


**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»**

**Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра вычислительной механики и математики**

Утверждено на заседании кафедры  
«Вычислительная механика и математика»  
« 17 » июня 2021 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой



В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по проведению практических занятий по дисциплине (модулю)**  
**«Математика»**

**основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы бакалавриата**

**по направлению подготовки**  
**13.03.02 Электроэнергетика и электротехника**

**с направленностью (профилем)**  
**Электрооборудование и электрохозяйство предприятий,**  
**организаций и учреждений**

Форма обучения: заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 130302-01-21

Тула 2021 год

**Разработчик методических указаний**

Инченко О.В., к.ф.-м.н.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

# Аналитическая геометрия в пространстве $R^3$

## Векторная алгебра

### Некоторые сведения из теории

Вектор – направленный отрезок.

Равенство

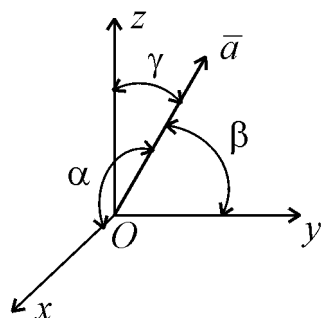
$$\vec{a} = (x, y, z) \quad (1)$$

означает, что  $x, y, z$  – проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2)$$

позволяет по координатам вектора определить его модуль.



Если  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  называются направляющими косинусами вектора  $\vec{a}$ .

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma, \quad (3)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4)$$

Если известны начало вектора  $M_1(x_1, y_1, z_1)$

и конец  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , то координаты вектора находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1. \quad (5)$$

Если  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ , то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad (6)$$

и  $\alpha \vec{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ , где  $\alpha$  – любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Признак коллинеарности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (7)$$

Тройка векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  называется координатным базисом:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  направлены по осям соответственно  $Ox, Oy, Oz$  в положительную сторону.

Любой вектор  $\vec{a} = (x, y, z)$  может быть представлен в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (8)$$

Скалярным произведением векторов  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (9)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}, \quad (10)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \quad (11)$$

т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (12)$$

Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (13)$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (14)$$

Если вектор  $\vec{F}$  изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора  $\vec{S}$ , то работа этой силы определяется

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}. \quad (15)$$

Векторным произведением вектора  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$  называется такой вектор  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , который удовлетворяет следующим трем условиям:

1.  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
2.  $\vec{c} \perp \vec{a}$  и  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ;
3. вектор  $\vec{c}$  образует с векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (16)$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad (17)$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (18)$$

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, то  $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ , в частности,  $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ .

Если векторы заданы координатами  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,

$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ , то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Если вектор  $\vec{F}$  изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке  $M$ , а вектор  $\vec{a}$  идет из некоторой точки  $O$  в точку  $M$ , то вектор  $\vec{a} \times \vec{F}$  представляет собой момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ :

$$m_o \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F}. \quad (20)$$

Смешанным произведением трех векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называется число, равное векторному произведению  $\vec{a} \times \vec{b}$ , умноженному скалярно на вектор  $\vec{c}$ , т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (21)$$

Смешанное произведение  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  равно объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , взятому со знаком «плюс», если тройка  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$$V = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}. \quad (22)$$

Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0. \quad (23)$$

Для векторов  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$  смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Задача 1. На материальную точку действуют силы:

$$\vec{F}_1 = (2, -1, 1), \quad \vec{F}_2 = (-1, 2, 2), \quad \vec{F}_3 = (1, 1, -2).$$

Найти работу равнодействующей этих сил  $\vec{R}$  при перемещении точки из положения  $A(2, -1, 0)$  в положение  $B(4, 1, -1)$ .

Решение. Найдем равнодействующую

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2 - 1 + 1, -1 + 2 + 1, 1 + 2 - 2) = (2, 2, 1).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (4 - 2, 1 + 1, -1 - 0) = (2, 2, -1).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W = \vec{R} \cdot \vec{S} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7.$$

Задача 2. Дана сила  $\vec{F} = (3, 4, -2)$  и точка ее приложения  $A(2, -1, 3)$ . Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. По формуле (20)  $m_o \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Вектор  $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$  по формуле (5) имеет координаты  $\vec{r} = (2, -1, 3)$ , по формуле (19)

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 13\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Итак,  $m_o \vec{F} = (-10, 13, 11)$ . Модуль момента находим по формуле (2):

$$|m_o \vec{F}| = \sqrt{(-10)^2 + (13)^2 + (11)^2} = \sqrt{390} \approx 19,748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$\cos \alpha = \frac{-10}{19,748} = -0,506, \quad \cos \beta = \frac{13}{19,748} = 0,658, \quad \cos \gamma = \frac{11}{19,748} = 0,557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha = 120^\circ 24', \quad \beta = 48^\circ 51', \quad \gamma = 56^\circ 9'.$$

Контроль: должно быть  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ . У нас:

$$(-0,506)^2 + (0,658)^2 + (0,557)^2 = 0,999.$$

Задача 3. Написать разложение вектора  $\vec{x} = (5, 16, 2)$  по векторам  $\vec{p} = (2, 1, 0)$ ,  $\vec{q} = (0, -2, 0)$ ,  $\vec{r} = (-1, 5, 2)$ .

Решение.

1. Разложение вектора  $\vec{x}$  по базису  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  имеет вид

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{p} + \alpha_2 \vec{q} + \alpha_3 \vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 q_1 + \alpha_3 r_1 \\ x_2 = \alpha_1 p_2 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 r_2 \\ x_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 q_3 + \alpha_3 r_3. \end{cases}$$

2. С учетом числовых значений координат векторов  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  и  $\vec{x}$  получим систему уравнений относительно неизвестных  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ :

$$\begin{cases} 2 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 - 1 \cdot \alpha_3 = 5 \\ 1 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot \alpha_2 + 5 \cdot \alpha_3 = 16 \\ 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 2 \alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 5 + \alpha_3 \\ 2\alpha_2 = \alpha_1 + 5\alpha_3 - 16 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

3. Разложение вектора  $\vec{x}$  по векторам  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  имеет вид:

$$\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}.$$

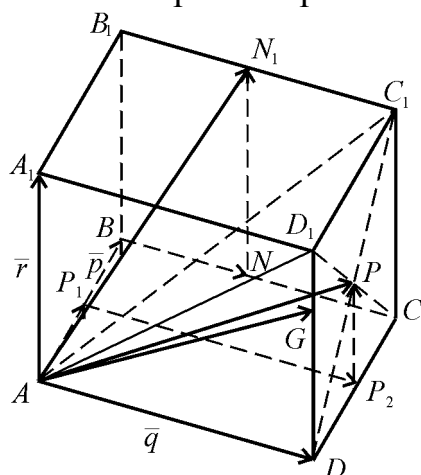
Ответ:  $\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}$ .

Задача 4. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  векторы  $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$ ,  $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$  образуют базис. Разложить векторы  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{AN_1}$  по выбранному базису, если точка  $G$  делит ребро  $DD_1$  в отноше-

нии 1:2; точка  $P$  – точка пересечения диагоналей грани  $DD_1C_1C$ ; точка  $N_1$  – середина ребра  $B_1C_1$ .

Решение.

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ:  $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}, \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$

$$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

### **Прямая и плоскость** **Плоскость. Ее уравнения**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad - \quad (25)$$

общее уравнение плоскости.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad - \quad (26)$$

уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (A, B, C)$ .

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad - \quad (27)$$

уравнение плоскости «в отрезках». Здесь  $a, b, c$  – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad - \quad (28)$$

нормальное уравнение плоскости.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad - \quad (29)$$

расстояние от точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad - \quad (30)$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3, z_3)$ .

### Прямая. Ее уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad - \quad (31)$$

общее уравнение прямой (прямая задана пересечением двух плоскостей).

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad - \quad (32)$$

каноническое уравнение прямой, где  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – точка, принадлежащая прямой,  $\vec{a} = (m, n, p)$  – направляющий вектор прямой (вектор, параллельный прямой).

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad - \quad (33)$$

параметрические уравнения прямой.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad - \quad (34)$$

уравнение прямой, проходящей через две данные точки  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ .

$$\cos \varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad - \quad (35)$$

угол между двумя прямыми, где  $\vec{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$  и  $\vec{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$  – направляющие векторы прямых.

$$\sin \psi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad - \quad (36)$$

угол между прямой и плоскостью, где  $\vec{n} = (A, B, C)$  – нормальный вектор плоскости,  $\vec{a} = (m, n, p)$  – направляющий вектор прямой.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_1A_4} \right| \quad - \text{объем пирамиды } A_1A_2A_3A_4,$$

где  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3, z_3)$ ,  $A_4(x_4, y_4, z_4)$  – координаты вершин пирамиды.



$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \quad (37)$$

- Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды  $A_1(2, 1, -1)$ ,  $A_2(3, 0, 1)$ ,  $A_3(2, -1, 3)$ ,  $A_4(0, 8, 0)$ . Найти:
- 1) угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$ ;
  - 2) угол между ребром  $A_1A_4$  и гранью  $A_1A_2A_3$ ;
  - 3) объем пирамиды  $V$ ;
  - 4) расстояние от точки  $A_4$  до плоскости  $A_1A_2A_3$ ;
  - 5) точку  $A'_4$ , симметричную точке  $A_4$  относительно плоскости  $A_1A_2A_3$ ;
  - 6) точку  $A''_4$ , симметричную точке  $A_4$  относительно прямой  $A_1A_3$ .

Решение.

- 1) Угол между ребрами находим по формуле (35).

$\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = (3-2, 0-1, 1-(-1)) = (1, -1, 2)$  – направляющий вектор прямой  $A_1A_2$ ;

$\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_4} = (0-2, 8-1, 0-(-1)) = (-2, 7, 1)$  – направляющий вектор прямой  $A_1A_4$ .

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot (-2) - 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}} = -\frac{7}{18}.$$

- 2) Составим уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$ , проходящей через три точки  $A_1(2, 1, -1)$ ,  $A_2(3, 0, 1)$ ,  $A_3(2, -1, 3)$ , по формуле (30)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & 0-1 & 1+1 \\ 2-2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \cdot 0 - (y-1) \cdot 4 + (z+1) \cdot (-2) = 0, \\ -4y + 4 - 2z - 2 = 0,$$

$4y + 2z - 2 = 0$  – уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$ ;

$\vec{n} = (0, 2, 1)$  – нормальный вектор плоскости;

$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_4} = (-2, 7, 1)$  – направляющий вектор прямой  $A_1A_4$ .

Находим угол  $\psi$  между прямой  $A_1A_4$  и плоскостью  $A_1A_2A_3$  по формуле (36)

$$\sin \psi = \frac{0 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{54}} = 0,9114.$$

3) Находим объем пирамиды по формуле (37)

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = (1, -1, 2); \quad \overrightarrow{A_1 A_3} = (0, -2, 4); \quad \overrightarrow{A_1 A_4} = (-2, 7, 1).$$

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} (-2 + 8 - 8 - 28) = -\frac{1}{6} (-30) = 15.$$

4) Расстояние от точки  $A_4$  до плоскости  $A_1 A_2 A_3$  находим по формуле (29).

$$d = \frac{|2 \cdot 8 + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \approx 6,69.$$

5) Чтобы найти точку  $A'_4$ , симметричную точке  $A_4$  относительно плоскости  $A_1 A_2 A_3$ , сделаем следующее.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости  $A_1 A_2 A_3$ , проходящей через точку  $A_4$  по формуле (32). За направляющий вектор прямой  $\vec{a} = \vec{n} = (0, 2, 1)$  берем нормальный вектор плоскости, т.к. прямая перпендикулярна плоскости:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-0}{1}, \quad \frac{x}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{1}.$$

Составим параметрические уравнения этой прямой по формуле (33):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t. \end{cases}$$

Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью  $A_1 A_2 A_3$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 + 8 = 2 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow 2(2t + 8) + t - 1 = 0,$$

$$5t + 15 = 0, \quad t = -3.$$

Получаем точку  $M(0, 2, -3)$ ; т.к. точка  $A'_4$  симметрична точке  $A_4$  относительно плоскости  $A_1 A_2 A_3$ , то точка  $M$  является серединой отрезка  $A_4 A'_4$ , поэтому

$$x_M = \frac{x_4 + x'_4}{2}, \quad 0 = \frac{0 + x'_4}{2}, \quad x'_4 = 0;$$

$$y_M = \frac{y_4 + y'_4}{2}, \quad 2 = \frac{8 + y'_4}{2}, \quad y'_4 = -4;$$

$$z_M = \frac{z_4 + z'_4}{2}, \quad -3 = \frac{0 + z'_4}{2}, \quad z'_4 = -6.$$

$$A'_4(0, -4, -6).$$

6) Чтобы найти точку  $A''_4$ , симметричную точке  $A_4$  относительно прямой  $A_1A_3$ , составим уравнение плоскости, проходящей через точку  $A_4$  перпендикулярно прямой  $A_1A_3$  по формуле (26). За нормальный вектор плоскости  $\vec{n} = \vec{a} = (0, -2, 4)$  берем направляющий вектор прямой  $A_1A_3$ , т.к. плоскость перпендикулярна прямой.

$$0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 3) + 4 \cdot (z - 0) = 0, \quad -2y + 16 + 4z = 0, \quad y = 2z - 8 = 0.$$

Уравнение прямой  $A_1A_3$  составляем по формуле (34).

$$\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z+1}{3+1}, \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

Параметрические уравнения прямой  $A_1A_3$ :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1. \end{cases}$$

Находим точку  $N$  пересечения прямой  $A_1A_3$  и плоскости:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1 \\ y - 2z - 8 = 0, \end{cases}$$

$$-2t + 1 - 2(4t - 1) - 8 = 0, \quad -10t - 5 = 0, \quad t = -\frac{1}{2},$$

$$x = 2, \quad y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2, \quad z = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3.$$

Итак, точка  $N(2, 2, -3)$ . Так как точка  $A''_4$  симметрична точке  $A_4$  относительно прямой  $A_1A_3$ , то точка  $N$  является серединой отрезка  $A_4A''_4$ , тогда

$$x_N = \frac{x_4 + x''_4}{2}, \quad 2 = \frac{0 + x''_4}{2}, \quad x''_4 = 4,$$

$$y_N = \frac{y_4 + y''_4}{2}, \quad 2 = \frac{8 + y''_4}{2}, \quad y''_4 = -4,$$

$$z_N = \frac{z_4 + z_4''}{2}, \quad -3 = \frac{0 + z_4''}{2}, \quad z_4'' = -6, \quad \text{точка } A_4''(4, -4, -6).$$

## Аналитическая геометрия на плоскости

Некоторые сведения из теории

### Прямая линия. Ее уравнение

$$Ax + By + C = 0 \quad - \quad (38)$$

общее уравнение прямой.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad - \quad (39)$$

уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $\vec{a} = (m, n)$  – вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad - \quad (40)$$

уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$  с перпендикулярным вектором  $\vec{n} = (A, B)$ .

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad - \quad (41)$$

уравнение прямой проходящей через две точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ .

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad - \quad (42)$$

уравнение прямой в «отрезках», где  $a, b$  – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \quad - \quad (43)$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом  $k = \operatorname{tg} \varphi$  и отрезком  $b$  – отсекаемым на оси  $Oy$ .

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad - \quad (44)$$

уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$  с угловым коэффициентом  $k$ .

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad - \quad (45)$$

расстояние от точки  $M_0(x_0, y_0)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$ .

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad - \quad (45a)$$

отклонение точки  $M_0(x_0, y_0)$  от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} - \quad (46)$$

угловой коэффициент прямой  $Ax + By + C = 0$ .

$$k_1 = k_2 - \quad (47)$$

условие параллельности прямых.

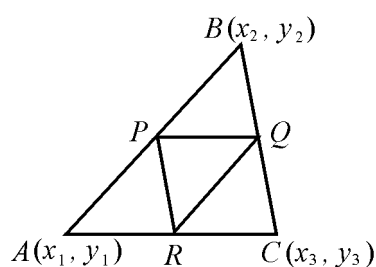
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} - \quad (48)$$

условие перпендикулярности прямых.

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| - \quad (49)$$

угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$ .

Задача 6. Даны середины сторон треугольника  $P(1, 2)$ ,  $Q(5, 1)$ ,  $R(-4, 3)$ . Составить уравнения его сторон.



1 способ. Так как точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  являются серединами отрезков  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ , то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 = -8, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 6, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= -8 & y_1 &= 6 \\ x_2 &= 0 & y_2 &= 0 & A(-8, 6), \quad B(10, -2), \quad C(0, 0). \\ x_3 &= 10, & y_3 &= -2, \end{aligned}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение  $AB$ :

$$\frac{x + 8}{10 + 8} = \frac{y - 6}{-2 - 6}, \quad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение  $BC$ :

$$\frac{x - 10}{0 - 10} = \frac{y + 2}{0 + 2}, \quad x + 5y = 0.$$

Уравнение  $AC$ :

$$\frac{x + 8}{0 + 8} = \frac{y - 6}{0 - 6}, \quad 3x + 4y = 0.$$

2 способ. Не определяя координат точек  $A, B, C$ , составим уравнение каждой из сторон треугольника  $ABC$ , как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника  $PQR$  параллельно противоположной стороне.

Уравнение  $AB$ : прямая  $AB$  проходит через точку  $P$  параллельно вектору  $\overrightarrow{QR} = (-9, 4)$ . Используем уравнение (39).

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y-2}{4} \Rightarrow 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение  $BC$ : прямая  $BC$  проходит через точку  $Q$  параллельно вектору  $\overrightarrow{PR} = (-5, 1)$ .

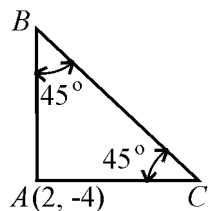
$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y+1}{1} \Rightarrow x + 5y = 0.$$

Уравнение  $AC$ : прямая  $AC$  проходит через точку  $R$  параллельно вектору  $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$ .

$$\frac{x+4}{4} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow 3x + 4y = 0.$$

Ответ:  $4x + 9y - 22 = 0$ ,  $x + 5y = 0$ ,  $3x + 4y = 0$ .

Задача 7. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы  $2x + 3y - 5 = 0$  и вершину прямого угла  $(2, -1)$ .



$AB = BC$  (по условию), поэтому  $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$ ,

$k_{BC} = -\frac{2}{3}$  (по формуле (46)). Уравнения катетов  $AB$  и

$BC$  составляем по формуле (44):  $y + 1 = k(x - 2)$ .

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} \right|, \quad (49)$$

$$\frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} = \pm 1.$$

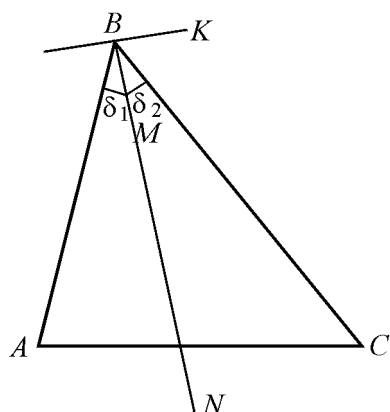
Решая эти уравнения, получим:

$$k = \frac{1}{5}, \quad y + 1 = \frac{1}{5}(x - 2), \quad 5y + 5 = x - 2, \quad x - 5y - 7 = 0.$$

$$k = -5, \quad y + 1 = -5(x - 2), \quad y + 1 = -5x + 10, \quad 5x + y - 9 = 0.$$

Ответ:  $x - 5y - 7 = 0$ ,  $5x + y - 9 = 0$ .

**Задача 8.** В треугольнике с вершинами  $A(3, -2)$ ,  $B(-1, 1)$ ,  $C(5, -7)$  найти биссектрису внутреннего угла  $\angle ABC$ .



1) Составим уравнения сторон угла  $\angle ABC$ , воспользовавшись формулой (41).

Сторона  $BA$ :

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-1}{-2-1}, \quad -3x - 4y + 1 = 0.$$

Сторона  $BC$ :

$$\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-1}{-4-1}, \quad -8x - 6y - 2 = 0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Приравняем расстояния от произвольной точки биссектрисы  $M(x, y)$  до сторон угла  $BA$  и  $BC$ , вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-8x - 6y - 2|}{\sqrt{8^2 + 6^2}}, \quad \frac{|-3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|-8x - 6y - 2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x - 4y + 1) = -8x - 6y - 2 \quad \text{и} \quad 2(-3x - 4y + 1) = -(-8x - 6y - 2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине  $B$  треугольника  $ABC$ :

$$x - y + 3 = 0 \quad (a)$$

и 
$$x + y = 0. \quad (б)$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника  $BN$  отклонения вершин треугольника  $A$  и  $C$  имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла  $BK$  – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек  $A$  и  $C$  от прямой (a) по формуле (40,a):

$$\delta_A = \frac{3 - (-2) + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} > 0, \quad \delta_C = \frac{5 - (-7) + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} > 0,$$

следовательно, уравнение (a) – это уравнение прямой  $BK$ . Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника  $ABC$  при вершине  $B$ :

$$x + y = 0.$$

Ответ:  $x + y = 0$ .

### Линии второго порядка

Окружность. Уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (50)$$

определяет окружность радиуса  $R$  с центром  $C(a, b)$ . Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е.  $a = b = 0$ , то уравнение окружности примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (51)$$

Общее алгебраическое уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

есть уравнение окружности, если  $A = C \neq 0$ ,  $B = 0$ , т.е.

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (52)$$

Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \quad (53)$$

уравнение эллипса (канонический вид).

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad a > b. \quad (54)$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1(-c, 0) \text{ и } F_2(c, 0). \quad (55)$$

Начало координат  $O$  – центр симметрии эллипса, а оси координат – оси

симметрии эллипса. Точки  $A_1(-a, 0)$ ,  $A_2(a, 0)$ ,  $B_1(0, -b)$ ,  $B_2(0, b)$

называются вершинами эллипса,  $a$  и  $b$  – большая и малая полуоси. Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1 \quad (56)$$

называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, т.к. выражается через отношение его полуосей

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (57)$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого  $a = b$ , т.е.  $\varepsilon = 0$ .

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} - \quad (58)$$

уравнения директрис.

Если фокусы эллипса расположены на оси  $Oy$ , то уравнение эллипса имеет тот же вид (58), но  $b > a$ . Фокусы имеют координаты:

$F_1(0, -c)$  и  $F_2(0, c)$ . Уравнения директрис

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon}. \quad (59)$$



### Гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \quad (60)$$

каноническое уравнение гиперболы.

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad a < c. \quad (61)$$

Фокусы имеют координаты  $F_1(-c, 0)$  и  $F_2(c, 0)$ . Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка  $O$  – центр симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках  $A_1(-a, 0)$ ,  $A_2(a, 0)$ , которые называются ее действительными вершинами, а величина  $a$  – действительной полуосью гиперболы. Точки  $B_1(0, -b)$  и  $B_2(0, b)$  называются мнимыми вершинами, а  $b$  – мнимая полуось. Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad (62)$$

являются асимптотами гиперболы, т.е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1. \quad (63)$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (64)$$

Если  $a = b$ , гипербола называется равносторонней. В этом случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен  $\sqrt{2}$ .

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad - \quad (65)$$

директрисы гиперболы.

Если уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (66)$$

то асимптоты гиперболы:

$$x = \pm \frac{b}{a} y, \quad (67)$$

фокусы  $F_1(0, -c)$ ,  $F_2(0, c)$ .

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon} \quad - \quad (68)$$

уравнения директрис.

### Парабола.

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \quad (p > 0), \quad (69)$$

где  $p$  – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение директрисы

$x = -\frac{p}{2}$ , координаты фокуса  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ . Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы  $\varepsilon = 1$ .

В ряде случаев рассматривают параболы:

а)  $y^2 = -2px$ ,  $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$  – фокус,  $x = \frac{p}{2}$  – уравнение директрисы; (70)

б)  $x^2 = 2py$ ,  $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$  – фокус,  $y = -\frac{p}{2}$  – уравнение директрисы; (71)

в)  $x^2 = -2py$ ,  $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$  – фокус,  $y = \frac{p}{2}$  – уравнение директрисы. (72)

Для всех случаев  $p > 0$ .

Задача 9. Среди прямых параллельных прямой  $2x + y = 0$ , выделить касательные к окружности  $x^2 + y^2 = 1$ .

Решение. Уравнение всякой прямой, параллельной данной, можно записать в виде

$$2x + y + c = 0.$$

Касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку, поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно иметь только один ответ.

Из уравнения прямой  $y = -2x - c$ .

$$\begin{cases} y = -2x - c \\ x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + (-2x - c)^2 = 1, \quad 5x^2 + 4cx + c^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда дискриминант равен нулю:  $(4c)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (c^2 - 1) = 0$ , откуда  $c = \pm\sqrt{5}$ .

Итак, искомые касательные имеют уравнения

$$2x + y + \sqrt{5} = 0, \quad 2x + y - \sqrt{5} = 0.$$

Задача 10. Дан эллипс  $9x^2 + 25y^2 = 225$ . Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

Решение. Делим на 225, получаем

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отсюда следует по формуле (53), что  $a = 5$ ,  $b = 3$ . Из формулы (54):

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, \quad c = \pm 4.$$

По формуле (55):  $F_1(-4, 0), \quad F_2(4, 0)$ .

Эксцентриситет (56):  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ .

Уравнения директрис согласно (58):  $x = \pm \frac{5}{4/5} = \pm \frac{25}{4}$ .

Ответ:  $a = 5, b = 3; F_1(-4, 0), F_2(4, 0); \varepsilon = \frac{4}{5}; x = \pm \frac{25}{4}$ .

Задача 11. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая полуось  $2\sqrt{6}$ , а расстояние между фокусами  $F_1F_2 = 8$ .

Решение.  $b = 2\sqrt{6}, \quad F_1F_2 = 2c = 8, \quad c = 4$ .

По формуле (54):  $a^2 = b^2 + c^2, \quad a^2 = (2\sqrt{6})^2 + 4^2 = 40, \quad a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ .

Уравнение эллипса согласно (53):  $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$ .

Задача 12. Асимптоты гиперболы имеют уравнения  $4y \pm 3x = 0$ , а расстояние между фокусами равно 20. Написать ее каноническое уравнение.

Решение. Уравнения асимптот  $y = \pm \frac{3}{4}x$ , согласно формуле (62):

$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ . Кроме того  $F_1F_2 = 2c = 20, \quad c = 10$ . По формуле (61):

$c^2 = a^2 + b^2$ , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Решая ее, получаем  $a = 8, \quad b = 6$ . Следовательно, каноническое уравне-

ние гиперболы:  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ .

Задача 13. Дана гипербола  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = -1$ . Найти координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

Решение. Фокусы данной гиперболы расположены на оси  $Oy$ .

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}. \quad (61)$$

Значит фокусы имеют координаты  $F_1(0, -\sqrt{10}), \quad F_2(0, \sqrt{10})$ . Вершины  $A_1(0, -1), \quad A_2(0, 1), \quad B_1(-3, 0), \quad B_2(3, 0)$ . Эксцентриситет по формуле (64):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}, \quad \varepsilon = \sqrt{10}.$$

Уравнения асимптот:  $x = \pm \frac{b}{a}y \Rightarrow x = \pm 3y$ .

Уравнения директрис:  $y = \pm \frac{b}{c} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$ .

Задача 14. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку  $A(1, -2)$  и симметрична относительно оси  $Oy$ . Написать ее уравнение. Найти фокус и директрису.

Решение. Уравнение искомой параболы по формуле (72) имеет вид  $x^2 = -2py$ . Точка  $A(1, -2)$  лежит на параболы. Подставляем координаты точки  $A$  в уравнение:  $1 = -2p \cdot (-2) \Rightarrow p = \frac{1}{4}$ . Следовательно, искомое уравнение будет  $x^2 = -\frac{1}{2}y$  или  $y = -2x^2$ .

Фоку параболы:  $F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$ . Уравнение директрисы согласно (72):  $y = \frac{1}{8}$ .

Задача 15. На параболы  $y^2 = 4x$  найти точки, расстояния которых от директрисы равно 5.

Решение. Уравнение директрисы данной параболы  $x = -\frac{p}{2}$ ,  $2p = 4$ ,  $p = 2$ ,  $x = -1$ . Тогда расстояние от оси  $Oy$  до искомой  $\ell = 4 - \frac{p}{2} = 5 - 1 = 4$  точки и это расстояние определит координату  $x$  данной точки, т.е.  $x = 4$ . Координату  $y$  найдем из уравнения параболы:  $y^2 = 4x$ ,  $y^2 = 4 \cdot 4 = 16$ ,  $y = \pm 4$ .  
Итак,  $M_1(4, 4)$ ,  $M_2(4, -4)$ .

## Введение в анализ

### 1. Пределы

Пусть каждому натуральному числу  $n = 1, 2, \dots$  приведено в соответствие в силу некоторого закона число  $u_n$ . Тогда говорят, что определена последовательность чисел  $u_1, u_2, u_3, \dots$  или, короче, последовательность  $\{u_n\}$ . Отдельные числа  $u_n$  называются ее элементами.

Определение 1.1. Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{u_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется зависящее от него натуральное число  $N$  такое, что для всех натуральных чисел  $n > N$  выполняется неравенство:  $|u_n - a| < \varepsilon$ . При этом пишут:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ .

Определение 1.2. Говорят, что функция  $f(x)$  стремится к  $A$  ( $f(x) \rightarrow A$ ) при стремлении к  $a$  ( $x \rightarrow a$ ), где  $A$  и  $a$  – числа, или  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $|f(x) - A| < \varepsilon$  при  $|x - a| < \delta$ .

Аналогично,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , если  $|f(x) - A| < \varepsilon$  при  $|x| > N(\varepsilon)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , если  $|f(x)| > M$  при  $|x - a| < \delta(M)$ , где  $M$  – произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.

1. Если существуют конечные  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ , то

$$a) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

$$б) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$в) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad \left( \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0 \right).$$

2. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = 0$  ( $A$  – конечно), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty,$$

если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \infty$  ( $A$  – конечно), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  взять соответственно две последовательности:  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$ .

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, при-

ходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения. Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности:  $\frac{0}{0}$ ;  $\frac{\infty}{\infty}$ ;  $0 \cdot \infty$ ;  $\infty - \infty$ ;  $0^0$ ;  $1^\infty$ ;  $\infty^0$ .

Пример 1.1. При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно  $x$  при  $x \rightarrow \infty$  или  $n$  при  $n \rightarrow \infty$  для последовательностей (неопределенность  $\frac{\infty}{\infty}$ ) оба члена соотношения полезно предвари-

тельно разделить на  $x^m$  или, соответственно,  $n^m$  где  $m$  – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{5x^4 + 3x + 2} &= \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left( 3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left( 5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^4}} = \frac{3 + 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}, \quad \text{старшая степень } m = 4, \\ &\text{делится на } x^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{9n^4 - 2n^3 + 2} + 4\sqrt[3]{8n^3 + 21}}{\sqrt[4]{n^4 - 3} + 2\sqrt{4n^4 + 9n}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt{n^4 \left( 9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} \right)} + 4 \cdot \sqrt[3]{n^3 \left( 8 + \frac{21}{n^3} \right)}}{\sqrt[4]{n^4 \left( 1 - \frac{3}{n^4} \right)} + 2 \cdot \sqrt{n^4 \left( 4 + \frac{9}{n^3} \right)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 \cdot \sqrt{\left( 9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} \right)} + 4n \cdot \sqrt[3]{\left( 8 + \frac{21}{n^3} \right)}}{n \cdot \sqrt[4]{\left( 1 - \frac{3}{n^4} \right)} + 2n^2 \cdot \sqrt{\left( 4 + \frac{9}{n^3} \right)}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt{\left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4}\right)} + \frac{4}{n} \cdot \sqrt[3]{\left(8 + \frac{21}{n^3}\right)}}{\frac{1}{n} \cdot \sqrt[4]{\left(1 - \frac{3}{n^4}\right)} + 2 \cdot \sqrt{\left(4 + \frac{9}{n^3}\right)}} = \frac{3 \cdot \sqrt{9-0+0} + 0 \cdot \sqrt[3]{8+0}}{0 \cdot \sqrt[4]{1-0} + 2 \cdot \sqrt{4+0}} = \frac{9}{4}$$

(неопределенность  $\frac{\infty}{\infty}$ , старшая степень  $m = 2$ , делится на  $n^2$ ).

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+1) \left[ \sqrt{x^2+4x+5} - \sqrt{x^2+4x+7} \right] &= [\infty \cdot (\infty - \infty)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1) \left[ \sqrt{x^2+4x+5} - \sqrt{x^2+4x-7} \right] \cdot \left[ \sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7} \right]}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)(x^2+4x+5-x^2-4x+7)}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1) \cdot 12}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7}} \left( \begin{array}{l} :x \\ :x \end{array} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 \left( 3 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2}}} = \frac{12 \cdot 3}{1+1} = 18. \end{aligned}$$

Пример 1.2. Если  $P(x)$  и  $Q(x)$  – целые многочлены  $x$ ,  $P(a) \neq 0$  или  $Q(a) \neq 0$ , то предел рациональной дроби  $P/Q$  при  $x \rightarrow a$  находится непосредственно. Если же  $P(a) = Q(a) = 0$  (неопределенность  $\frac{0}{0}$ ), то дробь  $P/Q$  рекомендуется сократить один или несколько раз на  $(x-a)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3} = \\ &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 1.3.** Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность  $\frac{0}{0}$ ).

$$\begin{aligned}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt[3]{5-x}} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{5+x})(3 + \sqrt{5+x})}{(1 - \sqrt[3]{5-x})(3 + \sqrt{5+x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{9 - 5 - x}{(1 - \sqrt[3]{5-x})(3 + \sqrt{5+x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{1 - \sqrt[3]{5-x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{3 + \sqrt{5+x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{1 - \sqrt[3]{5-x}} \cdot \frac{1}{6} = \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2})}{(1 - \sqrt[3]{5-x})(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2})} = \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2})}{1 - 5 + x} = \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2})}{x-4} = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} (1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2}) = \\
 &= -\frac{1}{6}(1+1+1) = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - 7x - 8} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(x^2 - 7x - 8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)(x+1)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(x+1)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \\
 &= \frac{1}{9 \cdot 12} = \frac{1}{108}.
 \end{aligned}$$

**Пример 1.4.** При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

следствием которого являются пределы:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} [ctg^2 3x - ctg^2 5x] \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 4x \cdot \arcsin^2 x}{x^2} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} - \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x} \right] \cdot \frac{\left( \frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \right)^2 \cdot 16x^2 \cdot \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^2 \cdot x^2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 16x^2 \cdot \left[ \frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} - \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\cos^2 3x \cdot 16x^2}{\left( \frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \cdot 9x^2} - \frac{\cos^2 5x \cdot 16x^2}{\left( \frac{\sin 5x}{5x} \right)^2 \cdot 25x^2} \right] \cdot 1^2 \cdot 1^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{16}{9} \cos^2 3x - \frac{16}{25} \cos^2 5x \right] = \frac{16}{9} \cdot 1 - \frac{16}{25} \cdot 1 = \frac{256}{225}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x \cdot \sqrt{1 - \cos 4x}}{x^2 \cdot \arcsin 3x} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4x^2 \cdot \sqrt{2 \sin^2 2x}}{x^2 \cdot \left( \frac{\arcsin 3x}{3x} \right) \cdot 3x} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \right)^2}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{3x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{2} \sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{2} \left( \frac{\sin 2x}{2x} \right) \cdot 2x}{3x} = \frac{8\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

**Пример 1.5.** При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда  $x \rightarrow a$  и  $a \neq 0$ , рекомендуется предварительно провести замену  $x - a = y$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos \frac{\pi \cdot x}{6}}{x - 3} &= \left( \frac{0}{0} \right) = (x - 3 = y, y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 3) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi \cdot (y + 3)}{6}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \cdot \cos \left( \frac{\pi \cdot y}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot y}{6}}{\frac{\pi \cdot y}{6}} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\pi}{6} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi \cdot y}{6}}{\frac{\pi \cdot y}{6}} = -\frac{\pi}{6} \cdot 1 = -\frac{\pi}{6}.$$

Пример 1.6. При вычислении пределов вида  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} = c$  необходимо иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $B = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ ,

то  $c = A^B$  ( $A > 0$ );

2) если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \pm\infty$ , то вопрос о нахождении предела  $c$  решается непосредственно;

3) если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ , то следует воспользоваться

«вторым замечательным пределом»:  $\lim_{x \rightarrow a} (1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e$ , где  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$  и  $e = 2,718\dots$ .

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2}{x-1}} = \left( \frac{3}{2} \right)^{-\infty} = \frac{1}{\left( \frac{3}{2} \right)^{+\infty}} = 0, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{x} \right)^{x+3} = 4^3 = 64, \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{4x} \right) \cdot 4 = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+3) = 3.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+1}{3x-1} \right)^{2x} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{\frac{3x-6}{7} \cdot \frac{7}{3x-6} \cdot 2x} = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{\frac{3x-6}{7}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x}{3x-6}} = e^{14/3}.$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 3} (7-2x)^{\frac{3}{x-3}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 3} [1 + (6-2x)]^{\frac{3}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \left[ 1 + (6 - 2x) \right]^{\frac{1}{6-2x}} \right\}^{\frac{(6-2x) \cdot 3}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{18-6x}{x-3}} = e^{-6}.$$

## 2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 2.1. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , то функция  $f(x)$  называется бесконечно малой в окрестности точки  $x = a$  (при  $x \rightarrow a$ ).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при  $x \rightarrow a$  есть также бесконечно малая при  $x \rightarrow a$ .

Определение 2.2. Если  $f(x)$  и  $g(x)$  – бесконечно малые при  $x \rightarrow a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ , где  $c$  – некоторое число, отличное от нуля, то функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются бесконечно малыми одного порядка при  $x \rightarrow a$ , если  $c = 0$ , то говорят, что  $f(x)$  – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с  $g(x)$  при  $x \rightarrow a$ .

Бесконечно малая  $f(x)$  называется бесконечно малой порядка  $n$  по сравнению с  $g(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g^n(x)} = c, \quad 0 < |c| < +\infty.$$

Пример 2.1. При  $x \rightarrow 0$  определить порядок малости функции  $\operatorname{tg} x - \sin x$  относительно  $x$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left( \frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^n \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^n \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{x^n \cos x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x} = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot 1 = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\left( \frac{x}{2} \right)^n \cdot 2^n} = \frac{4}{2^n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\left( \frac{x}{2} \right)^n}. \end{aligned}$$

Этот предел будет равен константе  $c \neq 0$  при  $n = 3$ , следовательно, функция  $\operatorname{tg} x - \sin x$  имеет порядок малости  $n = 3$  относительно  $x$  при  $x \rightarrow 0$ .

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

Пример 2.2. Определить порядок малости относительно  $x$  при  $x \rightarrow 0$  суммы  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$ .

Слагаемое  $\sqrt[3]{x^2}$  имеет порядок малости  $\frac{2}{3}$  относительно  $x$ , а слагаемое  $\sqrt{x^3}$  – порядок  $\frac{3}{2}$ , следовательно, сумма имеет порядок малости  $\frac{2}{3}$  относительно  $x$  при  $x \rightarrow 0$ .

Определение 2.3. Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , то бесконечно малые  $f(x)$  и  $g(x)$  называются эквивалентными при  $x \rightarrow a$ :  $f(x) \sim g(x)$ .

Например, при  $x \rightarrow 0$  будем иметь:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \quad (a \neq 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

Пример 2.3.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{4\operatorname{tg}^2 x} - 5^{3\arcsin^2 3x}}{3\sin^2 4x + 7\operatorname{arctg}^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^{4\operatorname{tg}^2 x} - 1) - (5^{3\arcsin^2 3x} - 1)}{3 \cdot (4x)^2 + 7 \cdot (x)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\operatorname{tg}^2 x \cdot \ln 3 - 3\arcsin^2 3x \cdot \ln 5}{55x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\ln 3 \cdot x^2 - 3\ln 5 \cdot (3x)^2}{55x^2} = \\ &= \frac{4\ln 3 - 27\ln 5}{55}. \end{aligned}$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4\arcsin 2x}{3\operatorname{tg} 8x} \right)^{\frac{\ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4 \cdot 2x}{3 \cdot 8x} \right)^{\frac{3x}{x}} = \left( \frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3-5x) - \ln(3+7x)}{2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[ 3 \left( 1 - \frac{5}{3}x \right) \right] - \ln \left[ 3 \left( 1 + \frac{7}{3}x \right) \right]}{2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3 + \ln \left( 1 - \frac{5}{3}x \right) - \ln 3 - \ln \left( 1 + \frac{7}{3}x \right)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}x}{2x} = -2.
 \end{aligned}$$

Определение 2.4. Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , то функция  $f(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ .

Подобно тому, как это сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

Пример 2.4. Пусть  $x \rightarrow \infty$ . Определить порядок бесконечно большой

$$f(x) = \frac{x^5}{x+2} \text{ по сравнению с } x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^5}{x+2} : x^n \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^n(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^{n+1} + x^n \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^{n+1}} = 1$$

при  $n = 4$ .

Определение 2.5.

1) Пусть функция  $f(x)$  – бесконечно большая или бесконечно малая при  $x \rightarrow \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{c \cdot x^\alpha} = 1$ , где  $c$  и  $\alpha$  – константы, тогда функция  $y = cx^\alpha$  называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

2) Пусть функция  $f(x)$  – бесконечно большая или бесконечно малая при  $x \rightarrow a$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{c \cdot (x-a)^\alpha} = 1$ , где  $c$  и  $\alpha$  – константы, тогда функция  $y = c(x-a)^\alpha$  называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ .

Пример 2.5.

а) Найти асимптотику (асимптотическое представление) функции  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot x^{1/2}},\end{aligned}$$

следовательно, асимптотикой функции  $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$  при  $x \rightarrow \infty$  является функция  $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ ;  $c = \frac{1}{2}$ ;  $\alpha = -\frac{1}{2}$ .

б) Найти асимптотику функции  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$  при  $x \rightarrow 1$ .

При  $x \rightarrow 1$  функции  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$  является бесконечно большой:  $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}(1-x)^{1/3}}.$

Асимптотикой в данном случае является функция  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(1-x)^{-1/3}$ .

в) Найти асимптотику функции  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  при  $x \rightarrow 1$ .

В данном случае при  $x \rightarrow 1$  функция  $f(x)$  является бесконечно малой;  $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \sim 3(x-1)^2$ .

Получаем асимптотику  $y = 3(x-1)^2$ ;  $c = 3$ ;  $\alpha = 2$ .

### 3. Непрерывность функции.

Определение 3.1. Если  $x < a$  и  $x \rightarrow a$ , то условно пишут  $x \rightarrow a-0$ , аналогично, если  $x > a$  и  $x \rightarrow a$ , то  $x \rightarrow a+0$ . Числа

$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  и  $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  называют соответственно

пределом слева функции  $f(x)$  в точке  $a$  и пределом справа функции  $f(x)$  в точке  $a$  (если эти числа существуют).

Для существования предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство:  $f(a-0) = f(a+0)$ .

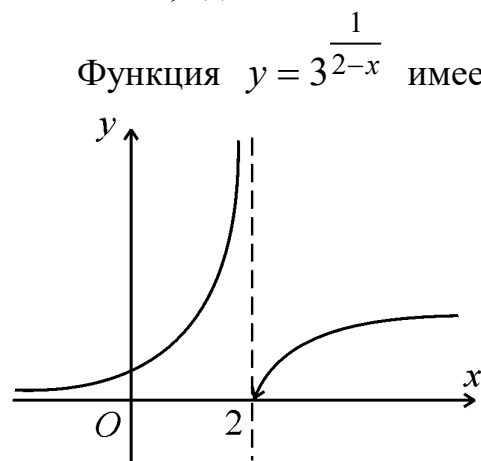
Определение 3.2. Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной в точке  $a$ , если

- 1) она определена в этой точке;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются точками разрыва.

### Пример 3.1.

а) Найти точки разрыва функции  $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ , пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.



Функция  $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$  имеет разрыв в точке  $x = 2$ , т.к. она в этой точке не определена. При этом:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

б) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y = \frac{2^{\frac{1}{x+3}} + 4x - 8}{2^{\frac{1}{x+3}} + 4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка  $x = -3$ , т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1/(x+3)} + 4} = \frac{2^{-\infty} - 12 - 8}{2^{-\infty} + 4} = \frac{0 - 20}{0 + 4} = -5;$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1/(x+3)} + 4} = 1, \text{ т.к. при } x \rightarrow -3+0 \text{ имеем:}$$

$$2^{1/(x+3)} + 4x - 8 \sim 2^{1/(x+3)}; \quad 2^{1/(x+3)} + 4 \sim 2^{1/(x+3)}.$$

$$\text{Величина скачка } \Delta = 1 - (-5) = 6.$$

в) Найти точки разрыва, величину скачка  $\Delta$  и построить график функции

$$y = \begin{cases} -3x, & x \leq 0 \\ 4 \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \frac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

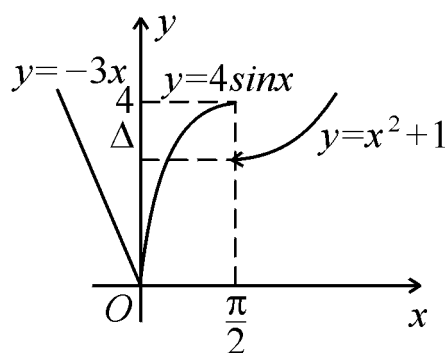
Данная функция непрерывна для  $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$ .

Исследуем только точки  $x_1 = 0$  и  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ , т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-3x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (4 \sin x) = 0;$$

$f(0) = -3x|_{x=0} = 0$ , следовательно, в точке  $x = 0$  функция  $f(x)$  непрерывна.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (4 \sin x) = 4; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4;$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} (x^2 + 1) = \frac{\pi^2}{4} + 1 = 3,467,$$

следовательно, точка  $x = \frac{\pi}{2}$  — точка разрыва. Величина скачка

$$\Delta = 4 - \left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right) = 3 - \frac{\pi^2}{4} \approx 0,533.$$

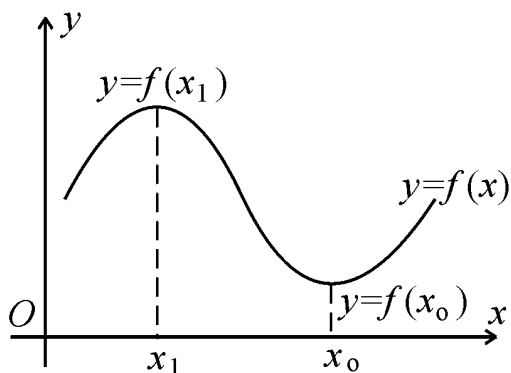
## Дифференциальное исчисление функции одной переменной

### 1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция  $y = f(x)$  называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек  $x_1, x_2$ , принадлежащих данному интервалу (отрезку), из неравенства  $x_1 < x_2$  следует неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ). Если  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) при  $a < x < b$ , то  $f(x)$  возрастает (убывает) на отрезке  $[a; b]$ .



В простейших случаях область существования функции  $f(x)$  можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками  $x$  (где  $f'(x) = 0$  или же  $f'(x)$  не существует).



Если существует такая двусторонняя окрестность точки  $x_0$ , что для всякой точки  $x \neq x_0$  этой окрестности имеет место неравенство  $f(x) > f(x_0)$ , то точка  $x_0$  называется точкой минимума функции  $y = f(x)$ , а число  $f(x_0)$  – минимумом

функции  $y = f(x)$ . Аналогично, если для всякой точки  $x \neq x_1$  некоторой окрестности точки  $x_1$  выполняется неравенство  $f(x) < f(x_1)$ , то  $x_1$  называется точкой максимума функции  $y = f(x)$ , а  $f(x_1)$  – максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции – экстремумом функции. Если  $x_0$  – точка экстремума функции  $f(x)$ , то  $f'(x_0) = 0$  или же  $f'(x_0)$  не существует (*необходимое условие существования экстремума*). Обратное утверждение не верно: точки, в которых  $f'(x_0) = 0$  или  $f'(x_0)$  не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции  $f(x)$ .

*Достаточный признак существования и отсутствия экстремума* непрерывной функции  $f(x)$  следующий: если существует такая окрестность  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  критической точки  $x_0$ , что  $f'(x) > 0$  при  $x_0 - \delta < x < x_0$  и  $f'(x) < 0$  при  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , то  $x_0$  – точка максимума функции  $f(x)$ ; если же  $f'(x) < 0$  при  $x_0 - \delta < x < x_0$  и  $f'(x) > 0$  при  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , то  $x_0$  – точка минимума функции  $f(x)$ . Если, наконец, найдется такое положительное число  $\delta$ , что  $f'(x)$  сохраняет неизменный знак при  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ , то точка  $x_0$  не является точкой экстремума функции  $f(x)$ .

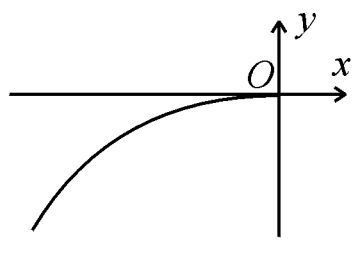
*Наименьшее (наибольшее) значение* непрерывной функции  $f(x)$  на данном отрезке  $[a; b]$  достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка  $[a; b]$ .

Пример 1.1. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = x \cdot \sqrt{-5x}.$$

Область существования:  $-5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ .

Находим критические точки:



$$y' = \sqrt{-5x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{-5x}} \cdot (-5) = \sqrt{-5x} - \frac{5x}{2\sqrt{-5x}} =$$

$$= \frac{-10x - 5x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{-15x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3 \cdot (-5x)}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{-5x} \geq 0.$$

При  $x \leq 0$  функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке  $x = 0$ :  $y(0) = 0$ .

Пример 1.2. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = \sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}.$$

Область существования:  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

Находим критические точки:

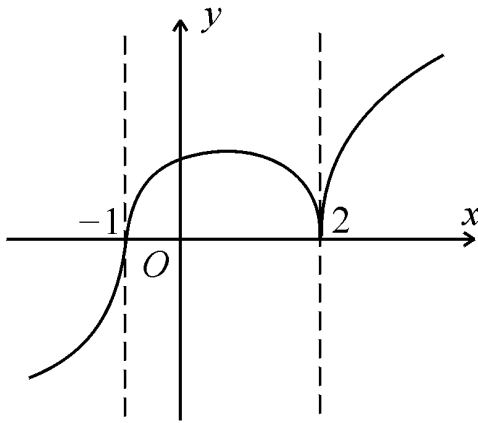
$$y' = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)(x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}},$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0,$$

$y'$  не существует  $\Rightarrow x_2 = -1; x_3 = 2$ . Получили три критические точки.

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 0)$	$0$	$(0; 2)$	$2$	$(2; +\infty)$
$y'$	$+$	не сущ.	$+$	$0$	$-$	не сущ.	$+$
$y$	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = -\infty.$$



$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} y'(x) = +\infty.$$

Так как  $y'(x) = k$ , где  $k$  – угловой коэффициент касательной, то при  $x = -1$  и  $x = 2$  касательная к графику функции перпендикулярна оси  $Ox$ .

$$y(-1) = 0; \quad y(0) = \sqrt[3]{4}; \quad y(2) = 0.$$

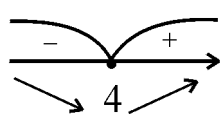
**Пример 1.3.** Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом  $256 \text{ м}^3$  такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть  $a$  – сторона квадрата основания,  $h$  – глубина бассейна;

$$a^2 h = 256 \Rightarrow a^2 = \frac{256}{h}, \quad a = \frac{16}{\sqrt{h}}, \quad h > 0;$$

$$S = S_{\text{бок}} + S_{\text{дна}} = 4ah + a^2 = 4 \cdot \frac{16}{\sqrt{h}} \cdot h + \frac{256}{h} = 64\sqrt{h} + \frac{256}{\sqrt{h}} = F(h);$$

$$F'(h) = \frac{64}{2\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32}{\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32h^{3/2} - 256}{h^2} = \frac{32}{h^2}(h^{3/2} - 8);$$



$F'(h) = 0 \Rightarrow h^{3/2} = 8; \quad h = 4.$  При  $h = 4$  величина  $F(h) = S$  будет наименьшей.

**Пример 1.4.** Две прямые железные дороги  $AA_1$  и  $BB_1$  перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте  $C$ , причем  $AC = 800 \text{ км}$  и  $BC = 700 \text{ км}$ . Из пунктов  $A$  и  $B$  по направлению к  $C$  одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно  $80 \text{ км/ч}$  и  $60 \text{ км/ч}$ . Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим?

Отметим положение поездов в момент

$t > 0$  точками  $K$  и  $M$ .

$$AK = 80t; \quad BM = 60t;$$

$$CK = AC - AK = 800 - 80t;$$

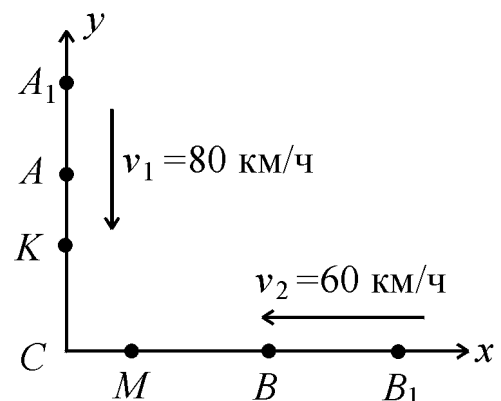
$$CM = CB - BM = 700 - 60t;$$

$$(KM)^2 = (CK)^2 + (CM)^2 =$$

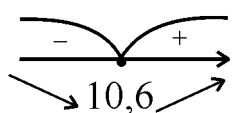
$$= (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2; \quad KM \text{ ми-}$$

нимально, если минимальна величина

$$(KM)^2 = F(t) = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2;$$



$$F(t) = 2(800 - 80t) \cdot (-80) + 2(700 - 60t) \cdot (-60) = \\ = -128000 + 12800t - 84000t + 7200t = 20000t - 212000 = 0; \quad t = 10,6;$$



$t = 10,6$  – точка минимума функции  $F(t)$ . Через 10,6 часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.

## 2. АСИМПТОТЫ

Если точка  $(x; y)$  непрерывно перемещается по кривой  $y = f(x)$  так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Если существует число  $a$  такое, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , то прямая  $x = a$  является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1x] = b_1$ , то прямая  $y = k_1x + b_1$  будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2$  и  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2x] = b_2$ , то прямая  $y = k_2x + b_2$  будет асимптотой (*левая наклонная асимптота*).

График функции  $y = f(x)$  не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

**Пример 2.1.** Найти асимптоты и построить график функции

$$y = 2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1}.$$

Область существования:  $x \neq 1$ .

Ищем вертикальные асимптоты.

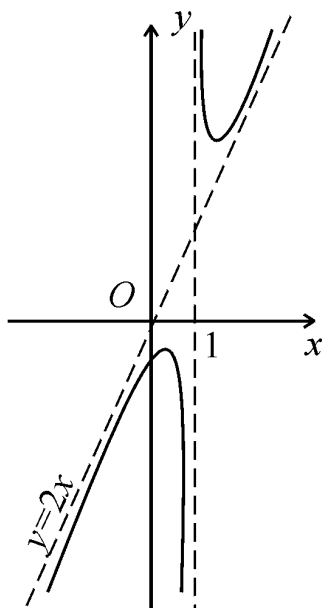
Функция имеет разрыв в точке  $x = 1$ , т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( 2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{-0} = 2 - \infty = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \left( 2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{+0} = 2 + \infty = +\infty;$$

следовательно,  $x = 1$  – вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты в виде  $y = kx + b$ .



$$\begin{aligned}
 k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \left( 2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} \right) = \\
 &= 2 + 0 = 2; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ 2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} - 2x \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3\cos(x-1)}{x-1} = 0.
 \end{aligned}$$

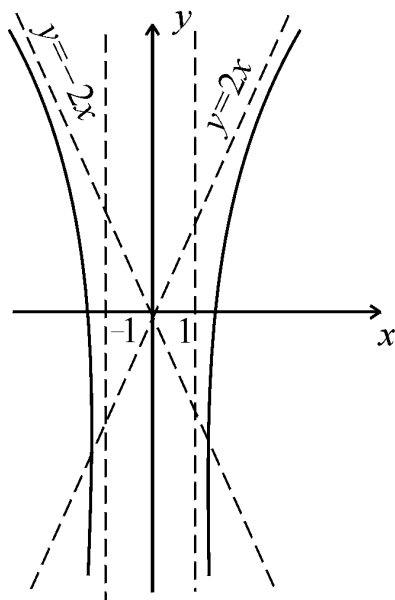
Следовательно, при  $x \rightarrow \pm\infty$  существует асимптота  $y = 2x$ .

Пример 2.2. Найти асимптоты и построить график функции  $y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

Область существования:  $x^2 - 1 > 0$ ;  $x^2 > 1$ ;  $x > 1$  и  $x < -1$ .

$$y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad y(-x) = \frac{2(-x)^2 - 9}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow y(x) = y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при  $x > 1$ , а затем отразить его симметрично относительно оси  $Oy$ .



$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2 - 9}{+0} = -\infty \Rightarrow x = 1 -$$

вертикальная асимптота при  $x \rightarrow 1 + 0$ .

Пусть  $x \rightarrow 1 + \infty$ .

$$\begin{aligned}
 k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9}{x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{9}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 2.
 \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2x \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9 - 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 - 9)^2 - 4x^2(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}(2x^2 - 9 + 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1})} =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-32x^2 + 81}{x^3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \left( 2 - \frac{9}{x^2} + 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)} = 0.$$

При  $x \rightarrow +\infty$  получаем асимптоту  $y = 2x$ . График данной функции пересекает ось  $Ox$  при  $2x^2 - 9 = 0$ , т.е. в точках  $x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$ .

**Пример 2.3.** Найти асимптоты и построить график функции

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}.$$

Область существования:  $4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$  и  $x \neq -2$ .

В точках  $x_1 = -2$  и  $x_2 = +2$  функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{-8 - 8 + 6 + 2}{-0} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{-8 - 8 + 6 + 2}{+0} = -\infty;$$

$x = -2$  — вертикальная асимптота.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{8 - 8 - 6 + 2}{+0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{8 - 8 - 6 + 2}{-0} = +\infty;$$

$x = 2$  — вертикальная асимптота.

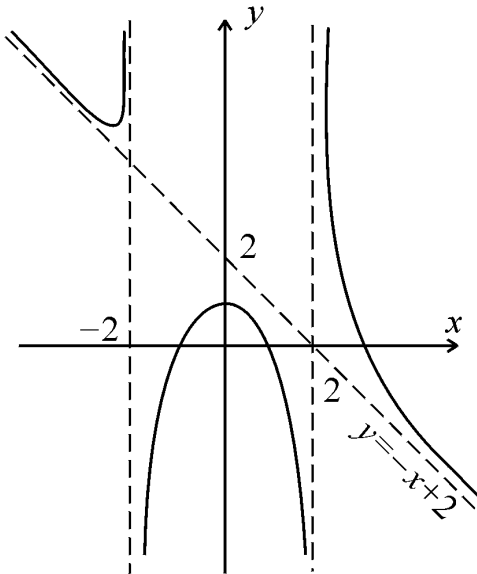
Наклонные асимптоты при  $x \rightarrow \pm \infty$  ищем в виде:  $y = kx + b$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{x(4 - x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - kx] =$$

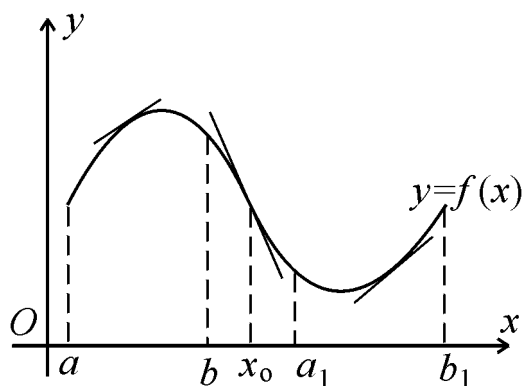
$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left( \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2 + x + 2}{4 - x^2} = 2.$$

При  $x \rightarrow \pm \infty$  получаем асимптоту  $y = -x + 2$ .



### 3. НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции  $y = f(x)$  *вогнут вниз* на интервале  $(a; b)$  (*вогнут вверх* на интервале  $(a_1; b_1)$ ), если при  $a < x < b$  дуга кривой расположена ниже (или соответственно при



$a_1 < x < b_1$  выше) касательной, проведенной в любой точке интервала  $(a; b)$  (или интервала  $(a_1; b_1)$ ). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика  $y = f(x)$  является выполнение на соответствующем интервале неравенства  $f'(x) < 0$  ( $f'(x) > 0$ ).

Точка  $(x_0, f(x_0))$ , в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба*. Для абсциссы точки перегиба  $x_0$  графика функции  $y = f(x)$  вторая производная  $f''(x_0) = 0$  или  $f''(x_0)$  не существует. Точки, в которых  $f''(x) = 0$  или  $f''(x)$  не существует, называются *критическими точками 2-го рода*. Критическая точка 2-го рода  $x_0$  является абсциссой точки перегиба, если  $f''(x)$  сохраняет постоянные знаки в интервалах  $x_0 - \delta < x < x_0$  и  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , где  $\delta$  — некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки  $f''(x)$  в указанных выше интервалах одинаковы.

Пример. Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой  $y = e^{-x^2}$ .

Имеем:  $y' = -2xe^{-x^2}$ ;  $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ . Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода:

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Эти точки разбивают всю область существования функции  $(-\infty; +\infty)$  на три интервала.

$x$	$\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$
$y''$	+	0	—	0	—
$y$	∪	перегиб	∩	перегиб	∪

Получили: кривая вогнута вверх при  $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  и  $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$  и вогнута вниз при  $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ . Точки  $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$  – точки перегиба.

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область существования этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области существования. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются): четность, периодичность и т.д.

Далее нужно найти точки разрыва, асимптоты, точки экстремума функции, точки перегиба и т.д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции.

Пример 4.1. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}.$$

Область существования:  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$  функция общего вида.

Так как функция определена при всех  $x$ , и у нее нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты при  $x \rightarrow \pm\infty$  ищем в виде:  $y = kx + b$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} = +\infty, \text{ следовательно, наклонных}$$

асимптот также нет.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left[ x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2} \right]' = (x+2)^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{-1/3} = \frac{3(x+2) + 2x}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow 5x + 6 = 0, \quad x = -1,2;$$

$$y' \text{ не существует} \Rightarrow x + 2 = 0, \quad x = -2.$$

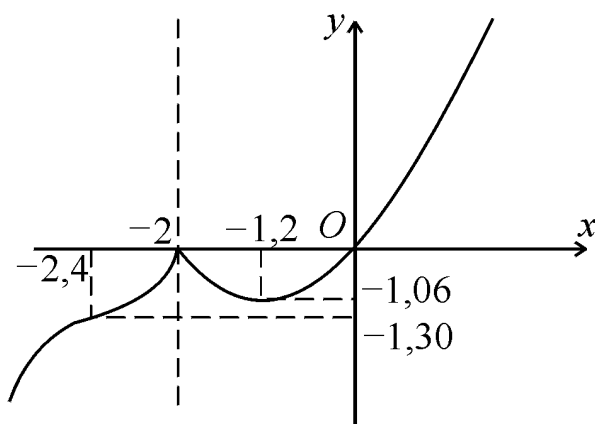
$x$	$(-\infty; -2)$	$-2$	$(-2; -1,2)$	$-1,2$	$(-1,2; +\infty)$
$y'$	$+$	не сущ.	$-$	$0$	$+$





$y$		max		min	
-----	--	-----	--	-----	--

$y_{\max} = y(-2) = 0$  (касательная в этой точке перпендикулярна оси  $Ox$ ).



$y_{\min} = y(-1,2) = -1,2 \cdot \sqrt[3]{0,64} \approx -1,06$  (касательная в этой точке параллельна оси  $Ox$ ).

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = \left[ \frac{5x+6}{(x+2)^{2/3}} \right] = 5 \cdot \sqrt[3]{x+2} - (5x+6) \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{x+2} - (5x+6) \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{15(x+2) - (5x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{10x+24}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

$y'' = 0$  при  $x = -2,4$ ;  $y''$  не существует при  $x = -2$ .

$x$	$(-\infty; -2,4)$	$-2,4$	$(-2,4; -2)$	$-2$	$(-2; +\infty)$
$y''$	$-$	$0$	$+$	не сущест.	$+$
$y$	$\cap$	перегиб	$\cup$		$\cup$

$$y_{\text{перегиба}} = y(-2,4) = -2,4 \cdot \sqrt[3]{(-2,4)^2} \approx -1,30; \quad y(0) = 0.$$

**Пример 4.2.** Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^2.$$

Область существования:  $x \neq -2$ .

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$  функция общего вида.

$x = -2$  — точка разрыва, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left( \frac{4+1}{-0} \right)^2 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left( \frac{4+1}{+0} \right)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow x = -2$  — вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при  $x \rightarrow \pm \infty$  ищем в виде:  $y = kx + b$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = 4.$$

При  $x \rightarrow \pm\infty$  получаем асимптоту  $y = 4$ .

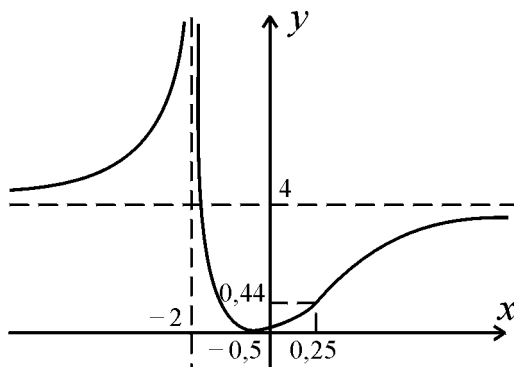
Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = 2 \cdot \left( \frac{2x+1}{x+2} \right) \cdot \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{6(2x+1)}{(x+2)^2};$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0, \quad x = -0,5;$$

$$y' \text{ не существует} \Rightarrow x = -2.$$

$x$	$(-\infty; -2)$	$(-2; -0,5)$	$-0,5$	$(-0,5; +\infty)$
$y'$	+	-	0	+



$y$			min	
-----	--	--	-----	--

$$y_{\min} = y(-0,5) = 0.$$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = 6 \cdot \frac{2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 \cdot (2x+1)}{(x+2)^6} =$$

$$= 6 \cdot \frac{2(x+2) - 3(2x+1)}{(x+2)^4} = \frac{6(1-4x)}{(x+2)^4};$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 1 - 4x = 0; \quad x = 0,25;$$

$$y'' \text{ не существует} \Rightarrow x = -2.$$

$x$			0,25	
-----	--	--	------	--

	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0,25)$		$(0,25; +\infty)$
$y''$	+	+	0	-
$y$	$\cup$	$\cup$	перегиб	$\cap$

$$y_{\text{перегиба}} = y(0,25) = \left(\frac{1,5}{2,25}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0,44.$$

Пример 4.3. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \frac{e^{x-3}}{x-3}.$$

Область существования:  $x-3 \neq 0$ ;  $x \neq 3$ .

$y(x) \neq y(-x)$  – функция общего вида.

В точке  $x = 3$  функция терпит разрыв, т.к. в ней она не определена.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{e^{x-3}}{x-3} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{e^{x-3}}{x-3} &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 3 - \text{вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде:  $y = kx + b$ .

1)  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x-3})'}{(x^2 - 3x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{2x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x-3})'}{(2x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{2} = +\infty, \text{ следовательно, при } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

наклонных асимптот нет.

2)  $x \rightarrow -\infty$ ,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \frac{0}{+\infty} = 0;$$




$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-3}}{x-3} = 0,$$

при  $x \rightarrow -\infty$  получаем асимптоту  $y = 0$ .

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left( \frac{e^{x-3}}{x-3} \right)' = \frac{e^{x-3} \cdot (x-3) - e^{x-3}}{(x-3)^2} = e^{x-3} \cdot \frac{x-3-1}{(x-3)^2} = e^{x-3} \cdot \frac{x-4}{(x-3)^2},$$

$$y' = 0 \Rightarrow x-4=0, x=4; \quad y' \text{ не существует} \Rightarrow x=3.$$

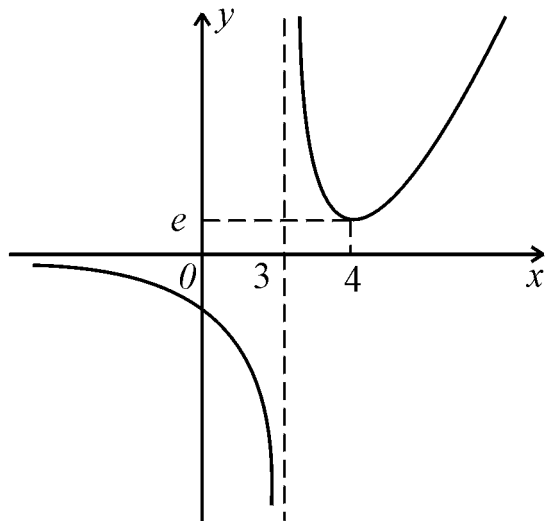
$x$	$(-\infty; 3)$	$(3; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$y'$	-	-	0	+
$y$			min	

$$y_{\min} = y(4) = e \approx 2,72.$$



Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = e^{x-3} \cdot \frac{x-4}{(x-3)^2} + e^{x-3} \cdot \frac{(x-3)^2 - (x-4) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{e^{x-3}}{(x-3)^2} \cdot \frac{x^2 - 7x + 12 - x + 5}{x-3} = \frac{e^{x-3} \cdot (x^2 - 8x + 17)}{(x-3)^3}; \quad y'' \neq 0;$$



$$y'' \text{ не существует} \Rightarrow x=3.$$

$x$	$(-\infty; 3)$	$(3; +\infty)$
$y''$	-	+
$y$		

$$y(0) = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \approx -0,02.$$

**Пример 4.4.** Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \ln \frac{x+6}{x} - 1.$$

Область существования:  $\frac{x+6}{x} > 0.$

$$x > 0, \quad x < -6.$$

Функция общего вида.



$$\lim_{x \rightarrow -6-0} \left[ \ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = -\infty \Rightarrow x = -6 - \text{вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -6+0} \left[ \ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = +\infty \Rightarrow x = -6 - \text{вертикальная асимптота.}$$



Наклонные асимптоты ищем в виде:  $y = kx + b$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \frac{x+6}{x} - 1}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = -1.$$

При  $x \rightarrow \pm\infty$  получаем асимптоту  $y = -1$ .

Исследуем функцию по первой производной.

$x$	$(-\infty; -6)$	$(0; +\infty)$
$y'$	$-$	$-$
$y$		

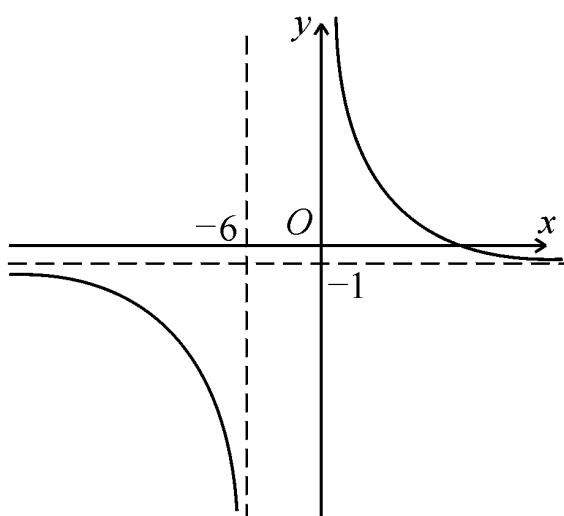
$$y' = \frac{x}{x+6} \cdot \frac{x-x-6}{x^2} = \frac{-6}{x(x+6)} \neq 0.$$



Экстремумов у функции нет.

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = -6 \cdot \frac{-(x+6+x)}{x^2(x+6)^2} = \frac{6(2x+6)}{x^2(x+6)^2} = \frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2};$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x + 3 = 0; \quad x = -3 - \text{не входит в область существования.}$$



$x$	$(-\infty; -6)$	$(0; +\infty)$
$y''$	$-$	$+$
$y$		

Точек перегиба нет.

$$\ln \frac{x+6}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{e-1};$$

$$y\left(\frac{6}{e-1}\right) = 0.$$

## 1. Неопределенный интеграл

Первообразной функцией для функции  $f(x)$  называется такая функция  $F(x)$ , что  $F'(x) = f(x)$ .

Неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Функция  $f(x)$  называется подынтегральной функцией,  $F(x)$  – результат интегрирования,  $C$  – произвольная постоянная.

*Свойства неопределенного интеграла:*

1.  $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$ .
2.  $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$ , где  $A$  – постоянная.
3. Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$  и  $u = \varphi(x)$ , то  $\int f(u)du = F(u) + C$ .

*Таблица простейших интегралов:*

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\int dx = x + C$ .   | 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ .                            |
| 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$ .                        | 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ .                          |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$ .  | 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ .                    |
| 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \int e^x dx = e^x + C$ .                | 10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ . |
| 5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .  | 11.  |
| $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0)$ . |  |

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C, (A \neq 0).$$

*Основные методы интегрирования:*

1. Подведение под знак дифференциала:

а) к функции, стоящей под знаком дифференциала, можно прибавлять или вычитать любую постоянную:  $df(x) = d(f(x) \pm A)$ ;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель:

$$df(x) = \frac{1}{A} d(A \cdot f(x));$$

в) под знак дифференциала подводится функция по правилу:

$$f'(x)dx = df(x).$$

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ где } u = u(x), v = v(x).$$

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а)  $\int a^x \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = a^x dx.$

б)  $\int \sin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \sin ax dx.$

в)  $\int \cos ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \cos ax dx,$

г)  $\int \ln ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \ln ax, \quad dv = P_n(x) dx,$

д)  $\int \arcsin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \arcsin ax, \quad dv = P_n(x) dx,$

е)  $\int \arctg ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \arctg ax, \quad dv = P_n(x) dx,$

где  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \text{ где } x = \varphi(t).$$

**Пример выполнения задания.**

Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx; \quad \text{в) } \int (3x + 4)e^{3x} dx.$$

*Решение.*

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \left(-\frac{1}{2}\right) \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \\ &= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C \right)' &= \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3(\arcsin x)^2 \cdot (\arcsin x)' - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' + C' = \\ &= \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:



$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 17 & x^2 - 4x + 3 \\
 \hline
 x^3 - 4x^2 + 3x & x + 4 \\
 \hline
 4x^2 - 3x - 17 & \\
 \hline
 4x^2 - 16x + 12 & \\
 \hline
 13x - 29 &
 \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx &= \int \left( x + 4 + \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} \right) dx = \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx.
 \end{aligned}$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби  $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$  и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x - 29}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)},$$

значит  $13x - 29 = A(x - 3) + B(x - 1)$ .

При  $x = 3$  имеем  $13 \cdot 3 - 29 = B(3 - 1)$ , откуда  $B = 5$ ;

при  $x = 1$  имеем  $13 \cdot 1 - 29 = A(1 - 3)$ , откуда  $A = 8$ .

Получаем  $\frac{13x - 29}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{8}{x - 1} + \frac{5}{x - 3}$  и интегрируем

$$\begin{aligned}
 \int \frac{13x - 29}{(x - 1)(x - 3)} dx &= \int \frac{8}{x - 1} dx + \int \frac{5}{x - 3} dx = 8 \int \frac{d(x - 1)}{x - 1} + 5 \int \frac{d(x - 3)}{x - 3} = \\
 &= 8 \ln|x - 1| + 5 \ln|x - 3| + C
 \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 8 \ln|x - 1| + \ln|x - 3| + C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left( \frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + \ln|x-3| + C \right)' = \frac{2x}{2} + 4 + \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3} =$$

$$= \frac{(x+4)(x-1)(x-3) + 8(x-3) + 5(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

*Замечание.*

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C; \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(-k+1)} (x-a)^{-k+1} + C,$$

$(k=2,3,\dots).$

в) применим методом интегрирования по частям.

Примем  $u = 3x + 4$ ,  $dv = e^{3x} dx$ , тогда  $du = 3dx$ ,  $v = \frac{1}{3}e^{3x}$ . По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int (3x+4)e^{3x} dx = (3x+4) \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 3dx = \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \int e^{3x} dx =$$

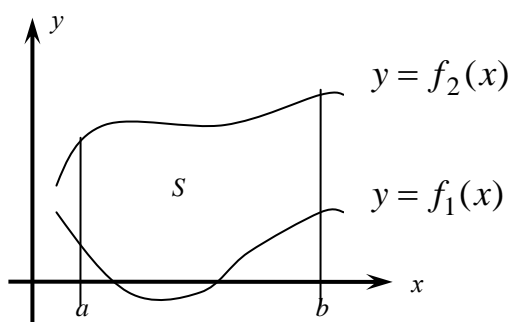
$$= \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3}e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C.$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1) + C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}(3(x+1) + 1) = e^{3x}(3x+4),$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

## 2. Определенный интеграл



Если на плоскости  $Oxy$  задана фигура, ограниченная двумя непрерывными линиями  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  и верти-

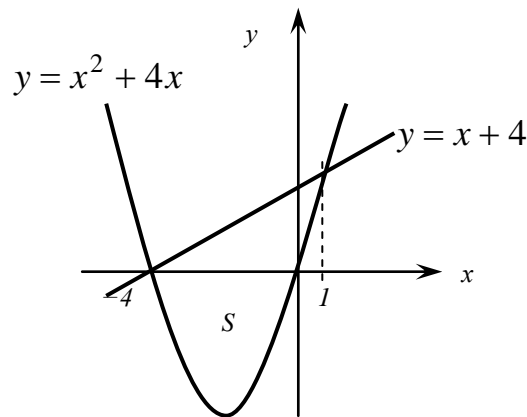
кальными прямыми  $x=a$ ,  $x=b$ , то площадь  $S$  такой фигуры может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx, \text{ где } f_2(x) \geq f_1(x) \text{ на отрезке } [a, b].$$

**Пример 2.1** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 + 4x$ ,  $y = x + 4$ .

*Решение.*

Заданные линии ограничивают на плоскости  $Oxy$  криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^1 (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int_{-4}^1 (4 - 3x - x^2)dx = \left( 4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^1 = \\ &= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

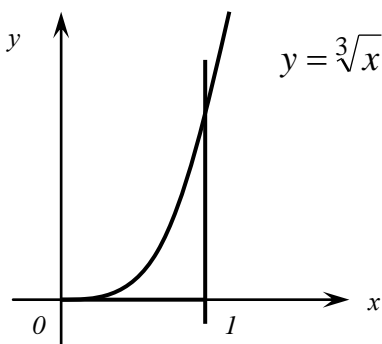
Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой  $y = f(x) \geq 0$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ ,

1) вокруг оси  $Ox$ , вычисляются по формуле  $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ ;

2) вокруг оси  $Oy$ , вычисляются по формуле  $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$ .

**Пример.2.2** Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  криволинейного треугольника, ограниченного кривой  $y = \sqrt[3]{x}$ , осью  $Ox$  и прямой  $x = 1$ .

*Решение.*



1) объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$ , равен

$$V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} \bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \text{ (куб. ед.)}$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$ , равен

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x} dx = 2\pi \frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} \bigg|_0^1 = \frac{6\pi}{7} \text{ (куб. ед.)}.$$

### Функции нескольких переменных

Переменная величина  $z$  называется *функцией двух переменных*  $x$  и  $y$ , если каждой паре значений  $(x, y)$  из данной области соответствует единственное определенное значение  $z = f(x, y)$ .

Для функции  $z = f(x, y)$  вводятся понятия *частных производных* первого порядка, которые определяются выражениями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

и *частных производных* второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Функция  $z = f(x, y)$  имеет в точке  $M_0(x_0, y_0)$  *максимум* (*минимум*), если значение этой функции в точке  $M_0$  больше (меньше), чем значения функции в любой точке из окрестности точки  $M_0$ .

Необходимыми условиями существования *экстремума* (максимума или минимума) дифференцируемой функции  $z = f(x, y)$  является равенство нулю ее частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Точки, в которых частные производные обращаются в ноль, называются *стационарными точками* функции  $z = f(x, y)$ . Для того чтобы стационарная точка являлась экстремумом, в ней должны выполняться *достаточные условия*.

Обозначим  $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_0}$ ,  $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0}$ ,  $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_0}$ ,

$$\Delta = AC - B^2.$$

Если в стационарной точке  $M_0(x_0, y_0)$

$\Delta > 0, A > 0$ , то  $M_0$  есть точка минимума;

$\Delta > 0, A < 0$ , то  $M_0$  есть точка максимума;

$\Delta < 0$ , то в точке  $M_0$  нет экстремума;

$\Delta = 0$ , то требуется дополнительное исследование.

**Пример.** Исследовать на экстремум функцию  
 $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 + 6$ .

*Решение.*

1. Найдем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2y.$$

2. Запишем необходимые условия существования экстремума

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 4 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

значит точка  $M(1;2)$  является стационарной точкой функции.

3. Проверим выполнение в точке  $M$  достаточного условия. Для этого найдем вторые частные производные функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

В точке  $M(1;2)$   $A = -2, B = 0, C = -2$  и  $\Delta = (-2) \cdot (-2) - 0 = 4$ . Поскольку  $\Delta = 4 > 0, A = -2 < 0$ , точка  $M(1;2)$  является точкой максимума. Значение функции в этой точке  $z|_M = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1^2 - 2^2 + 6 = 11$ .

Функция двух независимых переменных  $z = f(x, y)$  принимает наибольшее и наименьшее значения в области  $D$ , ограниченной линией  $\varphi(x, y) = 0$ , либо в стационарных точках, расположенных внутри области  $D$ , либо на границе этой области.

Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции  $z = f(x, y)$  в заданной области  $D$  решается по следующему плану:

1. Определяем стационарные точки функции, расположенные внутри области  $D$ , и вычисляем значения функции в этих точках.

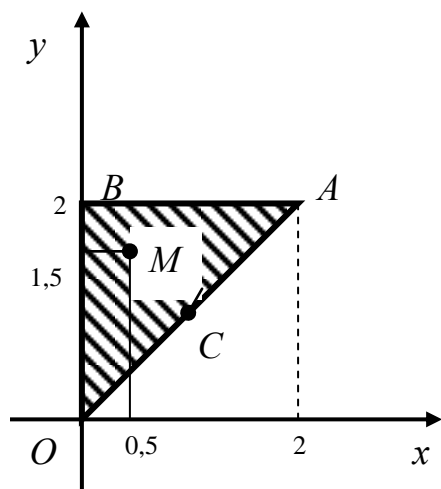
2. Находим стационарные точки функции на границе  $\varphi(x, y) = 0$  области или на отдельных ее участках, заданных различными уравнениями, и вычисляем значения функции в этих точках.

3. Из всех вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = x^2 + 2xy - 4x - y$  в треугольнике, ограниченном прямыми  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $y = x$ .

*Решение.*

1. Найдем стационарные точки функции из условий равенства нулю частных производных функции



$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 1,5 \end{cases}$$

Стационарная точка  $M(0,5; 1,5)$  лежит внутри заданной области  $OAB$ .

Значение функции в точке  $M$  равно

$$z|_M = 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 1,5 - 4 \cdot 0,5 - 1,5 = -1,75.$$

2. Исследуем поведение функции на границах области:

а) на границе  $OA$   $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $z = x^2 + 2x \cdot x - 4 \cdot x - x$  или  $z = 3x^2 - 5x$ ;

$$z' = 6x - 5, \quad z' = 0 \quad \text{при} \quad x = \frac{5}{6}, \quad \text{тогда} \quad y = \frac{5}{6} \quad (\text{так как } y=x).$$

$$\text{В точке } C\left(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right) \text{ значение функции равно } z|_C = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} = -\frac{25}{12}.$$

Вычислим значения функции в крайних точках отрезка  $OA$ .

В точке  $O(0;0)$   $z|_O = 0$ , в точке  $A(2;2)$  значение функции равно

$$z|_A = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 = 2.$$

б) на границе  $BA$   $y = 2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $z = x^2 + 2x \cdot 2 - 4x - 2$  или  $z = x^2 - 2$ ;

$z' = 2x$ ,  $z' = 0$  при  $x = 0$ , а  $y = 2$  согласно уравнению прямой  $BA$ .

В точке  $B(0;2)$  значение функции равно  $z|_B = 3 \cdot 0^2 - 2 = -2$ .

в) на границе  $OB$   $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $z = -y$ ;

$z' = -1 \neq 0$  при всех  $y \in [0;2]$ , следовательно, стационарных точек на линии  $OB$  нет.

3. Из всех вычисленных значений заданной функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$z|_A = 2$  — наибольшее значение функции в области  $OAB$

$z|_C = -\frac{25}{12}$  — наименьшее значение функции в области  $OAB$

### Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называют дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x)}{f_1(y)} \rightarrow f_1(y)dy = f_2(x)dx, \quad (1)$$

или в дифференциальной форме

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0. \quad (2)$$

Разделим обе части уравнения (2) на произведение функций

$$f_2(y)f_3(x)$$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0 \quad (2')$$



и, после интегрирования, получим общий интеграл (общее решение) уравнения:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = C.$$

При делении на  $f_2(y)f_3(x)$  может произойти потеря некоторых частных решений. Пусть, например, при  $y = y_0$  имеем  $f_2(y_0) = 0$ , тогда функция  $y = y_0$  является решением уравнения (2'), т.к.  $dy = dy_0 = 0$ . Решением может также быть функция  $x = x_0$ , если  $f_3(x_0) = 0$ .

**Пример.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка  $x(y+1)dx - (x^2+1)ydy = 0$ .

*Решение:*

Данное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, причем  $f_1(x) = x$ ;  $f_2(y) = y+1$ ;  $f_3(x) = x^2+1$ ;  $f_4(y) = -y$ . Разделим обе части уравнения на произведение

$$f_2(y)f_3(x) = (y+1)(x^2+1)$$

и получим

$$\frac{xdx}{x^2+1} - \frac{ydy}{y+1} = 0.$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = C,$$

используя подведение под знак дифференциала

$$\int \frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{x^2+1} - \int dy + \int \frac{d(y+1)}{y+1} = C,$$

получим общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2} \ln|x^2+1| - y + \ln|y+1| = C.$$

При делении на  $f_2(y) = y+1$  потеряно частное решение:  $y = -1$ .

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (3)$$

линейное относительно искомой функции и её производной, называется *линейным*.

Уравнение (3) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными следующим образом. Запишем искомую функцию  $y(x)$  в виде произведения двух функций:  $y = u(x) \cdot v(x)$ . Одна из этих функций может быть абсолютно произвольной, а вторая определяется в зависимости от первой так, чтобы их произведение удовлетворяло уравнению (3).

Из равенства  $y = u \cdot v$  находим  $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ . Тогда в соответствие с (3) имеем  $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$  или  $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$ . Выберем в качестве  $v(x)$  какое-нибудь частное решение уравнения

$$v' + p(x)v = 0, \quad (4)$$

тогда для отыскания  $u(x)$  получим уравнение

$$u'v = q(x). \quad (5)$$

Найдем  $v(x)$ , разделяя переменные в (4):

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \text{ откуда } \ln v = -\int p(x)dx \text{ и } v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Зная  $v(x)$ , найдем  $u(x)$  из уравнения (5):

$$\frac{du}{dx} v = q(x) \Rightarrow du = e^{\int p(x) dx} q(x) dx, \text{ тогда } u = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C.$$

Общее решение линейного уравнения (3) имеет вид

$$y = uv = e^{-\int p(x) dx} \left[ \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right].$$

**Пример.** Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка  $y' - 2y = 1$ .

*Решение.*

Запишем искомую функцию  $y(x)$  в виде произведения двух функций:

$$y = u(x) \cdot v(x), \text{ тогда } y' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

и подставим полученные выражения в заданное уравнение

$$u'v + uv' - 2uv = 1.$$

Вынесем за скобки  $u(x)$

$$u'v + u(v' - 2v) = 1$$

и, приравнявая к нулю выражение в скобках, получим и решим два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' - 2v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = 2dx$$

$$\ln v = 2x$$

$$v = e^{2x}$$

$$u'v = 1$$

$$\frac{du}{dx} e^{2x} = 1$$

$$du = e^{-2x} dx$$

$$u = \int e^{-2x} dx,$$

$$u = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

Запишем общее решение заданного дифференциального уравнения в виде

$$y = uv = \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) \cdot e^{2x}, \text{ или } y = -\frac{1}{2} + C e^{2x}.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (6)$$

называется неоднородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$ .

Общее решение этого уравнения  $y = \bar{y} + y^*$ , где  $\bar{y}$  – общее решение соответствующего однородного уравнения;  $y^*$  – частное решение уравнения (6). Дифференциальное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (7)$$

является однородным и называется соответствующим неоднородному уравнению (6). Общее решение однородного уравнения (7) находят по корням характеристического уравнения

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение может иметь три случая для корней  $r_1$  и  $r_2$ :

- 1) *корни характеристического уравнения действительные и различные:  $r_1 \neq r_2$ . В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде  $\bar{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные;*
- 2) *корни характеристического уравнения действительные и равные:  $r_1 = r_2$ . В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде  $\bar{y} = e^{r_1 x} (C_1 + C_2 x)$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные;*
- 3) *корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа  $r_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i, \beta \neq 0$ . В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде  $\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.*

Частное решение  $y^*$  неоднородного уравнения (6) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в зависимости от вида правой части уравнения  $f(x)$ .

*Первый случай.* Правая часть уравнения (6) имеет вид  $f(x) = P(x)e^{mx}$ , где  $P(x)$  – многочлен. Тогда уравнение (6) имеет частное решение вида

$$y^* = x^k Q(x)e^{mx}, \quad (8)$$

где  $Q(x)$  – полный многочлен той же степени от  $x$ , что и  $P(x)$ , но с неопределенными коэффициентами;

$k = 0$ , если число  $m$  не является корнем характеристического уравнения;

$k = 1$ , если число  $m$  является простым корнем характеристического уравнения;

$k = 2$ , если число  $m$  является двукратным корнем характеристического уравнения.

Правило сохраняет свою силу и при  $m = 0$ , когда  $f(x) = P(x)$  – многочлен.

Неопределенные коэффициенты в многочлене  $Q(x)$  определяют подстановкой функции (8) и ее производных в уравнение (6) с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях уравнения.

**Пример.** Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' - 3y' - 4y = 4x - 1, \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

*Решение.* Характеристическое уравнение  $r^2 - 3r - 4 = 0$  имеет два различных действительных корня  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = 4$ , следовательно,  $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$ . Правая часть уравнения имеет вид

$f(x) = 4x - 1 = (4x - 1) \cdot e^{0 \cdot x}$ , где  $m = 0$  и не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение при  $k = 0$  ищем в виде  $y^* = x^0 \cdot (Ax + B) \cdot e^{0 \cdot x} = Ax + B$ ,  $(y^*)' = A$ ,  $(y^*)'' = 0$ . После подстановки в дифференциальное уравнение получаем

$$\begin{aligned} 0 - 3A - 4(Ax + B) &= 4x - 1; \\ -3A - 4Ax - 4B &= 4x - 1; \\ -4A \cdot x + (-3A - 4B) &= 4 \cdot x + (-1); \end{aligned}$$

$$x^1: -4A = 4; \quad A = -1$$

$$x^0: -3A - 4B = -1, \quad -4B = -1 + 3A = -4, \quad B = 1$$

Частным решением является функция  $y^* = Ax + B = -1 \cdot x + 1 = 1 - x$ . Общим решением является функция  $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - x + 1$ .

Найдем значение констант  $C_1, C_2$  из начальных условий. Для этого определим  $y' = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x} - 1$ .

$$\text{Тогда } \begin{cases} y|_{x=0} = C_1 + C_2 + 1 = 2, \\ y'|_{x=0} = -C_1 + 4C_2 - 1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Искомым частным решением является функция  $y = e^{4x} - x + 1$ .

**Пример.** Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

*Решение.* Характеристическое уравнение  $r^2 - 4r + 4 = 0$  имеет двукратный корень  $r_1 = 2$ , следовательно,  $\bar{y} = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$ . Правая часть уравнения имеет вид  $f(x) = e^{2x}$ ,  $m = 2$  является двукратным ( $k = 2$ ) корнем характеристического уравнения, тогда частное решение ищем в виде

$$y^* = x^2 \cdot Ae^{2x}, \quad (y^*)' = x^2 \cdot 2Ae^{2x} + 2x \cdot Ae^{2x} = 2Ae^{2x}(x^2 + x),$$

$$(y^*)'' = 4Ae^{2x}(x^2 + x) + 2Ae^{2x}(2x + 1) = Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2).$$

После подстановки  $y^*$  и ее производных в исходное дифференциальное уравнение получаем

$$Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2) - 4 \cdot 2Ae^{2x}(x^2 + x) + 4Ae^{2x} \cdot x^2 = e^{2x},$$

$$Ae^{2x}(\cancel{4x^2} + \cancel{8x} + 2 - \cancel{8x^2} - \cancel{8x} + \cancel{4x^2}) = e^{2x},$$

$$2Ae^{2x} = e^{2x},$$

$$2A = 1, \quad A = \frac{1}{2}.$$

Частным решением является функция  $y^* = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2$ .

Общим решением является функция

$$y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2.$$

Найдем значение констант  $C_1, C_2$  из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = e^{2x}(2C_1 + 2C_2x + C_2) + e^{2x}(x^2 + x),$$

и получим систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y|_{x=0} = e^0 \cdot C_1 = 2, \quad C_1 = 2$$

$$y'|_{x=0} = e^0(2C_1 + C_2) = 3, \quad C_2 = -1$$

Искомым решением является функция  $y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(2 - x) + \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2$ .

*Второй случай.* Правая часть уравнения (6) имеет вид  $f(x) = a \cos nx + b \sin nx$ .

Если числа  $\pm in$  не являются корнями характеристического уравнения, то

$$y^* = A \cos nx + B \sin nx.$$

Если числа  $\pm in$  являются корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y^* = (A \cos nx + B \sin nx) \cdot x.$$

В частных случаях, когда  $a$  или  $b$  равно нулю, решение всё равно надо искать в указанном общем виде.

**Пример.** Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' + 4y' + 13y = 5 \sin 3x, \quad y|_{x=0} = \frac{1}{8}, \quad y'|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

*Решение.* Характеристическое уравнение  $r^2 + 4r + 13 = 0$  имеет корни

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i,$$

тогда  $\bar{y} = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ .

Числа  $\pm 3i$  не являются корнями характеристического уравнения, поэтому

$$y^* = A \sin 3x + B \cos 3x,$$

$$(y^*)' = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x,$$

$$(y^*)'' = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x.$$

Подставляем  $y^*$  и ее производные в исходное уравнение и получаем

$$\begin{aligned} -9A \sin 3x - 9B \cos 3x + 4(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) + 13(A \sin 3x + B \cos 3x) &= C, \\ (4A - 12B) \sin 3x + (4B + 12A) \cos 3x &= 5 \cdot \sin 3x + 0 \cdot \cos 3x; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 3x: 4A - 12B &= 5 \\ \cos 3x: 4B + 12A &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{8} \\ B &= -\frac{3}{8} \end{aligned} \right\}.$$



Общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{3}{8} \cos 3x.$$

Найдем значение констант  $C_1, C_2$  из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = -2e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-2x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) + \frac{3}{8} \cos 3x + \frac{9}{8} \sin 3x$$

и запишем систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$\begin{aligned} y|_{x=0} &= e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}, \\ y'|_{x=0} &= -2e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 (C_1 \cdot 0 + 3C_2) + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}, \\ \begin{cases} C_1 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}, \\ C_2 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \right) = \frac{3}{8}. \end{cases} \end{aligned}$$

Искомым решением является функция

$$y = e^{-2x} \left( \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{3}{8} \sin 3x \right) + \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{3}{8} \cos 3x.$$

## Ряды

*Степенным рядом* называют ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (9)$$

расположенный по степеням двучлена  $(x-a)$ .

В соответствии с теоремой Абеля ряд (9) сходится на интервале  $x \in (a-R, a+R)$ , а для всех  $x$ , лежащих вне этого интервала, ряд расходится. Число  $R$  называют *радиусом сходимости* степенного ряда. На концах

интервала (при  $x = a - R$  и при  $x = a + R$ ) вопрос о сходимости и расхождении данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда. У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ( $R = 0$ ), у других охватывает всю ось  $Ox$  ( $R = \infty$ ).

Согласно признаку Даламбера радиус сходимости определяют по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (10)$$

Если воспользоваться признаком Коши, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

**Пример.** Найти интервал сходимости ряда и исследовать его

сходимость на краях интервала  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}$

*Решение.*

Радиус сходимости определим по формуле (10):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 10^{n+1}}{n \cdot 10^{n+1}} \right| = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 10.$$

На концах интервала: при  $x = -10$  получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n \cdot 10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

который является знакочередующимся и сходится по теореме Лейбница, так как его члены убывают по абсолютной величине

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \text{ При } x = 10 \text{ получим гармонический ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится. Таким образом, данный степенной ряд сходится при  $x \in [-10; 10)$ .

Основные элементарные функции имеют простые разложения по степеням  $x$ , которые представлены ниже:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1].$$

При приближенных вычислениях определенных интегралов требуется разложить подынтегральную функцию в степенной ряд, который в пределах интервала сходимости может быть почленно проинтегрирован. Используя формулу Ньютона – Лейбница, определенный интеграл вычисляют как частичную сумму получающегося числового ряда. Если ряд знакопеременный, то точность приближенных вычислений не превосходит первого из отброшенных членов.

**Пример.** Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда:

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx.$$

*Решение.*

Используем разложение в ряд для функции  $\sin x$  и подставим его в подынтегральное выражение

$$\begin{aligned}
\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{0,5} \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\
&= \int_0^{0,5} \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\
&= \left( x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)} + \dots \right) \Bigg|_0^{0,5} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 3!3} + \frac{1}{2^5 5!5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{2n-1} (2n-1)!(2n-1)} + \dots \approx \\
&\approx 0,5 - 0,0069 + 0,00005 \approx 0,5 - 0,0069 \approx 0,4931 \approx 0,493.
\end{aligned}$$

В вычислениях приведены первые три члена ряда с сохранением четырех знаков после запятой, так как заданная точность составляет 0,001. Третий член ряда отброшен, так как он по величине меньше заданной точности  $(0,00005) < 0,001$ . В окончательном результате проведено округление до трех знаков после запятой.

### Теория вероятностей

При классическом определении *вероятность события* определяется равенством

$$P(A) = m/n,$$

где  $m$  – число элементарных исходов испытаний, благоприятствующих появлению события  $A$ ,  $n$  – общее число элементарных исходов испытания.

*Число сочетаний* из  $l$  элементов по  $k$  называют количество комбинаций, составленных из  $l$  элементов по  $k$ , которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}.$$

**Пример.** В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

*Решение:*

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь три детали из пятнадцати, то есть

$$n = C_{15}^3;$$

б) число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, равно числу способов, которыми можно выбрать три окрашенных детали из 10, то есть  $m = C_{10}^3$ ;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{\frac{10!}{3! \cdot 7!}}{\frac{15!}{3! \cdot 12!}} = \frac{10! \cdot 12!}{7! \cdot 15!} = \frac{\cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{7!} \cdot \cancel{12!} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{24}{91} \approx 0,26.$$

**Пример.** В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны 5 деталей. Определить вероятность того, что среди отобранных деталей ровно три стандартных.

*Решение:*

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь пять деталей из десяти, то есть

$$n = C_{10}^5;$$

б) найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных пяти деталей ровно три стандартные): три стандартные детали можно выбрать из 7 стандартных деталей  $C_7^3$  способами; при этом остальные  $(5-3=2)$  детали должны быть нестандартными, которые можно выбрать из  $(10-7=3)$  нестандартных деталей, имевшихся в пар-

тии,  $C_3^2$  способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов  $m = C_7^3 \cdot C_3^2$ ;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!}}{\frac{10!}{5! \cdot 5!}} = \frac{7! \cdot 5! \cdot 5!}{2! \cdot 4! \cdot 10!} = \frac{\cancel{7!} \cdot \cancel{4!} \cdot 5 \cdot 5!}{2 \cdot \cancel{4!} \cdot \cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{5!}{4 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Вероятность события  $A$ , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез)  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события  $A$ :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A),$$

где  $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$ .

Приведенную формулу называют *формулой полной вероятности*.

**Пример.** Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь. Найти вероятность того, что она окажется бракованной.

*Решение:*

а) обозначим через  $A$  событие – взятая деталь является бракованной. Можно сделать три предположения (гипотезы):  $H_1$  – деталь выбрана из первой партии;  $H_2$  – деталь выбрана из второй партии;  $H_3$  – деталь выбрана из третьей партии. Поскольку число деталей во всех трех партиях равно, вероятности гипотез равны

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

б) условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из первой партии,  $P_{H_1}(A) = 0$ ; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из второй партии,  $P_{H_2}(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ ; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из третьей партии,  $P_{H_3}(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ .

в) искомая вероятность того, что выбранная наудачу деталь является бракованной, находится по формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Вероятность того, что в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна  $p$  ( $0 < p < 1$ ), событие наступит ровно  $k$  раз (безразлично в какой последовательности), определяется по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где  $q = 1 - p$  – вероятность того, что событие в каждом из испытаний не появится.

**Пример.** Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех.

*Решение:*

а) пусть событие  $A$  – из 4 семян взойдут не менее трех семян; событие  $B$  – из 4 семян взойдут 3 семени; событие  $C$  – из 4 семян взойдут 4 семени. По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

б) вероятности событий  $B$  и  $C$  определим по формуле Бернулли:

$$P(B) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0,9^3 \cdot (1-0,9) = 0,2916,$$

$$P(C) = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0,9^4 = 0,6561.$$

в) искомая вероятность  $P(A) = 0,2916 + 0,6561 = 0,9477$ .

Если число повторяющихся испытаний велико, то определение вероятности по формуле Бернулли затруднено из-за громоздкости вычислений. В этом случае применяют приближенную формулу, выражающую *локальную теорему Лапласа*:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

$$\text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции  $\varphi(x)$  определяются из таблицы, приведенной в приложении 1.

При малых значениях вероятности  $p$  для вычисления  $P_n(k)$  применяют асимптотическую *формулу Пуассона*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } e = 2,7182...; \lambda = np.$$

Эта формула используется при  $\lambda \leq 10$ , причем чем меньше  $p$  и больше  $n$ , тем результат точнее.

**Пример.** Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдут 350 семян.

*Решение.*

а) из условия задачи  $p = 0,9; q = 1 - 0,9 = 0,1; n = 400; k = 350$ . Тогда

$$x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -\frac{10}{6} \approx -1,67;$$



б) из таблицы в приложении 1 находим  $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67) = 0,0989$ ;

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \cdot 0,0989 \approx 0,0165.$$

**Пример.** Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

*Решение.*

Из условия задачи  $p = 0,0002$ ;  $n = 10000$ ;  $k = 6$ . Тогда  $\lambda = 10000 \cdot 0,0002 = 2$ .

Искомая вероятность равна

$$P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} \approx \frac{64}{720} \cdot 0,1353 \approx 0,012.$$

Если вероятность наступления события  $A$  в каждом из  $n$  испытаний постоянна и равна  $p$ , то вероятность  $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$  того, что событие  $A$  в таких испытаниях наступит не менее  $k_1$  раз и не более  $k_2$  раз, определяется по интегральной теореме Лапласа формулой:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где  $\alpha = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$  и  $\beta = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ ,  $q = 1 - p$ .

Функция  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  называется функцией Лапласа. В прило-

жении 2 даны значения этой функции для  $0 \leq x \leq 5$ . При  $x > 5$  функция  $\Phi(x) = 0,5$ . При отрицательных значениях  $x$  в силу нечетности функции Лапласа  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ . Используя функцию Лапласа, имеем

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

**Пример.** Процент всхожести семян пшеницы равен 90%. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

*Решение.*

а) из условия задачи  $p = 0,9$ ;  $q = 1 - 0,9 = 0,1$ ;  $n = 500$ ;  $k_1 = 400$ ;  $k_2 = 440$ .

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{400 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -7,45; \quad \beta = \frac{440 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,49.$$

б) из таблицы в приложении 2 находим

$$\Phi(-1,49) = -\Phi(1,49) \approx -0,4319; \quad \Phi(-7,45) = -\Phi(7,45) \approx -0,5.$$

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(400 \leq k \leq 440) \approx \Phi(-1,49) - \Phi(-7,45) = -0,4312 + 0,5 = 0,0681.$$

## Литература

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/91080> — Загл. с экрана.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2017. — 224 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/92615> — Загл. с экрана.
3. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 240 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/4549> — Загл. с экрана.
4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов. Т.1 / Н.С.Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2010. — 416 с.
5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов : в 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2009. — 544 с.
6. Лакерник А.Р. Высшая математика. Краткий курс [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Лакерник А.Р.— Электрон. текстовые дан-

ные.— М.: Логос, 2008.— 528 с.— Режим доступа:  
<http://www.iprbookshop.ru/9112.html>.— ЭБС «IPRbooks»

7. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман .— 12-е изд., перераб. и доп .— М. : Юрайт, 2011 .— 480 с. : ил. — (Основы наук). — Предм. указ.: с. 474-479 .— ISBN 978-5-9916-1163-3 (Изд-во Юрайт) .— ISBN 978-5-9692-1122-3 (ИД Юрайт).

8. Инченко О.В. Математика для заочников: учебное пособие./ О.В. Инченко, В.А. Кузнецова; Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 167с. ISBN 978-5-7679-4249-3.

### **Дополнительная литература**

1. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. — Режим доступа : <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214370663049600009433>, по паролю

2. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. — Режим доступа по паролю : [https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/201410021441294315510000\\_8498](https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/201410021441294315510000_8498), по паролю

### **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. Дифференциальные уравнения [электронный ресурс] : ежемесячный математический журнал: журнал/ РАН. - М.: Наука/Интерпериодика, 2014 - . - ISSN 0374-0641.- Режим доступа : <http://elibrary.ru/issues.asp?id=9677>, со всех компьютеров НБ ТулГУ, по паролю

2. Успехи математических наук/ Российская академия наук. - М.: Наука, 1995-ISSN 0042-1316

3. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/>, по паролю.- Загл. с экрана

4. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.- Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/>, по паролю.- .- Загл. с экрана

5. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: <http://elibrary.ru/> , по паролю.- Загл. с экрана.

6. НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа, режим доступа <http://cyberleninka.ru/> ,свободный.- Загл. с экрана.

7. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://window.edu.ru.> ,свободный.- Загл. с экрана.

8. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://exponenta.ru.> ,свободный.- Загл. с экрана.