

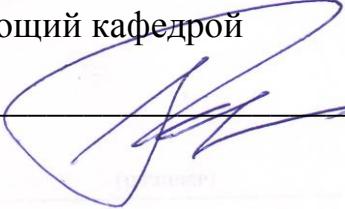
МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2021 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

 В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Теория пластичности»**

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
01.03.03 Механика и математическое моделирование

с направленностью (профилем)
Механика деформируемого твердого тела

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010303-01-21

Тула 2021

Разработчик методических указаний

Разработчик:

Лавит И.М., проф., д.ф.-м.н., доц.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

Методические указания содержат задачи по различным разделам дисциплины «Теория пластичности». Названия и номера пунктов соответствуют рабочей программе по дисциплине «Теория пластичности».

1.1. Необратимые деформации. Пластичность и ползучесть

Модуль Юнга материала стержня равен E , предел текучести равен σ_y . Стержень растягивается до напряжения $\sigma > \sigma_y$. В первом случае нагружения стержень немедленно разгружается. Максимальная деформация стержня под нагрузкой равна ε_1 . Во втором случае стержень некоторое время выдерживается под нагрузкой и только потом разгружается. Максимальная деформация стержня под нагрузкой равна ε_2 . Какое из этих двух значений больше и почему? Для обоих случаев найдите остаточные деформации, пластические деформации и деформации ползучести.

1.2. Диаграмма одноосного нагружения тела. Активное нагружение и разгрузка

В данном состоянии для упругопластической среды выполнен критерий текучести $f(p_{ij}, \chi) = 0$ и напряжения изменяются со скоростью \dot{p}_{ij} . Показать, что

при $\frac{\partial f}{\partial p_{ij}} \dot{p}_{ij} < 0$ пластические деформации не изменяются, т. е. $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$, и имеет место неравенство

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial p_{ij}} \dot{p}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi} < 0;$$

такой процесс называется *разгрузкой*;

1.3. Предел текучести. Упрочнение

В экспериментах со стальным образцом обнаружено, что предел текучести при чистом сдвиге равен 23 кН/см². Найти предел текучести при чистом растяжении, считая, что сталь подчиняется критерию текучести Мизеса

2.1. Упругие и неупругие деформации и скорости деформаций

Для упругопластической среды с критерием текучести Мизеса, дифференцируя по времени равенство

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

и используя закон Гука и ассоциированный закон, получить *уравнения Прандтля-Рейсса*

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{p}_{ij}^{(d)} + \lambda p_{ij}^{(d)}, \quad \varepsilon_{kk} = \frac{1}{3K} p_{kk}.$$

2.2. Поверхность нагружения

В упругопластической среде с упрочнением происходит пластическое течение: $\dot{\varepsilon}_{ij}^p \neq 0$. Выразить множитель λ в ассоциированном законе через скорость изменения напряжений \dot{p}_{ij} .

Обратите внимание, что для идеальнопластической среды этого сделать нельзя. Почему?

2.3. Уравнение энергетического баланса и неравенство Клаузиуса-Дюгема для упругопластического тела

Вывести неравенство Планка для упругопластического тела из неравенства Клаузиуса-Дюгема. Что можно сказать о работе напряжений при пластическом деформировании?

2.4. Закон состояния. Термодинамические ограничения закона состояния

В теории пластического потенциала вектор приращения пластической деформации перпендикулярен поверхности нагрузления (текучести) в любой регулярной точке; доказать, что если удовлетворяется критерий Мизеса, то выполняются уравнения $d\varepsilon_1^P/s_1 = d\varepsilon_{II}^P/s_{II} = d\varepsilon_{III}^P/s_{III}$.

2.5. Постулат Друкера. Выпуклость поверхности нагрузления. Обоснование ассоциированного закона течения

Диаграмма одноосного растяжения стержня, построенная в координатах $\varepsilon = \Delta l/l_0$, $\sigma = P/F_0$, где нулем обозначены начальные значения длины и площади поперечного сечения стержня, имеет участок, предшествующий разрыву, где $d\varepsilon > 0$, а $d\sigma < 0$. Как этот экспериментальный факт согласуется с постулатом Друкера?

3.1. Инварианты тензора напряжений. Аргументы функции нагружения

Показать, что

значения функций, определяющих критерии текучести Мизеса и Треска,

можно выразить через второй и третий инварианты девиатора тензора напряжений

$$J_2^{(d)} = p_{ij}^{(d)} p_{ji}^{(d)}, \quad J_3^{(d)} = p_{ij}^{(d)} p_{jk}^{(d)} p_{ki}^{(d)}$$

3.2. Условие текучести Мизеса. Условие текучести Треска

Показать, что критерий текучести Треска имеет следующий физический смысл: величина касательной составляющей усилия по некоторой площадке достигает значения τ_s .

4.1. Эффект Баушингера. Изотропное и трансляционное упрочнение

Рассмотреть знакопеременное одноосное нагружение стержня, если задан линейный закон изотропного упрочнения и если задан линейный закон трансляционного упрочнения. Как эти законы упрочнения согласуются с эффектом Баушингера?

4.2. Идеальная пластичность. Теорема о разгрузке

Консольно защемленный стержень нагружается изгибающим моментом, приложенным к свободному торцу, затем разгружается. Считая материал стержня идеально пластическим, найти остаточные деформации и напряжения. Можно ли утверждать, что в данном случае пластические и остаточные деформации – это одно и то же?

4.3. Простое (однопараметрическое) и сложное (комбинированное) нагружение

Материал трубчатого образца описывается соотношениями модели пластического течения с критерием текучести Мизеса и изотропным упрочнением. Нагружение начинается с недеформированного состояния и проводится так, что отлична от нуля только одна компонента $p_{z\varphi} \equiv \sigma$ тензора напряжений в цилиндрической системе координат

Показать, что среди компонент тензора деформаций только одна — $\varepsilon_{z\varphi} \equiv \varepsilon$ — отлична от нуля.

4.4. Деформационная теория пластичности. Теорема о простом нагружении

Простым нагружением называется процесс, при котором все компоненты девиатора тензора напряжений изменяются пропорционально монотонно возрастающему параметру τ :

$$p_{ij}^{(d)} = \tau s_{ij}^o, \quad s_{ij}^o = \text{const.}$$

Показать, что для упругопластического материала с критерием текучести Мизеса и изотропным упрочнением при любом простом нагружении, начинающемся с недеформированного состояния,

„направляющие тензоры“ девиаторов тензора деформаций и тензора напряжений совпадают, т. е.

$$\frac{\varepsilon_{ij}^{(d)}}{\varepsilon_I} = \frac{p_{ij}^{(d)}}{p_I}, \quad \text{где } p_I = \sqrt{p_{ij}^{(d)} p_{ji}^{(d)}}, \quad \varepsilon_I = \sqrt{\varepsilon_{ij}^{(d)} \varepsilon_{ji}^{(d)}}.$$

5.1. Упругопластическое деформирование. Уравнения равновесия, граничные условия, связь между напряжениями и деформациями

Упругопластическая среда, подчиняющаяся критерию текучести Мизеса, движется в условиях плоской деформации в декартовой плоскости (x_1, x_2). Считая начальное состояние не-напряженным, показать, что

если среда несжимаема, то выполнено

$$p_{33} = \frac{p_{11} + p_{22}}{2}$$

и критерий текучести Мизеса принимает вид

$$(p_{11} - p_{22})^2 + 4p_{12}^2 = 4k^2, \quad k = \sigma_s/\sqrt{3}.$$

5.2. Малоцикловая усталость. Поверхностное упрочнение деталей

Консольно защемленный стержень изгибаётся силой, приложенной на свободном конце. Материал стержня – упругопластический с линейным упрочнением.

- Стержень разгрузили и нагрузили в противоположном направлении. Найдите предельную нагрузку.
- Стержень многократно нагружается знакопеременной нагрузкой. Найдите зависимости деформации от нагрузки для разных точек стержня.
- Для задач а) и б) исследуйте влияние упрочнения на выявленные эффекты.

5.3. Жестко-пластическое тело. Основные уравнения

Показать, что определяющие соотношения жестко-идеальноупругой среды с критерием текучести Мизеса (ассоциированный закон) эквивалентны соотношениям

$$p_{ij}^{(d)} = \begin{cases} \sqrt{2k} \frac{e_{ij}}{\sqrt{e_{kl} e^{kl}}}, & \lambda \geq 0, \\ & \text{если } e_{ij} \neq 0 \\ \text{любые, удовлетворяющие} & \text{если } e_{ij} = 0. \\ \text{условию } p_{ij}^{(d)} p_{ji}^{(d)} \leq 2k^2, & \end{cases}$$

Здесь e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций. На основе этой модели сконструировать определяющие соотношения несжимаемой жестковязкопластической среды, которые сохраняли бы ту же область жесткого поведения

5.4. Приложение теории к вычислению предельных нагрузок и математическому моделированию технологических процессов обработки металлов давлением

Бесконечно длинная труба, имеющая внутренний радиус a и внешний радиус b , нагружается изнутри давлением p , монотонно возрастающим от нуля. Материал трубы считать упругоидеальноупругим, подчиняющимся критерию текучести Мизеса и несжимаемым — в законе Гука $K = \infty$.

Показать, что в некотором диапазоне давлений $p_0 \leq p \leq p_*$ это уравнение имеет единственное решение для радиуса в промежутке от внутреннего до внешнего радиуса трубы, а при других значениях давления не имеет решений. Найти величины p_0 , p_* .

6.1. Постановка упругопластических задач

Рассмотрите задачу о деформировании защемленного стержня растягивающей силой и приложенным на свободном конце изгибающим моментом. Можно ли утверждать, что решение задачи полностью определяется максимальными значениями силы и момента?

6.2. Метод упругих решений. Различные модификации метода (метод начальных напряжений, метод переменной жесткости), области их применения

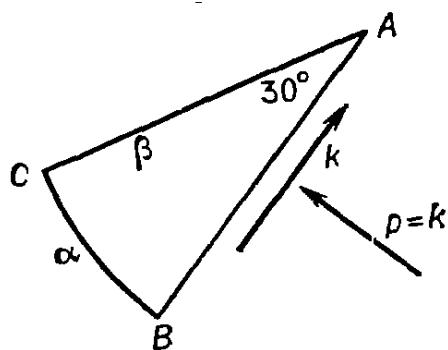
Бесконечно длинный круговой цилиндр (внутренний радиус — a , наружный — b) нагружается внутренним давлением p . Цилиндр находится в состоянии плоской деформации. Материал цилиндра идеально-пластический. Модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν , предел текучести σ_y . Определить зависимость радиального перемещения внутренней поверхности цилиндра от давления p во всем диапазоне его изменения.

7.1. Устойчивость сжатого стержня. Решения Энгессера-Кармана и Шенли

Решите задачу о внецентренном сжатии стержня с прямоугольным поперечным сечением. Материал стержня – упругопластический с линейным упрочнением. Используйте метод упругих решений. Попытайтесь определить критическую нагрузку. К чему она ближе: к решению Энгессера-Кармана или решению Шенли?

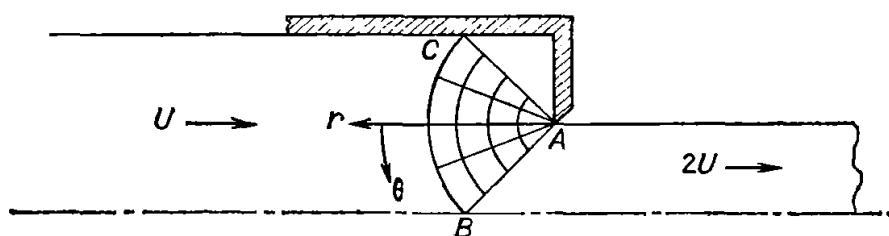
8.1. Основные уравнения плоской деформации жестко-пластического тела. Линии скольжения, их свойства

Линии скольжения образуют веерообразную область с углом раствора 30° ; α -линии — дуги окружностей, β -линии — радиусы на линии AB равно k . Найти давление на линии AC .



8.2. Линеаризация. Простые напряженные состояния

При штамповке с вытяжкой без трения через квадратную матрицу, приводящей к уменьшению сечения на пятьдесят процентов, линии скольжения заполняют веерообразную область, которая состоит из радиальных прямых — β -линий и дуг окружностей — α -линий (рис.). Найти компоненты скорости вдоль этих линий



8.3. Осесимметричное поле. Граничные условия для напряжений. Основные краевые задачи

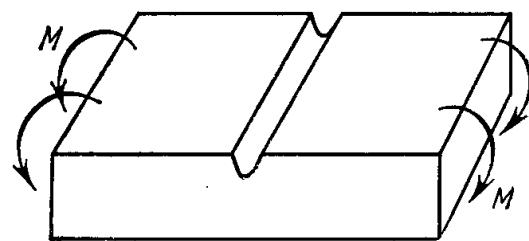
Бесконечно длинный круговой цилиндр (внутренний радиус — a , наружный — b) нагружается внутренним давлением p . Цилиндр находится в состоянии плоской деформации. Материал цилиндра жестко-пластический, упрочнением пренебрегаем. Предел текучести σ_y . Построить линии скольжения и найти предельное значение давления p .

8.4. Численный метод решения. Определение поля скоростей

Считая известным решение предыдущей задачи, определить, используя уравнения Гейрингера, поле скоростей. Что можно сказать о согласовании полей напряжений и скоростей?

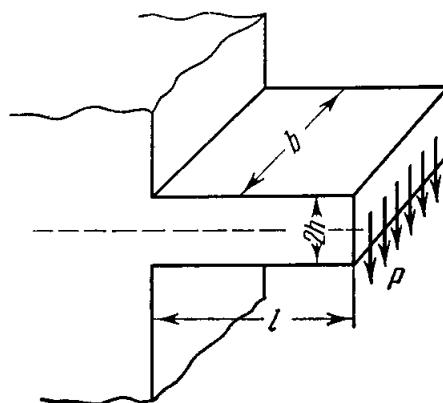
9.1. Изгиб полосы, ослабленной вырезом

Решить задачу об изгибе полосы (см. рис.). Найти предельное значение изгибающего момента.



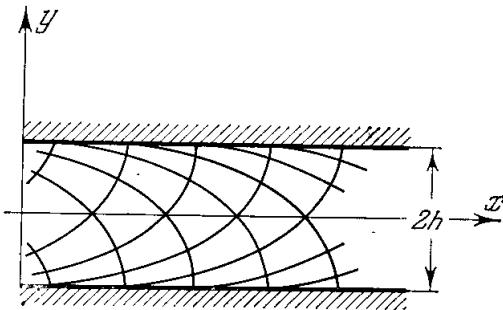
9.2. Изгиб короткой консоли силой. Вдавливание плоского штампа

Решить задачу об изгибе короткой консоли (см. рис.). Найти предельное значение нагрузки.



9.3. Клин под действием одностороннего давления. Сжатие слоя между жесткими плитами

Решить задачу о сжатии слоя жесткими шероховатыми плитами (см. рис.). Найти предельное значение нагрузки.



10.1. Плоское напряженное состояние. Осесимметричная деформация

Рассмотреть упруго-пластическое состояние быстро вращающегося круглого диска постоянной толщины при условии текучести Треска — Сен-Венана.
При какой угловой скорости достигается чисто пластическое состояние?

10.2. Условие полной пластиичности. Напряженное состояние в шейке растягиваемого образца.

Проанализировать допущения, на которых основано решение Давиденкова-Спиридоновой (см. рис.). Получить численное решение упругопластической задачи о напряженном состоянии в шейке методом упругих решений.

