

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук  
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры  
«Вычислительная механика и математика»  
« 14 » января 2021 г., протокол № 5  
с учетом изменений и дополнений,  
утвержденных на заседании кафедры  
«Вычислительная механика и математика»  
«17» июня 2021г., протокол №10,  
вступающих в силу с 1 сентября 2021 года

Заведующий кафедрой



В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по проведению практических (семинарских) занятий**  
**по дисциплине (модулю)**

**" Линейная алгебра и аналитическая геометрия/Математика - 1"**

**основной профессиональной образовательной программы**  
**высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**12.03.02 Опотехника**

с направленностью (профилем)  
**Опτικο-электронные приборы и системы**

Форма обучения: *очная*

Идентификационный номер образовательной программы: 120302-01-21

**Тула 2021**

**Разработчик методических указаний**

Зотова С.В, ст. преподаватель каф ВММ  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

  
Подпись

**Задача 1.**

*Теоретические сведения.*

В прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  положение любой точки задается тремя числами – *координатами* :  $A(x_A, y_A, z_A)$  (рисунок 1).

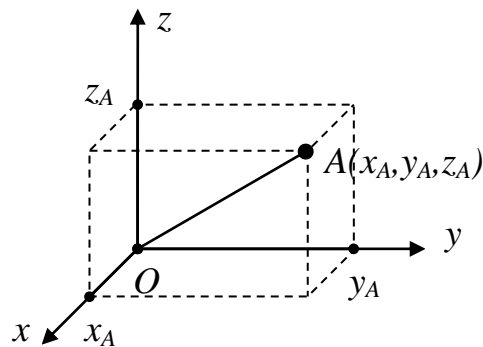


Рисунок 1.

Расстояние между двумя точками  $A_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $A_2(x_2, y_2, z_2)$  определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

При решении задач аналитической геометрии на плоскости необходимы следующие сведения о прямой линии:

1) если точка  $M(x; y)$  делит отрезок  $M_1M_2$  ( $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ ) в отношении  $\lambda$ , то координаты этой точки выражаются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (2)$$

если же точка  $M(x; y)$  - середина отрезка  $M_1M_2$ , то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad (3)$$

2) уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(x_1; y_1)$  и имеющей данный угловой коэффициент  $k$ , записывается в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1); \quad (4)$$

3) уравнение прямой, проходящей через две данные точки  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$ , имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \text{ при этом } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad (5)$$

4) острый угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|, \quad (6)$$

при этом условие параллельности прямых имеет вид  $k_1 = k_2$ , а условие перпендикулярности  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ ; (7)

5) если прямая на плоскости задана *общим уравнением*  $Ax + By + C = 0$ , то  $k_1 = -\frac{A}{B}$  - ее угловой коэффициент;

6) если в общем уравнении прямой поделить все члены на  $C \neq 0$ , получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{где } a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}; \quad (8)$$

7) точка пересечения двух прямых  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  определяется из решения системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Уравнение окружности с центром в точке  $E(a, b)$  и радиусом  $R$  имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (10)$$

### **Пример выполнения задания.**

Даны вершины треугольника  $ABC$ :  $A(-4; 8)$ ,  $B(5; -4)$ ,  $C(10; 6)$ .

Найти: 1) длину стороны  $AB$ ; 2) уравнения сторон  $AB$  и  $AC$  в общем виде и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол  $A$  в радианах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты  $CD$  в общем виде и ее длину; 5) уравнение

окружности, для которой высота  $CD$  есть диаметр.

*Решение:*

1) Расстояние  $d$  между двумя точками на плоскости определяется по формуле (1), в которую подставлены значения координат точек  $A$  и  $B$  (положим  $z_1 = z_2 = 0$ ), тогда

$$AB = \sqrt{(5 - (-4))^2 + (-4 - 8)^2} = \sqrt{81 + 144} = 15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки имеет вид (5):

Подставив в (5) координаты точек  $A$  и  $B$ , получим уравнение прямой  $AB$ :

$$\frac{x - (-4)}{5 - (-4)} = \frac{y - 8}{-4 - 8}, \quad \frac{x + 4}{9} = \frac{y - 8}{-12}, \quad \frac{x + 4}{3} = \frac{y - 8}{-4},$$

$$3y - 24 = -4x - 16, \quad \text{или} \quad 4x + 3y - 8 = 0 \quad (AB).$$

Для нахождения углового коэффициента  $k_{AB}$  прямой  $AB$  разрешим полученное уравнение относительно  $y$ :  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ . Отсюда  $k_{AB} = -\frac{4}{3}$ . Подставив в формулу

(5) координаты точек  $A$  и  $C$ , найдем уравнение прямой  $AC$ :  $\frac{x - (-4)}{10 - (-4)} = \frac{y - 8}{6 - 8},$

$$\frac{x + 4}{14} = \frac{y - 8}{-2}, \quad \frac{x + 4}{7} = \frac{y - 8}{-1},$$

$$7y - 56 = -x - 4 \quad \text{или} \quad x + 7y - 52 = 0 \quad (AC).$$

Отсюда  $k_{AC} = -\frac{1}{7}$ .

3) Угол между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны  $k_1$  и  $k_2$ , определяется по формуле (6). Угол  $A$ , образованный прямыми  $AB$  и  $AC$ , найдем по формуле (6), подставив в нее  $k_1 = k_{AB} = -\frac{4}{3}, \quad k_2 = k_{AC} = -\frac{1}{7}.$

$$\operatorname{tg} A = \frac{-\frac{1}{7} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{21}} = \frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}} = 1,$$

$$\angle A = \arctg 1 = 45^\circ \approx 0,79 \text{ рад.}$$

4) Так как высота  $CD$  перпендикулярна стороне  $AB$ , то угловые коэффициенты этих прямых связаны соотношением (7), поэтому

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном угловым коэффициентом  $k$  направлении, имеет вид (4). Подставив в (4) координаты точки

$C$  и  $k_{CD} = \frac{3}{4}$ , получим уравнение высоты  $CD$ :

$$y - 6 = \frac{3}{4}(x - 10), \quad 4y - 24 = 3x - 30, \quad 3x - 4y - 6 = 0 \quad (CD).$$

Для нахождения длины  $CD$  определим координаты точки  $D$ , решив систему уравнений  $(AB)$  и  $(CD)$ :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - 4y - 6 = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда } x = 2, y = 0, \quad \text{то есть } D(2; 0).$$

Подставив в формулу (1) координаты точек  $C$  и  $D$ , находим:

$$CD = \sqrt{(10 - 2)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

5) Так как  $CD$  является диаметром искомой окружности, то ее центр  $E$  есть середина отрезка  $CD$ . Воспользовавшись формулой (3) деления отрезка пополам, получим:

$$x_E = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{10 + 2}{2} = 6, \quad y_E = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{6 + 0}{2} = 3.$$

Следовательно,  $E(6; 3)$  и  $R = \frac{CD}{2} = \frac{10}{2} = 5$ . Используя формулу (10), получаем уравнение искомой окружности:  $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

## **Задача 2.**

*Теоретические сведения.*

Если известны начало вектора  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и конец  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , то координаты вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1, \quad (11)$$

а его длина определяется выражением

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (12)$$

Вектор  $\vec{a}$  с координатами  $(x, y, z)$  может быть представлен разложением по ортам в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (13)$$

Если  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы, которые вектор  $\vec{a}$  образует с положительными направлениями осей координат, то  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$  называются *направляющими косинусами* вектора  $\vec{a}$  (рисунок 2). Тогда имеют место соотношения

$$x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, \quad y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \quad z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Для векторов  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  вводятся операции сложения и умножения на число такие, что

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad \text{и} \quad \lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1),$$

где  $\lambda$  – любое число.

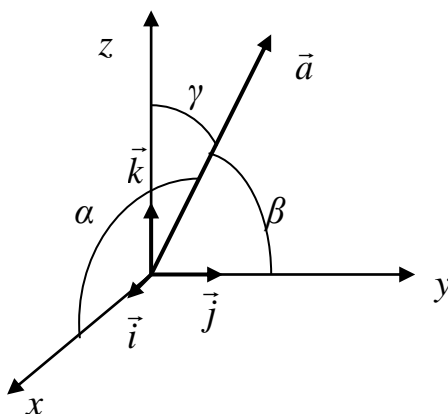


Рисунок 2.

Скалярным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ) называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла  $\varphi$  между ними,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$  или, если векторы заданы своими координатами, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (14)$$

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называют *коллинеарными*. Признак коллинеарности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  является пропорциональность их координат:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (15)$$

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  взаимно перпендикулярны, то  $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ .

Угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  определяется соотношением:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (16)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{N} = (A, B, C)$ , имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (17)$$

### **Пример выполнения задания.**

Даны координаты трех точек:  $A(3; 0; -5)$ ,  $B(6; 2; 1)$ ,  $C(12; -12; 3)$ .

Требуется: 1) записать векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$  в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ ; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $C$  перпендикулярно вектору  $\vec{AB}$ .

*Решение:*



1) Найдем координаты вектора  $\vec{AB}$ , подставив в формулу (11) координаты точек  $A$  и  $B$ , и запишем разложение этого вектора по ортам (13):

$$\vec{AB} = (6-3)\vec{i} + (2-0)\vec{j} + (1+5)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Подобным образом

$$\vec{AC} = (12-3)\vec{i} + (-12-0)\vec{j} + (3+5)\vec{k} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Модули векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$  найдем, подставляя их координаты в формулу (12):

$$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7, \quad \left| \vec{AC} \right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = 17.$$

2) Найдем косинус угла  $\varphi$  между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ . Для этого вычислим их скалярное произведение по формуле (14):

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-12) + 6 \cdot 8 = 51.$$

Тогда по формуле (16)

$$\cos \varphi = \frac{51}{7 \cdot 17} \approx 0,4286, \quad \varphi \approx 64^\circ 37' \approx 1,13 \text{ рад.}$$

3) По условию задачи искомая плоскость проходит через точку  $C(12; -12; 3)$  перпендикулярно вектору  $\vec{AB} = (3, 2, 6)$ . Подставляя в (17)  $A = 3$ ,  $B = 2$ ,  $C = 6$ ,  $x_0 = 12$ ,  $y_0 = -12$ ,  $z_0 = 3$ , получим:

$$3(x - 12) + 2(y + 12) + 6(z - 3) = 0,$$

или  $3x + 2y + 6z - 30 = 0$  – искомое уравнение плоскости.

### **Задача 3.**

*Теоретические сведения.*

Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Условием компланарности трех векторов  $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $\vec{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$  является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Три вектора образуют *базис* в том случае, если они *некомпланарны*.

Если для векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  выполняется условие  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \neq 0$ , то они образуют базис, и любой четвертый вектор  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  может быть представлен разложением по этому базису в виде

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3, \quad (19)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – координаты вектора  $\vec{b}$  в базисе, образованном векторами  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ .

Координаты  $\alpha, \beta, \gamma$  находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = b_1 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = b_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = b_3 \end{cases} \quad (20)$$

### ***Пример выполнения задания.***

Показать, что векторы  $\vec{a}_1(3; 1; 4)$ ,  $\vec{a}_2(2; 1; -1)$ ,  $\vec{a}_3(1; -1; 5)$  образуют базис трехмерного пространства. Найти координаты вектора  $\vec{b}(5; 0; 3)$  в этом базисе.

*Решение:*

Вычислим смешанное произведение векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ :

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Так как смешанное произведение отлично от нуля, то векторы некомпланарны и образуют базис. Координаты вектора  $\vec{b}$  в этом базисе найдем, разложив его по векторам  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  следующим образом:

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3,$$

а координаты вектора  $\vec{b}$  в новом базисе найдем из системы уравнений (20)

$$\begin{cases} \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 5 \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (-1) = 0 \\ \alpha \cdot 4 + \beta \cdot (-1) + \gamma \cdot 5 = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}$$

Решим эту систему для заданных векторов методом Гаусса.

Поменяем местами первое и второе уравнения

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}$$

После этого умножим первое уравнение на  $(-3)$  и сложим со вторым. Далее умножим первое уравнение на  $(-4)$  и сложим с третьим. Получим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -5\beta + 9\gamma = 3 \end{cases}$$

Затем умножаем второе уравнение на  $(-5)$  и складываем с третьим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -11\gamma = -22 \end{cases}$$

Из последнего уравнения имеем  $\gamma = 2$ . Подставляем это значение во второе уравнение, получаем  $\beta = 3$  и, наконец, из первого уравнения находим  $\alpha = -1$ .

Таким образом, подставив в уравнение (19) координаты вектора  $\vec{b}$ , получим

$$\vec{b} = -\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3.$$

**Задача 4.***Теоретические сведения.*

Неоднородная система трех уравнений с тремя неизвестными в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3 \end{cases}$$

и может быть записана в матричном виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{H}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  - матрица коэффициентов при неизвестных,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  - матрица-столбец неизвестных,

$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$  матрица-столбец свободных членов.

Если матрица  $\mathbf{A}$  – невырожденная, то есть имеет определитель, отличный от нуля, то существует матрица  $\mathbf{A}^{-1}$ , обратная к  $\mathbf{A}$ , так что  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$  ( $\mathbf{E}$  - единичная матрица). Умножим обе части уравнения (22) на  $\mathbf{A}^{-1}$  и получим

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H},$$

или

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}, \quad (23)$$

поскольку  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$ .

Равенство (23) является решением системы уравнений (22).

Матрица, обратная к невырожденной матрице  $\mathbf{A}$ , находится по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где  $A_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3$ ) – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ , которое является произведением  $(-1)^{i+j}$  на минор (определитель) второго порядка, полученный вычеркиваем  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца в определителе матрицы  $\mathbf{A}$ ;  $\Delta$  – определитель матрицы  $\mathbf{A}$ .

**Пример выполнения задания.**

Данную систему уравнений записать в матричной форме и решить ее с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

*Решение:*

Выпишем для данной системы уравнений матрицу коэффициентов при неизвестных  $\mathbf{A}$  и столбец свободных членов  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель  $\Delta$  и алгебраические дополнения  $A_{ij}$  элементов матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

следовательно, матрица  $\mathbf{A}$  имеет обратную матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$ .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Тогда по формуле (24) обратная матрица равна

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (23) находим решение данной системы уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + (-1) \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 - 1 \cdot 8 + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = -2$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### 1 Основная литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : Учебник для вузов / Д.В.Беклемишев. — 9-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2007. — 312с.
2. 3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие для втузов / под ред. Н.В.Ефимова. — 17-е изд., стер. — СПб. : Профессия, 2006. — 200с.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. — 9-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2007. — 240 с.

5. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа : учеб. пособие для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович .— 14-е изд., стер. — СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008 .— 736 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов. в 2 т., Т.1 / Н.С.Пискунов .— Изд.стер. — М. : Интеграл-Пресс, 2007 .— 416с
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов. в 2 т., Т.2 / Н.С.Пискунов .— Изд.стер. — М.: Интеграл-Пресс, 2006 .— 544с.
8. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. Ч.1 / А.В.Ефимов [и др.]; под ред.А.В.Ефимова, А.С.Поспелова .— М. : Физматлит, 2004 .— 288с.
9. Сборник задач по математике для втузов : в 4 ч. Ч.2 / А.В.Ефимов [и др.];под ред. А.В.Ефимова, А.С.Поспелова .— 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2004 .— 432с.

## 2. Дополнительная литература

1. Аверин В.В. Математика: курс лекций: учеб. пособие/ В.В. Аверин, М.Ю. Соколова, Д.В.Христич: ТулГУ – Тула: Изд. ТулГУ, 2010, Ч.1- 254с.
  2. Аверин В.В. Математика: курс лекций: учеб. пособие/ В.В. Аверин, М.Ю. Соколова, Д.В.Христич: ТулГУ – Тула: Изд. ТулГУ, 2010, Ч.2- 275с.
- Ильин В.А., Аналитическая геометрия : учебник для вузов / В.А.Ильин, Э.Г.Позняк .— 6-е изд.,стер. — М. : Физматлит, 2003 .— 240с.
- 3 Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. – Режим доступа :<https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214370663049600009433>, по паролю
4. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. – Режим доступа по паролю :<https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214412943155100008498>, по паролю