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов : в 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2009. — 544 с.
6. Лакерник А.Р. Высшая математика. Краткий курс [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Лакерник А.Р.— Электрон. текстовые данные.— М.: Логос, 2008.— 528 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/9112.html>.— ЭБС «IPRbooks»

Дополнительная литература

1. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с.: ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. — Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214370663049600009433>, по паролю

2. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс]: курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с.: ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. – Режим доступа по паролю: https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/201410021441294315510000_8498, по паролю

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. Дифференциальные уравнения [электронный ресурс] : ежемесячный математический журнал: журнал/ РАН. - М.: Наука/Интерпериодика, 2014 - . - ISSN 0374-0641.- Режим доступа : <http://elibrary.ru/issues.asp?id=9677>, со всех компьютеров НБ ТулГУ, по паролю

2. Успехи математических наук/ Российская академия наук. - М.: Наука, 1995-ISSN 0042-1316

3. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/>, по паролю.- Загл. с экрана

4. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.-Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/>, по паролю.- .- Загл. с экрана

5. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: <http://elibrary.ru/> , по паролю.- Загл. с экрана.

6. НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа, режим доступа <http://cyberleninka.ru/> ,свободный.- Загл. с экрана.

7. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://window.edu.ru./> ,свободный.- Загл. с экрана.

8. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://exponenta.ru./> ,свободный.- Загл. с экрана.