

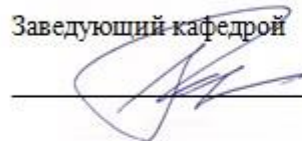
МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 14 » января 2021 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой



В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий по дисциплине (модулю)
«Математика»

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы специалитета**

по специальности
38.05.02 Таможенное дело

с направленностью (профилем)
Таможенная деятельность

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 380502-01-21

Тула 2021 год

Разработчик методических указаний

Инченко О.В., к.ф.-м.н.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

Аналитическая геометрия в пространстве R^3

Векторная алгебра

Некоторые сведения из теории

Вектор – направленный отрезок.

Равенство

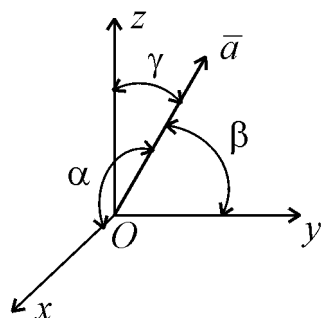
$$\vec{a} = (x, y, z) \quad (1)$$

означает, что x, y, z – проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2)$$

позволяет по координатам вектора определить его модуль.



Если α, β, γ – углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются направляющими косинусами вектора \vec{a} .

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma, \quad (3)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4)$$

Если известны начало вектора $M_1(x_1, y_1, z_1)$

и конец $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1. \quad (5)$$

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad (6)$$

и $\alpha \vec{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$, где α – любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Признак коллинеарности векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (7)$$

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по осям соответственно Ox, Oy, Oz в положительную сторону.

Любой вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (8)$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (9)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}, \quad (10)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \quad (11)$$

т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (12)$$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (13)$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (14)$$

Если вектор \vec{F} изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора \vec{S} , то работа этой силы определяется

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}. \quad (15)$$

Векторным произведением вектора \vec{a} на \vec{b} называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ;
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;
3. вектор \vec{c} образует с векторами \vec{a} и \vec{b} «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (16)$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} :

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad (17)$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (18)$$

Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, в частности, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Если вектор \vec{F} изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке M , а вектор \vec{a} идет из некоторой точки O в точку M , то вектор $\vec{a} \times \vec{F}$ представляет собой момент силы \vec{F} относительно точки O :

$$m_o \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F}. \quad (20)$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$, умноженному скалярно на вектор \vec{c} , т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (21)$$

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$$V = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}. \quad (22)$$

Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0. \quad (23)$$

Для векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Задача 1. На материальную точку действуют силы:

$$\vec{F}_1 = (2, -1, 1), \quad \vec{F}_2 = (-1, 2, 2), \quad \vec{F}_3 = (1, 1, -2).$$

Найти работу равнодействующей этих сил \vec{R} при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

Решение. Найдем равнодействующую

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2 - 1 + 1, -1 + 2 + 1, 1 + 2 - 2) = (2, 2, 1).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (4 - 2, 1 + 1, -1 - 0) = (2, 2, -1).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W = \vec{R} \cdot \vec{S} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7.$$

Задача 2. Дана сила $\vec{F} = (3, 4, -2)$ и точка ее приложения $A(2, -1, 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. По формуле (20) $m_o \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$. Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ по формуле (5) имеет координаты $\vec{r} = (2, -1, 3)$, по формуле (19)

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 13\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Итак, $m_o \vec{F} = (-10, 13, 11)$. Модуль момента находим по формуле (2):

$$|m_o \vec{F}| = \sqrt{(-10)^2 + (13)^2 + (11)^2} = \sqrt{390} \approx 19,748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$\cos \alpha = \frac{-10}{19,748} = -0,506, \quad \cos \beta = \frac{13}{19,748} = 0,658, \quad \cos \gamma = \frac{11}{19,748} = 0,557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha = 120^\circ 24', \quad \beta = 48^\circ 51', \quad \gamma = 56^\circ 9'.$$

Контроль: должно быть $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. У нас:

$$(-0,506)^2 + (0,658)^2 + (0,557)^2 = 0,999.$$

Задача 3. Написать разложение вектора $\vec{x} = (5, 16, 2)$ по векторам $\vec{p} = (2, 1, 0)$, $\vec{q} = (0, -2, 0)$, $\vec{r} = (-1, 5, 2)$.

Решение.

1. Разложение вектора \vec{x} по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{p} + \alpha_2 \vec{q} + \alpha_3 \vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 q_1 + \alpha_3 r_1 \\ x_2 = \alpha_1 p_2 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 r_2 \\ x_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 q_3 + \alpha_3 r_3. \end{cases}$$

2. С учетом числовых значений координат векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ и \vec{x} получим систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} 2 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 - 1 \cdot \alpha_3 = 5 \\ 1 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot \alpha_2 + 5 \cdot \alpha_3 = 16 \\ 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 2 \alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 5 + \alpha_3 \\ 2\alpha_2 = \alpha_1 + 5\alpha_3 - 16 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

3. Разложение вектора \vec{x} по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид:

$$\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}.$$

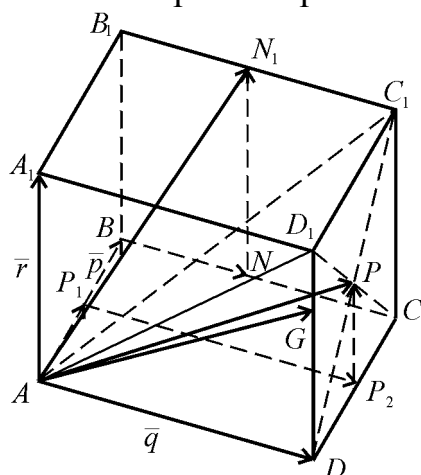
Ответ: $\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}$.

Задача 4. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$ образуют базис. Разложить векторы \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{AP} , $\overrightarrow{AN_1}$ по выбранному базису, если точка G делит ребро DD_1 в отноше-

нии 1:2; точка P – точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C ; точка N_1 – середина ребра B_1C_1 .

Решение.

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}, \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$

$$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Прямая и плоскость **Плоскость. Ее уравнения**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad - \quad (25)$$

общее уравнение плоскости.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad - \quad (26)$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad - \quad (27)$$

уравнение плоскости «в отрезках». Здесь a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad - \quad (28)$$

нормальное уравнение плоскости.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad - \quad (29)$$

расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad - \quad (30)$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Прямая. Ее уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad - \quad (31)$$

общее уравнение прямой (прямая задана пересечением двух плоскостей).

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad - \quad (32)$$

каноническое уравнение прямой, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, принадлежащая прямой, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой (вектор, параллельный прямой).

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad - \quad (33)$$

параметрические уравнения прямой.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad - \quad (34)$$

уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\cos \varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad - \quad (35)$$

угол между двумя прямыми, где $\vec{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ – направляющие векторы прямых.

$$\sin \psi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad - \quad (36)$$

угол между прямой и плоскостью, где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \times \overrightarrow{A_1A_4} \right| \quad - \text{объем пирамиды } A_1A_2A_3A_4,$$

где $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ – координаты вершин пирамиды.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \quad (37)$$

- Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, $A_4(0, 8, 0)$. Найти:
- 1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 ;
 - 2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
 - 3) объем пирамиды V ;
 - 4) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$;
 - 5) точку A'_4 , симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$;
 - 6) точку A''_4 , симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3 .

Решение.

- 1) Угол между ребрами находим по формуле (35).

$\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = (3-2, 0-1, 1-(-1)) = (1, -1, 2)$ – направляющий вектор прямой A_1A_2 ;

$\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_4} = (0-2, 8-1, 0-(-1)) = (-2, 7, 1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4 .

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot (-2) - 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}} = -\frac{7}{18}.$$

- 2) Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через три точки $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, по формуле (30)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & 0-1 & 1+1 \\ 2-2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \cdot 0 - (y-1) \cdot 4 + (z+1) \cdot (-2) = 0, \\ -4y + 4 - 2z - 2 = 0,$$

$4y + 2z - 2 = 0$ – уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

$\vec{n} = (0, 2, 1)$ – нормальный вектор плоскости;

$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_4} = (-2, 7, 1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4 .

Находим угол ψ между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ по формуле (36)

$$\sin \psi = \frac{0 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{54}} = 0,9114.$$

3) Находим объем пирамиды по формуле (37)

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = (1, -1, 2); \quad \overrightarrow{A_1 A_3} = (0, -2, 4); \quad \overrightarrow{A_1 A_4} = (-2, 7, 1).$$

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} (-2 + 8 - 8 - 28) = -\frac{1}{6} (-30) = 15.$$

4) Расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1 A_2 A_3$ находим по формуле (29).

$$d = \frac{|2 \cdot 8 + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \approx 6,69.$$

5) Чтобы найти точку A'_4 , симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1 A_2 A_3$, сделаем следующее.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $A_1 A_2 A_3$, проходящей через точку A_4 по формуле (32). За направляющий вектор прямой $\vec{a} = \vec{n} = (0, 2, 1)$ берем нормальный вектор плоскости, т.к. прямая перпендикулярна плоскости:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-0}{1}, \quad \frac{x}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{1}.$$

Составим параметрические уравнения этой прямой по формуле (33):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t. \end{cases}$$

Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью $A_1 A_2 A_3$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 + 8 = 2 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow 2(2t + 8) + t - 1 = 0,$$

$$5t + 15 = 0, \quad t = -3.$$

Получаем точку $M(0, 2, -3)$; т.к. точка A'_4 симметрична точке A_4 относительно плоскости $A_1 A_2 A_3$, то точка M является серединой отрезка $A_4 A'_4$, поэтому

$$x_M = \frac{x_4 + x'_4}{2}, \quad 0 = \frac{0 + x'_4}{2}, \quad x'_4 = 0;$$

$$y_M = \frac{y_4 + y'_4}{2}, \quad 2 = \frac{8 + y'_4}{2}, \quad y'_4 = -4;$$

$$z_M = \frac{z_4 + z'_4}{2}, \quad -3 = \frac{0 + z'_4}{2}, \quad z'_4 = -6.$$

$$A'_4(0, -4, -6).$$

6) Чтобы найти точку A''_4 , симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3 , составим уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_1A_3 по формуле (26). За нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \vec{a} = (0, -2, 4)$ берем направляющий вектор прямой A_1A_3 , т.к. плоскость перпендикулярна прямой.

$$0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 3) + 4 \cdot (z - 0) = 0, \quad -2y + 16 + 4z = 0, \quad y = 2z - 8 = 0.$$

Уравнение прямой A_1A_3 составляем по формуле (34).

$$\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z+1}{3+1}, \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

Параметрические уравнения прямой A_1A_3 :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1. \end{cases}$$

Находим точку N пересечения прямой A_1A_3 и плоскости:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1 \\ y - 2z - 8 = 0, \end{cases}$$

$$-2t + 1 - 2(4t - 1) - 8 = 0, \quad -10t - 5 = 0, \quad t = -\frac{1}{2},$$

$$x = 2, \quad y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2, \quad z = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3.$$

Итак, точка $N(2, 2, -3)$. Так как точка A''_4 симметрична точке A_4 относительно прямой A_1A_3 , то точка N является серединой отрезка $A_4A''_4$, тогда

$$x_N = \frac{x_4 + x''_4}{2}, \quad 2 = \frac{0 + x''_4}{2}, \quad x''_4 = 4,$$

$$y_N = \frac{y_4 + y''_4}{2}, \quad 2 = \frac{8 + y''_4}{2}, \quad y''_4 = -4,$$

$$z_N = \frac{z_4 + z_4''}{2}, \quad -3 = \frac{0 + z_4''}{2}, \quad z_4'' = -6, \quad \text{точка } A_4''(4, -4, -6).$$

Аналитическая геометрия на плоскости

Некоторые сведения из теории

Прямая линия. Ее уравнение

$$Ax + By + C = 0 \quad - \quad (38)$$

общее уравнение прямой.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad - \quad (39)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{a} = (m, n)$ – вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad - \quad (40)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с перпендикулярным вектором $\vec{n} = (A, B)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad - \quad (41)$$

уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad - \quad (42)$$

уравнение прямой в «отрезках», где a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \quad - \quad (43)$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \varphi$ и отрезком b – отсекаемым на оси Oy .

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad - \quad (44)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом k .

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad - \quad (45)$$

расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad - \quad (45a)$$

отклонение точки $M_0(x_0, y_0)$ от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} \quad (46)$$

угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$.

$$k_1 = k_2 \quad (47)$$

условие параллельности прямых.

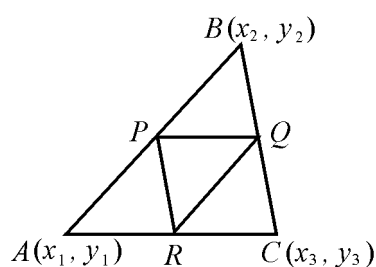
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad (48)$$

условие перпендикулярности прямых.

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \quad (49)$$

угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 .

Задача 6. Даны середины сторон треугольника $P(1, 2)$, $Q(5, 1)$, $R(-4, 3)$. Составить уравнения его сторон.



1 способ. Так как точки P , Q , R являются серединами отрезков AB , AC , BC , то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 = -8, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 6, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= -8 & y_1 &= 6 \\ x_2 &= 0 & y_2 &= 0 & A(-8, 6), \quad B(10, -2), \quad C(0, 0). \\ x_3 &= 10, & y_3 &= -2, \end{aligned}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение AB :

$$\frac{x + 8}{10 + 8} = \frac{y - 6}{-2 - 6}, \quad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC :

$$\frac{x - 10}{0 - 10} = \frac{y + 2}{0 + 2}, \quad x + 5y = 0.$$

Уравнение AC :

$$\frac{x + 8}{0 + 8} = \frac{y - 6}{0 - 6}, \quad 3x + 4y = 0.$$

2 способ. Не определяя координат точек A, B, C , составим уравнение каждой из сторон треугольника ABC , как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника PQR параллельно противоположной стороне.

Уравнение AB : прямая AB проходит через точку P параллельно вектору $\overrightarrow{QR} = (-9, 4)$. Используем уравнение (39).

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y-2}{4} \Rightarrow 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC : прямая BC проходит через точку Q параллельно вектору $\overrightarrow{PR} = (-5, 1)$.

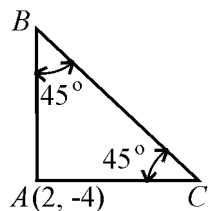
$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y+1}{1} \Rightarrow x + 5y = 0.$$

Уравнение AC : прямая AC проходит через точку R параллельно вектору $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$.

$$\frac{x+4}{4} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow 3x + 4y = 0.$$

Ответ: $4x + 9y - 22 = 0$, $x + 5y = 0$, $3x + 4y = 0$.

Задача 7. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x + 3y - 5 = 0$ и вершину прямого угла $(2, -1)$.



$AB = BC$ (по условию), поэтому $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$,

$k_{BC} = -\frac{2}{3}$ (по формуле (46)). Уравнения катетов AB и

BC составляем по формуле (44): $y + 1 = k(x - 2)$.

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} \right|, \quad (49)$$

$$\frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} = \pm 1.$$

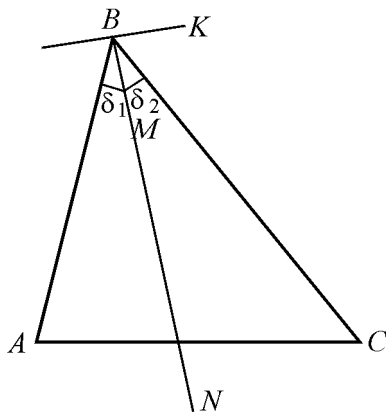
Решая эти уравнения, получим:

$$k = \frac{1}{5}, \quad y + 1 = \frac{1}{5}(x - 2), \quad 5y + 5 = x - 2, \quad x - 5y - 7 = 0.$$

$$k = -5, \quad y + 1 = -5(x - 2), \quad y + 1 = -5x + 10, \quad 5x + y - 9 = 0.$$

Ответ: $x - 5y - 7 = 0$, $5x + y - 9 = 0$.

Задача 8. В треугольнике с вершинами $A(3, -2)$, $B(-1, 1)$, $C(5, -7)$ найти биссектрису внутреннего угла $\angle ABC$.



1) Составим уравнения сторон угла $\angle ABC$, воспользовавшись формулой (41).

Сторона BA :

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-1}{-2-1}, \quad -3x-4y+1=0.$$

Сторона BC :

$$\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-1}{-4-1}, \quad -8x-6y-2=0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Приравняем расстояния от произвольной точки биссектрисы $M(x, y)$ до сторон угла BA и BC , вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-8x-6y-2|}{\sqrt{8^2+6^2}}, \quad \frac{|-3x-4y+1|}{5} = \frac{|-8x-6y-2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x-4y+1) = -8x-6y-2 \quad \text{и} \quad 2(-3x-4y+1) = -(-8x-6y-2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине B треугольника ABC :

$$x-y+3=0 \quad (a)$$

и

$$x+y=0. \quad (б)$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника BN отклонения вершин треугольника A и C имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла BK – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек A и C от прямой (a) по формуле (40,a):

$$\delta_A = \frac{3-(-2)+2}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} > 0, \quad \delta_C = \frac{5-(-7)+2}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} > 0,$$

следовательно, уравнение (a) – это уравнение прямой BK . Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника ABC при вершине B :

$$x+y=0.$$

Ответ: $x+y=0$.

Линии второго порядка

Окружность. Уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (50)$$

определяет окружность радиуса R с центром $C(a, b)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $a = b = 0$, то уравнение окружности примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (51)$$

Общее алгебраическое уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

есть уравнение окружности, если $A = C \neq 0$, $B = 0$, т.е.

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (52)$$

Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \quad (53)$$

уравнение эллипса (канонический вид).

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad a > b. \quad (54)$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1(-c, 0) \text{ и } F_2(c, 0). \quad (55)$$

Начало координат O – центр симметрии эллипса, а оси координат – оси симметрии эллипса. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$

называются вершинами эллипса, a и b – большая и малая полуоси. Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1 \quad (56)$$

называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, т.к. выражается через отношение его полуосей

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (57)$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a = b$, т.е. $\varepsilon = 0$.

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} - \quad (58)$$

уравнения директрис.

Если фокусы эллипса расположены на оси Oy , то уравнение эллипса имеет тот же вид (58), но $b > a$. Фокусы имеют координаты:

$F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$. Уравнения директрис

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon}. \quad (59)$$

Гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \quad (60)$$

каноническое уравнение гиперболы.

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad a < c. \quad (61)$$

Фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка O – центр симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, которые называются ее действительными вершинами, а величина a – действительной полуосью гиперболы. Точки $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ называются мнимыми вершинами, а b – мнимая полуось. Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad (62)$$

являются асимптотами гиперболы, т.е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1. \quad (63)$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (64)$$

Если $a = b$, гипербола называется равносторонней. В этом случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \quad - \quad (65)$$

директрисы гиперболы.

Если уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (66)$$

то асимптоты гиперболы:

$$x = \pm \frac{b}{a} y, \quad (67)$$

фокусы $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$.

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon} \quad - \quad (68)$$

уравнения директрис.

Парабола.

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \quad (p > 0), \quad (69)$$

где p – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение директрисы

$x = -\frac{p}{2}$, координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

В ряде случаев рассматривают параболы:

а) $y^2 = -2px$, $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус, $x = \frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (70)

б) $x^2 = 2py$, $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ – фокус, $y = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (71)

в) $x^2 = -2py$, $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ – фокус, $y = \frac{p}{2}$ – уравнение директрисы. (72)

Для всех случаев $p > 0$.

Задача 9. Среди прямых параллельных прямой $2x + y = 0$, выделить касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Уравнение всякой прямой, параллельной данной, можно записать в виде

$$2x + y + c = 0.$$

Касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку, поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно иметь только один ответ.

Из уравнения прямой $y = -2x - c$.

$$\begin{cases} y = -2x - c \\ x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + (-2x - c)^2 = 1, \quad 5x^2 + 4cx + c^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда дискриминант равен нулю: $(4c)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (c^2 - 1) = 0$, откуда $c = \pm\sqrt{5}$.

Итак, искомые касательные имеют уравнения

$$2x + y + \sqrt{5} = 0, \quad 2x + y - \sqrt{5} = 0.$$

Задача 10. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

Решение. Делим на 225, получаем

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отсюда следует по формуле (53), что $a = 5$, $b = 3$. Из формулы (54):

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, \quad c = \pm 4.$$

По формуле (55): $F_1(-4, 0), \quad F_2(4, 0)$.

Эксцентриситет (56): $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Уравнения директрис согласно (58): $x = \pm \frac{5}{4/5} = \pm \frac{25}{4}$.

Ответ: $a = 5, b = 3; F_1(-4, 0), F_2(4, 0); \varepsilon = \frac{4}{5}; x = \pm \frac{25}{4}$.

Задача 11. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая полуось $2\sqrt{6}$, а расстояние между фокусами $F_1F_2 = 8$.

Решение. $b = 2\sqrt{6}, \quad F_1F_2 = 2c = 8, \quad c = 4$.

По формуле (54): $a^2 = b^2 + c^2, \quad a^2 = (2\sqrt{6})^2 + 4^2 = 40, \quad a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Уравнение эллипса согласно (53): $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$.

Задача 12. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $4y \pm 3x = 0$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать ее каноническое уравнение.

Решение. Уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$, согласно формуле (62):

$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$. Кроме того $F_1F_2 = 2c = 20, \quad c = 10$. По формуле (61):

$c^2 = a^2 + b^2$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $a = 8, \quad b = 6$. Следовательно, каноническое уравне-

ние гиперболы: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Задача 13. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = -1$. Найти координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

Решение. Фокусы данной гиперболы расположены на оси Oy .

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}. \quad (61)$$

Значит фокусы имеют координаты $F_1(0, -\sqrt{10}), \quad F_2(0, \sqrt{10})$. Вершины $A_1(0, -1), \quad A_2(0, 1), \quad B_1(-3, 0), \quad B_2(3, 0)$. Эксцентриситет по формуле (64):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}, \quad \varepsilon = \sqrt{10}.$$

Уравнения асимптот: $x = \pm \frac{b}{a}y \Rightarrow x = \pm 3y$.

Уравнения директрис: $y = \pm \frac{b}{c} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Задача 14. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(1, -2)$ и симметрична относительно оси Oy . Написать ее уравнение. Найти фокус и директрису.

Решение. Уравнение искомой параболы по формуле (72) имеет вид $x^2 = -2py$. Точка $A(1, -2)$ лежит на параболы. Подставляем координаты точки A в уравнение: $1 = -2p \cdot (-2) \Rightarrow p = \frac{1}{4}$. Следовательно, искомое уравнение будет $x^2 = -\frac{1}{2}y$ или $y = -2x^2$.

Фоку параболы: $F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$. Уравнение директрисы согласно (72): $y = \frac{1}{8}$.

Задача 15. На параболы $y^2 = 4x$ найти точки, расстояния которых от директрисы равно 5.

Решение. Уравнение директрисы данной параболы $x = -\frac{p}{2}$, $2p = 4$, $p = 2$, $x = -1$. Тогда расстояние от оси Oy до искомой $\ell = 4 - \frac{p}{2} = 5 - 1 = 4$ точки и это расстояние определит координату x данной точки, т.е. $x = 4$. Координату y найдем из уравнения параболы: $y^2 = 4x$, $y^2 = 4 \cdot 4 = 16$, $y = \pm 4$.
Итак, $M_1(4, 4)$, $M_2(4, -4)$.

Введение в анализ

1. Пределы

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \dots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число u_n . Тогда говорят, что определена последовательность чисел u_1, u_2, u_3, \dots или, короче, последовательность $\{u_n\}$. Отдельные числа u_n называются ее элементами.

Определение 1.1. Число a называется пределом последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется зависящее от него натуральное число N такое, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство: $|u_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.

Определение 1.2. Говорят, что функция $f(x)$ стремится к A ($f(x) \rightarrow A$) при стремлении к a ($x \rightarrow a$), где A и a – числа, или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Аналогично, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta(M)$, где M – произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.

1. Если существуют конечные $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$, то

$$a) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

$$б) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$в) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0 \right).$$

2. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = 0$ (A – конечно), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty,$$

если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \infty$ (A – конечно), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взять соответственно две последовательности: $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, при-

ходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения. Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0 .

Пример 1.1. При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x \rightarrow \infty$ или n при $n \rightarrow \infty$ для последовательностей (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$) оба члена соотношения полезно предвари-

тельно разделить на x^m или, соответственно, n^m где m – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{5x^4 + 3x + 2} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left(5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^4}} = \frac{3 + 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}, \quad \text{старшая степень } m = 4, \\ &\quad \text{делится на } x^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{9n^4 - 2n^3 + 2} + 4\sqrt[3]{8n^3 + 21}}{\sqrt[4]{n^4 - 3} + 2\sqrt{4n^4 + 9n}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt{n^4 \left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} \right)} + 4 \cdot \sqrt[3]{n^3 \left(8 + \frac{21}{n^3} \right)}}{\sqrt[4]{n^4 \left(1 - \frac{3}{n^4} \right)} + 2 \cdot \sqrt{n^4 \left(4 + \frac{9}{n^3} \right)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 \cdot \sqrt{\left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} \right)} + 4n \cdot \sqrt[3]{\left(8 + \frac{21}{n^3} \right)}}{n \cdot \sqrt[4]{\left(1 - \frac{3}{n^4} \right)} + 2n^2 \cdot \sqrt{\left(4 + \frac{9}{n^3} \right)}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt{\left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4}\right)} + \frac{4}{n} \cdot \sqrt[3]{\left(8 + \frac{21}{n^3}\right)}}{\frac{1}{n} \cdot \sqrt[4]{\left(1 - \frac{3}{n^4}\right)} + 2 \cdot \sqrt{\left(4 + \frac{9}{n^3}\right)}} = \frac{3 \cdot \sqrt{9-0+0} + 0 \cdot \sqrt[3]{8+0}}{0 \cdot \sqrt[4]{1-0} + 2 \cdot \sqrt{4+0}} = \frac{9}{4}$$

(неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, старшая степень $m = 2$, делится на n^2).

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+1) \left[\sqrt{x^2+4x+5} - \sqrt{x^2+4x+7} \right] &= [\infty \cdot (\infty - \infty)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1) \left[\sqrt{x^2+4x+5} - \sqrt{x^2+4x-7} \right] \cdot \left[\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7} \right]}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)(x^2+4x+5-x^2-4x+7)}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1) \cdot 12}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x-7}} \left(\frac{:x}{:x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 \left(3 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2}}} = \frac{12 \cdot 3}{1+1} = 18. \end{aligned}$$

Пример 1.2. Если $P(x)$ и $Q(x)$ – целые многочлены x , $P(a) \neq 0$ или $Q(a) \neq 0$, то предел рациональной дроби P/Q при $x \rightarrow a$ находится непосредственно. Если же $P(a) = Q(a) = 0$ (неопределенность $\frac{0}{0}$), то дробь P/Q рекомендуется сократить один или несколько раз на $(x-a)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3} = \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 1.3. Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность $\frac{0}{0}$).

$$\begin{aligned}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt[3]{5-x}} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{5+x})(3 + \sqrt{5+x})}{(1 - \sqrt[3]{5-x})(3 + \sqrt{5+x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{9 - 5 - x}{(1 - \sqrt[3]{5-x})(3 + \sqrt{5+x})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{1 - \sqrt[3]{5-x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{3 + \sqrt{5+x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{1 - \sqrt[3]{5-x}} \cdot \frac{1}{6} = \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2})}{(1 - \sqrt[3]{5-x})(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2})} = \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2})}{1 - 5 + x} = \\
 &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2})}{x - 4} = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} (1 + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{(5-x)^2}) = \\
 &= -\frac{1}{6}(1 + 1 + 1) = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - 7x - 8} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(x^2 - 7x - 8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{(x - 8)(x + 1)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(x + 1)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \\
 &= \frac{1}{9 \cdot 12} = \frac{1}{108}.
 \end{aligned}$$

Пример 1.4. При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

следствием которого являются пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} [\operatorname{ctg}^2 3x - \operatorname{ctg}^2 5x] \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 4x \cdot \arcsin^2 x}{x^2} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} - \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x} \right] \cdot \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \right)^2 \cdot 16x^2 \cdot \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2 \cdot x^2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 16x^2 \cdot \left[\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} - \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos^2 3x \cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \cdot 9x^2} - \frac{\cos^2 5x \cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)^2 \cdot 25x^2} \right] \cdot 1^2 \cdot 1^2 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{16}{9} \cos^2 3x - \frac{16}{25} \cos^2 5x \right] = \frac{16}{9} \cdot 1 - \frac{16}{25} \cdot 1 = \frac{256}{225}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x \cdot \sqrt{1 - \cos 4x}}{x^2 \cdot \arcsin 3x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4x^2 \cdot \sqrt{2 \sin^2 2x}}{x^2 \cdot \left(\frac{\arcsin 3x}{3x} \right) \cdot 3x} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \right)^2}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{3x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{2} \sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{2} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) \cdot 2x}{3x} = \frac{8\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Пример 1.5. При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда $x \rightarrow a$ и $a \neq 0$, рекомендуется предварительно провести замену $x - a = y$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos \frac{\pi \cdot x}{6}}{x - 3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = (x - 3 = y, y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 3) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi \cdot (y + 3)}{6}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \cdot \cos \left(\frac{\pi \cdot y}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot y}{6}}{\frac{\pi \cdot y}{6}} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\pi}{6} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi \cdot y}{6}}{\frac{\pi \cdot y}{6}} = -\frac{\pi}{6} \cdot 1 = -\frac{\pi}{6}.$$

Пример 1.6. При вычислении пределов вида $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} = c$ необходимо иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$,

то $c = A^B$ ($A > 0$);

2) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \pm\infty$, то вопрос о нахождении предела c решается непосредственно;

3) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$, то следует воспользоваться

«вторым замечательным пределом»: $\lim_{x \rightarrow a} (1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e$, где

$g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ и $e = 2,718\dots$.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2}{x-1}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2} \right)^{+\infty}} = 0, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^{x+3} = 4^3 = 64, \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \right) \cdot 4 = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+3) = 3.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{2x} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{\frac{3x-6}{7} \cdot \frac{7}{3x-6} \cdot 2x} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{\frac{3x-6}{7}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x}{3x-6}} = e^{14/3}.$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 3} (7-2x)^{\frac{3}{x-3}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 3} [1 + (6-2x)]^{\frac{3}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \left[1 + (6 - 2x) \right]^{\frac{1}{6-2x}} \right\}^{\frac{(6-2x) \cdot 3}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{18-6x}{x-3}} = e^{-6}.$$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 2.1. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в окрестности точки $x = a$ (при $x \rightarrow a$).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ есть также бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Определение 2.2. Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow a$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, где c – некоторое число, отличное от нуля, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x \rightarrow a$, если $c = 0$, то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $g(x)$ при $x \rightarrow a$.

Бесконечно малая $f(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с $g(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g^n(x)} = c, \quad 0 < |c| < +\infty.$$

Пример 2.1. При $x \rightarrow 0$ определить порядок малости функции $\operatorname{tg} x - \sin x$ относительно x .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^n \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^n \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{x^n \cos x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x} = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot 1 = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^n \cdot 2^n} = \frac{4}{2^n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^n}. \end{aligned}$$

Этот предел будет равен константе $c \neq 0$ при $n = 3$, следовательно, функция $\operatorname{tg} x - \sin x$ имеет порядок малости $n = 3$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

Пример 2.2. Определить порядок малости относительно x при $x \rightarrow 0$ суммы $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$.

Слагаемое $\sqrt[3]{x^2}$ имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x , а слагаемое $\sqrt{x^3}$ – порядок $\frac{3}{2}$, следовательно, сумма имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

Определение 2.3. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \rightarrow a$: $f(x) \sim g(x)$.

Например, при $x \rightarrow 0$ будем иметь:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \quad (a \neq 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

Пример 2.3.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{4\operatorname{tg}^2 x} - 5^{3\arcsin^2 3x}}{3\sin^2 4x + 7\operatorname{arctg}^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^{4\operatorname{tg}^2 x} - 1) - (5^{3\arcsin^2 3x} - 1)}{3 \cdot (4x)^2 + 7 \cdot (x)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\operatorname{tg}^2 x \cdot \ln 3 - 3\arcsin^2 3x \cdot \ln 5}{55x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\ln 3 \cdot x^2 - 3\ln 5 \cdot (3x)^2}{55x^2} = \\ &= \frac{4\ln 3 - 27\ln 5}{55}. \end{aligned}$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4\arcsin 2x}{3\operatorname{tg} 8x} \right)^{\frac{\ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \cdot 2x}{3 \cdot 8x} \right)^{\frac{3x}{x}} = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3-5x) - \ln(3+7x)}{2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[3 \left(1 - \frac{5}{3}x \right) \right] - \ln \left[3 \left(1 + \frac{7}{3}x \right) \right]}{2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3 + \ln \left(1 - \frac{5}{3}x \right) - \ln 3 - \ln \left(1 + \frac{7}{3}x \right)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}x}{2x} = -2.
 \end{aligned}$$

Определение 2.4. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$.

Подобно тому, как это сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

Пример 2.4. Пусть $x \rightarrow \infty$. Определить порядок бесконечно большой

$$f(x) = \frac{x^5}{x+2} \text{ по сравнению с } x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^5}{x+2} : x^n \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^n(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^{n+1} + x^n \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^{n+1}} = 1$$

при $n = 4$.

Определение 2.5.

1) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x \rightarrow \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{c \cdot x^\alpha} = 1$, где c и α – константы, тогда функция $y = cx^\alpha$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

2) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x \rightarrow a$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{c \cdot (x-a)^\alpha} = 1$, где c и α – константы, тогда функция $y = c(x-a)^\alpha$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$.

Пример 2.5.

а) Найти асимптотику (асимптотическое представление) функции $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ при $x \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot x^{1/2}},\end{aligned}$$

следовательно, асимптотикой функции $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ при $x \rightarrow \infty$ является функция $\frac{1}{2}x^{-1/2}$; $c = \frac{1}{2}$; $\alpha = -\frac{1}{2}$.

б) Найти асимптотику функции $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x \rightarrow 1$.

При $x \rightarrow 1$ функции $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ является бесконечно большой: $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}(1-x)^{1/3}}.$

Асимптотикой в данном случае является функция $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(1-x)^{-1/3}$.

в) Найти асимптотику функции $f(x) = x^3 - 3x + 2$ при $x \rightarrow 1$.

В данном случае при $x \rightarrow 1$ функция $f(x)$ является бесконечно малой; $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \sim 3(x-1)^2$.

Получаем асимптотику $y = 3(x-1)^2$; $c = 3$; $\alpha = 2$.

3. Непрерывность функции.

Определение 3.1. Если $x < a$ и $x \rightarrow a$, то условно пишут $x \rightarrow a-0$, аналогично, если $x > a$ и $x \rightarrow a$, то $x \rightarrow a+0$. Числа

$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ называют соответственно

пределом слева функции $f(x)$ в точке a и пределом справа функции $f(x)$ в точке a (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство: $f(a-0) = f(a+0)$.

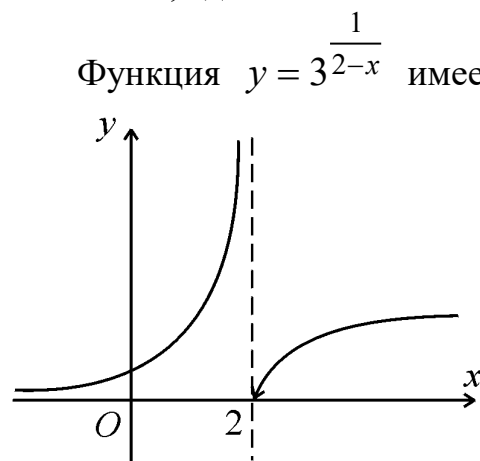
Определение 3.2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a , если

- 1) она определена в этой точке;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются точками разрыва.

Пример 3.1.

а) Найти точки разрыва функции $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$, пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.



Функция $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ имеет разрыв в точке $x = 2$, т.к. она в этой точке не определена. При этом:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

б) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y = \frac{2^{\frac{1}{x+3}} + 4x - 8}{2^{\frac{1}{x+3}} + 4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка $x = -3$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1/(x+3)} + 4} = \frac{2^{-\infty} - 12 - 8}{2^{-\infty} + 4} = \frac{0 - 20}{0 + 4} = -5;$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1/(x+3)} + 4} = 1, \text{ т.к. при } x \rightarrow -3+0 \text{ имеем:}$$

$$2^{1/(x+3)} + 4x - 8 \sim 2^{1/(x+3)}; \quad 2^{1/(x+3)} + 4 \sim 2^{1/(x+3)}.$$

$$\text{Величина скачка } \Delta = 1 - (-5) = 6.$$

в) Найти точки разрыва, величину скачка Δ и построить график функции

$$y = \begin{cases} -3x, & x \leq 0 \\ 4 \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \frac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

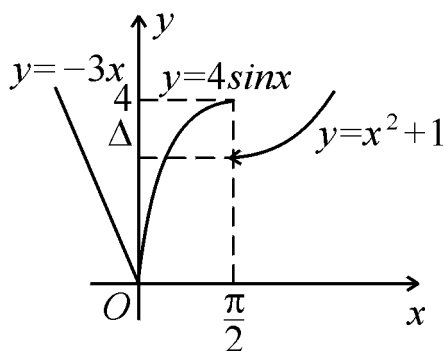
Данная функция непрерывна для $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$.

Исследуем только точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$, т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-3x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (4 \sin x) = 0;$$

$f(0) = -3x|_{x=0} = 0$, следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (4 \sin x) = 4; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4;$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} (x^2 + 1) = \frac{\pi^2}{4} + 1 = 3,467,$$

следовательно, точка $x = \frac{\pi}{2}$ — точка разрыва. Величина скачка

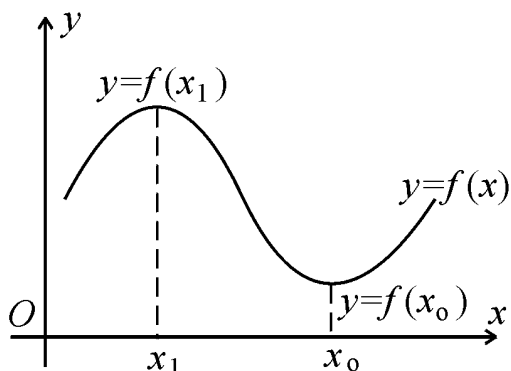
$$\Delta = 4 - \left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right) = 3 - \frac{\pi^2}{4} \approx 0,533.$$

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек x_1, x_2 , принадлежащих данному интервалу (отрезку), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при $a < x < b$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками x (где $f'(x) = 0$ или же $f'(x)$ не существует).



Если существует такая двусторонняя окрестность точки x_0 , что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой минимума функции $y = f(x)$, а число $f(x_0)$ – минимумом

функции $y = f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_1$ некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то x_1 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, а $f(x_1)$ – максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции – экстремумом функции. Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ или же $f'(x_0)$ не существует (*необходимое условие существования экстремума*). Обратное утверждение не верно: точки, в которых $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$.

Достаточный признак существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ следующий: если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ критической точки x_0 , что $f'(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$; если же $f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 – точка минимума функции $f(x)$. Если, наконец, найдется такое положительное число δ , что $f'(x)$ сохраняет неизменный знак при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, то точка x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

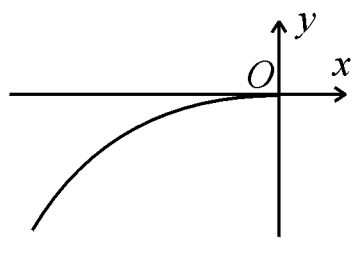
Наименьшее (наибольшее) значение непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a; b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a; b]$.

Пример 1.1. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = x \cdot \sqrt{-5x}.$$

Область существования: $-5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Находим критические точки:



$$y' = \sqrt{-5x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{-5x}} \cdot (-5) = \sqrt{-5x} - \frac{5x}{2\sqrt{-5x}} =$$

$$= \frac{-10x - 5x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{-15x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3 \cdot (-5x)}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{-5x} \geq 0.$$

При $x \leq 0$ функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке $x = 0$: $y(0) = 0$.

Пример 1.2. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = \sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}.$$

Область существования: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Находим критические точки:

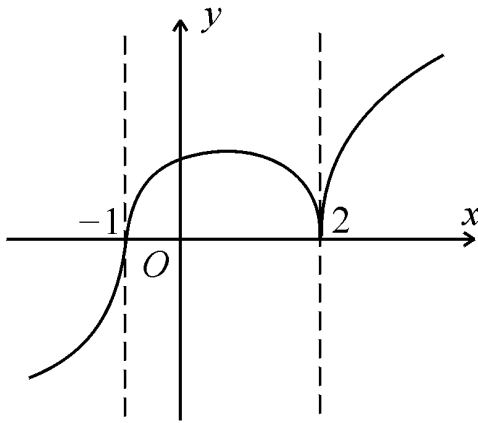
$$y' = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)(x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}},$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0,$$

y' не существует $\Rightarrow x_2 = -1; x_3 = 2$. Получили три критические точки.

| | | | | | | | |
|------|-----------------|---------|------------|-----|------------|---------|----------------|
| x | $(-\infty; -1)$ | -1 | $(-1; 0)$ | 0 | $(0; 2)$ | 2 | $(2; +\infty)$ |
| y' | $+$ | не сущ. | $+$ | 0 | $-$ | не сущ. | $+$ |
| y | \nearrow | | \nearrow | max | \searrow | min | \nearrow |

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = -\infty.$$



$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} y'(x) = +\infty.$$

Так как $y'(x) = k$, где k – угловой коэффициент касательной, то при $x = -1$ и $x = 2$ касательная к графику функции перпендикулярна оси Ox .

$$y(-1) = 0; \quad y(0) = \sqrt[3]{4}; \quad y(2) = 0.$$

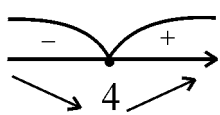
Пример 1.3. Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом 256 м^3 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть a – сторона квадрата основания, h – глубина бассейна;

$$a^2 h = 256 \Rightarrow a^2 = \frac{256}{h}, \quad a = \frac{16}{\sqrt{h}}, \quad h > 0;$$

$$S = S_{\text{бок}} + S_{\text{дна}} = 4ah + a^2 = 4 \cdot \frac{16}{\sqrt{h}} \cdot h + \frac{256}{h} = 64\sqrt{h} + \frac{256}{\sqrt{h}} = F(h);$$

$$F'(h) = \frac{64}{2\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32}{\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32h^{3/2} - 256}{h^2} = \frac{32}{h^2}(h^{3/2} - 8);$$



$F'(h) = 0 \Rightarrow h^{3/2} = 8; \quad h = 4.$ При $h = 4$ величина $F(h) = S$ будет наименьшей.

Пример 1.4. Две прямые железные дороги AA_1 и BB_1 перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте C , причем $AC = 800 \text{ км}$ и $BC = 700 \text{ км}$. Из пунктов A и B по направлению к C одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно 80 км/ч и 60 км/ч . Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим?

Отметим положение поездов в момент $t > 0$ точками K и M .

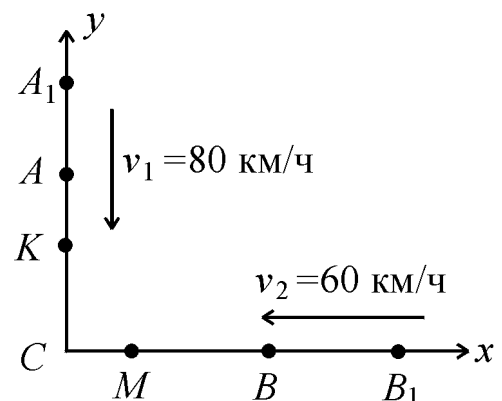
$$AK = 80t; \quad BM = 60t;$$

$$CK = AC - AK = 800 - 80t;$$

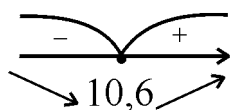
$$CM = CB - BM = 700 - 60t;$$

$$(KM)^2 = (CK)^2 + (CM)^2 = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2; \quad KM \text{ минимально, если минимальна величина}$$

$$(KM)^2 = F(t) = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2;$$



$$F(t) = 2(800 - 80t) \cdot (-80) + 2(700 - 60t) \cdot (-60) = \\ = -128000 + 12800t - 84000t + 7200t = 20000t - 212000 = 0; \quad t = 10,6;$$



$t = 10,6$ – точка минимума функции $F(t)$. Через 10,6 часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.

2. АСИМПТОТЫ

Если точка $(x; y)$ непрерывно перемещается по кривой $y = f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Если существует число a такое, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1x] = b_1$, то прямая $y = k_1x + b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2x] = b_2$, то прямая $y = k_2x + b_2$ будет асимптотой (*левая наклонная асимптота*).

График функции $y = f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

Пример 2.1. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = 2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1}.$$

Область существования: $x \neq 1$.

Ищем вертикальные асимптоты.

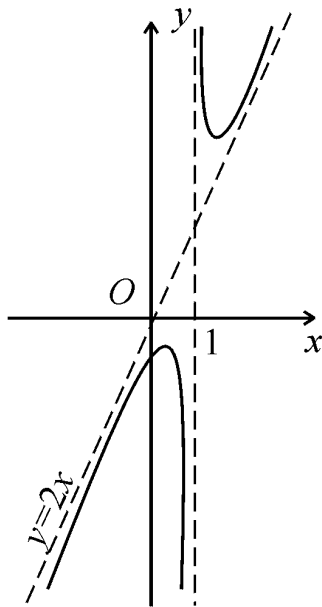
Функция имеет разрыв в точке $x = 1$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{-0} = 2 - \infty = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \left(2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{+0} = 2 + \infty = +\infty;$$

следовательно, $x = 1$ – вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$.



$$\begin{aligned}
 k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \left(2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} \right) = \\
 &= 2 + 0 = 2; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2x + \frac{3\cos(x-1)}{x-1} - 2x \right] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3\cos(x-1)}{x-1} = 0.
 \end{aligned}$$

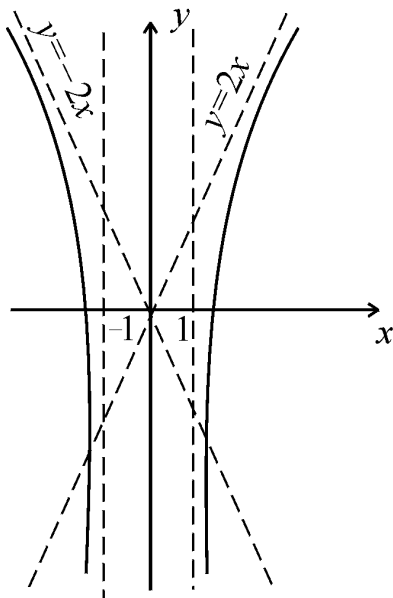
Следовательно, при $x \rightarrow \pm\infty$ существует асимптота $y = 2x$.

Пример 2.2. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Область существования: $x^2 - 1 > 0$; $x^2 > 1$; $x > 1$ и $x < -1$.

$$y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad y(-x) = \frac{2(-x)^2 - 9}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow y(x) = y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при $x > 1$, а затем отразить его симметрично относительно оси Oy .



$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2 - 9}{+0} = -\infty \Rightarrow x = 1 -$$

вертикальная асимптота при $x \rightarrow 1+0$.

Пусть $x \rightarrow 1+\infty$.

$$\begin{aligned}
 k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9}{x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{9}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 2.
 \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2x \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9 - 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 - 9)^2 - 4x^2(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}(2x^2 - 9 + 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1})} =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-32x^2 + 81}{x^3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \left(2 - \frac{9}{x^2} + 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)} = 0.$$

При $x \rightarrow +\infty$ получаем асимптоту $y = 2x$. График данной функции пересекает ось Ox при $2x^2 - 9 = 0$, т.е. в точках $x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Пример 2.3. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}.$$

Область существования: $4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ и $x \neq -2$.

В точках $x_1 = -2$ и $x_2 = +2$ функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{-8 - 8 + 6 + 2}{-0} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{-8 - 8 + 6 + 2}{+0} = -\infty;$$

$x = -2$ — вертикальная асимптота.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{8 - 8 - 6 + 2}{+0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{8 - 8 - 6 + 2}{-0} = +\infty;$$

$x = 2$ — вертикальная асимптота.

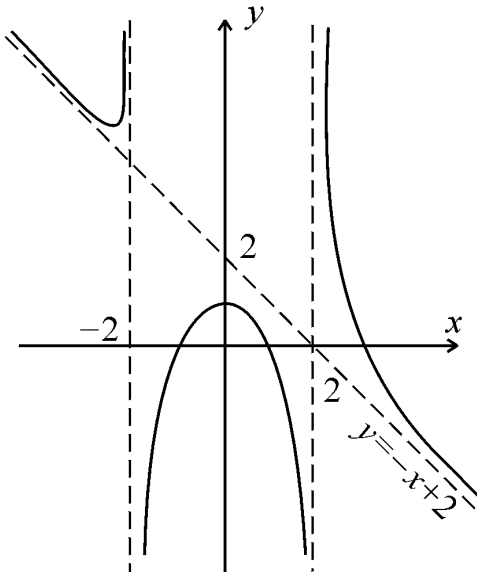
Наклонные асимптоты при $x \rightarrow \pm \infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{x(4 - x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - kx] =$$

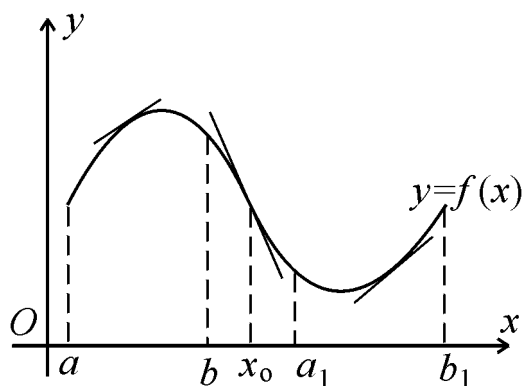
$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2 + x + 2}{4 - x^2} = 2.$$

При $x \rightarrow \pm \infty$ получаем асимптоту $y = -x + 2$.



3. НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ *вогнут вниз* на интервале $(a; b)$ (*вогнут вверх* на интервале $(a_1; b_1)$), если при $a < x < b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при



$a_1 < x < b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала $(a; b)$ (или интервала $(a_1; b_1)$). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y = f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$).

Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба*. Для абсциссы точки перегиба x_0 графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками 2-го рода*. Критическая точка 2-го рода x_0 является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_0 - \delta < x < x_0$ и $x_0 < x < x_0 + \delta$, где δ — некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

Пример. Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

Имеем: $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода:

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают всю область существования функции $(-\infty; +\infty)$ на три интервала.

| | | | | | |
|-------|---|-----------------------|--|----------------------|--|
| x | $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ |
| y'' | + | 0 | — | 0 | — |
| y | ∪ | перегиб | ∩ | перегиб | ∪ |

Получили: кривая вогнута вверх при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ и вогнута вниз при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Точки $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба.

Интегральное исчисление функции одной переменной

1. Неопределенный интеграл

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $F(x)$ – результат интегрирования, C – произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$.
2. $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$, где A – постоянная.
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица простейших интегралов:

$$1. \int dx = x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1).$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C. \quad 10. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C. \quad 11.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0).$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C. \quad 12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C, (A \neq 0).$$

Основные методы интегрирования:

1. Подведение под знак дифференциала:

а) к функции, стоящей под знаком дифференциала, можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) \pm A)$;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель:

$$df(x) = \frac{1}{A} d(A \cdot f(x));$$

в) под знак дифференциала подводится функция по правилу:

$$f'(x)dx = df(x).$$

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ где } u = u(x), v = v(x).$$

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

$$а) \int a^x \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = a^x dx.$$

$$б) \int \sin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \sin ax dx.$$

$$в) \int \cos ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \cos ax dx,$$

$$г) \int \ln ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \ln ax, \quad dv = P_n(x) dx,$$

$$д) \int \arcsin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \arcsin ax, \quad dv = P_n(x) dx,$$

$$е) \int \operatorname{arctg} ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \operatorname{arctg} ax, \quad dv = P_n(x) dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен n -ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \text{ где } x = \varphi(t).$$

Пример выполнения задания.

Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx; \quad \text{в) } \int (3x + 4)e^{3x} dx.$$

Решение.

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \left(-\frac{1}{2}\right) \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \\ &= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C \right)' &= \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3(\arcsin x)^2 \cdot (\arcsin x)' - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' + C' = \\ &= \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 17 & x^2 - 4x + 3 \\ \hline x^3 - 4x^2 + 3x & x + 4 \\ \hline 4x^2 - 3x - 17 & \\ \hline 4x^2 - 16x + 12 & \\ \hline 13x - 29 & \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx &= \int \left(x + 4 + \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} \right) dx = \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx. \end{aligned}$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x - 29}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)},$$

значит $13x - 29 = A(x - 3) + B(x - 1)$.

При $x = 3$ имеем $13 \cdot 3 - 29 = B(3 - 1)$, откуда $B = 5$;

при $x = 1$ имеем $13 \cdot 1 - 29 = A(1 - 3)$, откуда $A = 8$.

Получаем $\frac{13x - 29}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{8}{x - 1} + \frac{5}{x - 3}$ и интегрируем

$$\begin{aligned} \int \frac{13x - 29}{(x - 1)(x - 3)} dx &= \int \frac{8}{x - 1} dx + \int \frac{5}{x - 3} dx = 8 \int \frac{d(x - 1)}{x - 1} + 5 \int \frac{d(x - 3)}{x - 3} = \\ &= 8 \ln|x - 1| + 5 \ln|x - 3| + C \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + \ln|x-3| + C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{2} + 4x + 8\ln|x-1| + \ln|x-3| + C \right)' &= \frac{2x}{2} + 4 + \frac{8}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \\ &= \frac{(x+4)(x-1)(x-3) + 8(x-3) + (x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3}, \end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Замечание.

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C; \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(-k+1)} (x-a)^{-k+1} + C,$$

($k=2,3,\dots$).

в) применим методом интегрирования по частям.

Примем $u = 3x + 4$, $dv = e^{3x} dx$, тогда $du = 3dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле

интегрирования по частям получаем

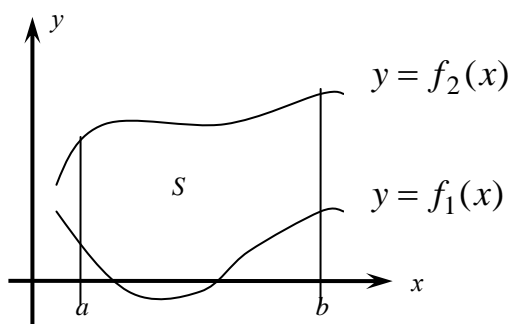
$$\begin{aligned} \int (3x+4)e^{3x} dx &= (3x+4)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 3dx = \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \int e^{3x} dx = \\ &= \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3}e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C. \end{aligned}$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1) + C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}(3(x+1) + 1) = e^{3x}(3x+4),$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

2. Определенный интеграл



Если на плоскости Oxy задана фигура, ограниченная двумя непрерывными линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь S такой фи-

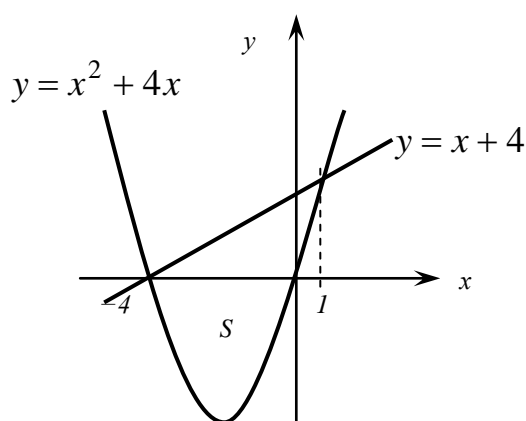
гуры может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx, \text{ где } f_2(x) \geq f_1(x) \text{ на отрезке } [a, b].$$

Пример 2.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение.

Заданные линии ограничивают на плоскости Oxy криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{-4}^1 (x + 4 - x^2 - 4x) dx = \int_{-4}^1 (4 - 3x - x^2) dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^1 =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.)}.$$

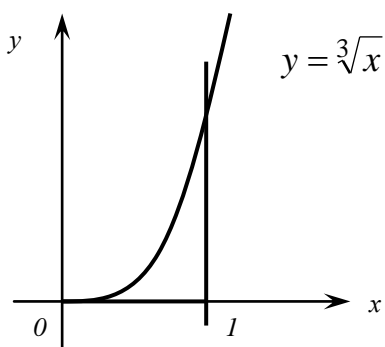
Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$,

1) вокруг оси Ox , вычисляются по формуле $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$;

2) вокруг оси Oy , вычисляются по формуле $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$.

Пример.2.2 Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей Ox и Oy криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y = \sqrt[3]{x}$, осью Ox и прямой $x = 1$.

Решение.



1) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox , равен

$$V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \text{ (куб. ед.)}$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy , равен

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x} dx = 2\pi \frac{x^{7/3}}{\frac{7}{3}} \Big|_0^1 = \frac{6\pi}{7} \text{ (куб. ед.)}.$$

Теория вероятностей

При классическом определении *вероятность события* определяется равенством

$$P(A) = m/n,$$

где m – число элементарных исходов испытаний, благоприятствующих появлению события A , n – общее число элементарных исходов испытания.

Числом сочетаний из l элементов по k называют количество комбинаций, составленных из l элементов по k , которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}.$$

Пример. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Решение:

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь три детали из пятнадцати, то есть $n = C_{15}^3$;

б) число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, равно числу способов, которыми можно выбрать три окрашенных детали из 10, то есть $m = C_{10}^3$;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{\frac{10!}{3! \cdot 7!}}{\frac{15!}{3! \cdot 12!}} = \frac{10! \cdot 12!}{7! \cdot 15!} = \frac{\cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{7!} \cdot \cancel{12!} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{24}{91} \approx 0,26.$$

Пример. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны 5 деталей. Определить вероятность того, что среди отобранных деталей ровно три стандартных.

Решение:

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь пять деталей из десяти, то есть

$$n = C_{10}^5;$$

б) найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных пяти деталей ровно три стандартные): три стандартные детали можно выбрать из 7 стандартных деталей C_7^3 способами; при этом остальные $(5-3=2)$ детали должны быть нестандартными, которые можно выбрать из $(10-7=3)$ нестандартных деталей, имевшихся в партии, C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов

$$m = C_7^3 \cdot C_3^2;$$

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!}}{\frac{10!}{5! \cdot 5!}} = \frac{7! \cdot 5! \cdot 5!}{2! \cdot 4! \cdot 10!} = \frac{\cancel{7!} \cdot \cancel{4!} \cdot 5 \cdot 5!}{2 \cdot \cancel{4!} \cdot \cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{5!}{4 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Вероятность события A , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A),$$

где $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$.

Приведенную формулу называют *формулой полной вероятности*.

Пример. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь. Найти вероятность того, что она окажется бракованной.

Решение:

а) обозначим через A событие – взятая деталь является бракованной. Можно сделать три предположения (гипотезы): H_1 – деталь выбрана из первой партии; H_2 – деталь выбрана из второй партии; H_3 – деталь выбрана из третьей партии. Поскольку число деталей во всех трех партиях равно, вероятности гипотез равны

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

б) условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из первой партии, $P_{H_1}(A) = 0$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из второй партии, $P_{H_2}(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из третьей партии, $P_{H_3}(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

в) искомая вероятность того, что выбранная наудачу деталь является бракованной, находится по формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Вероятность того, что в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит

ровно k раз (безразлично в какой последовательности), определяется по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$ – вероятность того, что событие в каждом из испытаний не появится.

Пример. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех.

Решение:

а) пусть событие A – из 4 семян взойдут не менее трех семян; событие B – из 4 семян взойдут 3 семени; событие C – из 4 семян взойдут 4 семени. По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

б) вероятности событий B и C определим по формуле Бернулли:

$$P(B) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0,9^3 \cdot (1 - 0,9) = 0,2916,$$

$$P(C) = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0,9^4 = 0,6561.$$

в) искомая вероятность $P(A) = 0,2916 + 0,6561 = 0,9477$.

Если число повторяющихся испытаний велико, то определение вероятности по формуле Бернулли затруднено из-за громоздкости вычислений. В этом случае применяют приближенную формулу, выражающую *локальную теорему Лапласа*:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ определяются из таблицы, приведенной в приложении 1.

При малых значениях вероятности p для вычисления $P_n(k)$ применяют асимптотическую формулу Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } e = 2,7182...; \lambda = np.$$

Эта формула используется при $\lambda \leq 10$, причем чем меньше p и больше n , тем результат точнее.

Пример. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдут 350 семян.

Решение.

а) из условия задачи $p = 0,9; q = 1 - 0,9 = 0,1; n = 400; k = 350$. Тогда

$$x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -\frac{10}{6} \approx -1,67;$$

б) из таблицы в приложении 1 находим $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67) = 0,0989$;

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \cdot 0,0989 \approx 0,0165.$$

Пример. Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

Решение.

Из условия задачи $p = 0,0002; n = 10000; k = 6$. Тогда $\lambda = 10000 \cdot 0,0002 = 2$.

Искомая вероятность равна

$$P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} \approx \frac{64}{720} \cdot 0,1353 \approx 0,012.$$

Если вероятность наступления события A в каждом из n испытаний постоянна и равна p , то вероятность $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ того, что событие A в таких испытаниях наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, определяется по интегральной теореме Лапласа формулой:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где $\alpha = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $\beta = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

Функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется функцией Лапласа. В приложении 2 даны значения этой функции для $0 \leq x \leq 5$. При $x > 5$ функция $\Phi(x) = 0,5$. При отрицательных значениях x в силу нечетности функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Используя функцию Лапласа, имеем

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Пример. Процент всхожести семян пшеницы равен 90%. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

Решение.

а) из условия задачи $p = 0,9$; $q = 1 - 0,9 = 0,1$; $n = 500$; $k_1 = 400$; $k_2 = 440$.

Тогда $\alpha = \frac{400 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -7,45$; $\beta = \frac{440 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,49$.

б) из таблицы в приложении 2 находим

$$\Phi(-1,49) = -\Phi(1,49) \approx -0,4319; \quad \Phi(-7,45) = -\Phi(7,45) \approx -0,5.$$

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(400 \leq k \leq 440) \approx \Phi(-1,49) - \Phi(-7,45) = -0,4312 + 0,5 = 0,0681.$$

Литература

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/91080> — Загл. с экрана.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2017. — 224 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/92615> — Загл. с экрана.
3. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 240 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/4549> — Загл. с экрана.
4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов. Т.1 / Н.С.Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2010. — 416 с.
5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов : в 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2009. — 544 с.
6. Лакерник А.Р. Высшая математика. Краткий курс [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Лакерник А.Р.— Электрон. текстовые данные.— М.: Логос, 2008.— 528 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/9112.html>.— ЭБС «IPRbooks»
7. [Гмурман, В. Е.](#) Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2011. — 480 с. : ил. — (Основы наук). — Предм. указ.: с. 474-479. — ISBN 978-5-9916-1163-3 (Изд-во Юрайт). — ISBN 978-5-9692-1122-3 (ИД Юрайт).
8. Инченко О.В. Математика для заочников: учебное пособие./ О.В. Инченко, В.А. Кузнецова; Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 167с. ISBN 978-5-7679-4249-3.

Дополнительная литература

1. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. — Режим доступа : <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214370663049600009433>, по паролю
2. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. — Режим доступа по паролю : <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214412943155100008498>, по паролю

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. Дифференциальные уравнения [электронный ресурс] : ежемесячный математический журнал: журнал/ РАН. - М.: Наука/Интерпериодика, 2014 - . - ISSN 0374-0641.- Режим доступа : <http://elibrary.ru/issues.asp?id=9677>, со всех компьютеров НБ ТулГУ, по паролю

2. Успехи математических наук/ Российская академия наук. - М.: Наука, 1995-ISSN 0042-1316
3. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/>, по паролю.- Загл. с экрана
4. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.-Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/>, по паролю.- .- Загл. с экрана
5. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: <http://elibrary.ru/> , по паролю.- Загл. с экрана.
6. НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа, режим доступа <http://cyberleninka.ru/> ,свободный.- Загл. с экрана.
7. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://window.edu.ru.> ,свободный.- Загл. с экрана.
8. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://exponenta.ru.> ,свободный.- Загл. с экрана.