

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
« 14 » января 2021 г., протокол № 5
с учетом изменений и дополнений,
утвержденных на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«17» июня 2021г., протокол №10,
вступающих в силу с 1 сентября 2021 года

Заведующий кафедрой



В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к самостоятельной работе студентов
по дисциплине (модулю)

" Линейная алгебра и аналитическая геометрия/Математика - 1"

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
12.03.02 Опотехника

с направленностью (профилем)
Оптико-электронные приборы и системы

Форма обучения: *очная*

Идентификационный номер образовательной программы: 120302-01-21

Тула 2021

Разработчик методических указаний

Зотова С.В, ст. преподаватель каф ВММ
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



Подпись

Векторная алгебра.

Вектор – направленный отрезок.

Равенство

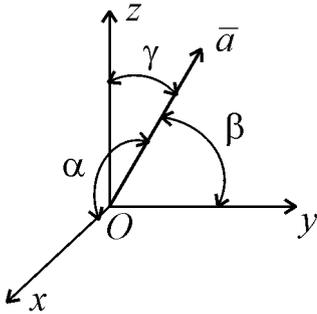
$$\vec{a} = (x, y, z) \quad (1) \text{ означает, что}$$

x, y, z – проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2) \text{ позволяет по}$$

координатам вектора определить его модуль.



Если α, β, γ – углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются направляющими косинусами вектора \vec{a} .

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma, \quad (3)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4)$$

Если известны начало вектора $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и конец $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1. \quad (5)$$

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad (6) \text{ и}$$

$\alpha \vec{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$, где α – любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными.

Признак коллинеарности векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (7)$$

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по осям соответственно Ox, Oy, Oz в положительную сторону.

Любой вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (8)$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (9)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}, \quad (10)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \quad (11) \text{ т.е. скалярный}$$

квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (12) \text{ Если } \vec{a} \perp \vec{b}, \text{ то}$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (13)$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (14)$$

Если вектор \vec{F} изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора \vec{S} , то работа этой силы определяется

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}. \quad (15)$$

Векторным произведением вектора \vec{a} на \vec{b} называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ;

2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3. вектор \vec{c} образует с векторами \vec{a} и \vec{b} «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (16) \text{ Модуль}$$

векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} :

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad (17)$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (18)$$

Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, в частности, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Если вектор \vec{F} изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке M , а вектор \vec{a} идет из некоторой точки O в точку M , то вектор $\vec{a} \times \vec{F}$ представляет собой момент силы \vec{F} относительно точки O :

$$m_o \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F}. \quad (20)$$

Смешанным произведением трех векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называется число, равное векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$, умноженному скалярно на вектор \vec{c} , т.е.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (21) \text{ Смешанное}$$

произведение $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , взятому со знаком «плюс», если тройка \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$V = \pm \vec{a} \vec{b} \vec{c}$. (22) Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0. \quad (23) \text{ Для векторов}$$

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Задача 1. На материальную точку действуют силы:

$$\vec{F}_1 = (2, -1, 1), \quad \vec{F}_2 = (-1, 2, 2), \quad \vec{F}_3 = (1, 1, -2).$$

Найти работу равнодействующей этих сил \vec{R} при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

Решение. Найдем равнодействующую

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2 - 1 + 1, -1 + 2 + 1, 1 + 2 - 2) = (2, 2, 1).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (4 - 2, 1 + 1, -1 - 0) = (2, 2, -1).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W = \vec{R} \cdot \vec{S} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7.$$

Задача 2. Дана сила $\vec{F} = (3, 4, -2)$ и точка ее приложения $A(2, -1, 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. По формуле (20) $m_o \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$. Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ по формуле (5) имеет координаты $\vec{r} = (2, -1, 3)$, по формуле (19)

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 13\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Итак, $m_o \vec{F} = (-10, 13, 11)$. Модуль момента находим по формуле (2):

$$|m_o \vec{F}| = \sqrt{(-10)^2 + (13)^2 + (11)^2} = \sqrt{390} \approx 19,748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$\cos \alpha = \frac{-10}{19,748} = -0,506, \quad \cos \beta = \frac{13}{19,748} = 0,658, \quad \cos \gamma = \frac{11}{19,748} = 0,557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha = 120^\circ 24', \quad \beta = 48^\circ 51', \quad \gamma = 56^\circ 9'.$$

Контроль: должно быть $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. У нас:

$$(-0,506)^2 + (0,658)^2 + (0,557)^2 = 0,999.$$

Задача 3. Написать разложение вектора $\vec{x} = (5, 16, 2)$ по векторам

$$\vec{p} = (2, 1, 0), \quad \vec{q} = (0, -2, 0), \quad \vec{r} = (-1, 5, 2).$$

Решение.

1. Разложение вектора \vec{x} по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{p} + \alpha_2 \vec{q} + \alpha_3 \vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 q_1 + \alpha_3 r_1 \\ x_2 = \alpha_1 p_2 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 r_2 \\ x_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 q_3 + \alpha_3 r_3. \end{cases}$$

2. С учетом числовых значений координат векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ и \vec{x} получим систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} 2 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 - 1 \cdot \alpha_3 = 5 \\ 1 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot \alpha_2 + 5 \cdot \alpha_3 = 16 \\ 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 2 \alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 5 + \alpha_3 \\ 2\alpha_2 = \alpha_1 + 5\alpha_3 - 16 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

3. Разложение вектора \vec{x} по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид:

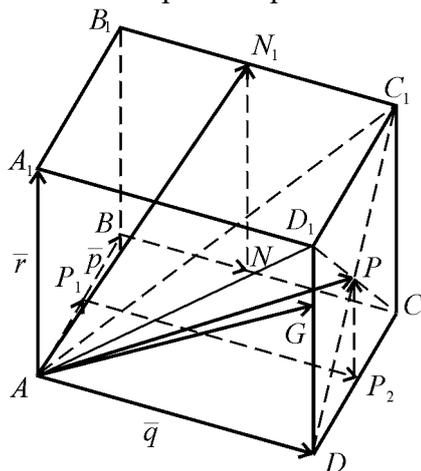
$$\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}$.

Задача 4. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{p}, \overrightarrow{AD} = \vec{q}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$ образуют базис. Разложить векторы $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AN_1}$ по выбранному базису, если точка G делит ребро DD_1 в отношении 1:2; точка P – точка пересечения диагоналей грани $DD_1 C_1 C$; точка N_1 – середина ребра $B_1 C_1$.

Решение.

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}, \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$

$$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Прямая и плоскость.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (25)$$

общее уравнение плоскости.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad - \quad (26) \text{ уравнение}$$

плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad - \quad (27) \text{ уравнение}$$

плоскости «в отрезках». Здесь a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad - \quad (28) \text{ нормальное}$$

уравнение плоскости.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad - \quad (29) \text{ расстояние от}$$

точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad - \quad (30)$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad - \quad (31) \text{ общее уравнение}$$

прямой (прямая задана пересечением двух плоскостей).

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad - \quad (32) \text{ каноническое}$$

уравнение прямой, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, принадлежащая прямой, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой (вектор, параллельный прямой).

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad - \quad (33) \text{ параметрические}$$

уравнения прямой.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad - \quad (34) \text{ уравнение}$$

прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} - \quad (35) \text{ угол между}$$

двумя прямыми, где $\vec{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ – направляющие векторы прямых.

$$\sin \psi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + c^2}} - \quad (36) \text{ угол между}$$

прямой и плоскостью, где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{A_1 A_2} & \overrightarrow{A_1 A_3} & \overrightarrow{A_1 A_4} \end{array} \right| - \text{объем пирамиды } A_1 A_2 A_3 A_4, \text{ где}$$

$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3), A_4(x_4, y_4, z_4)$ – координаты вершин пирамиды.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \quad (37)$$

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2, 1, -1), A_2(3, 0, 1), A_3(2, -1, 3), A_4(0, 8, 0)$. Найти:

- 1) угол между ребрами $A_1 A_2$ и $A_1 A_4$;
- 2) угол между ребром $A_1 A_4$ и гранью $A_1 A_2 A_3$;
- 3) объем пирамиды V ;
- 4) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1 A_2 A_3$;
- 5) точку A'_4 , симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1 A_2 A_3$;
- 6) точку A''_4 , симметричную точке A_4 относительно прямой $A_1 A_3$.

Решение.

- 1) Угол между ребрами находим по формуле (35).

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1 A_2} = (3 - 2, 0 - 1, 1 - (-1)) = (1, -1, 2) - \text{направляющий вектор прямой } A_1 A_2;$$

$$\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1 A_4} = (0 - 2, 2 - 1, 0 - (-1)) = (-2, 7, 1) - \text{направляющий вектор прямой } A_1 A_4.$$

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot (-2) - 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}} = -\frac{7}{18}.$$

2) Составим уравнение плоскости $A_1 A_2 A_3$, проходящей через три точки $A_1(2, 1, -1), A_2(3, 0, 1), A_3(2, -1, 3)$, по формуле (30)

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z + 1 \\ 3 - 2 & 0 - 1 & 1 + 1 \\ 2 - 2 & -1 - 1 & 3 + 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z + 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \cdot 0 - (y-1) \cdot 4 + (z+1) \cdot (-2) = 0, \\ -4y + 4 - 2z - 2 = 0,$$

$4y + 2z - 2 = 0$ – уравнение плоскости $A_1 A_2 A_3$;

$\vec{n} = (0, 2, 1)$ – нормальный вектор плоскости;

$\vec{a} = \overrightarrow{A_1 A_4} = (-2, 7, 1)$ – направляющий вектор прямой $A_1 A_4$.

Находим угол ψ между прямой $A_1 A_4$ и плоскостью $A_1 A_2 A_3$ по формуле (36)

$$\sin \psi = \frac{0 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{54}} = 0,9114.$$

3) Находим объем пирамиды по формуле (37)

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = (1, -1, 2); \quad \overrightarrow{A_1 A_3} = (0, -2, 4); \quad \overrightarrow{A_1 A_4} = (-2, 7, 1).$$

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} (-2 + 8 - 8 - 28) = -\frac{1}{6} (-30) = 15.$$

4) Расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1 A_2 A_3$ находим по формуле (29).

$$d = \frac{|2 \cdot 8 + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \approx 6,69.$$

5) Чтобы найти точку A'_4 , симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1 A_2 A_3$, сделаем следующее.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $A_1 A_2 A_3$, проходящей через точку A_4 по формуле (32). За направляющий вектор прямой $\vec{a} = \vec{n} = (0, 2, 1)$ берем нормальный вектор плоскости, т.к. прямая перпендикулярна плоскости:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-0}{1}, \quad \frac{x}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{1}.$$

Составим параметрические уравнения этой прямой по формуле (33):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t. \end{cases}$$

Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью $A_1 A_2 A_3$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 + 8 = 2 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow 2(2t + 8) + t - 1 = 0, \\ 5t + 15 = 0, \quad t = -3.$$

Получаем точку $M(0, 2, -3)$; т.к. точка A'_4 симметрична точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, то точка M является серединой отрезка $A_4A'_4$, поэтому

$$\begin{aligned}x_M &= \frac{x_4 + x'_4}{2}, & 0 &= \frac{0 + x'_4}{2}, & x'_4 &= 0; \\y_M &= \frac{y_4 + y'_4}{2}, & 2 &= \frac{8 + y'_4}{2}, & y'_4 &= -4; \\z_M &= \frac{z_4 + z'_4}{2}, & -3 &= \frac{0 + z'_4}{2}, & z'_4 &= -6. \\& & & & A'_4 &= (0, -4, -6).\end{aligned}$$

б) Чтобы найти точку A''_4 , симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3 , составим уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_1A_3 по формуле (26). За нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \vec{a} = (0, -2, 4)$ берем направляющий вектор прямой A_1A_3 , т.к. плоскость перпендикулярна прямой.

$0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 3) + 4 \cdot (z - 0) = 0$, $-2y + 16 + 4z = 0$, $y = 2z - 8 = 0$. Уравнение прямой A_1A_3 составляем по формуле (34).

$$\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z+1}{3+1}, \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

Параметрические уравнения прямой A_1A_3 :

$$\begin{cases}x = 2 \\y = -2t + 1 \\z = 4t - 1.\end{cases}$$

Находим точку N пересечения прямой A_1A_3 и плоскости:

$$\begin{cases}x = 2 \\y = -2t + 1 \\z = 4t - 1 \\y - 2z - 8 = 0,\end{cases}$$

$$-2t + 1 - 2(4t - 1) - 8 = 0, \quad -10t - 5 = 0, \quad t = -\frac{1}{2},$$

$$x = 2, \quad y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2, \quad z = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3.$$

Итак, точка $N(2, 2, -3)$. Так как точка A''_4 симметрична точке A_4 относительно прямой A_1A_3 , то точка N является серединой отрезка $A_4A''_4$, тогда

$$x_N = \frac{x_4 + x''_4}{2}, \quad 2 = \frac{0 + x''_4}{2}, \quad x''_4 = 4,$$

$$y_N = \frac{y_4 + y_4''}{2}, \quad 2 = \frac{8 + y_4''}{2}, \quad y_4'' = -4,$$

$$z_N = \frac{z_4 + z_4''}{2}, \quad -3 = \frac{0 + z_4''}{2}, \quad z_4'' = -6, \quad \text{точка } A_4''(4, -4, -6).$$

$$Ax + By + C = 0 \quad - \quad (38) \text{ общее уравнение}$$

прямой.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad - \quad (39) \text{ уравнение прямой,}$$

проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{a} = (m, n)$ – вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad - \quad (40) \text{ уравнение}$$

прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с перпендикулярным вектором $\vec{n} = (A, B)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad - \quad (41) \text{ уравнение прямой}$$

проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad - \quad (42) \text{ уравнение прямой в}$$

«отрезках», где a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \quad - \quad (43) \text{ уравнение прямой с}$$

угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\varphi$ и отрезком b – отсекаемым на оси Oy .

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad - \quad (44) \text{ уравнение}$$

прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом k .

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad - \quad (45) \text{ расстояние от}$$

точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad - \quad (45a) \text{ отклонение точки}$$

$M_0(x_0, y_0)$ от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} \quad - \quad (46) \text{ угловой}$$

коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$.

$$k_1 = k_2 \quad - \quad (47) \text{ условие}$$

параллельности прямых.

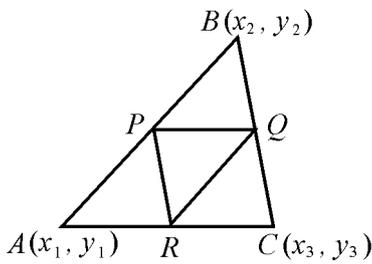
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad - \quad (48) \text{ условие}$$

перпендикулярности прямых.

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| - \quad (49) \text{ угол между двумя}$$

прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 .

Задача 6. Даны середины сторон треугольника $P(1, 2)$, $Q(5, 1)$, $R(-4, 3)$. Составить уравнения его сторон.



1 способ. Так как точки P , Q , R являются серединами отрезков AB , AC , BC , то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 = -8, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 6, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= -8 & y_1 &= 6 \\ x_2 &= 0 & y_2 &= 0 & A(-8, 6), \quad B(10, -2), \quad C(0, 0). \\ x_3 &= 10, & y_3 &= -2, \end{aligned}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение AB :

$$\frac{x + 8}{10 + 8} = \frac{y - 6}{-2 - 6}, \quad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC :

$$\frac{x - 10}{0 - 10} = \frac{y + 2}{0 + 2}, \quad x + 5y = 0.$$

Уравнение AC :

$$\frac{x + 8}{0 + 8} = \frac{y - 6}{0 - 6}, \quad 3x + 4y = 0.$$

2 способ. Не определяя координат точек A , B , C , составим уравнение каждой из сторон треугольника ABC , как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника PQR параллельно противоположащей стороне.

Уравнение AB : прямая AB проходит через точку P параллельно вектору $\overrightarrow{QR} = (-9, 4)$.

Используем уравнение (39).

$$\frac{x - 1}{-9} = \frac{y - 2}{4} \Rightarrow 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC : прямая BC проходит через точку Q параллельно вектору $\overrightarrow{PR} = (-5, 1)$.

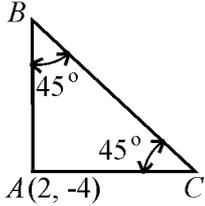
$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y+1}{1} \Rightarrow x+5y=0.$$

Уравнение AC: прямая AC проходит через точку R параллельно вектору $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$.

$$\frac{x+4}{4} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow 3x+4y=0.$$

Ответ: $4x+9y-22=0$, $x+5y=0$, $3x+4y=0$.

Задача 7. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x+3y-5=0$ и вершину прямого угла $(2, -1)$.



$AB=BC$ (по условию), поэтому $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$,

$k_{BC} = -\frac{2}{3}$ (по формуле (46)). Уравнения катетов AB и BC составляем по

формуле (44): $y+1=k(x-2)$.

$$\operatorname{tg}45^\circ = \left| \frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} \right|, \quad (49)$$

$$\frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} = \pm 1.$$

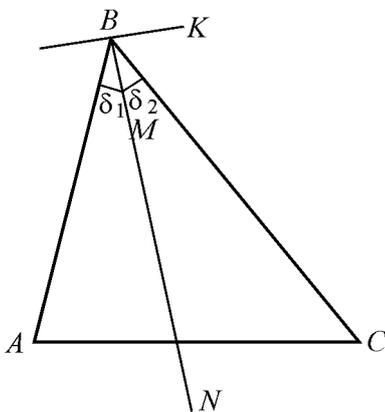
Решая эти уравнения, получим:

$$k = \frac{1}{5}, \quad y+1 = \frac{1}{5}(x-2), \quad 5y+5 = x-2, \quad x-5y-7=0.$$

$$k = -5, \quad y+1 = -5(x-2), \quad y+1 = -5x+10, \quad 5x+y-9=0.$$

Ответ: $x-5y-7=0$, $5x+y-9=0$.

Задача 8. В треугольнике с вершинами $A(3, -2)$, $B(-1, 1)$, $C(5, -7)$ найти биссектрису внутреннего угла $\angle ABC$.



1) Составим уравнения сторон угла $\angle ABC$, воспользовавшись формулой (41).

Сторона BA:

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-1}{-2-1}, \quad -3x-4y+1=0.$$

Сторона BC:

$$\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-1}{-4-1}, \quad -8x-6y-2=0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Приравняем расстояния от произвольной точки биссектрисы $M(x, y)$ до сторон угла BA и BC, вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-8x-6y-2|}{\sqrt{8^2+6^2}}, \quad \frac{|-3x-4y+1|}{5} = \frac{|-8x-6y-2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x-4y+1) = -8x-6y-2 \quad \text{и} \quad 2(-3x-4y+1) = -(-8x-6y-2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине B треугольника ABC :

$$x - y + 3 = 0 \quad (\text{a})$$

и
$$x + y = 0. \quad (\text{б})$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника BN отклонения вершин треугольника A и C имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла BK – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек A и C от прямой (а) по формуле (40,а):

$$\delta_A = \frac{3 - (-2) + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} > 0, \quad \delta_C = \frac{5 - (-7) + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} > 0,$$

следовательно, уравнение (а) – это уравнение прямой BK . Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника ABC при вершине B :

$$x + y = 0.$$

Ответ: $x + y = 0$.

2. Линейная алгебра

Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Рассмотрим неоднородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{определитель системы, } \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} - \text{вспомогательные системы.}$$

1. Пусть $\Delta \neq 0$, тогда система (1) имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

2. Пусть $\Delta = 0$. Возможны два случая:

а) если хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система (1) не имеет решений;

б) если все вспомогательные определителя равны нулю, то система (1) либо не имеет решений, либо имеет их бесконечно много.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3(5-1) - 2(5+4) + 1(-1-4) = -11 \neq 0, \text{ следовательно,}$$

система имеет единственное решение. Составим вспомогательные определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 11, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -33, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -22. \text{ Тогда}$$

$$x = -1, \quad y = 3, \quad z = 2.$$

Матрицы и действия над ними. Решение систем линейных уравнений средствами матричного исчисления

Матрицей порядка $m \times n$ называется прямоугольная система чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Сложение. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, где

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \text{ называется матрица } C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Очевидно, что складывать можно матрицы только одного порядка.

Умножение матриц на число. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число $k \neq 0$

$$\text{называется матрица } C = (c_{ij}) = (ka_{ij}).$$

Умножение матриц. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$

$$(i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n) \text{ на матрицу } B = (b_{ij}) \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, k)$$

называется матрица $C = (c_{ij})$ порядка $m \times k$, где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, то

есть c_{ij} есть сумма произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -ого столбца матрицы B .

Операция умножения матриц, вообще говоря, не коммутативна, т.е. $AB \neq BA$.

Обращение матриц. Пусть определитель квадратной матрицы A отличен от нуля. В этом случае матрица называется невырожденной. Для всякой невырожденной матрицы существует обратная матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E — единичная матрица.

1. Транспонируем матрицу A , т.е. заменим ее строки на столбцы с теми же номерами:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

2. Заменяем все элементы матрицы A их алгебраическими дополнениями:

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Обратная матрица находится по формуле: $A^{-1} = \frac{A}{|A|}$, где $|A|$ – определитель матрицы A .

Запишем систему (1) в виде $AX = B$, где $A = (a_{ij})$ – матрица системы, которая предполагается невырожденной, B – вектор-столбец свободная членов, X – вектор-столбец неизвестных. Тогда

$$X = A^{-1}B. \quad (2) \text{ Отыскание}$$

решения по формуле (2) и называют матричным методом решения системы (1).

Пример 1. Найти связь между координатами векторов $X = (x_1, x_2)$ и CX , где $C = f(A, B)$.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(A, B) = 2A^2 + 7AB.$$

Решение.

$$2A^2 = 2 \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 25+3 & 5+1 \\ 15+3 & 3+1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 28 & 6 \\ 18 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 12 \\ 36 & 8 \end{pmatrix},$$

$$7AB = 7 \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 70 \\ -21 & 42 \end{pmatrix},$$

$$C = f(a, b) = \begin{pmatrix} 21 & 82 \\ 15 & 50 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21x_1 + 82x_2 \\ 15x_1 + 50x_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Решить систему средствами матричного исчисления:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Решение. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$|a| = -11 \neq 0$, поэтому существует матрица A^{-1} . Найдем ее.

$$1. A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2. \tilde{A}' = \begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/11 & 1 & 3/11 \\ 9/11 & -1 & -4/11 \\ 5/11 & -1 & -1/11 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/11 & 1 & 3/11 \\ 9/11 & -1 & -4/11 \\ 5/11 & -1 & -1/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20/11 + 9/11 \\ 45/11 - 12/11 \\ 25/11 - 3/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли

Определение. Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров (т.е. определителей k -го порядка, составленных из элементов, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов матрицы A).

Обозначения: $r(A)$, $\text{rang}A$.

При вычислении ранга обычно используют следующие элементарные преобразования, которые не меняют его:

- 1) перемена местами двух строк или столбцов;
- 2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- 3) прибавление к строки (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на произвольной, отличное от нуля, число;
- 4) выбрасывание нулевой строки (столбца).

При этом стараются привести матрицу к треугольному или квазитреугольному виду.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + \dots + a_{1n}t = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + \dots + a_{2n}t = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x + a_{m2}y + \dots + a_{mn}t = b_m. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть $A = (a_{ij})$, где $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, – матрица системы. Матрица

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

называется расширенной матрицей системы.

Теорема Кронекера-Капелли. Система (3) совместна, т.е. имеет хотя бы одно решение, тогда и только тогда, когда $\text{rang}A = \text{rang}B$.

Пример. Установить совместность или несовместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 5y + 4z + 8t = 1 \\ 2x - y + 2z - t = 0 \\ 5x + 3y + 8z + t = 1. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Вычтем из 3-й строки 1-ю:

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Разделим элементы третьей строки на 2 и вычтем из полученной 3-й строки 2-ю:

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Вычеркнем 3-ю строку:

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Отсюда видно, что $\text{rang}A = \text{rang}B = 2$, т.к., например, отличен от нуля минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix},$$

следовательно, система совместна. (заметим, что эта система имеет бесконечно много решений, т.к. ранг ее матрицы при этом меньше числа неизвестных).

Линейные операторы и их матрицы

Определение. Говорят, что в линейном пространстве R^n задан оператор A (преобразование A), если каждому вектору $x \in R^n$ поставлен в соответствие по некоторому закону единственный вектор $y \in R^n$.

Оператор A называется *линейным*, если

$$1) A(x + y) = Ax + Ay,$$

$$2) A(kx) = kAx.$$

Пусть e_1, e_2, e_3 – базис в пространстве R^3 . Так как Ae_1, Ae_2, Ae_3 – векторы пространства R^3 , то каждый из них можно единственным образом разложить по базису:

$$Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$$

$$Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3$$

$$Ae_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного оператора (линейного преобразования A в базисе e_1, e_2, e_3). Ее j -й столбец составлен из координат Ae_j . (Линейные операторы и их матрицы мы будем обозначать одинаковыми буквами).

Пусть $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in R^3$. Тогда $Ax = x'_1e_1 + x'_2e_2 + x'_3e_3$, где

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}$$

или

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Над операторами можно производить действия сложения, умножения на число, умножения и обращения, при этом соответствующие действия производятся над их матрицами. Заметим, что произведение операторов AB есть последовательное применение оператора B , а затем A :

$$(AB)x = A(Bx).$$

Преобразование базиса. Изменение координат вектора при переходе к новому базису.

Изменение матрицы оператора. Пусть в пространстве R^3 даны два базиса: e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 , связанные соотношениями

$$\begin{aligned}e'_1 &= b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + b_{31}e_3 \\e'_2 &= b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + b_{32}e_3 \\e'_3 &= b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3.\end{aligned}$$

Матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от старого базиса e_1, e_2, e_3 к новому базису e'_1, e'_2, e'_3 .

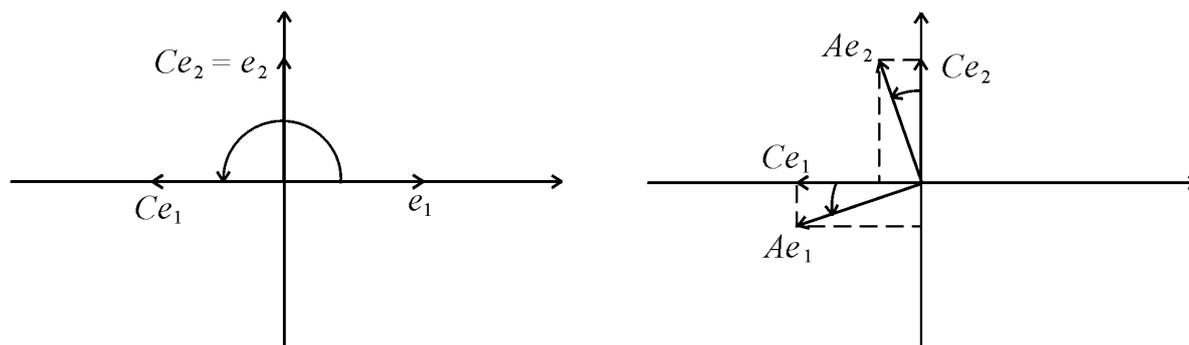
Пусть x_1, x_2, x_3 — координаты вектора x в базисе e_1, e_2, e_3 , а x'_1, x'_2, x'_3 — его координаты в базисе e'_1, e'_2, e'_3 . Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть A — матрица оператора в старом базисе e_1, e_2, e_3 , тогда матрица A' — этого оператора в новом базисе e'_1, e'_2, e'_3 находится по формуле $A' = S^{-1}AS$.

Пример 1. Построить матрицу оператора A в пространстве R^2 : A — оператор зеркального отражения относительно оси Oy и последующего поворота на угол 30° против часовой стрелки.

Решение. Для того, чтобы построить матрицу оператора, нужно знать, как он действует на базисные векторы. Сделаем чертежи. Пусть C — оператор зеркального отражения, B — оператор поворота. Тогда $A = BC$.



Из рисунков ясно, что

$$Ae_1 = B(Ce_1) = -\cos 30^\circ e_1 - \sin 30^\circ e_2 = -\sqrt{3}/2 e_1 - 1/2 e_2,$$

$$Ae_2 = B(Ce_2) = -\sin 30^\circ e_1 + \cos 30^\circ e_2 = -1/2 e_1 + \sqrt{3}/2 e_2,$$

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

(Напомним, что координаты вектора Ae_1 записываются в первый столбец матрицы A , а координаты вектора Ae_2 – во второй).

Пример 2. В базисе e_1, e_2 дан вектор $x = (4, -2)$. Записать матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису e'_1, e'_2 и найти координаты вектора x в новом базисе, если $e'_1 = -5e_1 - 3e_2$, $e'_2 = 2e_1 - 7e_2$.

Решение. Имеем:

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -7/29 & -2/29 \\ -3/29 & -5/29 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/29 & -2/29 \\ -3/29 & -5/29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24/29 \\ -2/29 \end{pmatrix}, \quad x = (-0,83, -0,07).$$

Пример 3. Найти матрицу A' линейного оператора A в базисе e'_1, e'_2 , если известен ее вид в базисе e_1, e_2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad e'_1 = -5e_1 + 3e_2, \quad e'_2 = 2e_1 - 7e_2.$$

Решение.

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -7/29 & -2/29 \\ -3/29 & -5/29 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} A' &= S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -7/29 & -2/29 \\ -3/29 & -5/29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -7/29 & -2/29 \\ -3/29 & -5/29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -14 & 23 \\ 20 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Собственные значения и собственные векторы линейных операторов и их матриц

Определение. Ненулевой вектор $x \in R^n$ называется собственным вектором линейного оператора A (матрицы A), если существует такое число λ , что выполняется равенство

$Ax = \lambda x$. Число λ называется собственным значением оператора A , отвечающим собственному вектору x .

Пусть $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ – матрица оператора A в некотором базисе. Собственные значения λ_i являются решениями характеристического уравнения n -ой степени

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Координаты собственного вектора $x_i = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, соответствующего собственному значению λ_i , находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \dots + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\xi_2 + \dots + a_{2n}\xi_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\xi_n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Замечание. В качестве координат собственного вектора можно брать ненулевые алгебраические дополнения элементов любой строки матрицы $(A - \lambda_i E)$.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение (1):

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 8 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0.$$

Отсюда находим собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 13$. Для $\lambda_1 = 1$ составим систему уравнений (2):

$$\begin{cases} 4\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ 8\xi_1 + 8\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечно много решений $\xi_1 = t$, $\xi_2 = -t$, где t – произвольное число. Поэтому в качестве собственного вектора можно взять, например, вектор $x_1 = (1, -1)$. (Все собственные векторы, соответствующие собственному значению 1, будут иметь вид $t(1, -1)$ и будут лежать на одной прямой, которая называется собственным направлением преобразования A).

Для $\lambda_2 = 13$ аналогично получим:

$$\begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0 \\ 8\xi_1 - 4\xi_2 = 0, \end{cases} \quad \lambda_1 = 1$$

т.е. $\xi_2 = 2\xi_1$. Полагая $\xi_1 = t$, получаем $\xi_2 = 2t$. В качестве собственного вектора возьмем, например, $x_2 = (1, 2)$.

Можно поступить и по-другому. Для $\lambda_1 = 1$

$$A - 1E = \begin{pmatrix} 5-1 & 4 \\ 8 & 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

В качестве координат собственного вектора x_1 возьмем алгебраические дополнения элементов первой строки этой матрицы: $x_1 = (8, -8)$. Для $\lambda_2 = 13$

$$A - 13E = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

и $x_1 = (-4, -8)$.

Задача 1.

Теоретические сведения.

В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ положение любой точки задается тремя числами – *координатами* : $A(x_A, y_A, z_A)$ (рисунок 1).

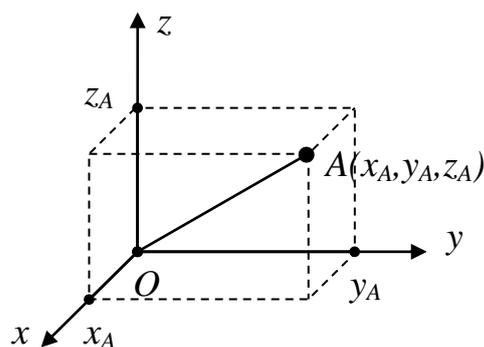


Рисунок 1.

Расстояние между двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

При решении задач аналитической геометрии на плоскости необходимы следующие сведения о прямой линии:

1) если точка $M(x; y)$ делит отрезок M_1M_2 ($M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$) в отношении λ , то координаты этой точки выражаются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (2)$$

если же точка $M(x; y)$ - середина отрезка M_1M_2 , то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad (3)$$

2) уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ и имеющей данный угловой коэффициент k , записывается в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1); \quad (4)$$

3) уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \text{ при этом } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad (5)$$

4) острый угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|, \quad (6)$$

при этом условие параллельности прямых имеет вид $k_1 = k_2$, а условие перпендикулярности $k_1 = -\frac{1}{k_2}$; (7)

5) если прямая на плоскости задана *общим уравнением* $Ax + By + C = 0$, то $k_1 = -\frac{A}{B}$ - ее угловой коэффициент;

6) если в общем уравнении прямой поделить все члены на $C \neq 0$, получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{где } a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}; \quad (8)$$

7) точка пересечения двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определяется из решения системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Уравнение окружности с центром в точке $E(a, b)$ и радиусом R имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (10)$$

Пример выполнения задания.

Даны вершины треугольника ABC : $A(-4; 8)$, $B(5; -4)$, $C(10; 6)$.

Найти: 1) длину стороны AB ; 2) уравнения сторон AB и AC в общем виде и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол A в радианах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты CD в общем виде и ее длину; 5) уравнение

окружности, для которой высота CD есть диаметр.

Решение:

1) Расстояние d между двумя точками на плоскости определяется по формуле (1), в которую подставлены значения координат точек A и B (положим $z_1 = z_2 = 0$), тогда

$$AB = \sqrt{(5 - (-4))^2 + (-4 - 8)^2} = \sqrt{81 + 144} = 15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки имеет вид (5):

Подставив в (5) координаты точек A и B , получим уравнение прямой AB :

$$\frac{x - (-4)}{5 - (-4)} = \frac{y - 8}{-4 - 8}, \quad \frac{x + 4}{9} = \frac{y - 8}{-12}, \quad \frac{x + 4}{3} = \frac{y - 8}{-4},$$

$$3y - 24 = -4x - 16, \quad \text{или} \quad 4x + 3y - 8 = 0 \quad (AB).$$

Для нахождения углового коэффициента k_{AB} прямой AB разрешим полученное уравнение относительно y : $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$. Отсюда $k_{AB} = -\frac{4}{3}$. Подставив в формулу

(5) координаты точек A и C , найдем уравнение прямой AC : $\frac{x - (-4)}{10 - (-4)} = \frac{y - 8}{6 - 8}$,

$$\frac{x + 4}{14} = \frac{y - 8}{-2}, \quad \frac{x + 4}{7} = \frac{y - 8}{-1},$$

$$7y - 56 = -x - 4 \quad \text{или} \quad x + 7y - 52 = 0 \quad (AC).$$

Отсюда $k_{AC} = -\frac{1}{7}$.

3) Угол между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны k_1 и k_2 , определяется по формуле (6). Угол A , образованный прямыми AB и AC , найдем по

формуле (6), подставив в нее $k_1 = k_{AB} = -\frac{4}{3}$, $k_2 = k_{AC} = -\frac{1}{7}$.

$$\operatorname{tg} A = \frac{-\frac{1}{7} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{21}} = \frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}} = 1,$$

$$\angle A = \arctg 1 = 45^\circ \approx 0,79 \text{ рад.}$$

4) Так как высота CD перпендикулярна стороне AB , то угловые коэффициенты этих прямых связаны соотношением (7), поэтому

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном угловым коэффициентом k направлении, имеет вид (4). Подставив в (4) координаты точки C и $k_{CD} = \frac{3}{4}$, получим уравнение высоты CD :

$$y - 6 = \frac{3}{4}(x - 10), \quad 4y - 24 = 3x - 30, \quad 3x - 4y - 6 = 0 \quad (CD).$$

Для нахождения длины CD определим координаты точки D , решив систему уравнений (AB) и (CD) :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - 4y - 6 = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда } x = 2, y = 0, \quad \text{то есть } D(2; 0).$$

Подставив в формулу (1) координаты точек C и D , находим:

$$CD = \sqrt{(10 - 2)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

5) Так как CD является диаметром искомой окружности, то ее центр E есть середина отрезка CD . Воспользовавшись формулой (3) деления отрезка пополам, получим:

$$x_E = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{10 + 2}{2} = 6, \quad y_E = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{6 + 0}{2} = 3.$$

Следовательно, $E(6; 3)$ и $R = \frac{CD}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Используя формулу (10), получаем уравнение искомой окружности: $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Задача 2.

Теоретические сведения.

Если известны начало вектора $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и конец $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\vec{a} = M_1M_2$ находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1, \quad (11)$$

а его длина определяется выражением

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (12)$$

Вектор \vec{a} с координатами (x, y, z) может быть представлен разложением по ортам в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (13)$$

Если α, β, γ – углы, которые вектор \vec{a} образует с положительными направлениями осей координат, то $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора \vec{a} (рисунок 2). Тогда имеют место соотношения

$$x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, \quad y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \quad z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Для векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ вводятся операции сложения и умножения на число такие, что

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad \text{и} \quad \lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1),$$

где λ – любое число.

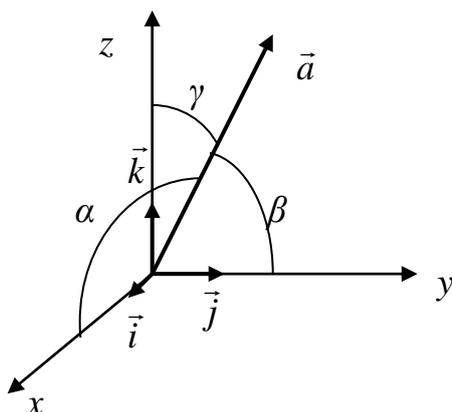


Рисунок 2.

Скалярным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} ($\vec{a} \cdot \vec{b}$) называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ или, если векторы заданы своими координатами, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (14)$$

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называют *коллинеарными*. Признак коллинеарности векторов \vec{a} и \vec{b} является пропорциональность их координат:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (15)$$

Если векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны, то $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} определяется соотношением:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (16)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = (A, B, C)$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (17)$$

Пример выполнения задания.

Даны координаты трех точек: $A(3; 0; -5)$, $B(6; 2; 1)$, $C(12; -12; 3)$.

Требуется: 1) записать векторы \vec{AB} и \vec{AC} в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами \vec{AB} и \vec{AC} ; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку C перпендикулярно вектору \vec{AB} .

Решение:

1) Найдем координаты вектора \vec{AB} , подставив в формулу (11) координаты точек A и B , и запишем разложение этого вектора по ортам (13):

$$\vec{AB} = (6 - 3)\vec{i} + (2 - 0)\vec{j} + (1 + 5)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Подобным образом

$$\vec{AC} = (12 - 3)\vec{i} + (-12 - 0)\vec{j} + (3 + 5)\vec{k} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Модули векторов \vec{AB} и \vec{AC} найдем, подставляя их координаты в формулу (12):

$$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7, \quad \left| \vec{AC} \right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = 17.$$

2) Найдем косинус угла φ между векторами \vec{AB} и \vec{AC} . Для этого вычислим их скалярное произведение по формуле (14):

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-12) + 6 \cdot 8 = 51.$$

Тогда по формуле (16)

$$\cos \varphi = \frac{51}{7 \cdot 17} \approx 0,4286, \quad \varphi \approx 64^\circ 37' \approx 1,13 \text{ рад.}$$

3) По условию задачи искомая плоскость проходит через точку $C(12; -12; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{AB} = (3, 2, 6)$. Подставляя в (17) $A = 3$, $B = 2$, $C = 6$, $x_0 = 12$, $y_0 = -12$, $z_0 = 3$, получим:

$$3(x - 12) + 2(y + 12) + 6(z - 3) = 0,$$

или $3x + 2y + 6z - 30 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Задача 3.

Теоретические сведения.

Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Условием компланарности трех векторов $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Три вектора образуют *базис* в том случае, если они *некомпланарны*.

Если для векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ выполняется условие $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \neq 0$, то они образуют базис, и любой четвертый вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ может быть представлен разложением по этому базису в виде

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3, \quad (19)$$

где α, β, γ – координаты вектора \vec{b} в базисе, образованном векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Координаты α, β, γ находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = b_1 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = b_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = b_3 \end{cases}. \quad (20)$$

Пример выполнения задания.

Показать, что векторы $\vec{a}_1(3; 1; 4)$, $\vec{a}_2(2; 1; -1)$, $\vec{a}_3(1; -1; 5)$ образуют базис трехмерного пространства. Найти координаты вектора $\vec{b}(5; 0; 3)$ в этом базисе.

Решение:

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Так как смешанное произведение отлично от нуля, то векторы некопланарны и образуют базис. Координаты вектора \vec{b} в этом базисе найдем, разложив его по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ следующим образом:

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3,$$

а координаты вектора \vec{b} в новом базисе найдем из системы уравнений (20)

$$\begin{cases} \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 5 \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (-1) = 0 \\ \alpha \cdot 4 + \beta \cdot (-1) + \gamma \cdot 5 = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}$$

Решим эту систему для заданных векторов методом Гаусса.

Поменяем местами первое и второе уравнения

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}$$

После этого умножим первое уравнение на (-3) и сложим со вторым. Далее умножим первое уравнение на (-4) и сложим с третьим. Получим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -5\beta + 9\gamma = 3 \end{cases}$$

Затем умножаем второе уравнение на (-5) и складываем с третьим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -11\gamma = -22 \end{cases}$$

Из последнего уравнения имеем $\gamma = 2$. Подставляем это значение во второе уравнение, получаем $\beta = 3$ и, наконец, из первого уравнения находим $\alpha = -1$.

Таким образом, подставив в уравнение (19) координаты вектора \vec{b} , получим

$$\vec{b} = -\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3.$$

Задача 4.

Теоретические сведения.

Неоднородная система трех уравнений с тремя неизвестными в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3 \end{cases}$$

и может быть записана в матричном виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{H}, \quad (21)$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов при неизвестных,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных,

$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ матрица-столбец свободных членов.

Если матрица \mathbf{A} – невырожденная, то есть имеет определитель, отличный от нуля, то существует матрица \mathbf{A}^{-1} , обратная к \mathbf{A} , так что $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ (\mathbf{E} - единичная матрица). Умножим обе части уравнения (22) на \mathbf{A}^{-1} и получим

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H},$$

или

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}, \quad (23)$$

поскольку $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$.

Равенство (23) является решением системы уравнений (22).

Матрица, обратная к невырожденной матрице \mathbf{A} , находится по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где A_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} , которое является произведением $(-1)^{i+j}$ на минор (определитель) второго порядка, полученный вычеркиваем i -й строки и j -го столбца в определителе матрицы \mathbf{A} ; Δ – определитель матрицы \mathbf{A} .

Пример выполнения задания.

Данную систему уравнений записать в матричной форме и решить ее с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Решение:

Выпишем для данной системы уравнений матрицу коэффициентов при неизвестных \mathbf{A} и столбец свободных членов \mathbf{H} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель Δ и алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы \mathbf{A} :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

следовательно, матрица \mathbf{A} имеет обратную матрицу \mathbf{A}^{-1} .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Тогда по формуле (24) обратная матрица равна

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (23) находим решение данной системы уравнений в матричной форме:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + (-1) \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 - 1 \cdot 8 + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Основная литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : Учебник для вузов / Д.В.Беклемишев. — 9-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2007. — 312с.
2. 3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие для втузов / под ред. Н.В.Ефимова. — 17-е изд., стер. — СПб. : Профессия, 2006. — 200с.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. — 9-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2007. — 240 с.

5. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа : учеб. пособие для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович .— 14-е изд., стер. — СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008 .— 736 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для вузов. в 2 т., Т.1 / Н.С.Пискунов .— Изд.стер. — М. : Интеграл-Пресс, 2007 .— 416с
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для вузов. в 2 т., Т.2 / Н.С.Пискунов .— Изд.стер. — М.: Интеграл-Пресс, 2006 .— 544с.
8. Сборник задач по математике для вузов : в 4 ч. Ч.1 / А.В.Ефимов [и др.]; под ред. А.В.Ефимова, А.С.Поспелова .— М. : Физматлит, 2004 .— 288с.
9. Сборник задач по математике для вузов : в 4 ч. Ч.2 / А.В.Ефимов [и др.]; под ред. А.В.Ефимова, А.С.Поспелова .— 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2004 .— 432с.

2. Дополнительная литература

1. Аверин В.В. Математика: курс лекций: учеб. пособие/ В.В. Аверин, М.Ю. Соколова, Д.В.Христинич: ТулГУ – Тула: Изд. ТулГУ, 2010, Ч.1- 254с.
 2. Аверин В.В. Математика: курс лекций: учеб. пособие/ В.В. Аверин, М.Ю. Соколова, Д.В.Христинич: ТулГУ – Тула: Изд. ТулГУ, 2010, Ч.2- 275с.
- Ильин В.А., Аналитическая геометрия : учебник для вузов / В.А.Ильин, Э.Г.Позняк .— 6-е изд.,стер. — М. : Физматлит, 2003 .— 240с.
- 3 Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христинич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. – Режим доступа :<https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214370663049600009433>, по паролю
4. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христинич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. – Режим доступа по паролю :<https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214412943155100008498>, по паролю