

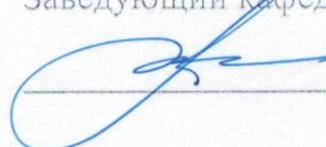
МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева  
Кафедра систем автоматического управления

Утверждено на заседании кафедры  
«Системы автоматического управления»  
«13» января 2021 г., протокол № 8

Заведующий кафедрой



О.В.Горячев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
по выполнению лабораторных работ  
по дисциплине (модулю)

«Моделирование приборов и систем»

основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы специалитета

по специальности

24.05.06 Системы управления летательными аппаратами

со специализацией

Системы управления беспилотными летательными аппаратами

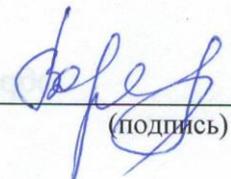
Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 240506-01-21

Тула 2021 год

**Разработчик(и) методических указаний**

Воробьев В.В., профессор, к.т.н., доцент  
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

  
(подпись)

Институт высокопроизводительных систем им. В.П. Лаврова  
Кафедра систем автоматического управления

Утверждено на заседании кафедры  
«Системы автоматического управления»  
«28» апреля 2017 г., протокол № 12

Заведующий кафедрой  
  
В.В. Воробьев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
по выполнению лабораторных работ  
по дисциплине (модулю)

«Системы автоматического управления»

основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы специализации

по специальности  
24.02.06 Системы управления летательными аппаратами

со специализацией  
Системы управления движением летательных аппаратов

Формы обучения: 

Идентификационный номер образовательной программы: 240206-01-17

Тема 2017 год

## ИЗУЧЕНИЕ ПРИЕМОВ РАБОТЫ В СИСТЕМЕ MATLAB

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** отработать навыки работы в системе научных исследований Matlab.

Достижение поставленной цели связано с необходимостью решения следующих задач:

- изучить интерфейс системы Matlab;
- научиться работать в системе Matlab в режиме калькулятора;
- изучить окно редактора/отладчика и возможности работы в нем;
- научиться строить простейшие графики.

### 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

#### 2.1. Рабочее окно.

После запуска программы Matlab на дисплее компьютера появляется её рабочее окно, содержащее меню, панель инструментов с кнопками, окно рабочей области Workspace, окно Command History и клиентскую часть окна со знаком приглашения `>>`, которое принято называть командным окном Command Window системы Matlab.

Строка меню (File, Edit, View и т.д.) во многом схожа с аналогичной строкой редактора Microsoft Word. Расположенный ниже ряд пиктограмм также выполняют те же операции, что и в редакторе Word (за исключением 1-ой пиктограммы, запускающей пакет SimuLink).

Окно Command History содержит по порядку введённые ранее команды. Рабочая область Workspace – это область памяти Matlab, в которой размещены переменные системы.

#### 2.2. Работа в системе Matlab в режиме калькулятора

В клиентской части командного окна Command Window Matlab после знака приглашения `>>` можно вводить различные числа, имена переменных и знаки операций, что в совокупности составляет некоторые выражения.

Основные арифметические операции выполняются с помощью традиционных знаков: "+", "-", "\*", "/" (деление слева направо), "\" (деление справа налево), "^" (возведение в степень). Интерес представляют операции поэлементного умножения и деления: ".\*", "./", ".\". Знак "=" соответствует операции присваивания.

Переменные в системе Matlab — это имеющие имена объекты, способные хранить некоторые, обычно разные по значению, данные. В зависимости от этих данных переменные могут быть числовыми или символьными, векторными или матричными и т.д. Типы переменных заранее не декларируются. Они определяются выражением, значение которого присваивается переменной.

Имя переменной (ее идентификатор) может содержать не более 31 символа. Имя любой переменной не должно совпадать с именами других переменных, функций и процедур системы, т.е. оно должно быть уникальным.

Имя должно начинаться с буквы, может содержать цифры и символ подчеркивания `_`. Недопустимо включать в имена переменных пробелы и специальные знаки, например `+`, `-`, `/`.

Нажатие клавиши `Enter` заставляет систему Matlab вычислить выражение или, если оно не вычисляется, повторить его. Результат присваивается параметру `"ans"`, если выражение не было присвоено какой-либо переменной (пример 1).

**Пример 1.**

```
>> 2+3
```

```
ans=
```

```
5
```

или

```
>> a=2+3
```

```
a=
```

```
5
```

Чтобы информация не дублировалась нужно завершить строку символом `;"`, который означает конец строки (пример 2).

**Пример 2.**

```
>> a=2
```

```
a =
```

```
2
```

```
>> b=4;
```

```
>> c=a+b
```

```
c =
```

```
6
```

Таким образом, в командном окне Matlab пользователь может сразу писать команды, образующие отдельные вычисления или целую программу.

Командой `clc` можно стереть видимое содержимое командного окна, однако это не затронет содержимого рабочего пространства.

По мере увеличения размера рабочего пространства эффективность работы будет снижаться. Поэтому, когда исчезает необходимость в хранении ряда переменных в текущем сеансе работы, их можно стереть из памяти компьютера командой `clear имя1 имя2`, удаляющей из рабочего пространства переменные с именами `имя1` и `имя2`. Чтобы удалить сразу все переменные, нужно использовать команду `clear`.

В системе Matlab определено несколько базовых типов данных, каждый из которых является тем или иным видом массива. Это означает, что все данные системы Matlab являются массивами.

Ниже приведены способы ввода векторов (одномерный массив) и матриц (двумерный массив).

<b>Пример 3.</b> >> a=[1 3 4] a= 1 3 4	<b>Пример 4.</b> >> a=-0.01:0.3:0.8 a= -0.01 0.29 0.59	<b>Пример 5.</b> >> a=-1.1:1.9 a= -1.1 -0.1 0.9 1.9	<b>Пример 6.</b> >> a=[3 5 2;4 5 6;7 8 9] a= 3 5 2 4 5 6 7 8 9
---	---	--	---

Формат представления чисел на экране дисплея по желанию пользователя можно регулировать с помощью команды **format**. Эта команда определяет лишь форму вывода результатов и не влияет на точность вычислений, а также на формат представления и хранения чисел (в системе Matlab вычисления всегда выполняются с двойной точностью).

По умолчанию при загрузке системы устанавливается формат **short**. Он отображает только 5 значащих десятичных цифр числа. Другие форматы позволяют отобразить большее число десятичных цифр или используют экспоненциальное представление чисел.

Команда	Формат	Пример
format	По умолчанию, соответствует format short	3.1416
format short	Короткое число с фиксированной точкой: 5 десятичных цифр	3.1416
format long	Длинное число с фиксированной точкой: 15 десятичных цифр	3.14159265358979
format short e	Короткое число с плавающей точкой: 5 десятичных цифр	3.1416e+00
format long e	Длинное число с плавающей точкой: 15 десятичных цифр	3.141592653589793e+000
format short g	Лучшая форма из 5 десятичных цифр	3.1416
format long g	Лучшая форма из 15 десятичных цифр	3.14159265358979
format hex	Шестнадцатеричное число	400921fb54442d18
format bank	Коммерческий формат	3.14
format rat	Рациональное число	355/113
format +	Символическое отображение числа: положительное + отрицательное - нуль пробел	+
format compact	Подавление пробела между строками	
format loose	Восстановление пробела между строками	

Формат числа можно также задать в меню *File* в разделе *Preferences* с помощью функции *Numeric Format*. Наиболее часто используемыми из 12-ти возможных являются форматы *Short* и *Long* – краткий и длинный форматы чисел.

### Пример 7.

Вычислим значение функции  $\log(4)$ :

```
>> log(4)
ans =
    1.3863
```

### Пример 8.

```
>> format long
>> log(4)
ans =
    1.38629436111989
```

## 2.3. Визуализация результатов вычислений. Графика

Графические возможности системы Matlab являются мощными и разнообразными. В первую очередь целесообразно изучить наиболее простые в использовании возможности. Их часто называют высокоуровневой графикой. Это название отражает тот факт, что пользователю нет никакой необходимости вникать во все тонкие и глубоко спрятанные детали работы с графикой.

Matlab показывает графические объекты в специальных графических окнах, имеющих в заголовке слово **Figure** (фигура, изображение).

Рассмотрим двумерную графику. Вот несколько действий, которые позволят добиться необходимой визуализации:

ДЕЙСТВИЕ	ПРИМЕРЫ
<b>Построить график функции одной вещественной переменной:</b> 1) вычислить массив $y$ значений функции для заданного набора аргументов (или задать массивы аргумента и значений функции) 2) вызов функции <i>plot</i> .	<pre>&gt;&gt; x=0:0.01:2; &gt;&gt; y=sin(x); &gt;&gt; plot(x,y);</pre> <pre>&gt;&gt; x=[0.5 2 3 ]; &gt;&gt; y=[1 5 2]; &gt;&gt; plot(x,y);</pre>
<b>Построить два и более графиков в одной системе координат:</b> команда <i>hold on</i> или функция <i>plot(x1,y1,x2,y2,...,xn,yn)</i> . Последняя строит графики разным цветом	<pre>&gt;&gt; x=0:0.01:2; &gt;&gt; y1=sin(x); y2=cos(x); &gt;&gt; plot(x,y1) &gt;&gt; hold on &gt;&gt; plot(x,y2);</pre> <pre>&gt;&gt;plot(x,y1,x,y2);</pre>
<b>Построить <math>k</math> графиков в разных графических окнах:</b> перед функцией <i>plot</i> (начиная со второй) запись команды <i>figure</i> .	<pre>&gt;&gt; plot(x1,y1); &lt;...&gt; &gt;&gt; figure; plot(x2,y2); &lt;...&gt; &gt;&gt; figure; plot(x3,y3); &lt;...&gt; &gt;&gt; figure; plot(xk,yk);</pre>
<b>Построить в одном графическом окне, но на отдельных графических полях, <math>k</math> графиков:</b> перед функцией	<pre>&lt;...&gt; &gt;&gt; subplot(2,1,1); &gt;&gt; plot(x1,y1);</pre>

<i>plot</i> используется функция <i>subplot(m,n,p)</i> . Здесь <i>m</i> указывает на сколько частей графическое окно делится по вертикали, <i>n</i> – по горизонтали, а <i>p</i> является номером подокна, в котором будет строиться график.	<pre>&gt;&gt; subplot(2,1,2); &gt;&gt; plot(x2,y2); &lt;...&gt;</pre>
<b>Построить график в полярных координатах:</b> функция <i>polar</i> .	<pre>&gt;&gt; phi=0:0.01:2*pi; r=sin(3*phi); &gt;&gt; polar(phi,r)</pre>

С помощью команды **plot** можно также регулировать толщину и вид линий и т.п. (с остальными вариантами синтаксиса команды **plot** можно ознакомиться с помощью справки Matlab – меню *help*).

Рассмотрим некоторые команды для оформления графиков построенных в окне **Figure**.

Используя команду **grid on** можно нанести измерительную сетку на всю область построения графика.

Для проставления различных надписей на полученном рисунке применяют функции:

*title('<текст>')* – заголовок графика;

*xlabel('<текст>')* – текст вдоль горизонтальной оси;

*ylabel('<текст>')* – текст вдоль вертикальной оси;

*text (x,y,'<текст>')* – надпись в произвольном месте рисунка, где *x,y* – координаты точки, с которой начинается надпись.

График можно сохранить в формате Matlab с расширением *fig* или в другом графическом формате.

Нужно отметить, что окно **Figure** имеет свою собственную строку меню и панель инструментов для оформления графиков. Однако при написании программ удобно использовать *команды* для работы с графическими окнами.

## 2.4. Редактор/отладчик

Работа в режиме калькулятора в системе Matlab, несмотря на довольно значительные возможности, имеет существенные недостатки. При решении серьезных задач возникает необходимость сохранения используемых последовательностей вычислений, а также их дальнейшей модификации. Иными словами, существует необходимость программирования решения задач.

Это может показаться отходом от важной цели, которая преследуется разработчиками большинства математических систем, — выполнения математических вычислений без использования традиционного программирования. Однако это не так. Множество математических задач решается в системе MATLAB без программирования. С использованием языков высокого уровня для их решения потребовалось бы написать и оттестировать сотни программ.

Программирование в системе Matlab является эффективным средством ее расширения и адаптации к решению специфических проблем. Оно реализуется с помощью языка программирования системы. Большинство объектов этого языка, в частности все команды, операторы и функции, одновременно

являются объектами входного языка общения с системой в командном режиме работы.

Так в чем же отличие входного языка от языка программирования? В основном – в способе фиксации создаваемых ими кодов. Сессии в командном режиме работы не сохраняются в памяти компьютера (ведение дневника не в счет). Хранятся только определения созданных в ходе их выполнения переменных и функций. А вот программы на языке программирования Matlab сохраняются в виде текстовых М-файлов. При этом могут сохраняться как целые программы в виде файлов-сценариев (*Script*-файлы, М-сценарии или управляющие программы)), так и отдельные программные модули — функции (файл-функции, М-функции). Кроме того, важно, что программа может менять структуру алгоритмов вычислений в зависимости от входных данных и данных, создаваемых в ходе вычислений.

Создание программы в системе Matlab осуществляется при помощи встроенного редактора/отладчика. Окно редактора появляется на экране, если вызвана команда *File>New>M-file* из рабочего окна.

### Пример 8.

Найдем корни системы линейных алгебраических уравнений:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 14$$

$$2x_1 - x_2 - 5x_3 = -15$$

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -4$$

Напишем файл-сценарий. При вычислении корней применим операцию обратного деления.

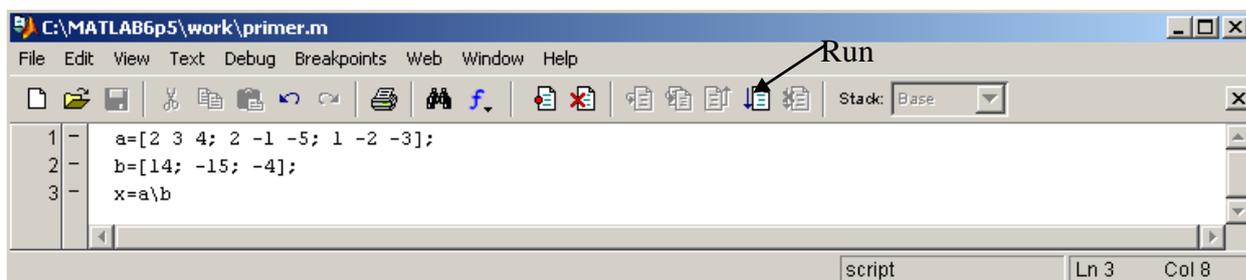


Рис. 1

Запуск программы осуществляется из редактора/отладчика выбором соответствующего пункта меню (*Debug>Run*) или нажатием F5 или с помощью соответствующей кнопки на панели инструментов (рис.1).

Результат вычисления можно увидеть в командном окне:

```
>> x =
     3
    -4
     5
```

В командном окне также выдаются сообщения об ошибках в М-файле.

### 3. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Объектом исследования является система MATLAB.

### 4. ЗАДАНИЕ НА ИССЛЕДОВАНИЕ

- 1) Познакомится с интерфейсом системы MATLAB.
- 2) Во всех заданиях требуется занести в некоторую переменную значения выражений при заданных  $x = -1.75 \cdot 10^{-3}$  и  $y = 3.1\pi$ , отобразить результат в различных форматах.

вариант	выражение	вариант	выражение
1.	$F = \left( \frac{e^x \sin y + 2^x \cos y}{200x + y} \right)^{2.3}$	8.	$Z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{x - \sin(y)}}{\sqrt{1 - x^2}}$
2.	$T = \sqrt{1 + \frac{\sin y + \sin 2y + \sin 3y}{e^x}}$	9.	$W = \left( 1 + \frac{\ln y}{x + \operatorname{tg} y} \right)^{1 + \frac{x + \operatorname{tg} y}{\ln y}}$
вариант	выражение	вариант	выражение
3.	$S = e^{(x - \sin y)(x + \sin y)}$	10.	$F = \sqrt{\frac{e^x \sin y + 2^x \cos y}{200x + y}}$
4.	$Q = \sqrt{e^x \sin y + e^{-x} \cos y}$	11.	$A = \sqrt[5]{x(1 + x)^2(1 + 2x)^3}$
5.	$S = \operatorname{arctg} \sqrt{\left  \frac{x - \sin y}{x + \sin y} + \frac{x + \sin y}{x - \sin y} \right }$	12.	$B = \frac{1 + \operatorname{arcsin}(\cos 2y)}{2^x + 3^{-x}}$
6.	$B = \left( \frac{2^x + 3^{-x} - 1}{x + \operatorname{arcsin}(\cos 2y)} \right)^2$	13.	$R = \operatorname{sh} \frac{(x + \ln y)^3}{\sqrt{ x - \ln y }}$
7.	$R = \operatorname{ch} \left[ (x + \ln y) \sqrt{ x - \ln y } \right]$	14.	$T = \frac{(\sin y + \sin 2y + \sin 3y)^4}{1 + \frac{\sin y + \sin 2y + \sin 3y}{e^x}}$

Примечание.

**sin(z)** – синус числа z; **cos(z)** – косинус числа z; **tan(z)** – тангенс числа z; **asin(z)** – арксинус (в радианах, в диапазоне от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ ); **acos(z)** – арккосинус (в радианах, в диапазоне от 0 до  $\pi$ ); **atan(z)** – арктангенс (в радианах, в диапазоне от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ ); **sinh(z)** – гиперболический синус числа z; **cosh(z)** – гиперболический косинус числа z; **tanh(z)** – гиперболический тангенс числа z; **exp(z)** – экспонента числа z; **log(z)** – натуральный логарифм числа z; **log10(z)** – десятичный логарифм числа z; **sqrt(z)** – квадратный корень из числа z; **abs(z)** – модуль числа z.

3) Изучить графические возможности системы MATLAB. Используя редактор/отладчик построить графики функций:

а)  $y_1 = f(x)$

б)  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$  в одном графическом окне и в одной системе координат;

в)  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$  в разных графических окнах;

г)  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$  в одном графическом окне, но на отдельных графических полях.

**!!!** Все графики должны содержать заголовки, обозначения осей, масштабную сетку, обозначения кривых. Для этого использовать соответствующие функции, а не команды настройки окна *Figure*.

Чтобы пометить график в отчет нужно в главном меню окна *Figure* выбрать *Edit>Copy Figure*, открыть файл отчета и выполнить команду *Ctrl+V*.

Далее приведены функции  $y = f(x)$  для вариантов задания:

вариант	функции	вариант	функции
1.	$y_1 = e^x, y_2 = 2 + x.$	8.	$y_1 =  x  + 4, y_2 = \sin(x).$
2.	$y_1 = \lg x, y_2 = 2x.$	9.	$y_1 = x^2 + x, y_2 = x^3.$
3.	$y_1 = \sqrt{x} + \cos(x), y_2 = x^4.$	10.	$y_1 = e^{0.5x}, y_2 = \sqrt{x^3}.$
4.	$y_1 = x^2 + 2x, y_2 = 2\sqrt{x}.$	11.	$y_1 = 5\ln(x), y_2 = \operatorname{tg}(x).$
5.	$y_1 = \ln(x) + \sqrt{x}, y_2 = \cos(x).$	12.	$y_1 = e^x + 3, y_2 = 2 + \sqrt{x}.$
6.	$y_1 = e^{x+5}, y_2 =  x .$	13.	$y_1 = 2x^3 + 4x^2 + 3, y_2 = \sin(2x).$
7.	$y_1 = \ln(x), y_2 = 2^x.$	14.	$y_1 = 4^{x+2}, y_2 = x.$

## 5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Запустить среду MATLAB (ярлык MATLAB на рабочем столе).
2. Изучить работу в систем MATLAB в режиме калькулятора, выполнив описанные в разделе теоретические сведения примеры.
3. Вычислить значение арифметического выражения (в режиме калькулятора). Отобразить результат в различных форматах.
4. Вызвать редактор/отладчик и используя графические возможности системы MATLAB построить графики указанных в задании функций.

## 6. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать:

1. Название и номер работы, цель работы.
2. Арифметическое выражение и результат его вычисления в различных форматах.
3. Тексты *Script*-файлов и графики функций с заголовками, обозначениями осей, масштабной сеткой, обозначениями кривых.

## 7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что представляет собой рабочее окно системы MATLAB?
2. Зачем предназначено командное окно Command Window?
3. Зачем используется символ «;» при написании переменных, выражений и т.д.?
4. Как задать вектор?
5. Опишите графические возможности системы MATLAB для визуализации двумерных графиков.
6. Для чего нужен редактор/отладчик?
7. Какое расширение имеют файлы системы MATLAB?

## СОЗДАНИЕ М-ФАЙЛОВ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

### 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ:

- познакомиться с возможностями программирования в системе MATLAB и научиться создавать простейшие программы. Достижение поставленной цели связано с необходимостью решения следующих задач:
- изучить редактор М-файлов MATLAB;
- научиться использовать М-файлы для решения дифференциальных уравнений.

### 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Программирование в системе MATLAB. Создание простейших программ.

Создание программы в системе MATLAB осуществляется при помощи встроенного редактора/отладчика. Окно редактора появляется на экране, если вызвана команда File>New>M-file из рабочего окна или нажата кнопка «белый лист» на панели инструментов рабочего окна.

В языке MATLAB имеются программы двух типов: так называемые *Script*-файлы (М-сценарии) (файл-сценарии или управляющие программы) и файл-функции (М-функции). Все программы должны иметь расширение имен файлов \*.m, т.е. их нельзя различить по типу файла.

Опишем их по следующему плану: 1) предназначение; 2) используемые аргументы; 3) оперирование с данными; 4) структура; 5) запуск.

#### М-сценарий:

1. Предназначен для автоматизации последовательности шагов, которые нужно выполнять много раз.
2. Не использует входных и выходных аргументов.
3. Оперирование с данными из рабочей области.
4. Структура М-сценария в отличие от М-функции не включает строку определения функции.
5. Запуск из Редактора/Отладчика выбором соответствующего пункта меню (Debug>Run) или нажатием F5.

#### М-функция:

1. Предназначена для расширения возможностей языка MATLAB (библиотеки функций, пакеты прикладных программ).
2. Использует входные и выходные аргументы.
3. По умолчанию, внутренние переменные являются локальными по отношению к функции.
4. Структура:

1) **Строка определения функции** задаёт имя, количество и порядок следования входных и выходных аргументов:

**function <ПКВ> =<имя функции>(<ПВВ>),**

ПКВ – перечень конечных величин, ПВВ – перечень входных величин.

Например: **function y = funa(x,a)**, где *function* - ключевое слово, определяющее М-функцию; *y* - выходной аргумент; *funa* - имя функции; *x*, *a* - входные аргументы.

Если функция имеет более одного выходного аргумента, список выходных аргументов помещается в квадратные скобки: **function [x, y, z] = funb(t, p, r)**.

! Имя файла и имя функции должны совпадать.

Если имя файла и имя функции в строке определения функции разные, то при запуске используется имя файла, а внутреннее имя игнорируется. На имена М-функций налагаются те же ограничения, что и на имена переменных - их длина не должна превышать 31 символа; они должны начинаться с буквы; остальные символы могут быть любой комбинацией букв, цифр и подчеркиваний.

2) **Комментарий** выводится на экран после знака % в любом месте. Первая строка комментария отражается в Окне команд, когда пользователь запускает команду **help <имя\_функции>**.

3) **Тело функции** - это программный код, который реализует вычисления и присваивает значения выходным аргументам.

5. Запуск из Окна команд с описанием входных аргументов.

**Пример 1.** Дана функция **myfun(a,b)**, считающая среднеарифметическое двух чисел (рис. 1).

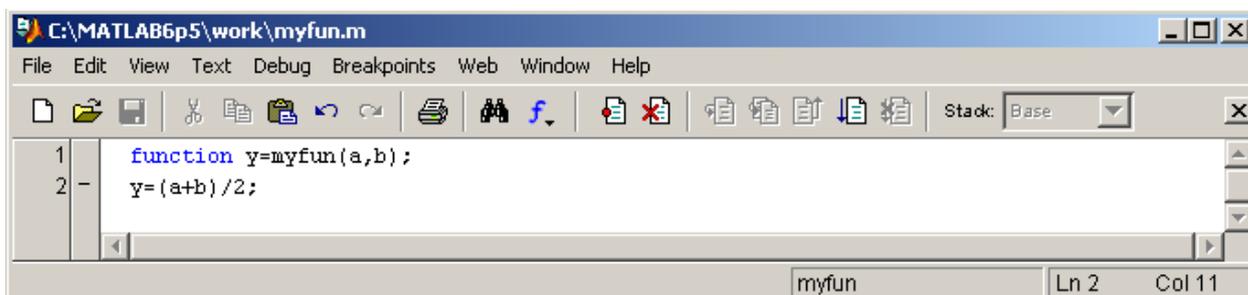


рис. 1

Её запуск из командного окна Command Window:

```
>> m = 7.5;  
>>n = 3.342;  
>>c = myfun(m, n)  
c = 5.421  
>>c = myfun(7.5, 3.342)  
c =5.421
```

Функция должна находиться в текущей директории. Имена входных переменных могут, но не обязаны совпадать с именами, указанными в строке определения функции.

При оперировании с М-файлами можно использовать следующие команды:

- вывести на экран имена файлов текущего каталога: **what**;
- вывести на экран текст М-файла fact.m: **type fact**.

**Пример 2.** Создать программу, позволяющую строить график функции  $y = (x)$ , заданных параметрическими формулами:

$$x = 4e^{-0.05t} \sin(t),$$

$$y = 0.2e^{-0.1t} \sin(2t).$$

Выберем диапазон изменения параметра  $t$  от 0 до 50 с шагом 0.1.

Сначала напишем М-функцию для заданной функции (рис. 2).

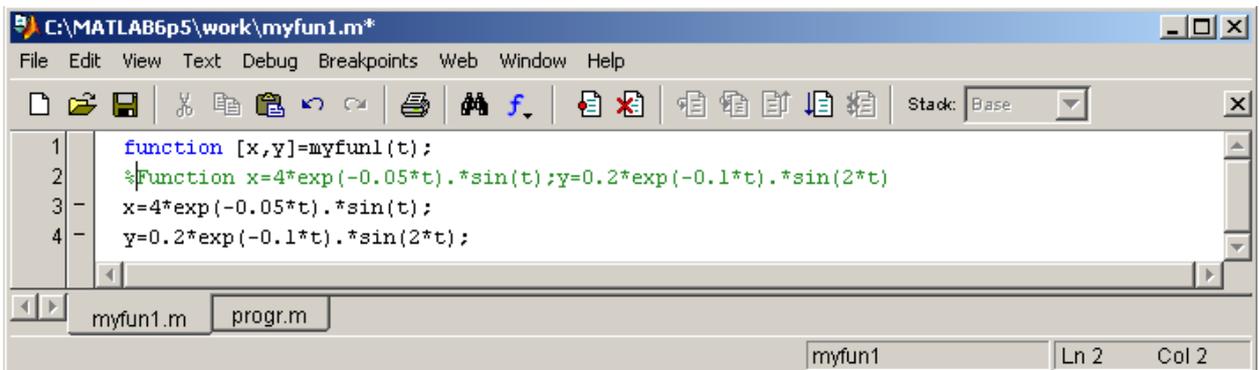


рис. 2

В программе используется арифметическая операция – *поэлементное умножение массивов* (.\*). Отличие указанной операции от скалярного и векторного умножения векторов показано в примерах 1-3.

Операция «'» – транспонирование вектора.

**Пример 3.**

```
>>a = [1 2 3];
```

```
>>b = [2 3 6];
```

```
>>c=a.*b
```

```
c=
```

```
2 6 18
```

**Пример 4.**

```
>>a = [1 2 3];
```

```
>>b = [2 3 6];
```

```
>>c=a*b'
```

```
c=
```

```
26
```

**Пример 5.**

```
>>a = [1 2 3];
```

```
>>b = [2 3 6];
```

```
>>c=a'*b
```

```
c=
```

```
2 3 6
```

```
4 6 12
```

```
6 9 18
```

Затем, набирая совокупность операторов, напишем *М-сценарий* (рис. 3) и получим *график функции*.

Запуск на выполнение М-сценария осуществляется с помощью кнопки Run или нажатием F5.

А'

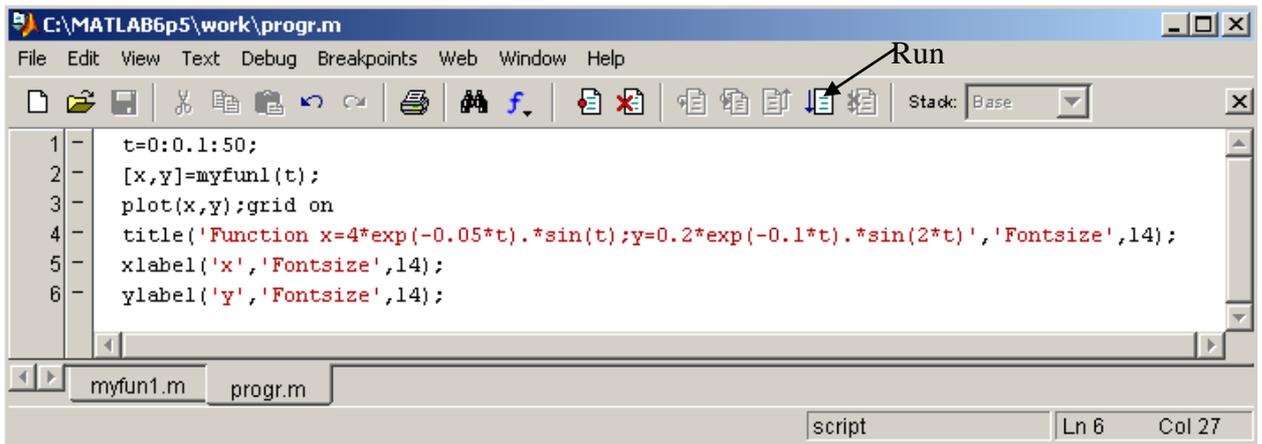


рис. 3

## 2.2. Решение дифференциальных уравнений

Система MATLAB имеет несколько функций, реализующих численные методы Рунге-Кутты третьего, четвертого, пятого и шестого порядков с автоматическим выбором шага, для решения дифференциальных уравнений и систем высокого порядка в форме Коши с табличным и графическим представлением результатов.

Рассмотрим функцию, реализующую *метод Рунге-Кутты 4-го порядка*:

$$[t, y]=ode45 ('<имя функции>', tspan, y0),$$

где <имя функции> – имя М-функции, в которой вычисляется вектор-функция  $f(y, t)$ , т.е. правые части системы дифференциальных уравнений;

$t$  – массив значений аргумента, соответствующих шагам интегрирования;

$y$  – матрица проинтегрированных значений фазовых переменных, в которой каждый столбец соответствует одной из переменных состояния, а строка содержит значения переменных состояния, соответствующих определенному шагу интегрирования;

$tspan$  – вектор-строка  $[t0\ tfinal]$ , содержащая два значения:  $t0$  – начальное значение аргумента  $t$ ;  $tfinal$  – конечное значение аргумента  $t$ ;

$y0$  – вектор начальных значений переменных состояния.

Технология решения дифференциальных уравнений такова:

1. Создание новой функции, представляющей собой М-функцию вычисления правых частей системы дифференциальных уравнений (уравнение должно быть в форме Коши).

2. Ввод функции **ode45** (в командном окне Command Window или в редакторе/отладчике, оформив как М-сценарий). Функция **ode45** требует, чтобы вектор производных был обязательно столбцом.

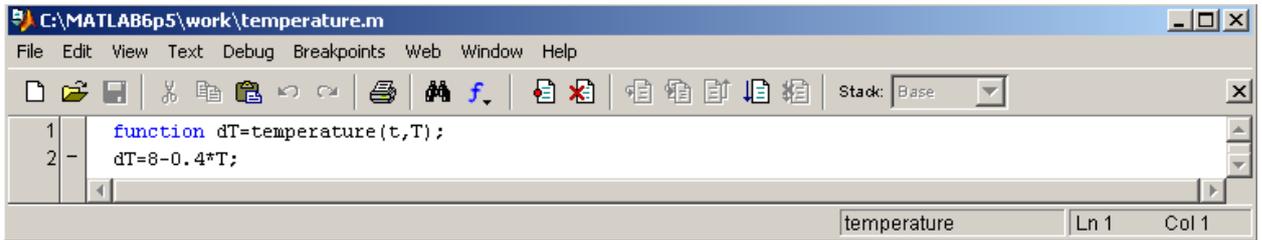
### Пример 6

Дано уравнение

$$\dot{T}(t) = -0.4(T(t) - 20), \quad T(0) = 90, \quad (1)$$

которое описывает закон охлаждения тела разогретого до температуры  $T=90^{\circ}$  и помещенного в среду температуры  $T=20^{\circ}$ . Требуется построить зависимость  $T(t)$  на интервале времени  $t \in [0; 15]$ .

M-функция правой части уравнения (1) имеет вид, представленный на рис. 4.



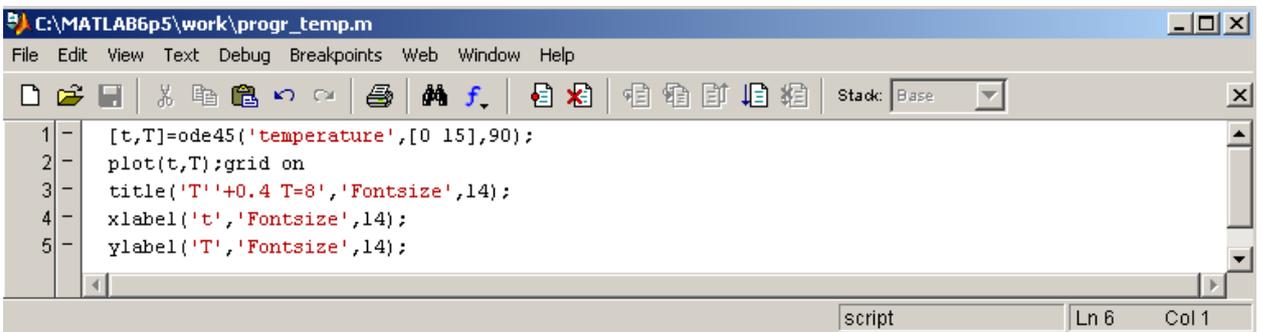
```
C:\MATLAB6p5\work\temperature.m
File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help
function dT=temperature(t,T);
dT=8-0.4*T;
```

рис. 4

На рис. 5 приведен M-сценарий построения графика функции  $T(t)$ .

На рис. 5:

$t$ - массив значений аргумента – в нашем случае время интегрирования;  
 $T$ - вектор значений температуры.



```
C:\MATLAB6p5\work\progr_temp.m
File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help
[t,T]=ode45('temperature',[0 15],90);
plot(t,T);grid on
title('T'+0.4 T=8','FontSize',14);
xlabel('t','FontSize',14);
ylabel('T','FontSize',14);
```

рис. 5

Результат выполнения программы *progr\_temp.m* представлен на рис. 6.

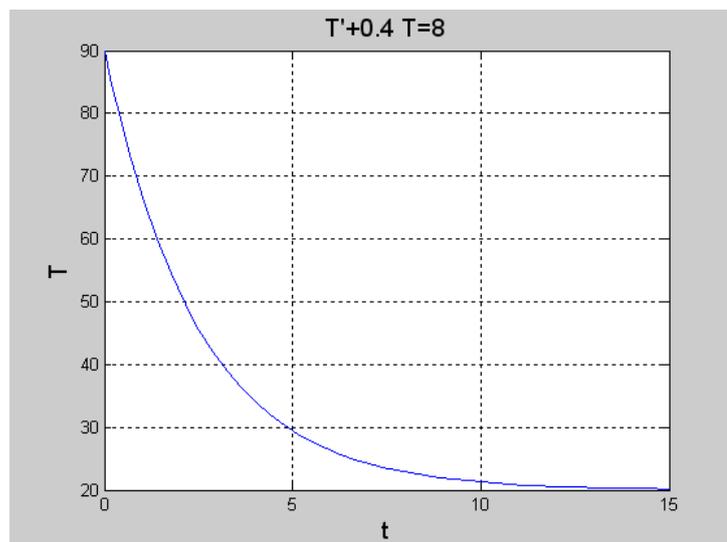


рис. 6

### Пример 7

Дано уравнение Дуффинга, которое демонстрирует возникновение стохастических колебаний для ряда нелинейных задач, в частности хаотическую

динамику цепи с нелинейной индуктивностью или продольный изгиб упругой балки. Уравнение имеет вид

$$\ddot{x}(t) + kx(t) + x^3(t) = B \cos(t). \quad (2)$$

Динамика определяется параметрами  $k, B$ , а также начальными условиями. Варьируя параметры, можно наблюдать различные режимы движения: от периодических до хаотических.

Пусть  $\dot{x}(0) = 0, x(0) = 2.5, k = 0.3, B = 2, t \in [0; 50]$ .

M-функция правых частей уравнения (2) в форме Коши имеет вид:

```
function dx=duffing(t,x);
dx(1)=x(2);
dx(2)=2*cos(t)-0.3*x(1)-x(1).^3;
dx=dx';           % вектор dx должен быть вектором столбцом
```

Далее приведен текст M-сценария, результат выполнения которого приведен на рис. 7:

```
[t,X]=ode45('duffing',[0 50],[2.5 0]);
subplot(3,1,1);
plot(t,X(:,1));grid on           % строим график x(t)
title('X'''+3X+X^3=2cos(t)','FontSize',14);
xlabel('t','FontSize',14);
ylabel('X','FontSize',14);
subplot(3,1,2);
plot(t,X(:,2));grid on           % строим график x'(t)
xlabel('t','FontSize',14);
ylabel('X''','FontSize',14);
subplot(3,1,3);
plot(X(:,1),X(:,2));grid on      % строим график x'(x) – фазовый портрет
axis([-5 5 -5 5]);              % устанавливаем жесткие границы поля графика
xlabel('X','FontSize',14);
ylabel('X''','FontSize',14);
```

Здесь  $t$ - массив значений аргумента – в нашем случае время интегрирования;  $X$  - матрица проинтегрированных значений фазовых переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

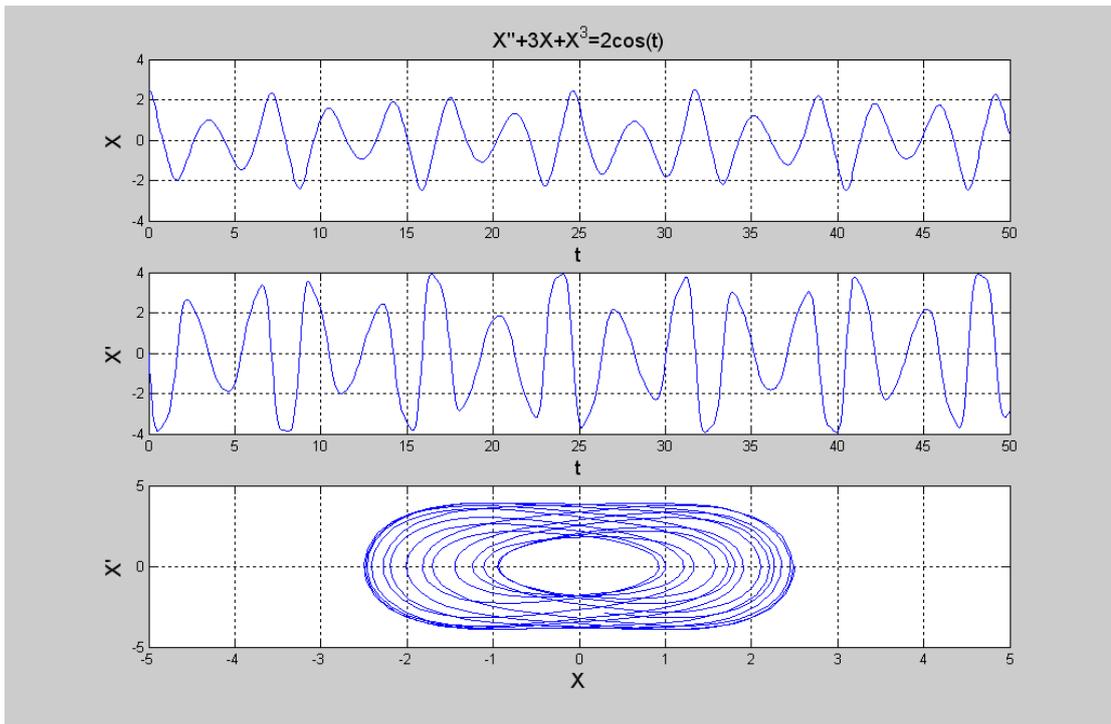


рис. 7

### 3. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Объектом исследования является система MATLAB.

### 4. ЗАДАНИЕ НА ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Познакомитесь с интерфейсом редактора MATLAB, позволяющего создавать М-файлы.

2. Создать М-функцию для функции  $f(x) = 3\sin(x + 0.25\pi)$ . Найти значения функции на промежутке  $[0; \pi]$  с шагом  $\pi/10$  и построить ее график на промежутке  $[-3\pi; 3\pi]$  с шагом  $\pi/100$ .

3. С помощью использования М-файлов найти  $y(t)$  и  $\dot{y}(t), y(t), \dot{y}(y)$  дифференциальных уравнений первого и второго порядка соответственно. Для уравнения второго порядка построить в одном графическом окне на одном графическом поле графики  $\dot{y}(t), y(t)$ , а на другом  $\dot{y}(y)$ .

Уравнения выбираются в соответствии с таблицей 1.

Табл. 1.

Вариант	Уравнение первого порядка	Уравнение второго порядка
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9
10	10	10
11	11	11

Далее приведены дифференциальные уравнения для вариантов задания. Начальные условия и время моделирования выбрать самостоятельно.

**Уравнения первого порядка:**

Вариант 1.  $y' = \frac{2y - t - 5}{2t - y + 4}$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 2.  $y' = \frac{2(y+2)^2}{(t+y-1)^2}$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 3.  $y \sin t + y' \cos t = 1$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 4.  $(t^2 y^2 - 1)y' + 2ty^3 = 0$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 5.  $ty' + 1 = e^t$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 6.  $ty' + y + y^2 \ln t = 0$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 7.  $y' - y \cdot \operatorname{tg} t + y^2 \cos t = 0$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 8.  $y' + \frac{2y}{t} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 t}$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 9.  $ty' - 4y - t^2 \sqrt{y} = 0$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 10.  $y' = \frac{t}{\cos y} - \operatorname{tg} y$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 11.  $y - y' \cos t = y^2 \cos t (1 - \sin t)$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

**Уравнения второго порядка:**

Вариант 1.  $y'' = t + \sin t$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 2.  $ty'' = y'$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 3.  $2ty'' = (y')^2 + 1$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 4.  $1 + (y')^2 = 2yy''$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 5.  $yy'' = (y')^2 - (y')^3$ ,  $y'(o) = \dots$ ,  $y(o) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 6.  $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$ ,  $y'(o) = \dots$ ,  $y(o) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 7.  $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$ ,  $y'(o) = \dots$ ,  $y(o) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 8.  $yy'' - yy' \ln y = (y')^2$ ,  $y'(o) = \dots$ ,  $y(o) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 9.  $t^4 y'' = (y - ty')^3$ ,  $y'(o) = \dots$ ,  $y(o) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 10.  $2(y')^2 = y''(y - 1)$ ,  $y'(o) = \dots$ ,  $y(o) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

Вариант 11.  $tyy'' + t(y')^2 = 3yy'$ ,  $y'(o) = \dots$ ,  $y(o) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

## 5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Запустить среду MATLAB (ярлык MATLAB на рабочем столе). Появится окно среды MATLAB.

2. Запустить редактор М-файлов. Создать М-функцию для функции  $f(x) = 3\sin(x + 0.25\pi)$ .

3. Открыть командное окно Command Window и найти значения функции на промежутке  $[0; \pi]$  с шагом  $\pi/10$ . Построить график функции на промежутке  $[-3\pi; 3\pi]$  с шагом  $\pi/100$ .

Можно написать М-сценарий поиска значения и построения графика функции.

4. Запустить редактор/отладчик М-файлов. Создать М-функцию правой части уравнения первого порядка и создать М-сценарий для поиска решения  $y(t)$  и построения его графика.

5. Создать М-функцию правых частей уравнения второго порядка и создать М-сценарий для поиска  $\dot{y}(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\dot{y}(y)$  и построения соответствующих графиков.

## 6. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать:

1. Название и номер работы, цель работы.

2. Текст М-функции для функции  $f(x) = 3\sin(x + 0.25\pi)$ . Значения функции на промежутке  $[0; \pi]$  с шагом  $\pi/10$  и график функции на промежутке  $[-3\pi; 3\pi]$  с шагом  $\pi/100$ .

3. Текст М-функции правой части уравнения первого порядка и М-сценария. График найденного решения  $y(t)$ .

4. Текст М-функции правых частей уравнения второго порядка и М-сценария. Графики найденных функций  $\dot{y}(t), y(t), \dot{y}(y)$ .

## 7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличается М-сценарий от М-функции?
2. С какой строки начинается М-функция?
3. Опишите функцию для решения дифференциальных уравнений?

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

### РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПАКЕТЕ SIMULINK

#### 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ:

познакомиться с пакетом имитационного моделирования SimuLink и изучить возможности решения с его помощью дифференциальных уравнений. Достижение поставленной цели связано с необходимостью решения следующих задач:

- изучить интерфейс и библиотеку блоков пакета SimuLink;
- научиться создавать s – модели;
- научиться решать дифференциальные уравнения с помощью составления их s – моделей и с помощью специального решателя.

#### 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

##### 2.1. Пакет Simulink

Пакет является ядром интерактивного программного комплекса, предназначенного для имитационного моделирования линейных и нелинейных динамических систем и устройств, представленных своей функциональной блок-схемой, именуемой s-моделью или просто моделью.

Для построения функциональной блок-схемы моделируемых устройств SimuLink имеет обширную библиотеку блоков *SimuLink Library Browser* и удобный редактор блок-схем. Он основан на графическом интерфейсе пользователя и по существу является типичным средством визуального программирования.

Запуск пакета SimuLink можно произвести выбрав в главном окне команду *File>New>Model* или нажав соответствующую пиктограмму на панели инструментов.

В первом случае откроется окно пакета Simulink, в котором создается s-модель и чтобы открыть библиотеку блоков необходимо выбрать в меню этого окна команду *View>Library browser* или нажать пиктограмму *Library Browse*.

Во втором случае откроется библиотека блоков *SimuLink Library Browse* и чтобы открыть окно, в котором будет создаваться s-модель необходимо выбрать в меню команду *File>New>Model* или нажать пиктограмму *Create a new model*.

Рассмотрим некоторые разделы библиотеки блоков пакета SimuLink.

1. Раздел *Sources* содержит блоки — источники воздействий. Блоки источников воздействий (сигналов) имеют настолько очевидные обозначения, что не имеет смысла приводить их названия .

2. Раздел *Sinks* — содержит блоки регистрирующих компонентов (приемники). Среди них можно выделить:

- Блоки, играющие роль смотровых окон: *Scope* - выводит график зависимости величины, подаваемой на его вход от модельного времени; *XY Graph*

- обеспечивает построение графика зависимостей одной моделирующей величины от другой; *Display* - отображает численное значение входной величины;

- Блоки для сохранения результатов:

*To file* - сохранение результатов моделирования в файл; *To Workspase* - сохраняет результаты в рабочем пространстве;

- Блок управления моделированием *Stop Simulation*, позволяющий прервать моделирование при выполнении некоторых условий; блок срабатывает в случае, если на его вход поступает ненулевой сигнал.

3. Раздел *Continuous* содержит перечень линейных блоков: *Integrator* - идеальное интегрирующее звено; *Derivative* - идеальное дифференцирующее звено; *Transfer Fcn* - определение линейного звена через задание его ПФ.

4. Раздел *Math Operation* содержит перечень блоков математических операций: *Gain* - звено усилитель; *Sum* - звено сумматор; *Product* - звено, осуществляющее перемножение двух величин; *Math Function* позволяет задать для преобразования входного сигнала элементарные не тригонометрические и не гиперболические функции, такие как вычисление экспоненты, натурального и десятичного логарифмов, возведение в степень, извлечение квадратного корня и т.д.; *Trigonometric Function* обеспечивает преобразование входного сигнала с помощью одной из тригонометрических функций:  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ .

5. Раздел *Signal Routing* содержит перечень блоков, преобразующих сигнал и вспомогательные блоки. Среди них блоки: *Mux* - выполняет объединение входных величин в один выходной вектор; *Demux* - выполняет обратную функцию - разделяет входной вектор на заданное число компонентов; *Manual Switch* - позволяет вручную переключать входы с помощью двойного щелчка мыши.

5. Раздел *User-Defined Functions* позволяет реализовать функции, создаваемые пользователем.

Используя библиотеку блоков, пользователь с помощью мыши (для этого используется технология *Drag-and-Drop* (перетаски и вставь)) переносит нужные компоненты с палитры на рабочий стол пакета SimuLink и соединяет линиями входы и выходы блоков. Таким образом, создается блок-схема системы или устройства.

Для настройки параметров блока следует после установки блока дважды щелкнуть мышью на его изображении. При этом появится окно параметров настройки блока.

Чтобы соединить линией выход одного блока со входом другого необходимо подвести курсор к нужному выходу блока, нажать левую кнопку мыши и, не отпуская кнопку, переместить курсор ко входу другого блока и затем отпустить кнопку мыши.

Чтобы образовать ответвление от существующей линии, необходимо установить курсор в точку ответвления, нажать клавишу  $\text{Ctrl}$  и левую кнопку мыши и удерживая их нажатыми провести линию.

## 2.2. Создание s - моделей в пакете Simulink

Рассмотрим создание s – моделей систем, объектов, процессов и т.д., которые описываются дифференциальными уравнениями.

### Пример1

Дано уравнение

$$\dot{T}(t) = -0.4(T(t) - 20), \quad T(0) = 90, \quad (1)$$

которое описывает закон охлаждения тела разогретого до температуры  $T=90^{\circ}$  и помещенного в среду температуры  $T=20^{\circ}$ . Требуется построить зависимость  $T(t)$  на интервале времени  $t \in [0;15]$ .

Для построения схемы решения (рис. 1) (s – модели) уравнения (1) в *Simulink* используется блок *Integrator* (раздел *Continuous*). На его вход подается производная, а на выходе получают величину  $T$ . Начальное условие задается в окне настройки блока *Integrator* в строке редактирования *Initial condition*.

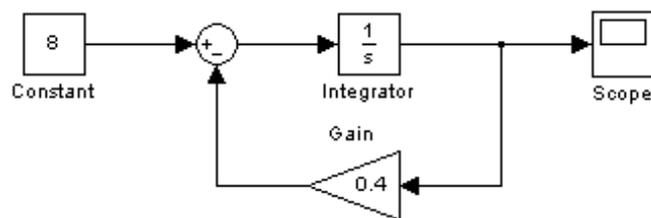


рис. 1

Блоки *Sum* (сумматор) и *Gain* (усилитель) (раздел *Math Operations*) необходимы для формирования значения  $\dot{T}(t)$  в соответствии с ОДУ.

Для получения постоянного сигнала  $8 \cdot 1(t)$  используется блок *Constant* (раздел *Sources*).

Полученное значение  $T(t)$  подается на вход блока *Scope* (раздел *Sinks*) - приемник сигналов. При открытии данного блока появляется график решения (рис. 2). Установить масштабы осей, соответствующие полученному решению можно, нажав кнопку *Autoscale* (пиктограмма с изображением бинокля).

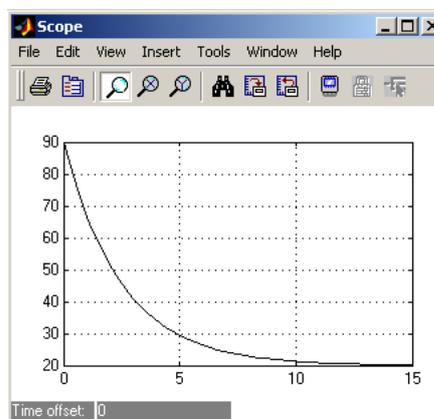


рис. 2

Окно блока *Scope* отображающее графики сигналов имеет очень ограниченные возможности по изменению внешнего вида окна и графиков. Фактически можно изменять лишь масштаб отображения графиков, а команды

изменения цветов линий и фона окна, толщины линий, размера и типа шрифтов и т.п. недоступны. Чтобы получить доступ к этим возможностям необходимо после проведения расчетов открыть окно блока Scope и в командном окне Command Window ввести следующие команды:

`set(0,'ShowHiddenHandles','On')` (2)

`set(gcf,'menubar','figure')` (3)

После выполнения этих команд в окне блока Scope появится строка меню (рис.2). Используя команды меню Edit>Figure Properties, Edit>Axes Properties и Edit>Current Object Properties можно изменить внешний вид окна, осей и самих графиков в соответствии со своими требованиями.

Чтобы поместить в отчет требуемые графики необходимо в меню окна Scope выбрать Edit>Copy Figure.

Перед выполнением расчетов необходимо предварительно задать время расчета (время моделирования). Задание параметров расчета выполняется в меню панели управления *Simulation>Parameters*. Время расчета задается указанием начального (*Start time*) и конечного (*Stop time*) значений времени расчета. Начальное время, как правило, задается равным нулю. Величина конечного времени задается пользователем исходя из условий решаемой задачи.

Чтобы активизировать процесс моделирования созданной s-модели нужно вызвать команду *Simulation>Start* или нажать пиктограмму Start simulation на панели инструментов.

### Пример 2

Дано уравнение Дуффинга, которое демонстрирует возникновение стохастических колебаний для ряда нелинейных задач, в частности хаотическую динамику цепи с нелинейной индуктивностью или продольный изгиб упругой балки. Уравнение имеет вид

$$\ddot{x}(t) + kx(t) + x^3(t) = B \cos(t). \quad (4)$$

Динамика определяется параметрами  $k, B$ , а также начальными условиями. Варьируя параметры, можно наблюдать различные режимы движения: от периодических до хаотических.

Пусть  $\dot{x}(0) = 0, x(0) = 2.5, k = 0.3, B = 2, t \in [0; 50]$ .

Для построения схемы решения (рис. 3) (s – модели) уравнения (4) в *Simulink* используется два блока *Integrator* (раздел *Continuous*).

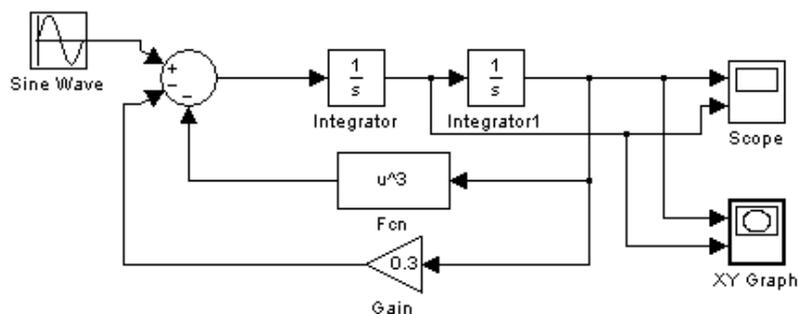


рис. 3

На вход блока *Integrator* подается вторая производная  $\ddot{x}(t)$ , а на выходе получается величина  $\dot{x}(t)$ , которая подается на вход блока *Integrator1*. На выходе блока *Integrator1* получается величина  $x(t)$ . Начальные условия  $\dot{x}(0)$ ,  $x(0)$  задаются в окнах настройки блоков *Integrator* и *Integrator1* соответственно в строке редактирования *Initial condition*.

Для получения сигнала  $2\cos(t)$  используется блок *Sine Wave* (раздел *Sources*). Блок *Sine Wave* имеет следующие настройки: *Amplitude* – определяет амплитуду синусоидального сигнала; *Frequency (rad/sec)* – задает частоту колебаний в радианах в секунду, *Phase (rad)* – позволяет установить начальную фазу в радианах. В нашем случае *Amplitude*: 2, *Frequency (rad/sec)*: 1, *Phase (rad)*:  $\pi/2$  ( $\pi$  - число  $\pi = 3.1415926\dots$  – системная переменная).

Для формирования сигнала  $x^3(t)$  используется блок *Fcn* (раздел *User-Defined Functions*), который позволяет ввести любую скалярную функцию от одного аргумента, выражающуюся через стандартные функции MATLAB. Выражение функции вводится в окне настройки блока. Для обозначения входного сигнала (аргумента функции) используется символ «u».

Полученные значения  $\dot{x}(t)$  и  $x(t)$  подаются на входы блока *Scope* (раздел *Sinks*). Чтобы установить параметры осей блока *Scope*, необходимо на панели инструментов окна этого блока нажать пиктограмму *Parameters* и на вкладке *General* в области *Axes* в поле *Number of axes* указать количество координатных осей (подокон), которые необходимо вывести в одном окне.

Для построения фазового портрета  $\dot{x}(x)$  ДУ (рис. 5) используется блок *XY Graph*. Он имеет два входа: на первый подается сигнал, значения которого откладываются по горизонтальной оси графика, а на второй – по вертикальной оси. В окне настройки этого блока можно установить пределы изменений входных величин, внутри которых будет выводиться график зависимости второй величины от первой.

Для изменения внешнего вида окна и графиков блока *XY Graph* используются также команды (2) и (3), а для копирования графика в отчет команда *Edit>Copy Figure*.

Именно эти команды были использованы для представления графиков  $\dot{x}(t)$  и  $x(t)$  (рис. 4) и  $\dot{x}(x)$  (рис.5).

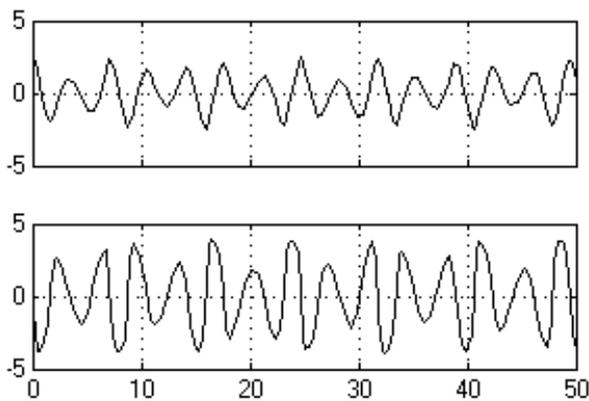


рис. 4

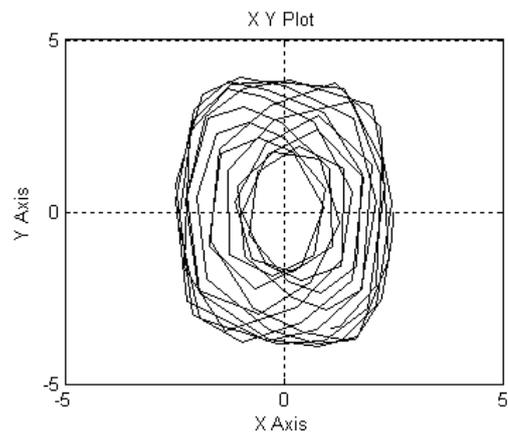


рис.5

### 2.3. Решатель дифференциальных уравнений в пакете SimuLink

В системе MATLAB одну и ту же задачу можно решать целым рядом способов.

SimuLink имеет специальный редактор дифференциальных уравнений, с помощью которого можно задать систему дифференциальных уравнений в форме Коши. Для получения доступа к решателю надо загрузить файл `dee` (в командном окне Command Window после знака приглашения `>>` ввести команду `dee`). В результате будет выведено окно решателя (рис. 6), с примерами применения.

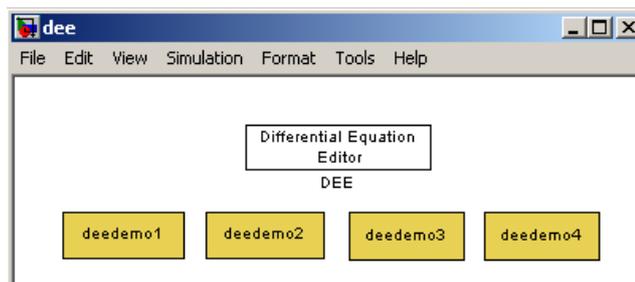


рис. 6

Ограничимся примером с именем `deedemo1` (кликнем по нему мышью). Он выводит окно всего с двумя блоками: блоком `vdr` и блоком `Score`, выполняющим роль осциллографа. Первый блок решает заданное уравнение Ван-дер-Поля, а второй отображает решение в виде временной зависимости. Двойной щелчок на блоке `vdr` открывает редактор дифференциальных уравнений. В этом окне можно модифицировать решаемые уравнения или ввести новые.

Рассмотрим применение решателя для моделирования процессов, представленных в примерах 1,2.

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение (1).

Выберем в меню окна `dee` команду `File>New>Model`. В открывшееся окно перенесем блок `DEE` (рис. 7) и откроем редактор дифференциальных уравнений (двойной щелчок на блоке `DEE`).

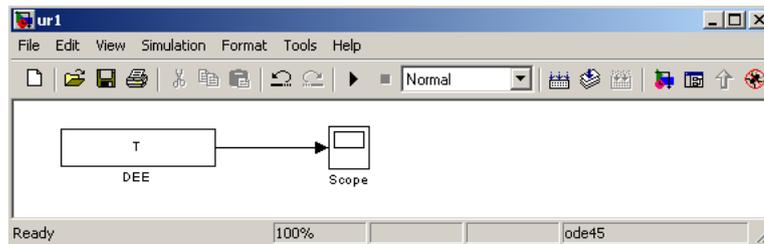


рис. 7

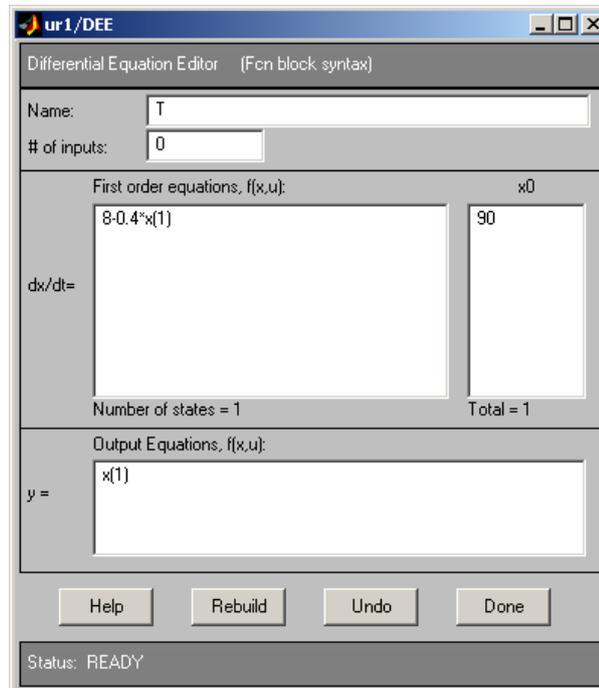


рис. 8

В редакторе DEE в соответствующих строках редактирования введено (рис. 8):

*Name*: имя блока;

*# of inputs*: количество входных сигналов;

*First order equations,  $f(x,u)$* : правая часть заданного дифференциального уравнения;

*$x_0$* : начальное условие;

*Output Equations,  $f(x,u)$* : переменная, значение которой нас интересует.

Далее добавляем блок *Scope* (раздел *Sinks*) для отображения зависимости  $T(t)$  (в нашем случае  $x(t)$ ), задаем время расчета (моделирования), активизируем процесс моделирования и т.д.

#### Пример 4

S-модель решения уравнений (4) будет иметь вид, представленный на рис. 9.

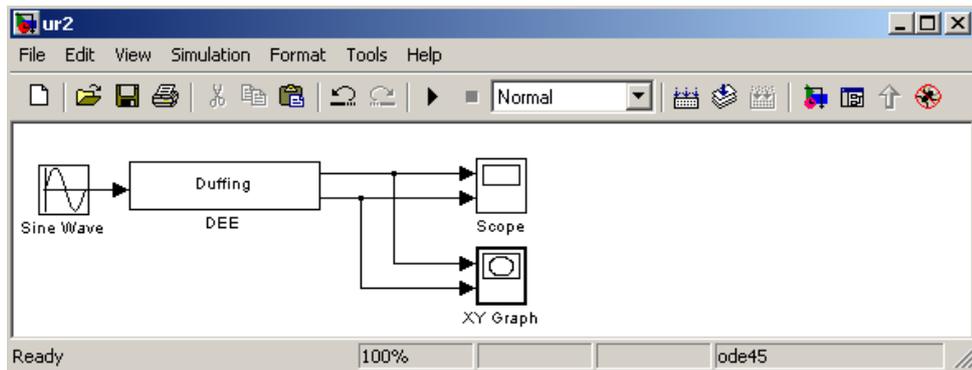


рис. 9

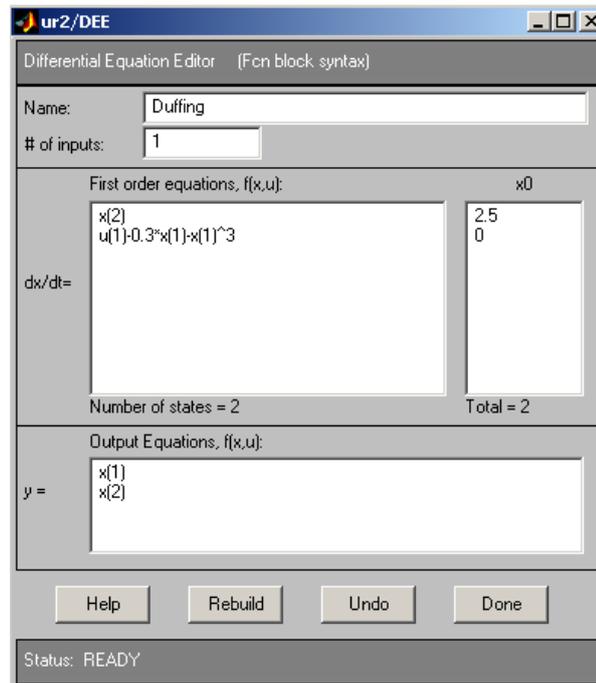


рис.10

В редакторе решателя (рис. 10) в соответствующих строках редактирования введено:

*Name*: имя блока;

*# of inputs*: количество входных сигналов;

*First order equations,  $f(x,u)$* : правая часть заданного дифференциального уравнения (сигнал  $2\cos(t)$  обозначим  $u(1)$ );

$x_0$ : начальные условия;

*Output Equations,  $f(x,u)$* : переменные, значения которых нас интересуют.

Для получения сигнала  $u(1)$  т.е.  $2\cos(t)$  используется блок *Sine Wave* (раздел *Sources*).

Далее добавляем блоки *Scope*, *XY Graph* (раздел *Sinks*) для отображения зависимостей  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(x)$  соответственно, задаем время расчета (моделирования), активизируем процесс моделирования и т.д.

### 3. Объект исследования

Объектом исследования является пакет Simulink системы MATLAB.

4. Задание на исследование

1. Познакомьтесь с интерфейсом пакета Simulink и его библиотекой блоков *SimuLink Library Browser*.

2. Создать s- модель процесса охлаждения тела, представленного уравнением

$$\dot{T}(t) = -0.06(T(t) - 10), \quad T(0) = 60. \quad (5)$$

Построить зависимость  $T(t)$  на интервале времени  $t \in [0; 100]$ . Определить температуру тела в момент времени  $t = 15$  с.

3. Выполнить задание 2 с помощью решателя дифференциальных уравнений.

4. Создать s- модель уравнения Дуффинга (4). Построить зависимости  $\dot{x}(t), x(t), \dot{x}(x)$ . Параметры  $k, B$ , а также начальные условия подобрать самостоятельно.

5. Выполнить задание 4 с помощью решателя дифференциальных уравнений.

6. Получить графическое решение дифференциального уравнения на промежутке  $t \in [0; 5]$ .

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 0.4 \frac{d^2x}{dt^2} + 0.2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 0.1 \frac{dx}{dt} + 0.05x = 2 \sin(0.25t), \quad (6)$$

$$\left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=0} = 2, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 3, \quad x|_{t=0} = 5$$

7. С помощью составления s-модели и решателя найти  $y(t)$  и  $\dot{y}(t), y(t), \dot{y}(y)$  дифференциальных уравнений первого и второго порядка соответственно. Уравнения выбираются в соответствии с таблицей 1.

Табл. 1.

Вариант	Уравнение первого порядка		Уравнение второго порядка	
	s - модель	с помощью решателя	s - модель	с помощью решателя
1	6	6	6	6
2	5	5	5	5
3	2	2	2	2
4	11	11	11	11
5	4	4	4	4
6	3	3	3	3
7	8	8	8	8
8	7	7	7	7
9	10	10	10	10
10	1	1	1	1
11	9	9	9	9

Далее приведены дифференциальные уравнения для вариантов задания. Начальные условия и время моделирования выбрать самостоятельно.

### Уравнения первого порядка:

1.  $y' = \frac{2y - t - 5}{2t - y + 4}$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
2.  $y' = \frac{2(y+2)^2}{(t+y-1)^2}$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
3.  $y \sin t + y' \cos t = 1$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
4.  $(t^2 y^2 - 1)y' + 2ty^3 = 0$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
5.  $ty' + 1 = e^t$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
6.  $ty' + y + y^2 \ln t = 0$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
7.  $y' - y \cdot t \cos t + y^2 \cos t = 0$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
8.  $y' + \frac{2y}{t} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 t}$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
9.  $ty' - 4y - t^2 \sqrt{y} = 0$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
10.  $y' = \frac{t}{\cos y} - tgy$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
11.  $y - y' \cos t = y^2 \cos t (1 - \sin t)$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

### Уравнения второго порядка:

1.  $y'' = t + \sin t$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
2.  $ty'' = y'$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
3.  $2ty'' = (y')^2 + 1$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
4.  $1 + (y')^2 = 2yy''$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
5.  $yy'' = (y')^2 - (y')^3$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
6.  $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
7.  $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
8.  $yy'' - yy' \ln y = (y')^2$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
9.  $t^4 y'' = (y - ty')^3$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
10.  $2(y')^2 = y''(y-1)$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$
11.  $tyy'' + t(y')^2 = 3yy'$ ,  $y'(0) = \dots$ ,  $y(0) = \dots$ ,  $t = t_0 \dots t_n$

## 5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Запустить среду MATLAB (ярлык MATLAB на рабочем столе). Появится окно среды MATLAB.

2. Изучить интерфейс пакета Simulink и его библиотеку блоков *Simulink Library Browser*.

3. Создать s- модель процесса охлаждения тела (уравнение (5)) в пакете Simulink. Получить в окне блока *Scope* график  $T(t)$  на интервале времени  $t \in [0;100]$ . Для определения температуры тела в момент в времени  $t=15$  с использовать блок *Display*.

Примечание.

Для автоматической установки оптимального масштаба осей блока *Scope* необходимо на панели инструментов этого блока нажать пиктограмму с изображением бинокля.

4. Создать s- модель уравнения Дуффинга (4). Построить зависимости  $\dot{x}(t)$ ,  $x(t)$  блока *Scope*,  $\dot{x}(x)$  в окне блока *XY Graph*.

5. Создать s- модель и получить графическое решение дифференциального уравнения (6) при заданных начальных условиях на промежутке  $t \in [0;5]$ .

6. С помощью решателя найти решение  $T(t)$  уравнения (5).

7. С помощью решателя найти решение  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{x}(x)$  уравнения (4).

8. Составить s- модель уравнения первого порядка и найти  $y(t)$ .

9. С помощью решателя найти  $y(t)$  уравнения первого порядка.

10. Составить s- модель уравнения второго порядка и найти  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ ,  $\dot{y}(y)$ .

11. С помощью решателя найти  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ ,  $\dot{y}(y)$  уравнения второго порядка.

## 6. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать:

1. Название и номер работы, цель работы.

2. s – модель уравнения (5), график функции  $T(t)$ , значение  $T(15)$ ;

s – модель уравнения (4) и графики функций  $\dot{x}(t)$ ,  $x(t)$ ,  $\dot{x}(x)$ ;

s – модель уравнения (6) и график функции  $x(t)$ .

3. Окна редактора решателя для дифференциальных уравнений (5) и (4) и график функции  $T(t)$  и графики функций  $\dot{x}(t)$ ,  $x(t)$ ,  $\dot{x}(x)$  соответственно.

4. s – модели уравнений первого и второго порядка, а также соответствующие им решения  $y(t)$  и  $\dot{y}(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\dot{y}(y)$ .

5. Окна редактора решателя для дифференциальных уравнений первого и второго порядка, а также соответствующие им решения  $y(t)$  и  $\dot{y}(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\dot{y}(y)$ .

## 7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите основные разделы библиотеки *SimuLink Library Browser*.

2. Что такое s- модель? Как ее создать?

3. Какие параметры редактирования имеет окно блока *Scope*?

4. Как задать время расчета (время моделирования) модели?

5. Что такое решатель дифференциальных уравнений пакета SimuLink?

## ИЗУЧЕНИЕ ПАКЕТА ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ CONTROL TOOLBOX

### 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Научиться исследовать динамические свойства линейных систем автоматического управления (САУ) с помощью пакета прикладных программ Control Toolbox системы MATLAB. Достижение поставленной цели связано с необходимостью решения следующих задач:

- построить графики во временной и частотной области с помощью интерактивного обозревателя LTI Viewer;
- построить графики во временной и частотной области с помощью соответствующих функций пакета Control Toolbox.

### 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Анализ и синтез САУ сопряжены с большим объемом теоретических и экспериментальных работ по исследованию их динамики и точности. Система MATLAB является одной из наиболее эффективных экспериментальных средств, позволяющих в диалоговом режиме быстро и наглядно получать необходимые оценки качества САУ как во временной, так и в частотной областях:

1. Исследовать устойчивость системы управления (запасы устойчивости по амплитуде и по фазе);
2. Исследовать качество переходных процессов (вид переходного процесса и его длительность, величину перерегулирования);
3. Выбрать параметры звеньев системы, вид и характеристики обратной связи с целью обеспечения требуемых динамических свойств системы управления.

Простота решения задач управления определяется наличием в MATLAB специального пакета прикладных программ Control Toolbox.

Линейная САУ может быть представлена LTI – моделью (LTI – объект) и ввод ее в среду пакета Control возможен в трех формах – в форме матриц пространства состояния (SS - объект), в виде коэффициентов числителей и знаменателей передаточных функций (TF - объект) и в форме задания нулей, полюсов и коэффициента передачи системы (ZPK - объект).

Пакет Control представляет собой широкий набор функций, осуществляющих анализ САУ с самых различных точек зрения и, прежде всего, определение откликов системы на внешние воздействия, как во временной так и в частотной области. Кроме того, пакет Control содержит LTI Viewer - обозреватель LTI – объектов, который позволяет в интерактивном режиме строить необходимые для анализа системы графики во временной и частотной области, причем для нескольких систем синхронно.

Именно обозреватель LTI Viewer используется в пакете SimuLink для анализа линейных САУ, представленных  $s$  – моделью.

2.1. Средства системы MATLAB, позволяющие решать задачи анализа САУ, представленной s – моделью пакета SimuLink

Для анализа САУ, представленной s – моделью необходимы графики во временной и частотной области создаются с помощью интерактивного обозревателя LTI Viewer.

Для этого нужно:

1. Выбрать в строке меню окна, в котором находится s-модель, пункт Tools>Linear analysis. При этом откроется два окна: Model\_Inputs\_and\_Outputs (рис. 1) и LTI Viewer (рис. 2)

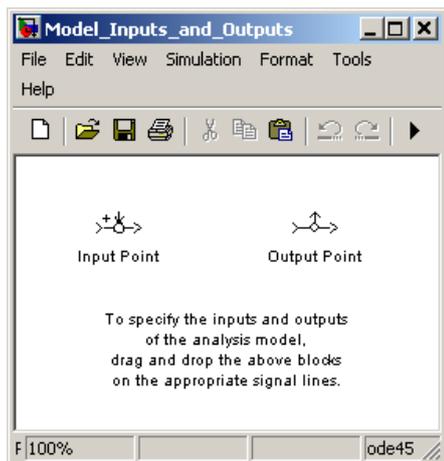


рис. 1

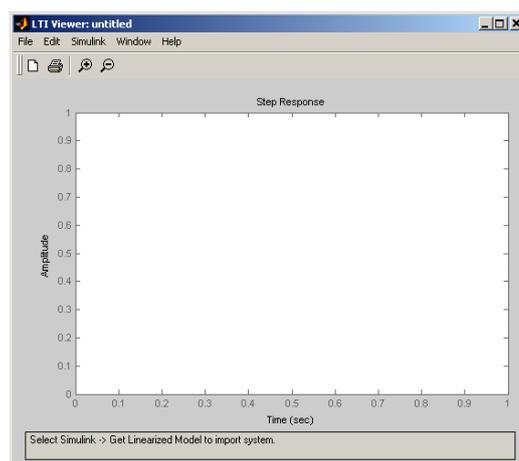


рис. 2

2. Подключить элементы Input Point и Output Point (рис. 1) на вход и выход звена или системы (рис. 3а, рис. 3б, рис. 3в).

*Примечание.*

1. Элементы Input Point и Output Point также находятся в библиотеке *SimuLink Library Browser* в разделе *Control System Toolbox*.
2. Элементы Input Point и Output Point можно поместить в любом месте системы.

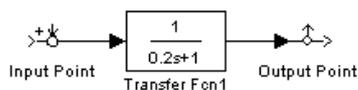


рис. 3а

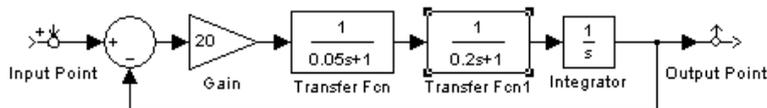


рис. 3б

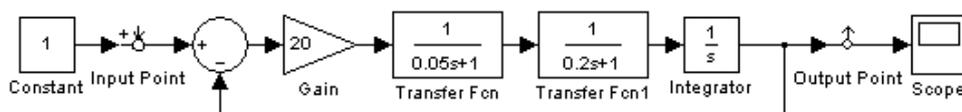


рис. 3в

3. Провести моделирование (меню Simulation>Start или кнопка Start simulation или Ctrl+T).

4. Выбрать в строке меню окна LTI Viewer (рис. 2) пункт Simulink>Get linearized model.

5. Далее в контекстном меню (рис. 4) окна LTI Viewer (щелкнуть правой кнопкой мыши в рабочей области окна) выбрать для построения:

- переходной характеристики - Plot Types>Step;
- импульсной характеристики - Plot Types>Impulse;
- годографа Найквиста - Plot Types>Nyquist;
- ЛАФЧХ - Plot Types>Bode;
- карты расположения полюсов и нулей - Plot Types>Pole/Zero.

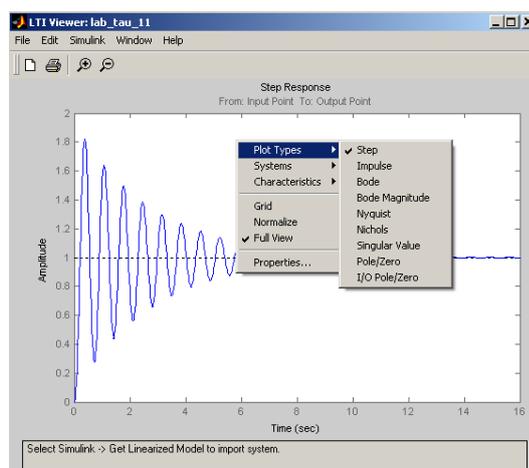


рис. 4

Примечание.

LTI Viewer настроен таким образом, что после выполнения пункта 4 в окне сразу появляется переходная характеристика звена (системы).

Для каждой из характеристик можно на их графиках отметить необходимые для исследования точки. Например, для определения времени регулирования и перерегулирования (переходная характеристика) нужно в контекстном меню выбрать Characteristics>Setting Time и Characteristics>Peak Response (рис. 5).

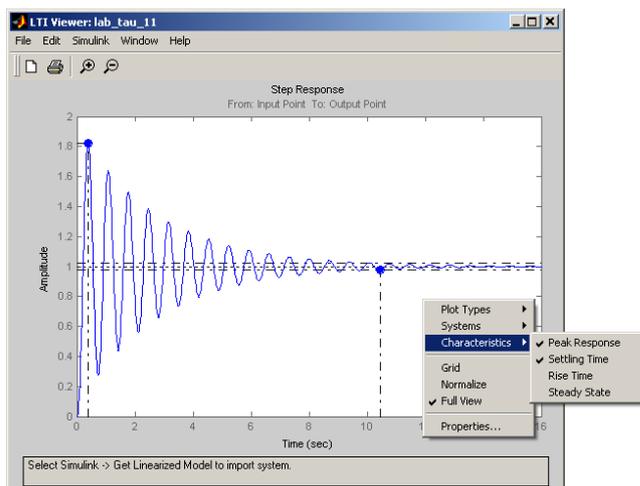


рис. 5

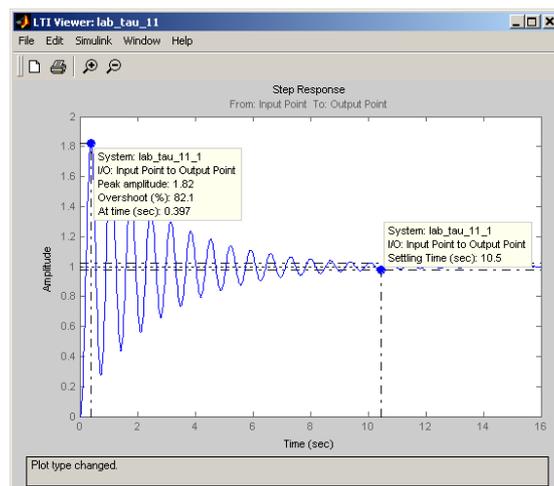


рис. 6

Если при этом щелкнуть левой кнопкой мыши на появившихся на графике точках, то появятся подсказки (рис. 6) со значением времени регулирования (Setting Time (sec)) и перерегулирования (Overshoot (%)).

Для ЛАФЧХ и годографа Найквиста можно определить запасы устойчивости по амплитуде (Gain Margin (dB)) и по фазе (Phase Margin (deg)): Characteristics>Stability (All Crossings).

При изменении параметров  $s$  – модели системы необходимо опять провести моделирование и выбрать в строке меню окна LTI Viewer (рис. 2) пункт Simulink>Get linearized model. При этом в окне LTI Viewer появятся результаты анализа исходной системы и системы с измененными параметрами. Чтобы удалить не нужный график необходимо выбрать в строке меню окна LTI Viewer пункт Edit>Delete Systems, а затем в появившемся окне редактирования выбрать из списка результатов моделирования тот, который нужно удалить.

Чтобы поместить в отчет требуемые графики необходимо в главном меню окна LTI Viewer выбрать File>Print to Figure. В главном меню открывшегося окна Figure выбрать Edit>Copy Figure. Открыть файл отчета и выполнить команду «вставить», например Ctrl+V.

2.2. Анализ САУ, представленной LTI-моделью (LTI – объект) в среде пакета Control в виде коэффициентов числителей и знаменателей передаточных функций (TF - объект).

Функция  $tf(n,m)$  – создает модель передаточной функции звена и системы в целом, где  $n$  – вектор коэффициентов числителя передаточной функции,  $m$  – вектор коэффициентов знаменателя передаточной функции.

*Операции с передаточными функциями:*

- + и - – сложение и вычитание (параллельное соединение);
- \* – умножение (последовательное соединение);
- \ – левое деление;
- / – правое деление.

Кроме «арифметических» операций для образования передаточной функции системы, состоящей из последовательного или параллельного соединения звеньев могут использоваться функции  $series(w1,w2)$  и  $parallel(w1,w2)$  соответственно, где  $w1$  и  $w2$  передаточные функции последовательно или параллельно соединенных звеньев, заданные оператором  $tf$ .

Функция  $feedback(w, woc, \pm 1)$  – применяется для образования передаточной функции замкнутой системы по известным передаточным функциям разомкнутой системы  $w$  и цепи обратной связи  $woc$ . Значение  $\pm 1$  – указывает вид обратной связи ( $-1$  – отрицательная,  $+1$  – положительная). В случае единичной отрицательной связи можно использовать команду  $feedback(w,1)$ .

Функции  $pole(w)$ ,  $zero(w)$  – предназначены для определения полюсов и нулей передаточной функции  $w$  звена (системы), заданной оператором  $tf$ .

Функция  $pzmap(w)$  – показывает расположение полюсов и нулей на комплексной плоскости  $S$  передаточной функции  $w$  звена (системы), заданной оператором  $tf$ .

Для нахождения временных откликов на внешние воздействия звена (системы), представленного передаточной функцией  $w$ , заданной оператором  $tf$ , предусмотрены функции:

$impulse(w)$  – нахождение отклика звена (системы) на единичное импульсное входное воздействие;

$step(w)$  – нахождение реакции звена (системы) на единичное ступенчатое воздействие;

$lsim(w,u,t)$  – определение реакции звена (системы) на входное воздействие произвольной формы, задаваемое в виде вектора его значений во времени.

Для применения функции  $lsim(w,u,t)$  необходимо предварительно задать вектор значений времени  $t$ , в которых будут заданы значения входного воздействия, а затем задать соответствующий вектор  $u$  значений входной величины в указанные моменты времени.

Следующая группа функций представляет в частотной области реакцию на внешнее гармоническое воздействие звена (системы), представленного передаточной функцией  $w$ , заданной оператором  $tf$ :

$bode(w)$  – строит графики ЛАЧХ и ЛФЧХ системы

$nyquist(w)$  – строит в комплексной плоскости график АФХ звена (системы).

**Примечание.**

Для всех указанных выше графиков выполняются те же команды контекстных меню, что и в пункте 2.1.

Создавать и исследовать ЛТИ – модели можно в командном окне Command Window или в редакторе М-файлов, написав М-сценарий:

```

1 - w1=tf(20,[0.05 1])
2 - w2=tf(1,[0.2 1])
3 - w3=tf(1,[1 0])
4 - w4=w1*w2*w3;
5 - subplot(2,1,1);
6 - bode(w4);grid;
7 - w5=feedback(w4,1)
8 - subplot(2,1,2);grid;
9 - step(w5);

```

рис. 7

Если после команды в М-сценарии не поставить «;», то ее результат отобразится в командном окне Command Window. Так, в представленном М-сценарии (рис. 7) после команд в 1,2, 3 и 7 строках не стоят «;» и поэтому в командном окне Command Window мы можем видеть передаточные функции  $w1$ ,  $w2$ ,  $w3$ ,  $w5$ .

Для исследования ЛТИ – моделей можно использовать также интерактивный обозреватель LTI Viewer. Для этого в командном окне Command Window нужно ввести команду *ltiview*. После выполнения команды на экране появится окно LTI Viewer, в котором необходимо выбрать File>Import, а затем с помощью мыши выделить в списке Workspace имена исследуемых ЛТИ – моделей.

### 3. Объект исследования

Объектом исследования является пакет прикладных программ *Control Toolbox* системы MATLAB.

### 4. Задание на исследование

Дана структурная схемы системы управления (рис. 8):

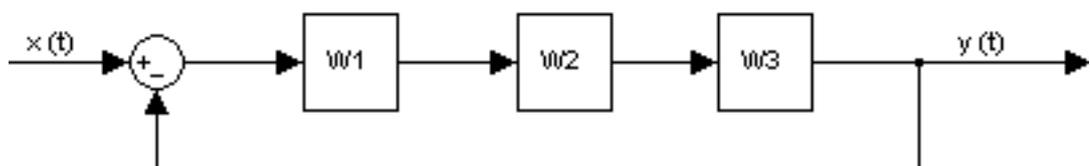


рис. 8

Необходимо составить s- модель и TF - модель системы управления (рис. 8), для которых построить карту полюсов и нулей замкнутой и разомкнутой системы, переходную характеристику, ЛАФЧХ, годограф Найквиста, а также найти реакцию системы на гармонический входной сигнал  $x(t) = 0.5\sin(t)$ . Найти значения полюсов и нулей замкнутой и разомкнутой системы, запасы по амплитуде и по фазе, время регулирования и перерегулирование.

Если система не устойчива, то подобрать такие параметры (коэффициент передачи, постоянные времени), чтобы система была устойчива.

Передаточные функции исследуемой системы выбираются соответственно варианту задания (таблица 1).

Табл. 1

Вариант	s- модель	TF - модель
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	6
7	7	7
8	8	8
9	9	9
10	10	10

Далее приведены передаточные функции звеньев системы для вариантов задания:

Вариант 1.  $W1(s) = \frac{K_1}{T_1s+1}$ ,  $W2(s) = \frac{K_2}{T_2s+1}$ ,  $W3(s) = \frac{T_3s+1}{T_4s+1}$ , где  $K_1 = 20$ ,  $K_2 = 2$ ,  $T_1 = 1.5$ ,  $T_2 = 2$ ,  $T_3 = 5.4$ ,  $T_4 = 2.5$ .

Вариант 2.  $W1(s) = T_1s+1$ ,  $W2(s) = \frac{K_2}{s(T_2s+1)}$ ,  $W3(s) = \frac{K_3}{T_3s+1}$ , где  $K_2 = 2$ ,  $K_3 = 0.6$ ,  $T_1 = 0.05$ ,  $T_2 = 0.8$ ,  $T_3 = 0.1$ .

Вариант 3.  $W1(s) = K_1(T_1s+1)$ ,  $W2(s) = \frac{K_2}{s(T_2s+1)}$ ,  $W3(s) = \frac{K_3(T_3s+1)}{T_4s+1}$ , где  $K_1 = 32$ ,  $K_2 = 16$ ,  $K_3 = 2.5$ ,  $T_1 = 1.5$ ,  $T_2 = 5$ ,  $T_3 = 1.5$ ,  $T_4 = 2$ .

Вариант 4.  $W1(s) = K_1$ ,  $W2(s) = \frac{K_2(T_1s+1)}{s(T_2s+1)}$ ,  $W3(s) = \frac{T_3s+1}{T_4s+1}$ , где  $K_1 = 20$ ,  $K_2 = 25$ ,  $T_1 = 1.5$ ,  $T_2 = 3$ ,  $T_3 = 0.5$ ,  $T_4 = 1.4$ .

Вариант 5.  $W1(s) = \frac{K_1}{T_1s+1}$ ,  $W2(s) = \frac{K_2}{s(T_2s+1)}$ ,  $W3(s) = \frac{K_3}{T_3s+1}$ , где  $K_1 = 2$ ,  $K_2 = 0.1$ ,  $K_3 = 1.5$ ,  $T_1 = 2$ ,  $T_2 = 1.5$ ,  $T_3 = 0.5$ .

Вариант 6.  $W1(s) = \frac{K_1}{T_1s+1}$ ,  $W2(s) = \frac{K_2(T_2s+1)}{s(T_3s+1)}$ ,  $W3(s) = \frac{K_3}{T_4s+1}$ , где  $K_1 = 1.5$ ,  $K_2 = 2$ ,  $K_3 = 7$ ,  $T_1 = 2$ ,  $T_2 = 0.5$ ,  $T_3 = 3$ ,  $T_4 = 1.4$ .

Вариант 7.  $W1(s) = K_1(T_1s+1)$ ,  $W2(s) = \frac{K_2}{s(T_2s+1)}$ ,  $W3(s) = \frac{K_3}{T_3s+1}$ , где  $K_1 = 5$ ,  $K_2 = 15$ ,  $K_3 = 12$ ,  $T_1 = 0.8$ ,  $T_2 = 0.5$ ,  $T_3 = 2$ .

Вариант 8.  $W1(s) = \frac{K_1}{s(T_1s+1)}$ ,  $W2(s) = \frac{T_2s+1}{T_3s+1}$ ,  $W3(s) = \frac{K_2(T_4s+1)}{T_5s+1}$ , где  $K_1 = 5$ ,  $K_2 = 35$ ,  $T_1 = 0.5$ ,  $T_2 = 2$ ,  $T_3 = 3.2$ ,  $T_4 = 1.5$ ,  $T_5 = 0.2$ .

Вариант 9.  $W1(s) = \frac{(T_1s+1)}{s(T_2s+1)}$ ,  $W2(s) = \frac{K_1}{T_3s+1}$ ,  $W3(s) = \frac{K_2(T_4s+1)}{T_5s+1}$ , где  $K_1 = 100$ ,  $K_2 = 5.6$ ,  $T_1 = 3$ ,  $T_2 = 0.5$ ,  $T_3 = 2.5$ ,  $T_4 = 5$ ,  $T_5 = 2$ .

Вариант 10.  $W1(s) = \frac{K_1}{s(T_1s+1)}$ ,  $W2(s) = K_2$ ,  $W3(s) = \frac{K_3(T_2s+1)}{T_3s+1}$ , где  $K_1 = 0.1$ ,  $K_2 = 2$ ,  $K_3 = 0.6$ ,  $T_1 = 2$ ,  $T_2 = 0.5$ ,  $T_3 = 0.1$ .

## 5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Создать s-модель заданной системы управления в пакете Simulink (элементы находятся в библиотеке).

Для этого необходимо:

1.1. Запустить среду MATLAB (ярлык MATLAB на рабочем столе). Появится окно среды MATLAB.

1.2. Создать файл для моделирования в пакете Simulink (меню File>New>Model). Появится окно пакета Simulink, в котором создается s-модель (все дальнейшие команды будут относиться к окну Simulink).

1.3. Открыть библиотеку элементов Simulink (меню View>Library browser или кнопка Library Browser).

1.4. Из блоков, хранящихся в библиотеке Simulink построить s-модель (для этого используется технология Drag-and-Drop (перетаски и вставь)).

Блоки *Integrator*, *Derivative*, *Transfer Fcn* для построения моделей динамических звеньев находятся в разделе *Continuous*, блок *Gain* для создания пропорционального звена и блок *Sum* для создания сумматора в разделе *Math Operations*.

Для настройки параметров блока следует после установки блока дважды щелкнуть мышью на его изображении. При этом появится окно параметров настройки блока.

Чтобы соединить линией выход одного блока со входом другого необходимо подвести курсор к нужному выходу блока, нажать левую кнопку мыши и, не отпуская кнопку, переместить курсор ко входу другого блока и затем отпустить кнопку мыши.

2. Получить карту полюсов и нулей (для замкнутой и разомкнутой системы), годограф Найквиста (разомкнутая система), ЛАФЧХ (разомкнутая система) и переходную характеристику (замкнутая система). Оценить устойчивость системы, определить запасы устойчивости, время регулирования, перерегулирование.

Примечание.

Для быстрого замыкания и размыкания обратной связи можно использовать блоки раздела Signal Routing: Manual Switch (блок позволяет вручную переключать входы с помощью двойного щелчка мыши) и Ground (рис. 9)

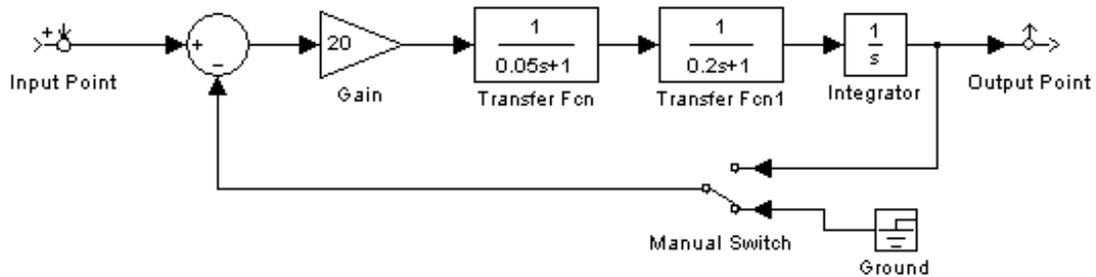


рис. 9

3. Получить реакцию системы на гармонический входной сигнал  $x(t) = 0.5\sin(t)$ .

Источник сигнала реализуется с помощью блока *Sine Wave* и находится в разделе *Sources*. Блок *Sine Wave* имеет такие настройки: *Amplitude* – определяет амплитуду синусоидального сигнала; *Frequency (rad/sec)* – задает частоту колебаний в радианах в секунду.

Для просмотра переходного процесса используется приемник сигналов - блок *Scope* в разделе *Sinks*.

Примечание.

1. Для автоматической установки оптимального масштаба осей блока *Scope* необходимо на панели инструментов этого блока нажать пиктограмму с изображением бинокля.

2. Окно блока *Scope* отображающее графики сигналов имеет очень ограниченные возможности по изменению внешнего вида окна и графиков. Фактически можно изменять лишь масштаб отображения графиков, а команды изменения цветов линий и фона окна, толщины линий, размера и типа шрифтов и т.п. недоступны. Чтобы получить доступ к этим возможностям необходимо после проведения расчетов открыть окно блока *Scope* и в командном окне *Command Window MATLAB* ввести следующие команды:

```
set(0,'ShowHiddenHandles','On')
set(gcf,'menubar','figure')
```

После выполнения этих команд в окне блока *Scope* появится меню. Используя команды меню *Edit>Figure Properties*, *Edit>Axes Properties* и *Edit>Current Object Properties* можно изменить внешний вид окна, осей и самих графиков в соответствии со своими требованиями.

4. Создать TF - модель системы управления.

Для этого необходимо:

4.1. Запустить среду *MATLAB* (ярлык *MATLAB* на рабочем столе). Появится окно среды *MATLAB*.

4.2. Создать M-файл (меню *File>New>M-file*). Появится окно редактора отладчика, в котором создается файл-сценарий.

5. Для системы управления представленной LTI – моделью определить нули и полюсы замкнутой и разомкнутой передаточной функции системы.

Получить карту полюсов и нулей (для замкнутой и разомкнутой системы), годограф Найквиста (разомкнутая система), ЛАФЧХ (разомкнутая си-

стема), переходную характеристику (замкнутая система) и реакцию системы на гармоническое входное воздействие (замкнутая система).

Оценить устойчивость системы, определить запасы устойчивости, время регулирования, перерегулирование.

Примечание.

Чтобы посмотреть в командном окне Command Window созданные передаточные функции или значения ее полюсов/нулей нужно после соответствующей команды не ставить «;». Для вывода значений переменной или текста в командное окно Command Window используется также команда `disp[<переменная или текст в апострофах>]`.

## 6. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать:

1.  $s$  – модель системы управления; карты нулей и полюсов замкнутой и разомкнутой системы, частотные характеристики и значения запасов устойчивости; переходную характеристику и значения времени регулирования и перерегулирования; реакцию системы на гармонический входной сигнал.

2. Файл-сценарий создания TF – модели системы управления и ее исследования; значения нулей и полюсов замкнутой и разомкнутой системы; построенные в одном графическом окне Figure: частотные, переходная характеристика, реакция системы на гармонический входной сигнал и карты нулей и полюсов замкнутой и разомкнутой системы; значения запасов устойчивости, времени регулирования и перерегулирования.

## 7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как получить частотные и временные характеристики для системы управления, представленной  $s$  – моделью?

2. Как получить частотные и временные характеристики для системы управления, представленной LTI – моделью?

3. Как определить по значению времени регулирования и перерегулирование по переходной характеристике, полученной в системе MATLAB?

4. Как определить по значения запасов устойчивости по частотным характеристикам, полученным в системе MATLAB?

5. Как создать передаточную функцию  $W(s) = \frac{10}{0.5s + 1}$  ?

## ВЫБОР ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО ДВИГАТЕЛЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛЕДЯЩЕГО ПРИВОДА ПОСТОЯННОГО ТОКА

### ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Отработка навыков работы с пакетами расширения системы MATLAB; экспериментальное исследование электрического следящего привода (ЭСП) постоянного тока.

Достижение поставленной цели связано с необходимостью решения следующих задач:

- расчет элементов силовой системы привода, который предусматривает выбор исполнительного двигателя и расчет редуктора.
- построение математического описания и симулинок-схем силовой системы привода и замкнутого ЭСП.

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

#### 1.1 Формирование требований к следящей системе

Рассмотрим электрический следящий привод (ЭСП) постоянного тока с независимым возбуждением.

Проектирование ЭСП производится на основе технического задания (ТЗ). В общем случае ТЗ содержит требования к устойчивости, точности, быстродействию, колебательности, перерегулированию. В ТЗ указываются ограничения по напряжению питания, току, моменту, мощности, массе и габаритам конструкции, требования к технологичности, стоимости и др. В ТЗ задаются характеристики полезного сигнала (класса входных сигналов) и возмущающих воздействий, а также задаются параметры полезной нагрузки.

Рассмотрим проектирование ЭСП на основе следующих требований:

- 1) предельные характеристики полезного сигнала:
  - максимальная скорость:  $\Omega_m = 1.0 \text{ рад} / \text{с}$ ;
  - максимальное ускорение:  $\varepsilon_m = 1.0 \text{ рад} / \text{с}^2$ ;
- 2) требование по точности в режиме слежения: модуль установившейся ошибки не должен превышать 4 мрад;
- 3) требование по быстродействию и колебательности в режиме переброски:
  - время перемещения нагрузки на угол 1.57 рад (90 град) – не более 2 с;
  - перерегулирование – не более 10%.
- 4) момент инерции нагрузки, приведенный к валу двигателя  
 $J_H = 30 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;
- 5) момент нагрузки  
 $M_H = 63 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ;

#### 2.2 Выбор исполнительного двигателя

В силовых следящих приводах широко применяются исполнительные двигатели (ИД) постоянного тока с независимым возбуждением. Параметрами, по которым выбирается ИД, являются мощность и момент. Сложность выбора ИД и передаточного числа редуктора обусловлена тем, что энергетические характеристики силового системы привода определяются не только полезной нагрузкой, но и инерционностью ротора двигателя и вращающихся частей редуктора, а также моментом сопротивления движению в механической передаче от ИД к нагрузке.

Исходя из потребного значения потребной выходной мощности, выбираем двигатель постоянного тока серии ЭДМ-20, который с большим запасом обеспечит обработку сигналов из заданного класса. Отметим, что малоинерционные реверсивные электродвигатели постоянного тока с постоянными магнитами и гладким якорем серии ЭДМ имеют

высокие точностные характеристики, отличаются высоким быстродействием, малым напряжением трогания, низким моментом инерции.

Характеристики двигателей серии ЭДМ приведены в таблицах 1, 2.

Табл. 1

Технические характеристики двигателя ЭДМ-10	
Номинальная мощность, Вт	90
Момент номинальный, Н·м	0,29
пусковой, Н·м	2,9
Номинальная частота вращения, об/мин	3000
Номинальное напряжение, В	27
Номинальный ток, А	5,2
Сопротивление обмотки якоря при 20°C, Ом	0,9
Момент инерции якоря, кг·м <sup>2</sup>	0,000028
Индуктивность обмотки якоря, Гн	0,6*10 <sup>-3</sup>

Табл. 2

Технические характеристики двигателя ЭДМ-20	
Номинальное напряжение питания	27 В
Номинальная мощность	400 Вт
Номинальный ток	25 А
Номинальный момент	1.3 Н·м
Номинальная частота вращения	3000 об/мин
Момент инерции якоря	0.0003 кг·м <sup>2</sup>
Сопротивление обмотки якоря при 20°C	0.15 Ом
Электромагнитная постоянная времени	0.0015 с
Пусковой момент	13 Н·м
Частота вращения холостого хода	3900 об/мин
Коэффициент противоЭДС	0.077 В·с/рад
Коэффициент момента двигателя	0.07 Н·м/А

Примечание.

В случае необходимости можно рассчитать недостающие коэффициенты модели ИД. Покажем, как определяются коэффициенты  $C_e$  и  $C_m$  в случае, если они не указаны в паспорте на двигатель. Находим значение  $C_e$  из уравнений статики, т.е. установившегося режима вращения с номинальной скоростью

$$i_{\text{я}} R_{\text{я}} = U - c_e \Omega$$

откуда

$$c_e = \frac{U - i_{\text{я}} R_{\text{я}}}{\Omega}$$

Находим значение  $C_m$  из зависимости для движущего момента при отсутствии сил трения

$$M_{\text{вр}} = c_m i_{\text{я}}$$

откуда

$$c_m = \frac{M_{\text{вр}}}{i_{\text{я}}}$$

Приведем описание электродвигателей ЭДМ-14 и ЭДМ-20, которое представлено на сайте производителя.

### Характеристики электродвигателей серии ЭДМ

Серия	Мощность, кВт	Частота, об./мин	Напряжение, В	КПД, %
ЭДМ-10	0.09	3000	27	65
ЭДМ-14	0.18	3000	27	65
ЭДМ-20	0.4	3000	27	65

#### ТЕХНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Режим работы продолжительный;  
 Схема соединений двухпроводная;  
 Исполнение водонепроницаемое пылебрызгозащищенное;  
 Напряжение трогания на холостом ходу 1,5 В, не более;  
 Направление вращения реверсивное;  
 Масса ЭДМ-14 - 7,4 кг; ЭДМ-20 - 14 кг  
 Габаритные размеры, мм  
 ЭДМ-14: 165 x 236; ЭДМ-20: 190 x 300;

#### 2.3 Расчёт редуктора

Двигатели постоянного тока неудовлетворительно работают на малых скоростях. Рабочими режимами для них являются скорости порядка тысяч оборотов в минуту (сотни радиан в секунду). Например, для двигателей серии ЭДМ рабочей является частота вращения 3000 об/мин (314.16 рад/с).

Потребные для следящей системы (например, для системы автоматического сопровождения маневренной воздушной цели) скорости лежат в диапазоне единиц рад/с, при этом 1 рад/с соответствует 9.55 об/мин. Поэтому нагрузка присоединяется не непосредственно к валу двигателя, а через механический редуктор, имеющий довольно большое передаточное отношение (несколько сотен).

Отметим, что редуктор многократно увеличивает вращающий момент, развиваемый приводом на нагрузке, и при этом уменьшает возмущения на двигатель со стороны нагрузки. Такие возмущения могут быть обусловлены, например, стрельбой артиллерийского автомата, пусками ракет, порывами ветра и т.д.

Выражение для передаточного числа редуктора, обеспечивающего максимальное быстродействие системы, имеет вид:

$$n_{\text{ОПТ}} = \frac{\dot{\varphi}_{\text{ДВ.Н.}}}{\dot{\varphi}_{\text{О.МАКС.}}}; \quad (1)$$

Здесь:  $\dot{\varphi}_{\text{ДВ.Н.}}$  – скорость ротора двигателя;  $\dot{\varphi}_{\text{О.МАКС.}}$  – максимальная скорость поворота нагрузки.

Согласно формуле (1), по паспортной частоте вращения ЭДМ-20 рассчитываем передаточное число редуктора:

$$n_{\text{ОПТ}} = \frac{\left(\frac{3000 \cdot 2\pi}{60}\right)}{1} \approx 314.$$

Исходя из найденного общего передаточного отношения механической передачи, определим число кинематических пар редуктора с помощью диаграммы.

При  $\lg(n) = \lg(314) = 2.50$  следует принять общее число кинематических пар (ступеней) редуктора  $n = 4$ .

Определим коэффициент полезного действия редуктора. КПД каждой ступени составляет 0.95–0.97. Примем  $\eta_{\text{нб}} = 0.95$ . Тогда КПД редуктора:

$$\eta_D = \eta_{\text{нб}}^n; \eta_D = 0.95^4 \approx 0.815.$$

Виды механических редукторов различных типов представлены на рисунке

Рассмотрим МО функционирования ИД в переходных и установившихся режимах при нулевых начальных условиях. МО ИД с жесткой кинематической передачей и редуктором без люфта представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, а также алгебраических уравнений и неравенств вида

$$\left. \begin{aligned} L \cdot \frac{di}{dt} &= U - i \cdot R - C_e \cdot \omega; \\ J \cdot \frac{d\omega}{dt} &= C_m \cdot i - h \cdot \omega_{\text{н}} - M; \\ \omega_{\text{н}} &= \omega / q; \\ \frac{d\varphi_{\text{н}}}{dt} &= \omega_{\text{н}}; \\ -U_m &\leq U \leq U_m. \end{aligned} \right\}$$

где  $U$  - управляющее напряжение на якорной обмотке,  $U_m$  - напряжение источника питания;  $i$  - ток якоря;  $R, L$  - активное сопротивление и индуктивность якоря, соответственно;  $C_e$  - коэффициент противоэдс;  $C_m$  - коэффициент, определяющий зависимость развиваемого момента от тока;  $\varphi, \omega, J$  - угол, угловая скорость и приведенный к ротору двигателя момент инерции нагрузки, соответственно;  $h$  - коэффициент вязкого трения;  $q$  - передаточное отношение редуктора;  $M$  - момент нагрузки ( $M = \text{const}$ ).

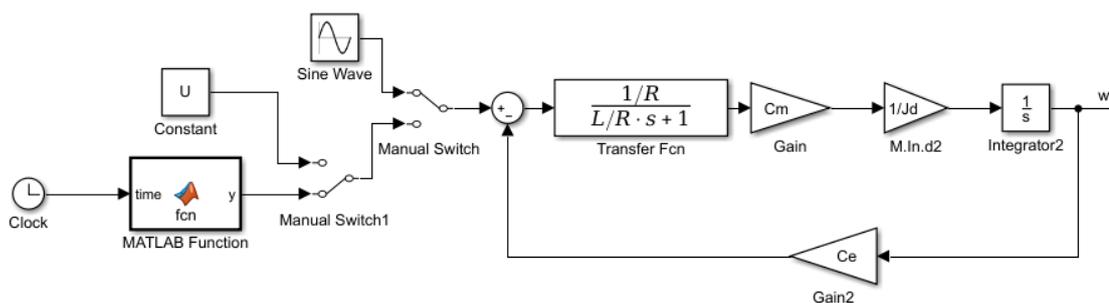


Рис. 1. Simulink-схема ИД с выходом по скорости

В одномассовой модели двигателя нагрузка характеризуется приведенным к валу двигателя моментом инерции подвижных частей привода, который рассчитывается по формуле

$$J_{\text{пр}} = J_{\text{дв}} + \frac{J_{\text{н}}}{n^2}.$$

Параметры Simulink-схемы ИД следующие:

**%Параметры ЭДМ-10 и нагрузки**

R=0.9;

L=0.6\*10<sup>-3</sup>;

q=1/314;

n=1/q; **%передаточное отношение редуктора**

Ce=0.071;

Cm=0.056;

Jn=30;

Jd=0.000028;

J=Jd+Jn/(n<sup>2</sup>); **%приведенный момент инерции нагрузки**

Ktr=0.1;

Mn=63;

Mpr=63/n; **%приведенный момент сопротивления нагрузки**

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ДВИГАТЕЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПАКЕТЕ SIMULINK

#### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Заметим, что представленная выше линейная одномассовая модель ИД учитывает вязкое трение на нагрузке, но не учитывает такие факторы как нежесткость механической передачи, люфт редуктора, сухое трение в щеточно-коллекторном узле и в нагрузке, ограничение по развиваемому моменту.

Рассмотрим анализ динамических характеристик двигателя, работающего на инерционную нагрузку.

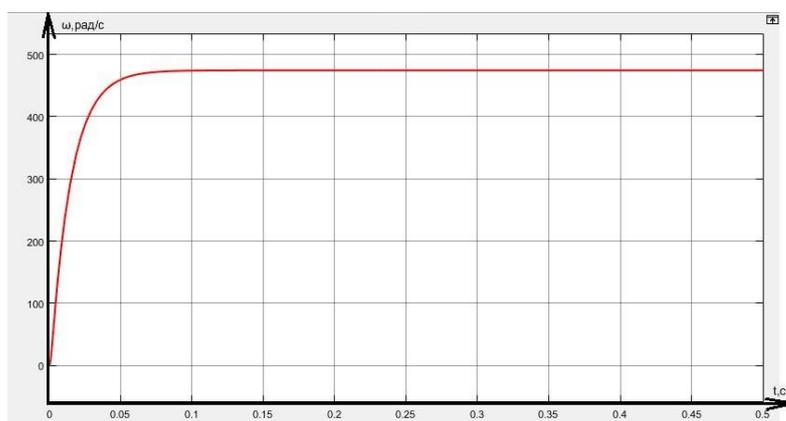


Рис. 2. Пример переходного процесса по скорости ротора ИД

Видно, что при подаче на вход ИД номинального напряжения  $U = 27 В$  ротор разгоняется до установившейся скорости 475 рад/с. Время переходного процесса 0,041 с.

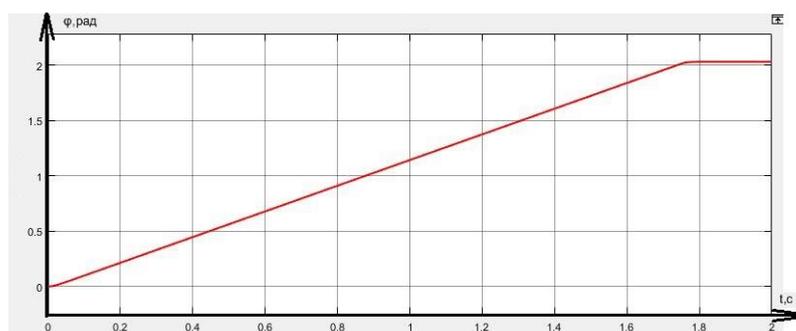


Рис. 3. Пример осциллограммы угла нагрузки в режиме переборки



Рис. 4. Пример осциллограммы угловой скорости якоря в режиме переборки

Осциллограммы показывают, что в режиме переборки при подаче на якорную обмотку двигателя прямоугольного импульса напряжения  $27\text{ В}$  длительностью  $1,75\text{ с}$  нагрузка поворачивается на угол  $2,03\text{ рад}$  (на угол  $115^\circ$ ). Таким образом, результаты виртуальных динамических испытаний двигателя показывают, что он способен обеспечить заданный в ТЗ режим переборки нагрузки.

Выполним анализ динамических возможностей силовой системы привода в режиме слежения. Рассмотрим обработку разомкнутым приводом эквивалентного синусоидального электрического сигнала (напряжения на якорной обмотке) и оценим вносимое нагруженным двигателем фазовое запаздывание.

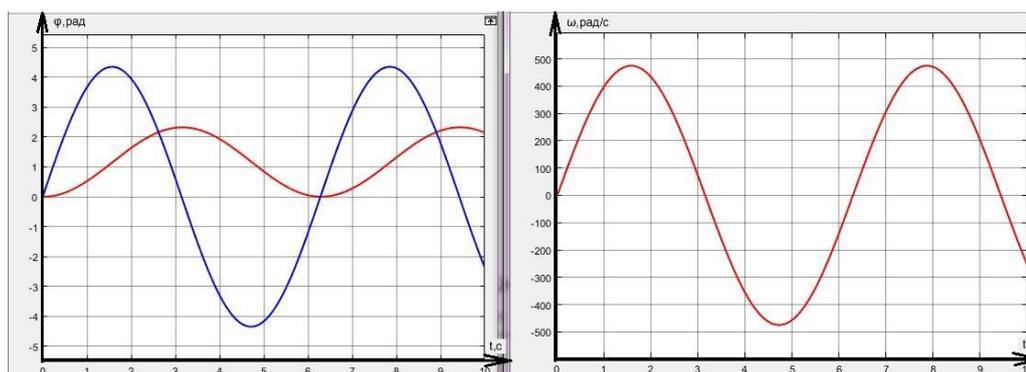


Рис. 5. Пример осциллограммы обработки гармонического сигнала:

- а) слева: *синий* – входной сигнал амплитудой  $27\text{ В}$ ; *красный* – выход по углу;  
 б) справа: скорость вращения вала двигателя.

Заметим, что при сопоставлении осциллограммы разных физических величин (например, напряжения и угла) следует их нормировать, т.е. преобразовать к безразмерному виду путем деления на характерную базисную величину (например, на напряжение питания, максимальный угол поворота нагрузки).

По осциллограммам сигналов на входе и выходе ИД можно оценить инерционность силовой системы путем расчета вносимого ею фазового запаздывания на частоте полезного гармонического сигнала.

Выполним оценку инерционности нагруженного двигателя, рассчитав фазовый сдвиг по осциллограммам сигналов на входе и выходе ИД. Пусть при входном сигнале типа эквивалентной синусоиды вида

$$v(t) = 1 \cdot \sin(1 \cdot t)$$

осциллограммы сигналов на входе и выходе ИД имеют вид

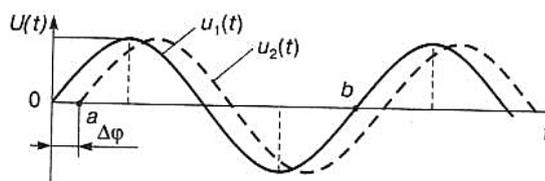


Рис. 6. Экспериментальное измерение фазового сдвига

По измеренным отрезкам  $0a$  и  $0b$  рассчитывается фазовый сдвиг  $\Delta\varphi$  в градусах по соотношениям

$$\frac{\Delta\varphi}{360} = \frac{0a}{0b}$$

$$\Delta\varphi = \frac{0a}{0b} 360$$

Отметим, что в замкнутом ЭСП фазовое запаздывание компенсируется средствами коррекции: замыканием контура управления по регулируемой координате (т.е. реализацией принципа управления по отклонению); использованием элементов с дифференцирующими свойствами (ПД или ПИД-регулятора, дифференцирующего фильтра), введением местной обратной связи по скорости и др. Средства коррекции в ЭСП вносят необходимое фазопережение на частоте полезного сигнала. Замкнутый высокоточный ЭСП в рабочей полосе частот должен иметь малый фазовый сдвиг, который может быть указан в ТЗ. Фазовый сдвиг может выступать в качестве критерия точности следящего привода.

#### ВЫВОДЫ

1. В режиме переброски нагрузка поворачивается на угол 2.03 рад (115 град) за время 1.75 с, т.е. двигатель ЭДМ-20 с заданной нагрузкой способен обеспечить ТЗ.
2. В режиме слежения разомкнутый привод не способен с малым фазовым запаздыванием отработать заданный в ТЗ гармонический сигнал периода 6.28 с. Вносимый фазовый сдвиг на частоте полезного сигнала составляет более 100 град. Таким образом, требуются замыкание привода по регулируемой величине и синтез регулятора.

#### ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ

1. Изучить теоретическую часть.
2. Ознакомиться с ТЗ на разработку ЭСП.
3. Выполнить расчет силовой системы привода:
  - выбрать ИД на основе энергетического анализа;
  - рассчитать редуктор;
4. Построить математическое описание ИД третьего порядка с приведенными моментом инерции нагрузки и моментом нагрузки.
5. Построить Simulink-схему ИД с выходом по углу (в схеме учесть наличие редуктора).
6. Выполнить экспериментальную проверку правильности выбора двигателя и оценить динамические возможности ИД в режимах переброски и слежения.
7. Оформить отчет, в котором отразить теоретические сведения, результаты экспериментальной работы (скриншоты осциллограмм сигналов) с комментариями, представить выводы по работе.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. На основе каких законов физики строится МО функционирования ИД в переходных и установившихся режимах?
2. Что представляет собой МО функционирования ИД и его Simulink-схема? Каковы начальные условия функционирования?
3. Как определяются приведенные к валу двигателя параметры механической подсистемы: момент инерции нагрузки, момент нагрузки?
4. Назовите характерные режимы работы ЭСП?
5. Каковы требования ТЗ на проектирование ЭСП?
6. Что такое эквивалентный синусоидальный входной сигнал? Как он определяется по заданным в ТЗ предельным значениям скорости и ускорения?
7. Как выбирается ИД?
8. Зачем нужен редуктор? Как он рассчитывается? Чему равен вращающий момент на выходе редуктора?
9. Как проверяется правильность выбора двигателя?
10. Как определяется фазовое запаздывание, вносимое элементом автоматической системы?
11. Каковы способы коррекции, применяемые в следящих приводах?
12. Осциллограммы каких сигналов ИД регистрируются для анализа его динамики? Какие показатели динамики оцениваются в виртуальном испытательном стенде?

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОПРИВОДА В СИСТЕМЕ MATLAB

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Анализ устойчивости и качества регулирования замкнутой линейной системы в пакете Simulink выполняется с помощью динамических диаграмм. Построение диаграмм, как правило, включает следующие операции.

1. Отклик во времени:
  - *step* - отклик на единичный скачок (переходная характеристика);
  - *impulse* - отклик на единичный импульс – импульсная переходная характеристика (весовая функция).
2. Частотный отклик:
  - *bode* - диаграмма Боде частотного отклика (АЧХ и ФЧХ);
  - *nyquist* - диаграмма Найквиста (АФЧХ на комплексной плоскости);
3. Построение карты полюсов и корней системы.

Подготовка Simulink-схемы ЭСП к использованию инструмента *Linear Analysis Tool* производится следующим образом: с помощью правой кнопки мыши наводится курсор на вход, а затем на выход системы. В появившемся контекстном меню надо выбрать *Linear Analysis Points* и установить соответствующие маркеры на входе и выходе системы.

Путь для запуска процедуры анализа динамики линейной системы следующий: *Analysis/ Control Design/ Linear Analysis*.

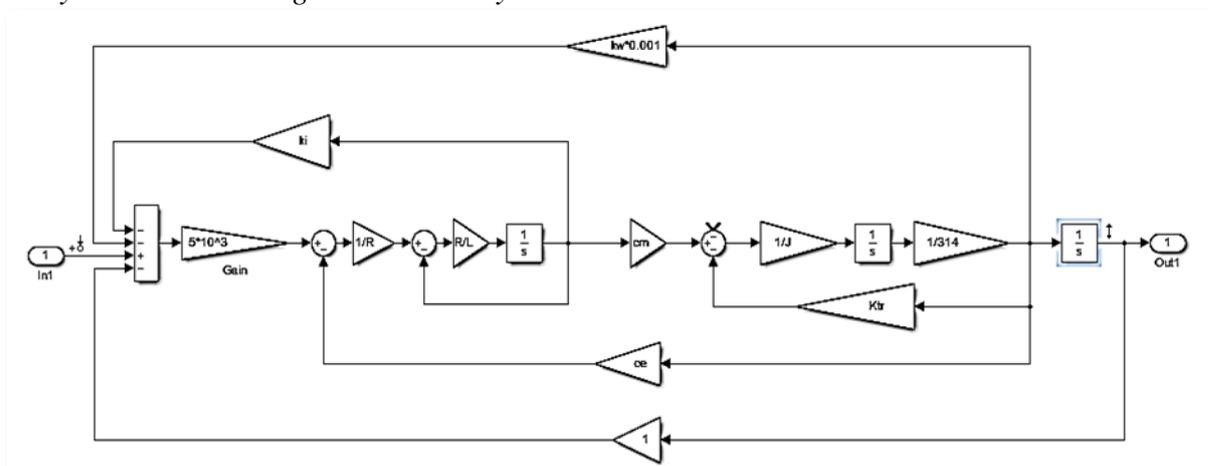


Рис. 1. Simulink-схема линейного ЭСП с маркерами на входе и выходе

Параметры схемы следующие.

R=0.9;  
 C=1000000;  
 q=1/314;  
 n=1/q;  
 ce=0.071;  
 cm=0.056;  
 L=0.0006;  
 Jn=30\*2;  
 Jd=0.000028;

$J=J_d+J_n/(n^2);$   
 $K_{tr}=0.7;$   
 $k_i=0.00013;$   
 $k_w=0.00001;$

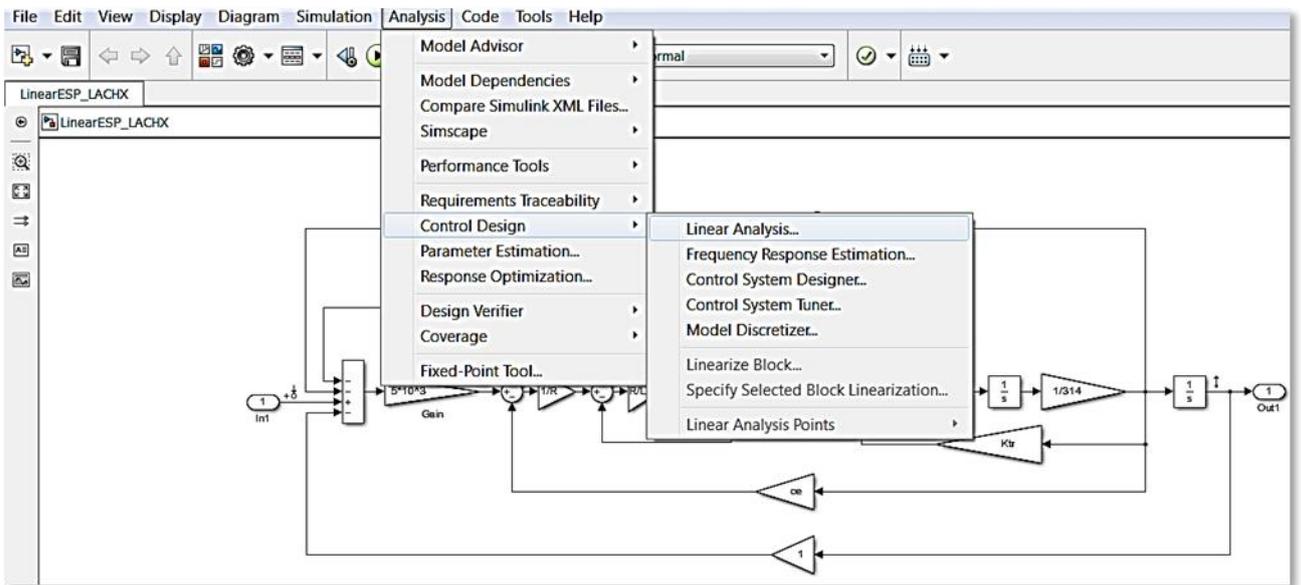


Рис. 2. Запуск инструмента *Linear Analysis Tool*

Логарифмические АЧХ и ФЧХ привода представлены на рисунке.

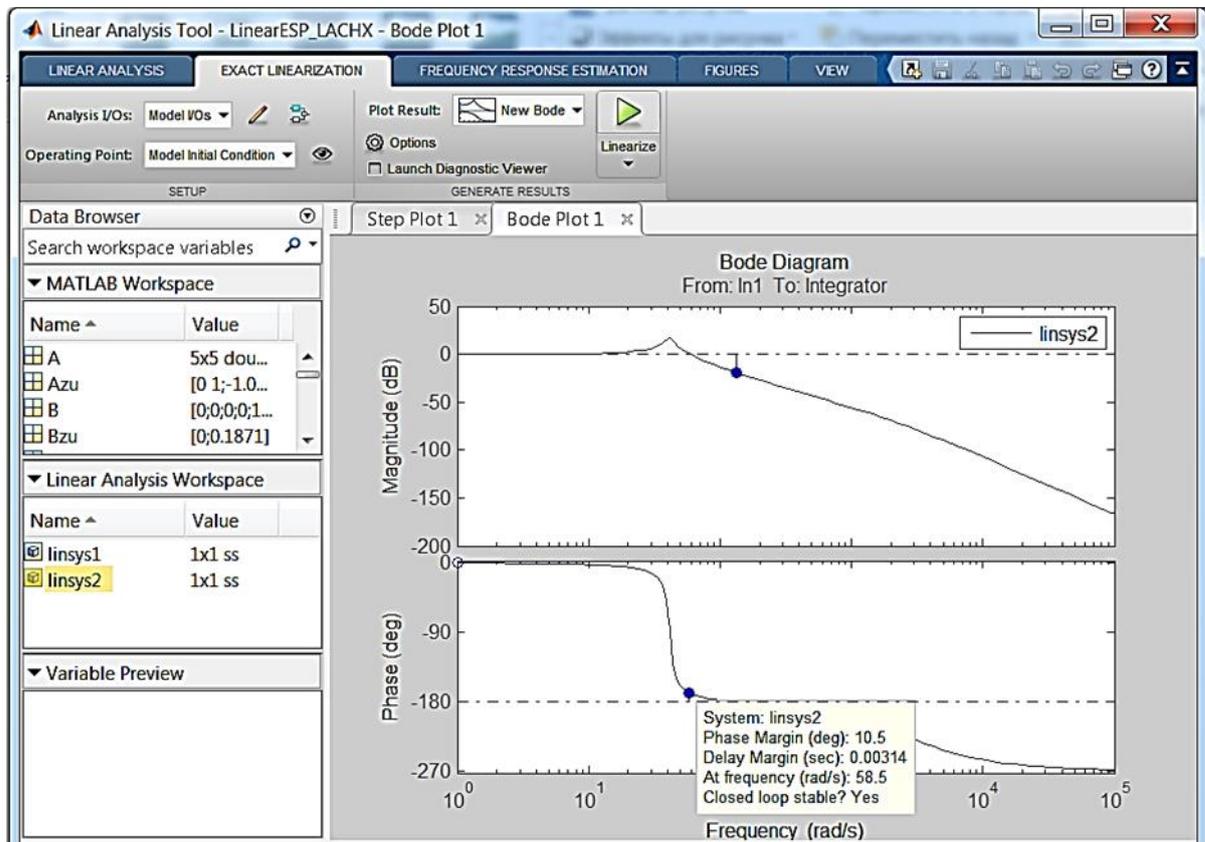


Рис. 3. Запас устойчивости по фазе: 10.5 град

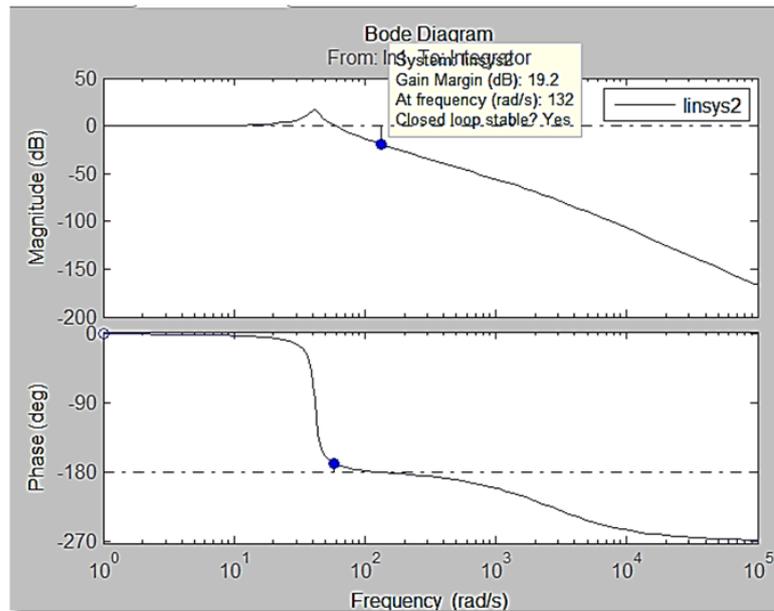


Рис. 4. Запас устойчивости по амплитуде: 19.2 дБ.

Карта корней характеристического многочлена на комплексной плоскости представлена на рисунке.

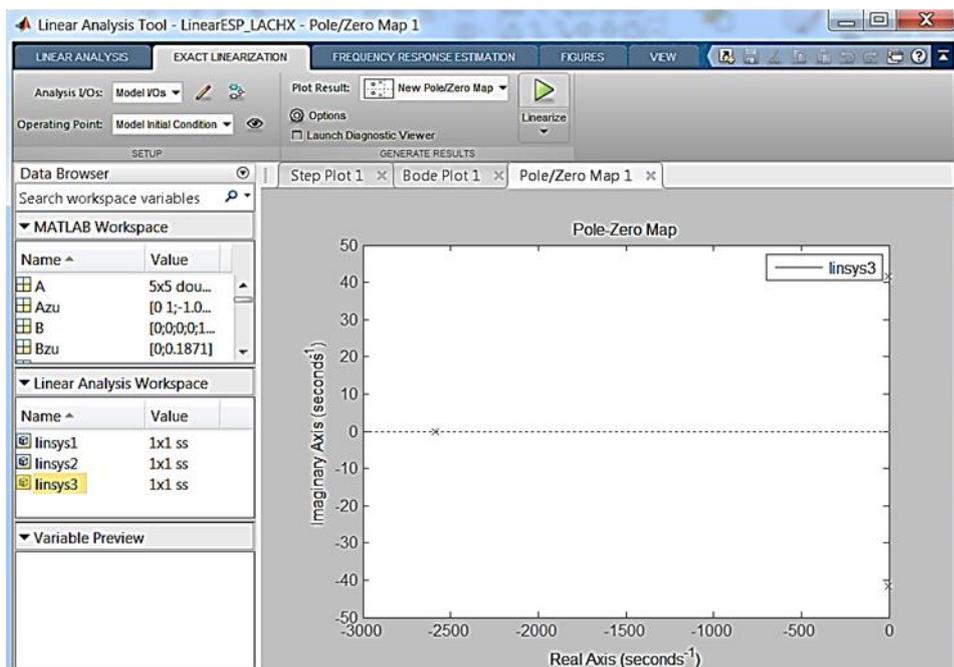


Рис. 5. Карта корней характеристического многочлена на комплексной плоскости

Полином знаменателя передаточной функции замкнутой системы, соответствующий характеристическому уравнению (ХУ) системы, также называют характеристическим. Полюса системы являются решения ХУ. Характеристический полином полностью и однозначно отображает свойства системы при свободном движении.

Расположение корней ХУ испытываемой системы следующее (рис. 5):

- два комплексно-сопряженных корня слева от границы устойчивости (ось ординат);
- один действительный корень слева от границы устойчивости.

Таким образом, все корни ХУ являются левыми (имеют отрицательные действительные части). В соответствии с теоремами А.М. Ляпунова об устойчивости линейной системы это означает, что ЭСП является устойчивым. Однако очень близкое к колебательной границе устойчивости расположение корней ХУ указывает на высокую колебательность системы и малые запасы устойчивости. Это подтверждается видом переходной и весовой функций.

По корням характеристического полинома вычисляются степень устойчивости и степень колебательности, которые характеризуют запасы устойчивости и качество переходного режима. Эту информацию можно использовать в процедуре оптимизации регулятора методом штрафных функций. При этом предполагается, что оптимизация условная, т.е. заданы функциональные ограничения, которые ограничивают допустимую область в пространстве параметров регулятора.

Эти ограничения обусловлены требованиями к показателям:

- точности слежения  $\text{abs}(e) \leq 4$  мрад;
- степени устойчивости  $\text{abs}(h) \geq 0.01$
- степени колебательности  $\text{abs}(m) \leq 50$ ;
- уровню сигнала управления  $\text{abs}(U) \leq 27$  В.

#### ПРИМЕР.

Пример текста программы условной оптимизации параметров модели ЭСП пятого порядка в среде Матлаб дан ниже. Предполагается, что Simulink-схема ЭСП реализована в векторной форме с использованием векторов А, В, к.

```
k=[1 0 0 kw ki];      %вектор коэффициентов обратных связей ЭСП
p=eig(A-B*k);        %вычисление корней характеристического полинома
h= - max(real(p));    %вычисление степени устойчивости
m = max(imag(p)/real(p)) %вычисление степени колебательности
sim('chema');        % запуск Simulink-схемы моделирования привода и вычисления критерия точности
if e > abs(E(end,:))+1000*(3-sign(h-0.01)+sign(m-50)+sign(U(end,:)-27)) %проверка выполнения ограничений и назначение штрафов
```

В случае нарушения ограничений к минимизируем целевой функции  $\text{abs}(e)$  прибавляется большая константа (штраф).

#### ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ

1. Изучить теоретические сведения.
2. Подготовить Simulink-схему ЭСП к использованию инструмента *Linear Analysis Tool*.
3. Получить набор типовых динамических диаграмм с помощью инструмента *Linear Analysis*.
4. Выполнить анализ устойчивости и качества регулирования ЭСП с помощью диаграмм.
5. Произвести с помощью моделирования в Simulink экспериментальную проверку правильности выводов, основанных на диаграммах.
6. Оценить влияние изменения параметров регулятора (коэффициентов обратных связей по скорости и току, коэффициента усиления в прямой цепи) на запасы устойчивости и качество регулирования в переходном режиме.
7. Оценить влияние начальных условий по скорости на функционирование ЭСП.
8. Оформить отчет, в котором отразить теоретические сведения, результаты экспериментальной работы (скриншоты ЛАФЧХ, диаграмм, осциллограмм сигналов) с комментариями, представить выводы по работе.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы типовые способы коррекции, которые применяют в следящих приводах?
2. Как производится анализ устойчивости и качества регулирования линейной системы в пакете Simulink?
3. Что представляет собой Simulink-схема ЭСП, подготовленная к использованию инструмента Linear Analysis Tool? Каковы начальные условия функционирования?
4. Какие характерные режимы работы ЭСП соответствуют диаграммам во временной и частотной областях?
5. Каковы показатели ТЗ на проектирование ЭСП могут быть оценены по динамическим диаграммам?
6. В каких единицах измеряются величины на ЛАЧХ и ФЧХ?
7. В каких единицах измеряются величины на графиках переходной и весовой функций?
8. Осциллограммы каких сигналов получают при анализе динамики ЭСП? Какие показатели оцениваются в виртуальном испытательном стенде?

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА В СИСТЕМЕ МАТЛАБ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Оптимальный синтез коэффициентов регулятора стандартными средствами системы Матлаб

Сформируем замкнутый контур управления. Введем в ЭСП с помощью датчика угла главную отрицательную обратную связь по углу поворота нагрузки. При этом будем полагать, что вход ЭСП – сигнал задания по углу нагрузки. Для расширения возможностей обеспечения ТЗ введем в ЭСП с помощью соответствующих датчиков местные отрицательные обратные связи по скорости и току.

Согласно ТЗ при оптимальном синтезе в режимах переборки и слежения в качестве тестирующих входных сигналов будем использовать, соответственно, ступенчатый сигнал 1.57 рад. Simulink-схема замкнутого ЭСП третьего порядка с ограничителем представлена на рисунке.

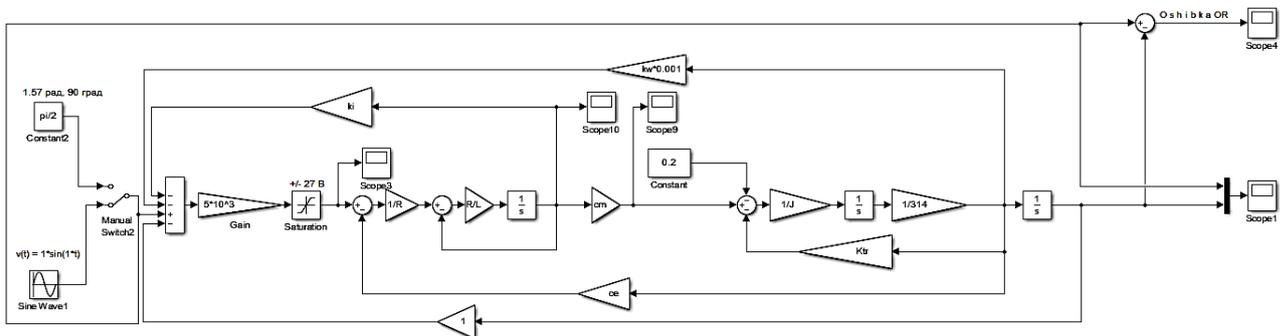


Рис. 1. Simulink-схема ЭСП

Рассмотрим оптимальный синтез регулятора в линейной зоне. Его можно выполнить по отдельности для двух рабочих режимов ЭСП с использованием стандартного блока оптимизации *Signal Constraint*.

Рассмотрим оптимальный синтез в режиме переборки. В ТЗ требования к ЭСП по быстродействию и колебательности имеет вид:

- время перемещения нагрузки на угол 1.57 рад (90 град) – не более 2 с;
- перерегулирование – не более 10%.

Подключение блока *Signal Constraint* к выходу нелинейной модели ЭСП ( $M_H \neq 0$ ) в режиме переборки показано на рисунке 2. В частном более простом случае, когда ЭСП работает в линейной зоне, подключение блока *Signal Constraint* к выходу линейной модели привода (при  $M_H = 0$ ) показано на рисунке 4.

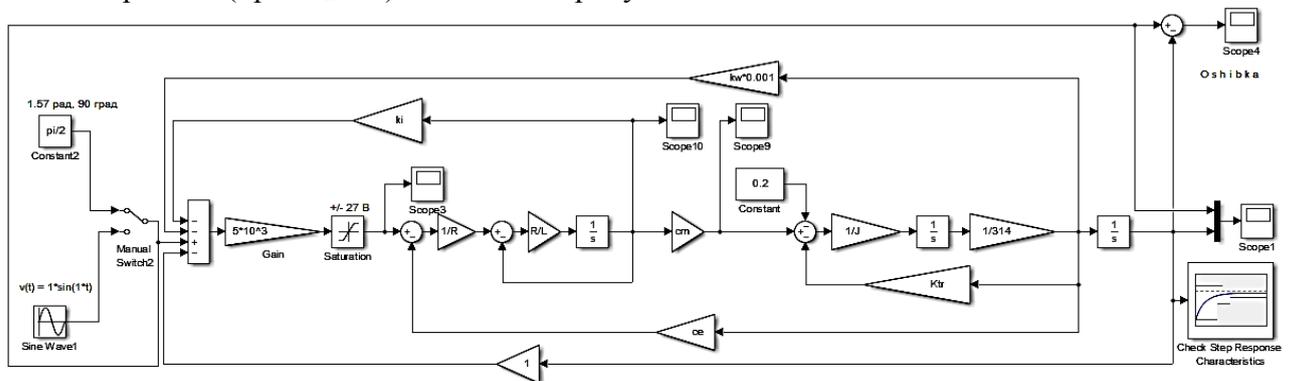


Рис. 2. Подключение блока *Signal Constraint* к выходу ЭСП в режиме переборки

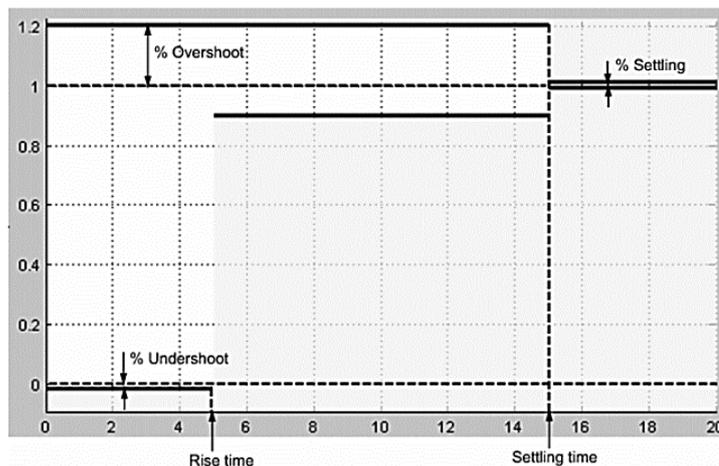


Рис 3. Пример спецификации качества регулирования в параметрах блока Signal Constraint при единичном скачке на входе системы

На рис. 4 отрезки задают следующие требования к реакции на единичное ступенчатое воздействие:

- Амплитуда меньше или равна - 0.01 до времени нарастания 5 секунд, что соответствует недорегулированию (undershoot) в 1 %
- Амплитуда изменяется в пределах между 0.9 и 1.2 до времени установления (settling time) в 15 секунд
- Амплитуда не превышает 1.2 до времени установления в 15 секунд, что соответствует перерегулированию (overshoot) в 20 %
- Амплитуда находится между 0.99 и 1.01 после времени установления, что соответствует установившейся ошибки (settling) в 2 %.

Чтобы указать необходимые по ТЗ требования к качеству регулирования ЭСП, необходимо изменить время и амплитудные значения отрезков.

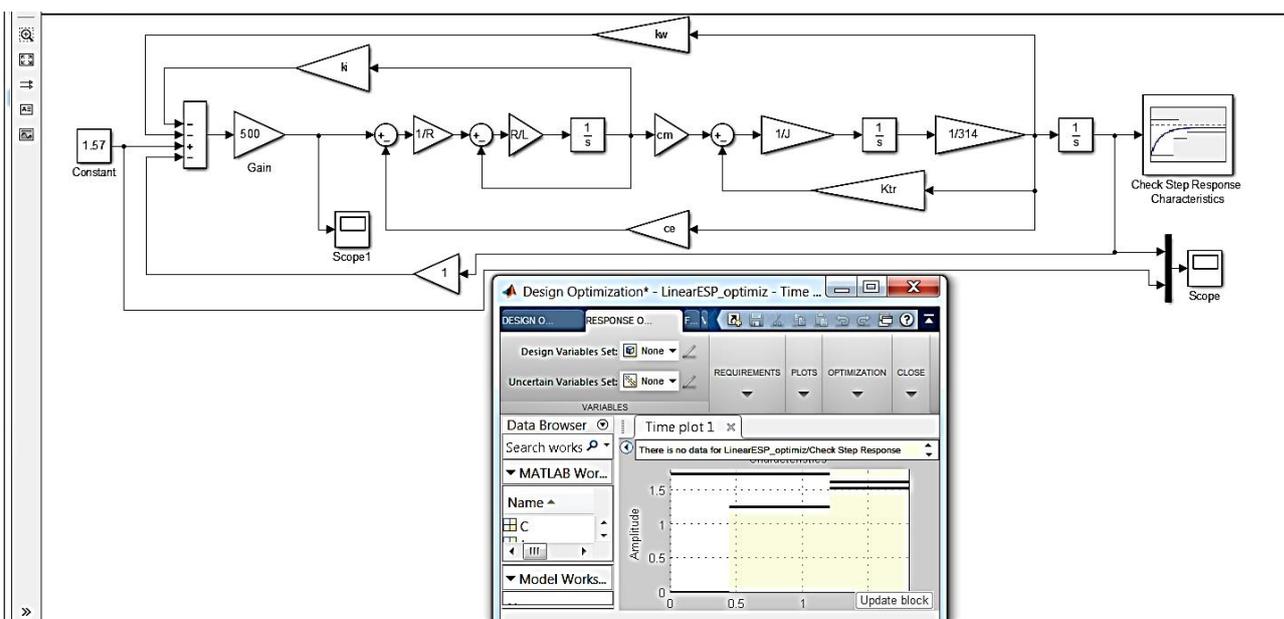


Рис. 4. Подключение блока *Signal Constraint* к выходу линейной модели ЭСП (при  $M_H = 0$ )

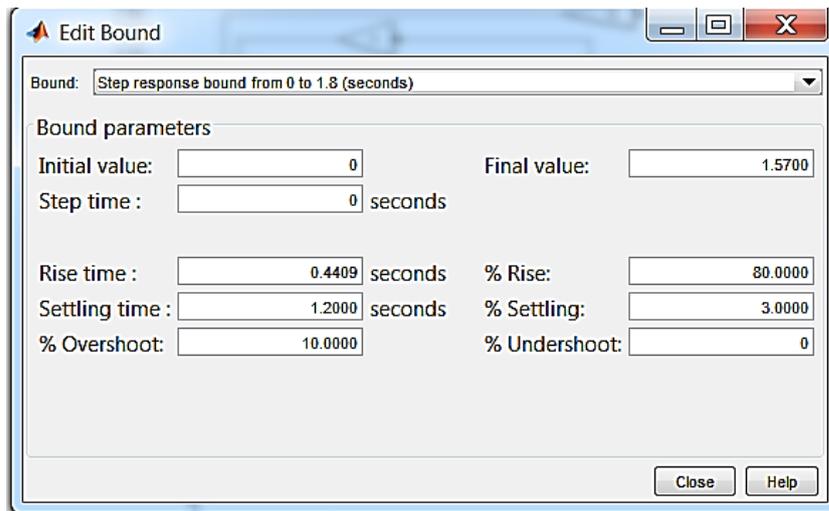


Рис 5. Спецификация качества регулирования ЭСП при ступенчатом сигнале 1.57 рад

Для выбора и задания варьируемых (корректируемых) параметров регулятора надо нажать кнопку *Non* – появляется окно *Create Design Variables Set* (см. рис. 4, 6).

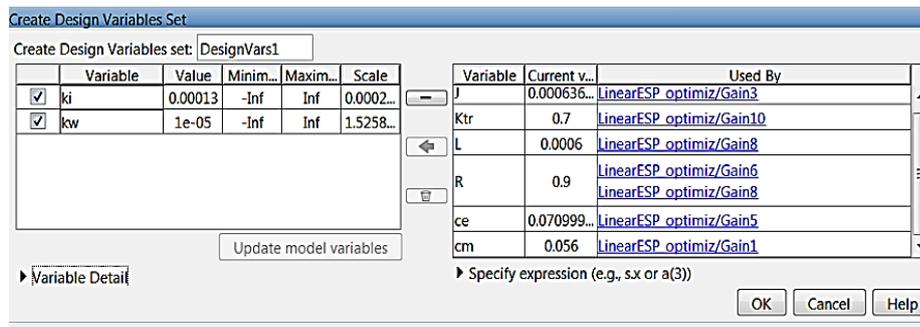


Рис 6. Задание корректируемых параметров  $k_i$ ,  $k_w$

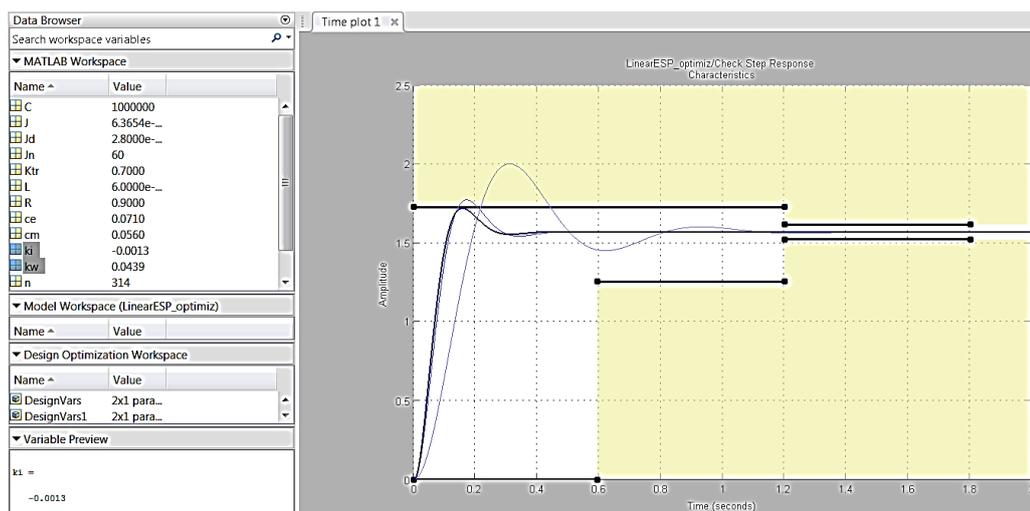


Рис. 7. Результат оптимизации регулятора по двум коэффициентам обратных связей

Результат неудачного выбора начальных приближений по параметрам регулятора  $k_i$ ,  $k_w$  при оптимизации ЭСП представлен на рис. 7. Найденные параметры регулятора требуют изменения полярности обратной связи по току:

$$k_i = -0.0013 \text{ [рад/А]}; k_w = 0.0439 \text{ [с]}.$$

После уточнения начальных приближений по параметрам регулятора (в m-файле параметров ЭСП) в результате оптимизации достигнуто требуемое по ТЗ время регулирования не более  $2c$  и перерегулирование не более 10% при  $k_i = 0.0107$  [рад/А];  $k_w = 0.0934$  [с].

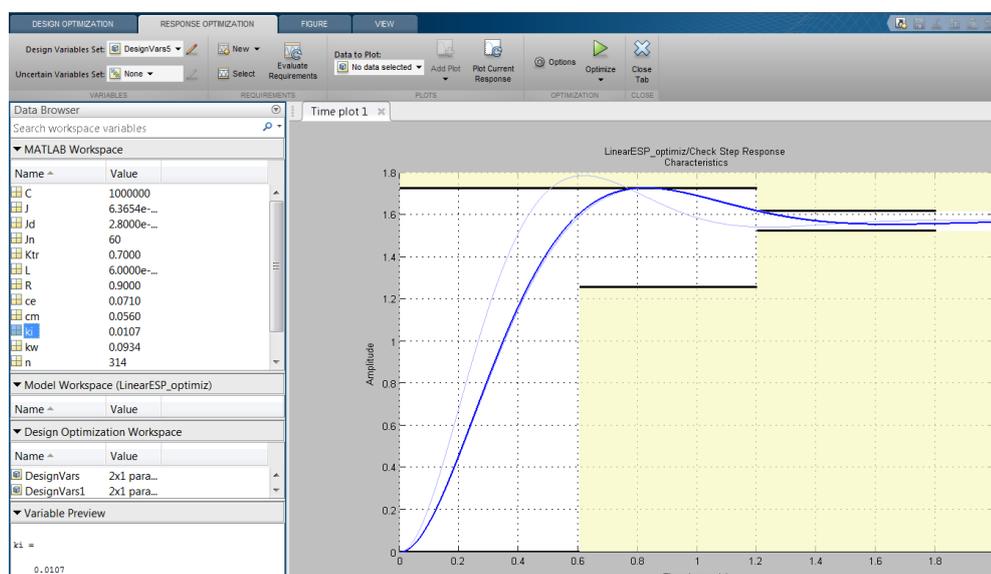


Рис. 8. Приемлемый результат оптимизации регулятора

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Построить модель ЭСП в пакете Simulink.
2. Построить график переходного процесса.
3. Замените числовые значения блоков параметров регулятора модели на переменные
4. Объявите переменные в Workspace с начальными значениями.
5. Добавьте в модель блок, Check Step Response Characteristics из библиотеки Simulink > Signal Design Optimization > Signal Constraints и подключите его к выходу системы.
6. Используя исходные данные задайте допустимые границы коридора движения переменной. Постройте границы коридора введя команду Show Plot закладки Bounds.
7. Нажмите клавишу Response Optimization закладки Bounds.
8. Добавьте переменные регулятора в список Design Variable Set и задайте зону поиска переменных.
9. Запустите процесс оптимизации параметров модели по реакции системы.

## ЗАДАНИЕ

Скорректируйте ЭСП с помощью блока, задав требования из задания. Получите результаты моделирования синтезированной системы при ступенчатом сигнале на входе.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие преимущества можно получить при использовании Simulink Response Optimization в разработке систем автоматического управления?
2. Как задается целевая функция в пакете Response Optimization?
3. Почему следует рассматривать поведение модели с оптимизированными параметрами при разных входных воздействиях?

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОВОЙ СИЛОВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

### 1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ

Цель работы – экспериментальное исследование влияния на динамику и точность автоколебательной газовой силовой системы управления (ГССУ) амплитуды и частоты гармонического входного сигнала, а также флуктуаций параметров системы.

Достижение поставленной цели связано с решением следующих задач:

- построение схемы моделирования релейной ГССУ;
- определение зависимости амплитуды и частоты автоколебаний от параметров входного сигнала и параметров системы;
- построение схемы моделирования ГССУ с блоком вычисления амплитуды и фазового сдвига первой гармоники выходного сигнала;
- построение экспериментальных частотных характеристик ГССУ по первой гармонике выходного сигнала;
- оценка точности ГССУ по фазовому сдвигу, вносимому системой на частоте полезного сигнала;
- оценка степени сглаживания (фильтрации) вибрационной составляющей колебаний руля в контуре телеуправления ракетой.

### 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

#### 2.1. Вводные замечания

Автоколебания, сопровождающие процесс управления, свойственны многим нелинейным системам, в частности, релейным, с логическим управлением и др.

К статическим нелинейностям рулевого привода относятся: ограничение фазовых координат, гистерезис в электромагнитной подсистеме, сухое трение и люфт в механической подсистеме и др. Нелинейности негативно сказываются на динамике и точности рулевых приводов и их влияние стремятся уменьшить. Для этой цели в приводе с релейным регулятором организуется вибрационный режим одного из следующих видов:

- автоколебательный;
- широтно-импульсной модуляции;
- скользящий.

Высокочастотные колебания обеспечивают вибрационное сглаживание и вибрационную линеаризацию нелинейной системы по медленно изменяющемуся полезному сигналу. Эквивалентная в режиме слежения линейная система используется для синтеза закона управления. При этом используются хорошо развитые методы линейной теории, например, частотные методы.

Практически важно, что в релейных приводах транзисторы импульсного усилителя мощности работают в ключевом режиме (“открыт-закрыт”). Это в сравнении с линейным законом управления обеспечивает высокий коэффициент полезного действия усилителя и упрощает систему охлаждения. Кроме того, в гидравлических и газовых приводах высокочастотные колебания давления и расхода рабочего тела препятствуют засорению дросселей смолами и продуктами горения пороха.

#### 2.2 Особенности функционирования рулевых приводов

Характерной особенностью релейных приводов является то, что в них возникают незатухающие свободные периодические колебания, называемые автоколебаниями. Автоколебания являются установившимся процессом, который возникает в автономной системе, когда входной сигнал отсутствует либо представляет собой постоянную величину.

Для многих релейных систем автоколебания являются рабочим режимом. Поэтому при проектировании таких систем большое внимание уделяется исследованию возникающих в них автоколебаний. Однако в газовом рулевом приводе с пропорциональным

управлением также могут возникать автоколебания, когда в нем имеются люфт, сухое трение, ограничения координат (например, в газораспределительном устройстве).

Автоколебательный рулевой привод (РП) может быть с двухпозиционным или трехпозиционным релейным управлением.

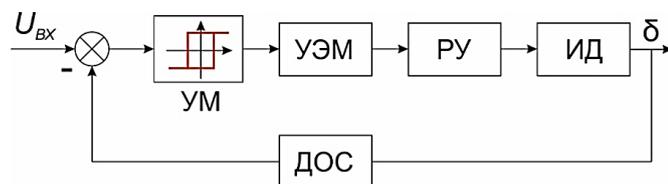


Рисунок 1 – Автоколебательный РП с двухпозиционным управлением

Для автоколебательных рулевых приводов характерно следующее соотношение между амплитудой автоколебаний и максимальных отклонение руля (рис. 2)

$$\frac{\delta_a}{\delta_m} = 0,2 \dots 0,8$$

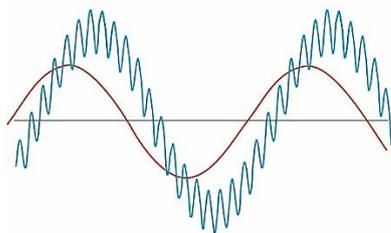


Рисунок 2 – Осциллограммы отработки полезного гармонического сигнала автоколебательным рулевым приводом:

- задающий сигнал (красная линия);
- колебания руля (синяя линия).

Из рис. 2 видно, что процесс на выходе рулевого привода содержит полезную медленную и автоколебательную быструю (вибрационную) составляющие. Система обрабатывает полезный входной сигнал с фазовым сдвигом, который зависит от частоты и амплитуды входного сигнала.

## 2.2 Постановка задачи моделирования динамических испытаний газового рулевого привода

### 2.2.1 Построение принципиальной схемы рулевого привода

Принципиальная схема ГССУ представлена на рис. 5.

Газораспределительное устройство (ГРУ) 5 реализовано по типу «сопло-шарик-заслонка». Электронный усилитель 6 имеет три составляющие части:

- устройство, выделяющее сигнал рассогласования ( $U_g - U_{oc}$ );
- усилитель сигнала рассогласования по напряжению (может быть линейным либо релейным; линейный усилитель характеризуется коэффициентом передачи  $K_Y$ );
- усилитель мощности, который вместе с электромагнитом 7 образует единую динамическую систему – электромеханический преобразователь (ЭМП).

ЭМП управляет ГРУ. В представленной схеме использован нейтральный электромагнит.

Рулевой тракт ГССУ имеет электрическую обратную связь. Для повышения надежности потенциометр датчика обратной связи сдвоен.

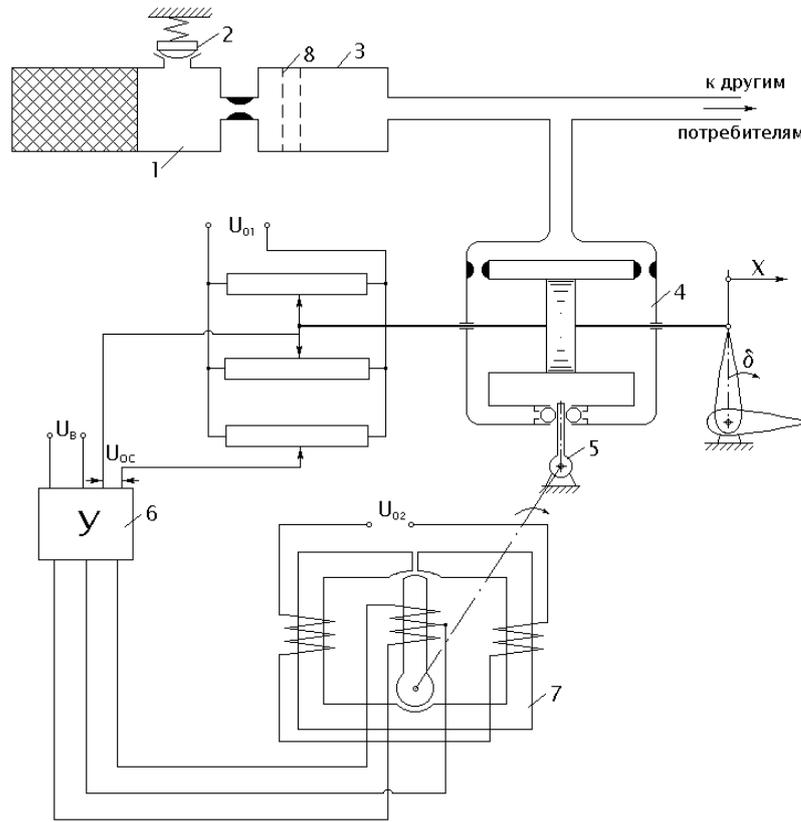


Рисунок 5 – Принципиальная схема системы: 1 - генератор газа; 2 - сбросовой клапан; 3 - ресивер; 4 - двигатель; 5 - газораспределительное устройство; 6 - усилитель; 7 - электромагнит; 8 - фильтр очистки

### 2.2.2 Построение математического описания функционирования рулевого привода

Построим математическое описание (МО) функционирования газового РП в переходных и установившихся режимах функционирования. При допущении о равенстве температуры газа в ресивере и рабочих полостях получаем нелинейное МО функционирования релейного РП во всех возможных режимах функционирования

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \frac{1}{W_n + S_n X} (kk_0 p_p \sqrt{RT_p} J_{11} - kk_0 \{a - bF[U_\varepsilon(t - \tau_3)]\} p_1 \sqrt{RT_p} J_{12} - kp_1 S_n V); \\ \frac{dp_2}{dt} &= \frac{1}{W_n - S_n X} (kk_0 p_p \sqrt{RT_p} J_{21} - kk_0 \{a + bF[U_\varepsilon(t - \tau_3)]\} p_2 \sqrt{RT_p} J_{22} - kp_2 S_n V); \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{M_{np}} (S_n (p_1 - p_2) - hV - \eta X); \\ \frac{dx}{dt} &= V; \\ \left( \frac{dx}{dt} \right)_1 &= -\mu \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 \text{ при } X = \pm X_m; \end{aligned} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{aligned} U_\varepsilon(t) &\in [-U_m, U_m], \forall t \in [t_0, t_T]; \\ (p_{1,2}(t) \in [p_0, p_p], V(t) \in [-V_m, V_m], X(t) \in [-X_m, X_m]) &\forall t \in [t_0, t_T], \end{aligned} \right\} (5)$$

где

$$F[U_e(t)] = \begin{cases} x_m \operatorname{sign}(U_e - b_T) & \text{при } \frac{dU_e}{dt} > 0; \\ x_m \operatorname{sign}(U_e + b_T) & \text{при } \frac{dU_e}{dt} < 0; \end{cases} \quad (6)$$

$$U_e(t) = K_y(U_{ex}(t) - K_{oc}X(t));$$

$$Y_{11,21} = \begin{cases} \varepsilon \sqrt{\left(\frac{P_{1,2}}{P_p}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{P_{1,2}}{P_p}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}} & \text{при } \frac{P_{1,2}}{P_p} > \beta_\kappa; \\ 1 & \text{при } \frac{P_{1,2}}{P_p} \leq \beta_\kappa; \end{cases}$$

$$Y_{12,22} = \begin{cases} \varepsilon \sqrt{\left(\frac{P_a}{P_{1,2}}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{P_a}{P_{1,2}}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}} & \text{при } \frac{P_a}{P_{1,2}} > \beta_\kappa; \\ 1 & \text{при } \frac{P_a}{P_{1,2}} \leq \beta_\kappa; \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{k_0} \sqrt{\frac{2k}{k-1}}; \quad k_0 = \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}; \quad \beta_\kappa = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

Здесь использованы обозначения:  $U_e$ ,  $U_m$  - входной сигнал и его максимальное значение;  $X$ ,  $x$  - координата поршня привода и заслонки ГРУ ( $X=0$  при нейтральном положении поршня;  $x=0$  при нейтральном положении заслонки);  $X_m$ ,  $x_m$  - максимальное значение координат;  $p_p, p_1, p_2$  - давление газа в ресивере и рабочих полостях привода, соответственно;  $T_p, T_1, T_2$  - температура газа в ресивере и рабочих полостях, соответственно;  $W_n$  - объем рабочих полостей привода при  $X=0$ ;  $S_n$  - эффективная площадь поршня;  $a+b_x$ ,  $a-b_x$  - законы изменения дросселирующих отверстий ГРУ;  $M$  - приведенная масса поршня;  $h$  - коэффициент вязкого трения;  $\mu$  - коэффициент восстановления удара на упорах привода;  $\eta$  - коэффициент позиционной нагрузки (жесткость пружины);  $k$ ,  $R$  - показатель адиабаты и газовая постоянная;  $K_y$ ,  $K_{oc}$  - коэффициенты усиления сигнала рассогласования  $U_e$  и сигнала обратной связи  $U_{oc}$ , соответственно;  $\tau_s$  - время эквивалентного запаздывания ЭМП;  $(t_T - t_0)$  - время функционирования;  $p_{m1,2}$ ,  $T_{m1,2}$ ,  $V_m$  - параметры границы рабочей области фазового пространства системы.

Отметим, что данное МО отражает как критические, так и докритические режимы течения газа через дроссели. МО отражает релейный режим работы ГРУ с учетом зоны неоднозначности (гистерезиса). В РП реализован принцип управления по отклонению, для чего в систему введена отрицательная обратная связь по положению руля.

Вид входного задающего воздействия (полезного сигнала)  $U_{ex}(t)$  может быть:

- ступенчатым (либо прямоугольный импульс) – в режиме переброски руля;
- гармоническим – в режиме слежения.

Силовая часть ГССУ может быть представлена линейной моделью в отклонениях от нейтрального положения, структурная схема которого показана на рис. 6. Эта модель имеет седьмой порядок. Без существенной потери точности привод можно описывать моделью 3-го порядка (рис. 7). Упрощенное МО используют для исследования автоколебательного режима и режима отработки полезного сигнала.

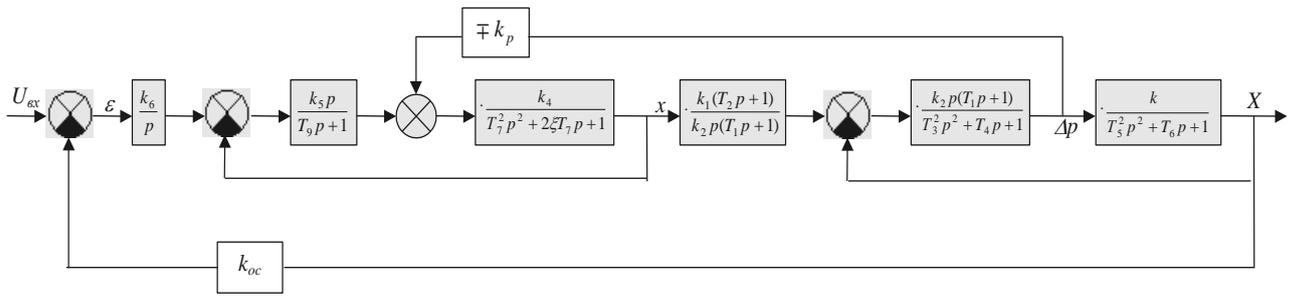


Рисунок 6 – Структурная схема замкнутой ГССУ седьмого порядка с пропорциональным управлением

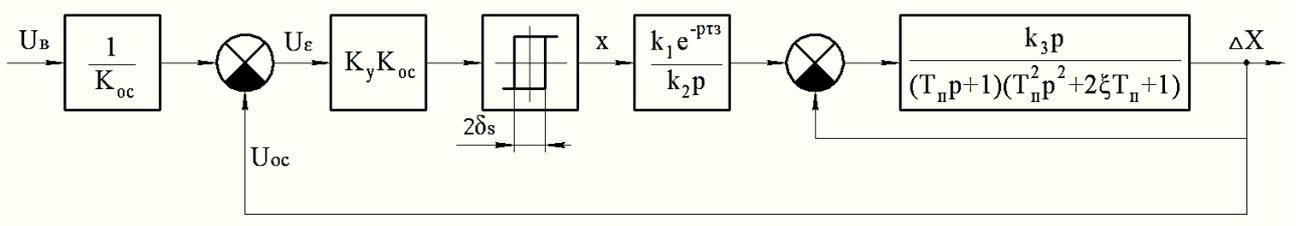


Рисунок 7 – Структурная схема ГССУ с релейным управлением

Здесь обобщенные параметры силовой системы РП определяются через конструктивные и эксплуатационные параметры по зависимостям

$$k_1 = \frac{2bp_p c}{a^2}; \quad k_2 = \frac{2S_n p_p c}{a^2 k_0 \sqrt{RT_p}}; \quad k_3 = \frac{k_2 S_n}{\eta}; \quad T_n = \frac{W_n}{akk_0 \sqrt{RT_p}}; \quad T_m = \sqrt{\frac{M}{\eta}}; \quad \xi = \frac{h}{\sqrt{M\eta}}.$$

### 2.2.3 Построение Simulink-схемы рулевого привода

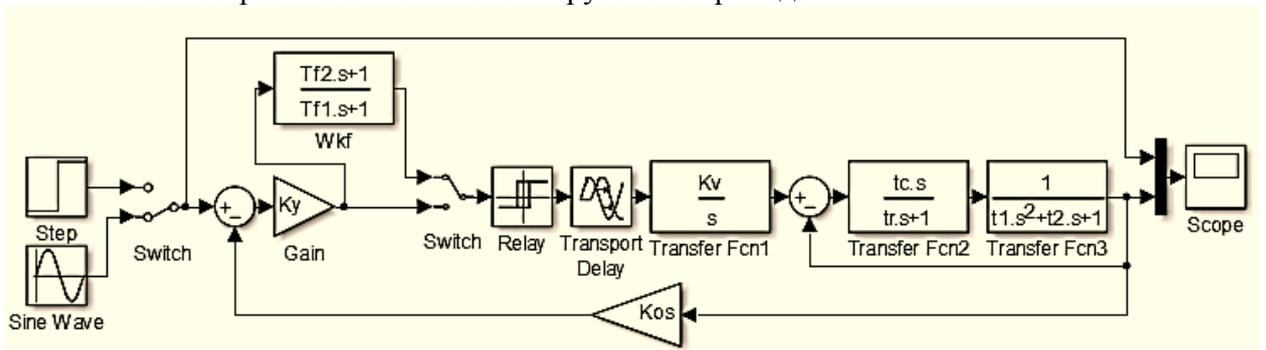


Рисунок 8 – Simulink-схема релейной ГССУ с корректирующим фильтром

Параметры ГССУ следующие.

1. Коэффициенты передачи:

$K_v = 440 \text{ 1/c}$

$K_{os} = 0.25 \text{ В/рад}$

$K_y = 3.26$

2. Постоянные времени механической подсистемы газового двигателя:

$t_1 = 11.6e-3 \text{ c,}$

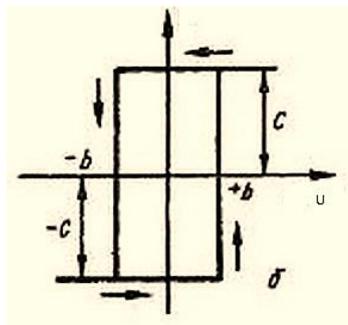
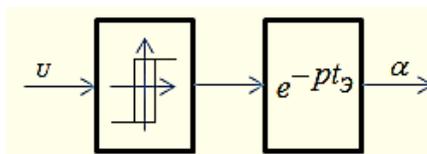
$t_2 = 0.00349 \text{ c;}$

3. Постоянные времени термодинамической подсистемы газового двигателя:

$t_c = 0.0455 \text{ c;}$

$$tr = 0.0273 \text{ с.}$$

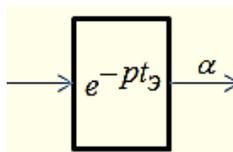
4. Параметры нейтрального ЭМП:



Параметры релейного звена *Relay* следующие.

Величины полок реле (параметр  $c = \pm 0.0255$  задается в настройках звена *Relay*), ширина петли гистерезиса  $2b$  (параметр  $\pm b$  задается в настройках звена *Relay*) – подбирается экспериментально для получения автоколебаний амплитудой до 0.035 рад и частотой до 100 Гц.

5. Моделирование электромеханического преобразователя (ЭМП):



В настройке звена *Transport Delay* задается время эквивалентного запаздывания ЭМП равно  $\tau_e = 1.98e-3 \text{ с.}$

6. Параметры корректирующего устройства – интегрирующего фильтра при частоте входного сигнала 10 Гц и частоте автоколебаний 100 Гц следующие:

$$T_{f1} = (0.1, \dots, 0.3) \frac{2\pi}{\omega_0} = (0.1, \dots, 0.3) \cdot \frac{1}{8} = 0.0375 \text{ с;}$$

$$T_{f2} = (3..5) \frac{2\pi}{\omega_a} = (3..5) \cdot \frac{1}{90} = 3 \cdot 0.01 \approx 0.03 \text{ с; } T_{f1} > T_{f2}$$

Simulink-схема релейной ГССУ с блоком вычисления ЛАФЧХ по первой гармонике выходного сигнала представлена на рис. 9

Для исследуемого рулевого привода соотношение между амплитудой автоколебаний руля (4 град) и максимальным отклонением руля (15 град) от нейтрального положения имеет вид (в радианах):

$$\frac{\delta_a}{\delta_m} = \frac{0.07}{0.2617} = 0,27$$

**АНАЛИЗ ПОДОБИЯ ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПОСТОЯННОГО ТОКА**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:**

1. Изучение методики определения критериев подобия на основе анализа уравнений, описывающих функционирование системы.
2. Построение нормализованного математического описания (МО) и формирование условий подобия функционирования автоматической системы.
3. Освоение методов проектирования физической модели системы.

**1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**

**1.2 Анализ подобия системы**

Рассмотрим силовую подсистему электропривода постоянного тока, который предназначен для перемещения звена манипуляционного робота. Получим методом анализа уравнений критерии подобия электродвигателя (ЭД). На основе этих критериев производится проектирование его физической модели (ФМ).

Задача физического моделирования испытаний ЭД при изменении в  $\kappa$ - раз инерционной нагрузки является практически важной и формулируется следующим образом: необходимо спроектировать ФМ и с её помощью экспериментально исследовать динамические характеристики ЭД в лабораторном стенде.

Отметим, что уменьшение нагрузки позволяет упростить и удешевить лабораторно-стендовые испытания силовых приводов большой мощности, которая может достигать десятков киловатт. В то же время, изменение нагрузки в сторону увеличения позволяет упростить динамические испытания микромеханических систем.

Проектирование ФМ ЭД производится на основе условий подобия функционирования систем. Получение критериев подобия основано на процедурах построения МО системы и его нормализации. Рассмотрим МО ЭД в переходных и установившихся режимах, которое представляет собой систему трёх обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$L \frac{di}{dt} = U - i \cdot R - C_e \cdot \omega; \quad J \frac{d\omega}{dt} = C_m \cdot i - h \cdot \omega; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega,$$

где  $U$  - управляющее напряжение,  $U_{\tilde{U}} \in [-U_{\max}, U_{\max}]$ ;  $i$  - ток в якорной обмотке;  $R$ ,  $L$  - активное сопротивление и индуктивность якоря, соответственно;  $\omega, J$  - угловая скорость и момент инерции якоря, соответственно;  $h$  - коэффициент вязкого трения;  $C_e$  - коэффициент противо-ЭДС;  $C_m$  - коэффициент, определяющий зависимость развиваемого момента от тока.

Введём безразмерные переменные и произведём замену исходных фазовых координат и времени по масштабным соотношениям:

$$i = i_{\sigma} \cdot \tilde{i}, \quad \omega = \omega_{\sigma} \cdot \tilde{\omega}, \quad \varphi = \varphi_{\sigma} \cdot \tilde{\varphi}, \quad t = t_{\sigma} \cdot \tau,$$

где  $\tilde{i}, \tilde{\omega}, \tilde{\varphi}, \tau$  – безразмерные переменные;  $i_{\sigma}, \omega_{\sigma}, \varphi_{\sigma}, t_{\sigma}$  – временно неизвестные постоянные множители (базисные величины). МО ЭД преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{L \cdot i_{\sigma}}{t_{\sigma}} \right) \frac{d\tilde{i}}{d\tau} = U_{\sigma} \cdot \tilde{U} - (R \cdot i_{\sigma}) \tilde{i} - (C_e \cdot \omega_{\sigma}) \tilde{\omega}; \\ \left( \frac{J \cdot \omega_{\sigma}}{t_{\sigma}} \right) \frac{d\tilde{\omega}}{d\tau} = (C_m \cdot i_{\sigma}) \tilde{i} + (h \cdot \omega_{\sigma}) \tilde{\omega}; \\ \left( \frac{\varphi_{\sigma}}{t_{\sigma}} \right) \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau} = \omega_{\sigma} \cdot \tilde{\omega}; \\ U_{\sigma} \cdot \tilde{U} \in [-U_{\max}, U_{\max}] \end{array} \right.$$

Преобразуем полученные уравнения к безразмерному виду делением на размерный множитель. Подчеркнем, что выбор базисных величин произволен. В целях упрощения МО целесообразно их выбрать так, чтобы максимальное число безразмерных комплексов параметров обратилось в единицу. Пусть, например,

$$i_{\sigma} = \frac{U}{R}; \quad \omega_{\sigma} = \frac{U}{C_e}; \quad t_{\sigma} = \frac{L}{R}; \quad \varphi_{\sigma} = \omega_{\sigma} \cdot t_{\sigma}; \quad U_{\sigma} = U_{\max} .$$

Тогда получаем нормализованное МО ЭП в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{i}}{d\tau} = \tilde{U} - \tilde{i} - \tilde{\omega}; \\ \frac{d\tilde{\omega}}{d\tau} = \left( \frac{C_m C_e L}{J \cdot R^2} \right) \cdot \tilde{i} + \left( \frac{h \cdot L}{J \cdot R} \right) \cdot \tilde{\omega}; \\ \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau} = \tilde{\omega}; \\ \tilde{U} \in [-1, 1] \end{array} \right.$$

Следовательно, для того, чтобы обеспечить эквивалентность нормализованных МО сопоставляемых ЭД необходимо выполнение условий равенства определяющих критериев подобия в модели и оригинале:

$$\frac{C_m C_e L}{J R^2} = idem; \quad \frac{h L}{J R} = idem.$$

где "*idem*" – означает одинаковый, тождественный.

Выполнение полученных условий подобия функционирования ЭП обеспечивает масштабное подобие переходных процессов  $i(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\varphi(t)$  в модели и оригинале. Отметим, что безразмерные комплексы параметров

$$\pi_1 = \frac{C_m C_e L}{J R^2}, \quad \pi_2 = \frac{h L}{J R}$$

называются определяющими критериями подобия; безразмерные переменные  $i$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\varphi}$  – определяемыми (зависимыми) критериями подобия.

Таким образом, задача исследования динамики ЭД в зависимости от значений параметров упрощается, т.к. анализ производится на плоскости двух обобщенных безразмерных параметров  $\pi_1, \pi_2$ , причем каждая точка плоскости соответствует шести исход-

ным размерным параметрам  $R, L, J, c_E, c_M, h$ .

Эквивалентным условием подобия является условие

$$\Lambda_j = \pi_j' / \pi_j'' = 1, \quad (1)$$

где  $\Lambda_j$  - индикатор подобия;  $\pi_j', \pi_j''$  - значения критерия  $\pi_j$  в оригинале и в модели, соответственно.

Условия подобия систем в масштабной форме имеют вид

$$\prod_{i=1}^n m_i^{a_{ji}} = 1, \quad j = 1, \overline{N}.$$

где  $m_i = \frac{\alpha_i'}{\alpha_i''}$  - масштаб воспроизведения в модели величины  $\alpha_i$ . Штрихи "'" и "" соответствуют значениям величины в оригинале и в модели.

Условия подобия ЭП в масштабной форме записи принимают вид

$$\frac{m_{CM} m_{CE} m_L}{m_J m_R^2} = 1; \quad \frac{m_h m_L}{m_J m_R} = 1$$

Масштабы, связывающие значения переменных в модели и оригинале, при выполнении условий подобия определяются следующим образом.

В оригинале  $i' = i_\sigma \tilde{i}$ ; в ФМ  $i'' = i_\sigma' i$ ,

поэтому  $i' = m_i i''$ ,  $m_i = i_\sigma' / i_\sigma = \frac{R' U''}{R'' U'} = \frac{m_R}{m_u}$ ; Аналогично

$$m_\omega = \frac{\omega_\sigma'}{\omega_\sigma''} = \frac{u' c_e''}{u'' c_e'} = \frac{m_u}{m_{ce}},$$

$$m_t = \frac{t_\sigma'}{t_\sigma''} = \frac{L' R''}{L'' R'} = \frac{m_L}{m_R}.$$

На основе полученных выражений для критериев подобия, а также масштабов воспроизведения в модели переменных оригинала формируется ТЗ на проектирование ФМ ЭД.

### Проектирование физической модели

Рассмотрим в общем виде требования к ФМ динамической системы.

Процессу создания ФМ предшествует этап формирования и формализации совокупности предъявляемых к ней требований, которая включает:

- 1) требования подобия модели оригиналу;
- 2) требования, отражающие специфику реализации модели;
- 3) требования тождественности некоторых величин модели и оригинала.

**Требования подобия** – непосредственно следуют из определения понятия модели. При нарушении этих требований нарушается взаимно однозначное соответствие между процессами в модели и оригинале, что не позволяет достоверно судить о процессах в оригинале, анализируя процессы функционирования модели.

Математически требования подобия сводятся к требованию равенства численных значений критериев подобия в модели и оригинале.

$$\frac{C_M C_e L}{J R^2} = idem, \quad \frac{hL}{J R} = idem,$$

или в масштабной форме записи

$$\frac{m_{CM} m_{CE} m_L}{m_J m_R^2} = 1; \quad \frac{m_h m_L}{m_J m_R} = 1$$

(1).

**Требования специфики реализации ФМ** – определяют необходимые отличия модели от оригинала, в силу которых эксперименты с ней более дешевы и удобны.

Примерами требований специфики служат: требования уменьшения размеров модели, её мощности по сравнению с оригиналом; требование замены рабочего тела, используемого в оригинале (гелий, водород, аммиак, углекислый газ, пороховой газ и др.), более дешёвым, безопасным и/или менее агрессивным модельным газом, как правило, воздухом. Математически требование специфики сводится к выполнению условий

$$m_i = const \quad (2)$$

где  $m_i$  – масштаб, определяющий требуемое изменение некоторой величины  $\alpha_i$  в модели по сравнению с её значением в оригинале.

Для ЭД требованием специфики реализации является уменьшение инерционной нагрузки  $J$  в  $k$  раз, т.е.  $m_J = k$ , что позволяет упростить макетирование привода в лабораторных условиях.

**Требования тождественности некоторых величин ФМ и оригинала** – обусловлены следующим. Часто значения ряда параметров оригинала неизвестны, Например, неизвестны точные значения коэффициентов демпфирования, расхода, восстановления на упоре (при соударениях) и т.п.. В силу этого оказывается невозможным осуществить проверку выполнения условий подобия.

Использование в оригинале и ФМ одинаковых материалов, рабочих сред, конструктивного исполнения узлов позволяет реализовать тождественность этих параметров. В результате исключается неопределенность в условиях подобия. В условиях подобия эти параметры взаимно сокращаются, а в масштабной форме записи условий подобия масштаб, соответствующий неопределённому параметру, принимает конкретное значение, равное единице.

Кроме того, требования тождественности переменных часто определяются необходимостью стыковки ФМ с реальной аппаратурой моделируемой системы (при создании полунатурных стендов). Отсюда следует необходимость сохранения в модели натуральных мгновенных значений переменных, связывающих ее с реальными блоками.

Математически требования тождественности состоят в выполнении условий

$$m_i = 1, \quad (3)$$

где  $m_i$  – масштаб, определяющий требование тождественности некоторой величины  $\alpha_i$  в модели и оригинале.

Для ЭП требованием тождественности является условие обеспечения при моделировании реального масштаба времени  $m_t = 1$ , что, например, связано с необходимостью стыковки ФМ с реальной аппаратурой в полунатурном стенде.

Рассмотрим синтез параметров ФМ ЭП.

После того, как требования, предъявляемые к ФМ, сформированы, приступают к проектированию модели. На первом этапе разрабатывают конструкцию модели. При этом решается задача обеспечения эквивалентности МО оригинала и ФМ на символическом уровне. Для этого необходимо сохранение в модели геометрической формы, конструктивных признаков оригинала и физической сущности протекающих, в нём процессов. Например, конструкция модельного манипулятора должна быть геометрической копией конструкции оригинала.

Часто конструктивная реализация ФМ осуществляется путём доработки некоторого прототипа модели. В качестве прототипа выбирают конструктивно эквивалентное или достаточно близкое к оригиналу изделие. При этом учитывают требования специфики реализации ФМ, а также стоимость и доступность прототипа. Так, для ЭД в качестве прото-

типа ФМ, может быть использован натуральный электродвигатель с уменьшенной в заданное число раз инерционной нагрузкой.

На втором этапе реализации ФМ осуществляют расчет её параметров и масштабов воспроизведения переменных.

Систему соотношений для определения параметров ФМ и масштабов моделирования образуют:

- условия подобия (1);
- условия специфики реализации (2);
- условия тождественности (3);

К условиям, которые накладывают ограничения на масштабы воспроизведения в ФМ переменных, добавляют зависимости, связывающие масштабы воспроизведения этих переменных с масштабами воспроизведения параметров. Система требований к ФМ ЭД имеет вид

$$\left. \begin{aligned} m_{CM} \cdot m_{CE} \cdot m_L \cdot (m_J m_R^2)^{-1} &= 1; \\ m_h \cdot m_L \cdot (m_J m_R)^{-1} &= 1; \\ m_J &= k; \\ m_i &= 1; \\ m_i \cdot m_R \cdot m_L^{-1} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

После логарифмирования расчетной системы соотношений получим систему линейных уравнений

$$A \cdot \mu = b, \quad (5)$$

где  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_i, \dots, \mu_n)^T = (\lg m_1, \lg m_2, \dots, \lg m_i, \dots, \lg m_n)^T$  – вектор неизвестных; компоненты матрицы  $A$  и вектора  $b$  – числа. Система (5) имеет решение, если

$$\text{rang } A = \text{rang } (A, b) \quad (6)$$

Условие (6) – условие реализации ФМ. Его нарушение свидетельствует о противоречивости требований, предъявляемых к ФМ, и невозможности их совместного выполнения.

Если  $\text{rang } A = n$ , решение системы (5) существует и единственно. В этом случае искомые масштабы определяют путём решения системы (5) с последующим потенцированием компонент вектора  $\mu$ .

Если  $\text{rang } A < n$ , решение системы (5) существует, но не единственно. Для выделения единственного решения значения некоторых параметров и масштабов задаются, например, из условия простоты реализации этих значений в ФМ.

В зависимости от того, какие параметры задаются разработчиком, а какие рассчитываются, получают различные варианты реализации ФМ. Таким образом, решение задачи синтеза ФМ сводится к поиску множества всех приемлемых вариантов модели, для которых выполняется условие (6), и выбору некоторого предпочтительного варианта.

После упрощений система (4) включает соотношения

$$m_{CM} m_{CE} m_R^{-1} = k, \quad m_L m_R^{-1} = 1, \quad m_h = m_J = k, \quad m_i = 1.$$

Множество параметров ФМ ЭП, допускающих коррекцию имеет вид

$$\{m_{CM}, m_{CE}, m_R, m_L, m_h\}.$$

Совокупность всех подмножеств данного множества определяет общее количество вариантов модели, требующих перебора и анализа  $N = 2^5 = 32$ .

Решение не единственно, если допустить свободный выбор  $m_{CM}, m_{CE}, m_R, m_L, m_h$ . Однако, учитывая, что прототипом ФМ является натурный двигатель, целесообразно положить  $m_{CM} = m_{CE} = 1$ , поскольку реализация такого варианта не требует доработок двигателя. В этом случае множество параметров ФМ, допускающих коррекцию принимает вид

$$\{m_R, m_L, m_h\}.$$

Количество вариантов модели, требующих перебора  $N = 2^3 = 8$ . Причём множество всех возможных вариантов модели включает следующие элементы

$$\begin{aligned} & \{m_R, m_L, m_h\} \\ & \{m_R, m_L\} \quad \{m_R, m_h\} \quad \{m_L, m_h\} \\ & \{m_R\} \quad \{m_L\} \quad \{m_h\} \\ & \{\emptyset\} \end{aligned}$$

При этом для варианта с коррекцией одного параметра, например,  $\{m_R\}$  предполагается, что  $m_L = 1, m_h = 1$ ; для варианта без коррекции  $\{\emptyset\}$  –  $m_R = 1, m_L = 1, m_h = 1$  и т.д.

Приемлемым вариантом ФМ ЭД, для которого существует решение системы (4) и оно единственное, является вариант В1 с коррекцией параметров  $\{m_R, m_L, m_h\}$ . Значения масштабов по корректируемым параметрам следующие

$$m_R = k^{-1}, m_L = m_R, m_h = k.$$

При этом масштабы по фазовым переменным и времени следующие:

$$m_i = \frac{m_R}{m_u}; m_w = \frac{m_u}{m_{CE}}; m_t = 1,$$

Варианты ФМ различаются в зависимости от выбора масштаба  $m_u$ . Примем  $m_u = 1$ , что упрощает сопряжение привода с управляющей аппаратурой, тогда  $m_i = k^{-1}, m_w = 1$ .

Таким образом, в условиях, например, двукратного уменьшения в ФМ параметра  $J$  вариант В1 предусматривает увеличение в 2 раза в ФМ параметров R, L и уменьшение в 2 раза параметра h. При этом масштабы по времени, по углу, по скорости – единичные. Масштаб по току получается неединичным (уменьшение в ФМ относительно оригинала уровня тока в 2 раза), что позволяет сберечь при испытаниях ресурс изоляции обмоток ротора.

Полученные значения масштабов позволяют по значениям переменных в модели предсказать значения переменных в оригинале.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ИСПЫТАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1 Вариант ФМ-1

В качестве прототипа ФМ будем использовать натуральный электродвигатель с уменьшенной в 10 раз инерционной нагрузкой.

Simulink-схема ЭСП, которая соответствует двигателю (с учетом вязкого трения), и вариант ФМ -1 с коррекцией параметров ( $R$ ,  $L$ ,  $h$ ) представлены на рис.1. При этом

- Масштабы по времени и по входному напряжению единичные.
- Момент инерции нагрузки уменьшен в 10 раз;
- Параметры ( $R$ ,  $L$ ) увеличены в 10 раз, коэффициент вязкого трения ( $h$ ) – уменьшен в 10 раз, т.е. так же как изменен момент инерции;
- Масштабы по углу и скорости единичные;
- Масштаб по току: уровень тока в ФМ уменьшен в 10 раз;
- Коэффициент ОС по току в ФМ увеличен в 10 раз.

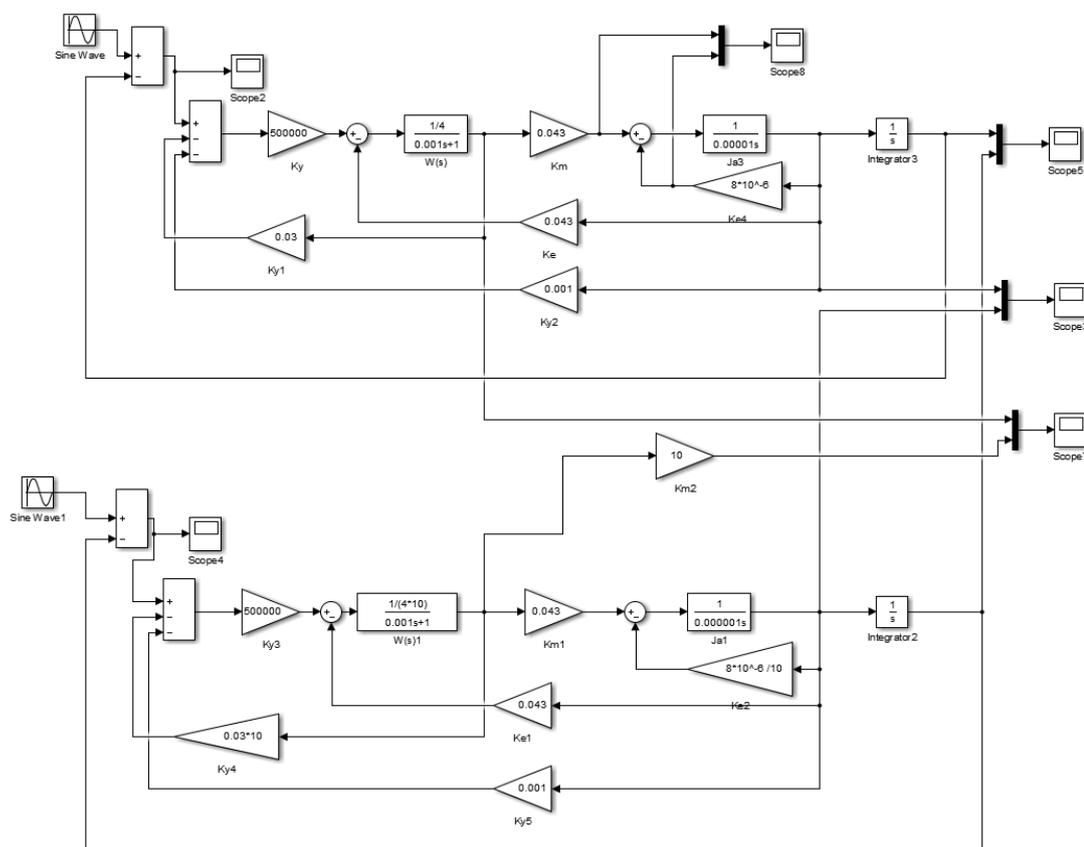


Рис.1. Simulink-схема сравнения оригинала и ФМ (вариант ФМ-1)

Совпадение (конгруэнтность) экспериментальных осциллограмм углов, скоростей и токов в оригинале и ФМ (рис.2 - 4) подтверждает правильность расчета корректируемых параметров ФМ и масштабов моделирования переменных.

Примечание.

Сравнение токов оригинала и ФМ на осциллокопе 7 производилось с учетом искусственного увеличения тока ФМ в 10 раз.

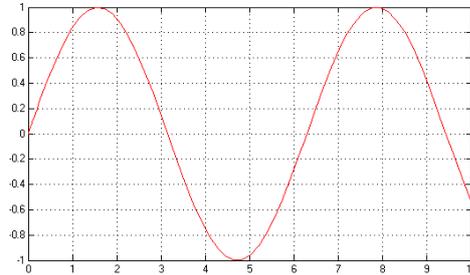


Рис.2. Осциллограмма угла

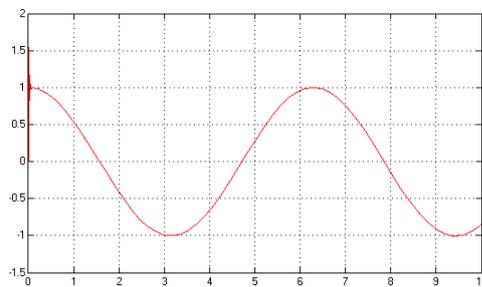


Рис.3. Осциллограмма скорости

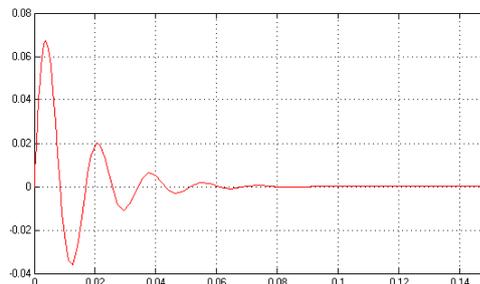


Рис.4. Осциллограммы токов в оригинале и ФМ (с учетом искусственного увеличения тока ФМ, регистрируемого осциллокопом 7, в 10 раз)

Выполним вычисление среднеквадратической ошибки физического моделирования по углу, скорости и току при синусоидальном.

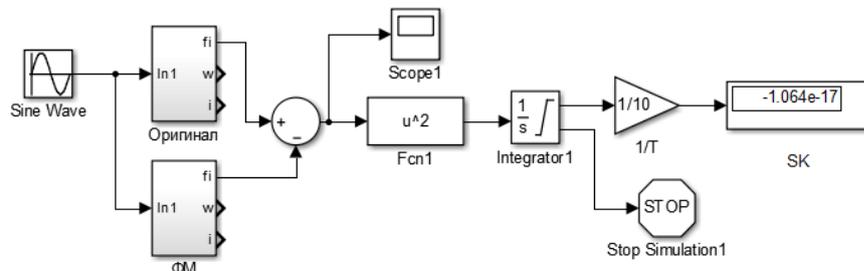


Рис.5 Схема вычисления среднеквадратического критерия аппроксимации по углу

СК ошибки аппроксимации пренебрежимо мал и обусловлен ошибкой интегрирования:  $-1.069e-17$  [рад<sup>2</sup>].

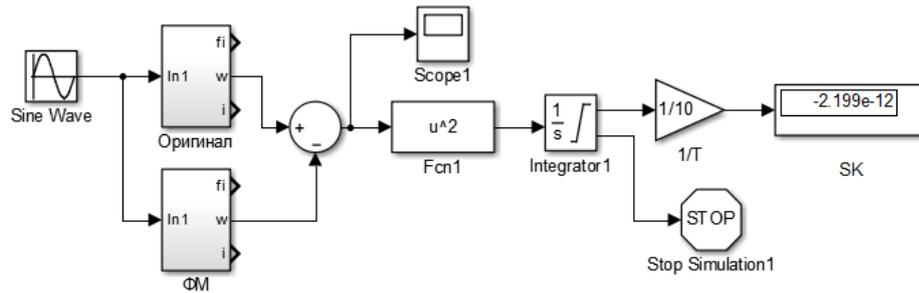


Рис.7 Схема вычисления среднеквадратичного критерия аппроксимации по скорости.

СК ошибки аппроксимации пренебрежимо мал и обусловлен ошибкой интегрирования:  $-2.199e-12$  [рад/с]<sup>2</sup>.

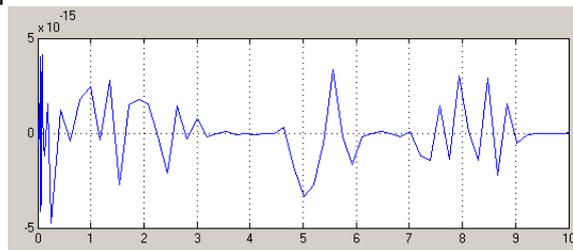


Рис.8 Ошибка идентификации (скорость).

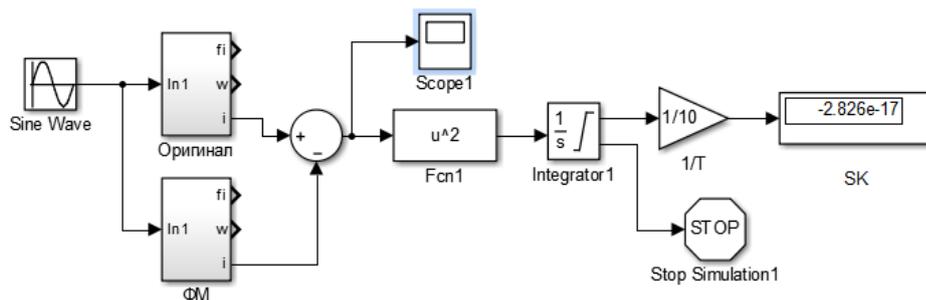


Рис.9 Схема вычисления среднеквадратичного критерия аппроксимации по току.  
СК ошибки аппроксимации пренебрежимо мал и обусловлен ошибкой интегрирования:  $-2.826e-17$  [А]<sup>2</sup>.

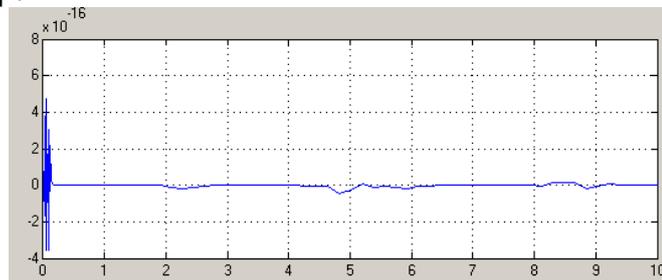


Рис.9 Ошибка идентификации (ток).

Из приведенных вычислений видно, что значения угла, скорости и тока оригинала и ФМ ЭСП совпадают.

## 1.2 Проектирование варианта ФМ-2 с ускоренным масштаб моделирования по времени

Вариант ФМ-2 с коррекцией параметров ( $R$ ,  $C_e$ ,  $U_{я}$ ) представлен на рис.5:

- Масштаб по входному напряжению единичный.
- Момент инерции нагрузки уменьшен в 10 раз;
- Параметры ( $R$ ,  $C_e$ ,  $U_{я}$ ) увеличены в 10 раз;
- Масштаб по времени – ускоренный в 10 раз,
- Масштаб по углу – уменьшенный в 10 раз;
- Масштабы по скорости и току единичные;
- Коэффициенты ОС по углу увеличен в 10 раз.

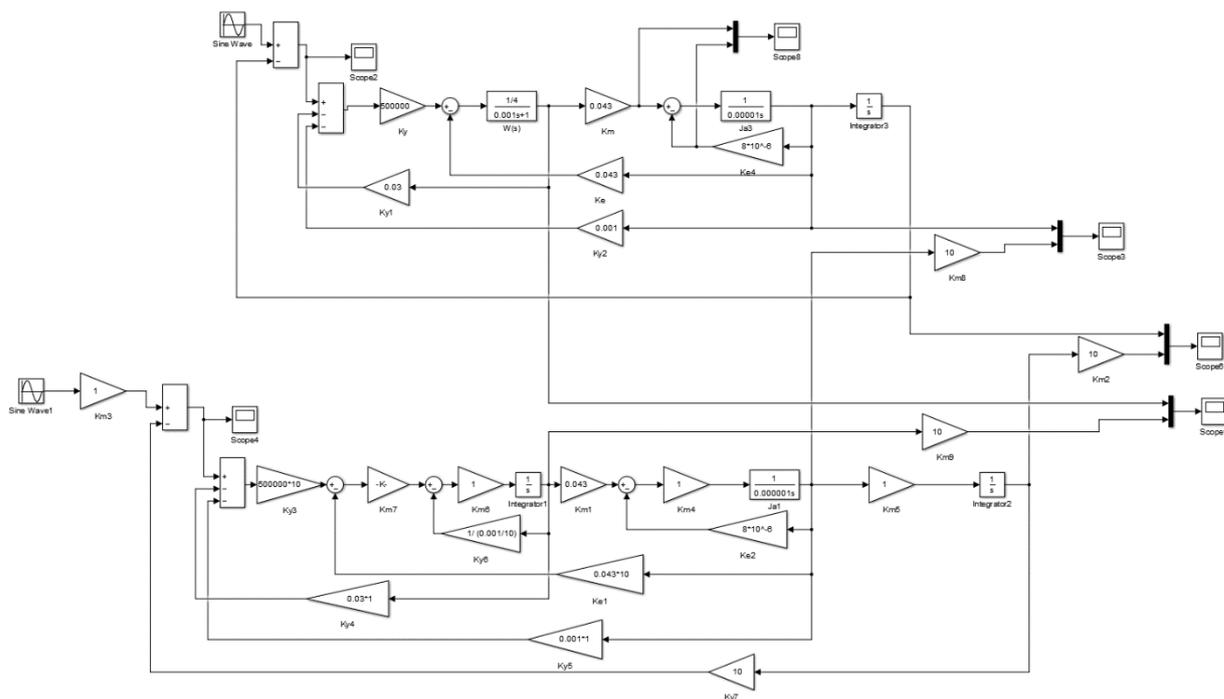


Рис.10. Simulink-схема сравнения оригинала и ФМ (вариант ФМ-2)

Примечание.

Осциллограммы переменных оригинала и ФМ, представленные на осциллоскопах 1, 3, 6 сравнивались с *искусственным увеличением* тока, скорости, и угла ФМ в 10 раз.

Сравнение осциллограмм экспериментально подтверждает правильность расчета корректируемых параметров ФМ и масштабов моделирования переменных.

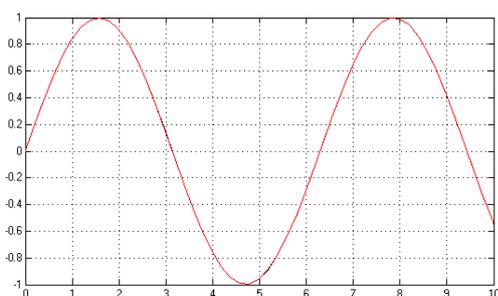


Рис.11. Осциллограмма углов

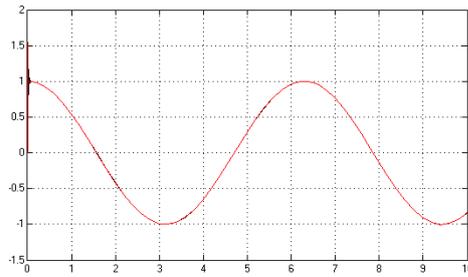


Рис.12. Осциллограмма скоростей

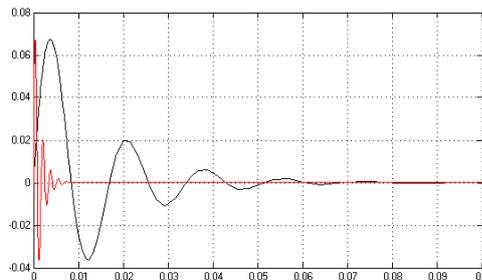


Рис.13. Осциллограмма токов

Выполним вычисление среднеквадратической ошибки между оригиналом и ФМ по углу, скорости и току при синусоидальном входном сигнале.

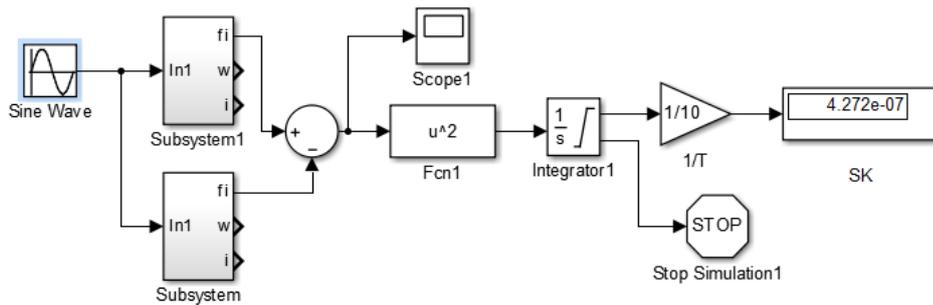


Рис.14 Схема вычисления среднеквадратического критерия аппроксимации по углу.

СК ошибки аппроксимации пренебрежимо мал и обусловлен ошибкой интегрирования:  $4.272e-7$  [рад]<sup>2</sup>.

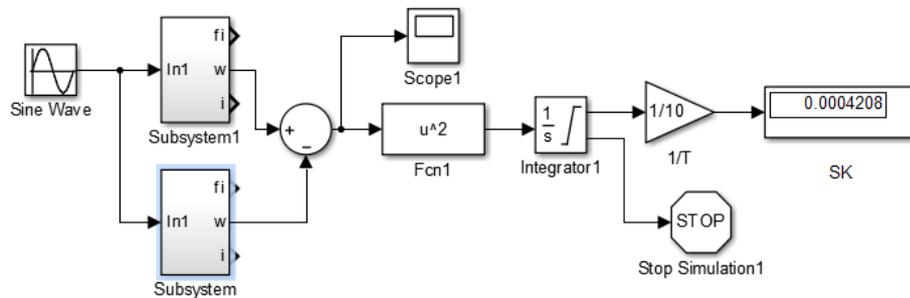


Рис.16 Схема вычисления среднеквадратического критерия аппроксимации по скорости.

Из приведенных вычислений видно, что значения угла, скорости и тока оригинала и ФМ ЭСП с большой точностью схожи, СК ошибка по модулю не превышает  $4.208e-4$ .

1.3 Вариант коррекции ( $R$ ,  $C_e$ ,  $U_{я}$ ) исполнительного двигателя в условиях с ускоренного масштаба моделирования по времени

Для моделирования реакции на единичный входной сигнал в модели ФМ с коррекцией ( $R$ ,  $C_e$ ,  $Uя$ ) параметр  $C_M$  так же изменяется - уменьшается в 10 раз (рис.9).

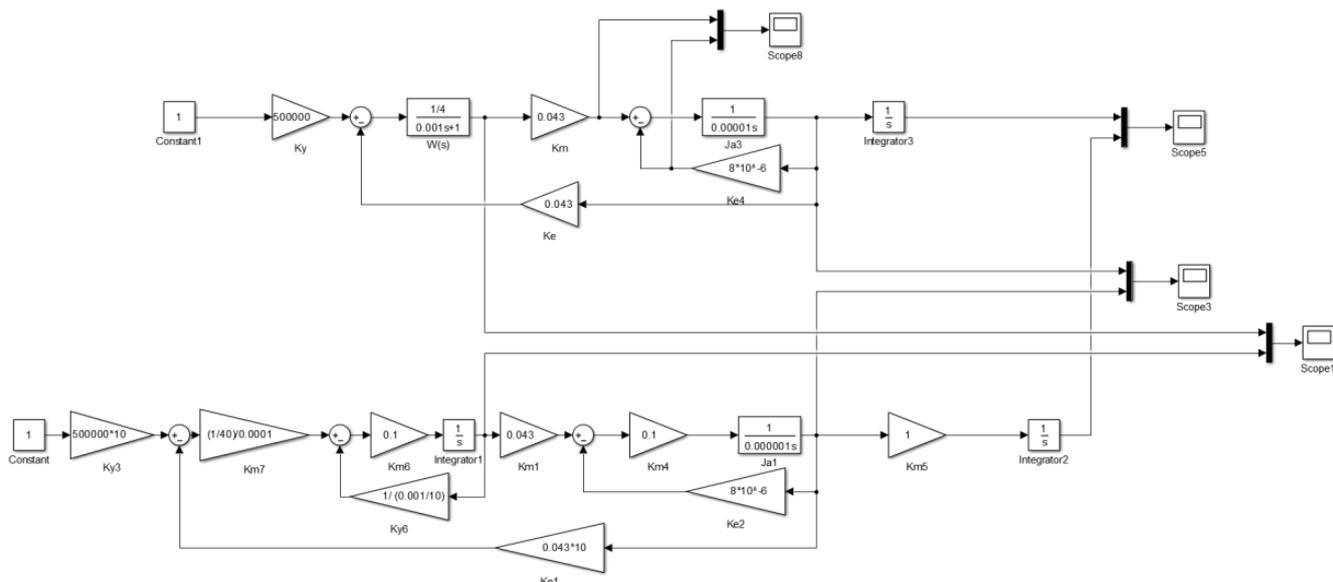


Рис.20. Simulink-схема сравнения двигателя (оригинала) и его ФМ

**Примечание.**

Осциллограммы переменных оригинала и ФМ, представленные на осциллоскопах сравнивались с искусственным увеличением в ФМ скорости интегрирования в 10 раз (за счет увеличения коэффициентов передачи интеграторов в ФМ в 10 раз).

Сравнение осциллограмм углов, скоростей и токов (рис.21-23) экспериментально подтверждает правильность расчета корректируемых параметров и масштабов по переменным.

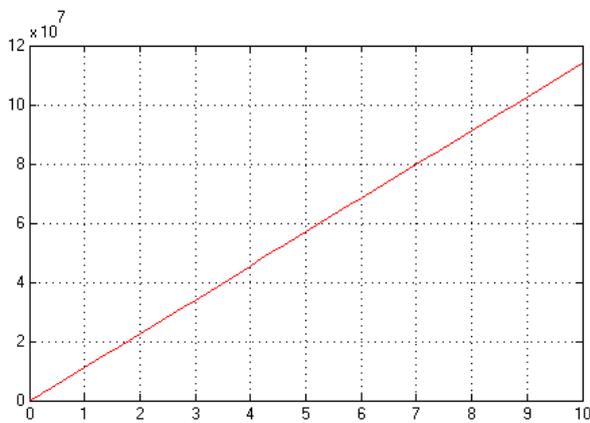


Рис.21. Осциллограмма угла

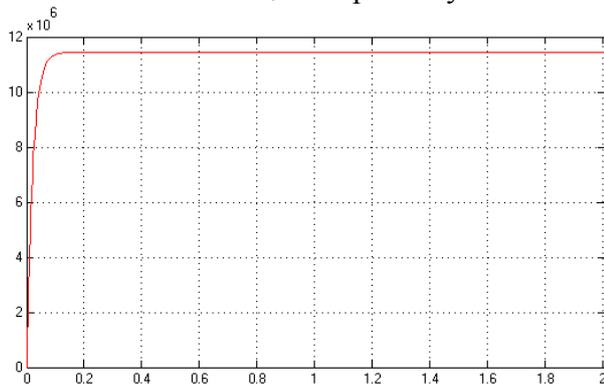


Рис.22. Осциллограмма скорости

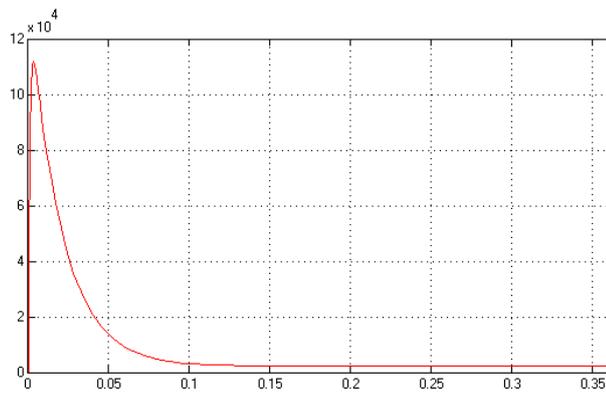


Рис.23. Осциллограмма тока

Выполним вычисление среднеквадратической ошибки между оригиналом и ФМ по углу, скорости и току при ступенчатом входном сигнале.

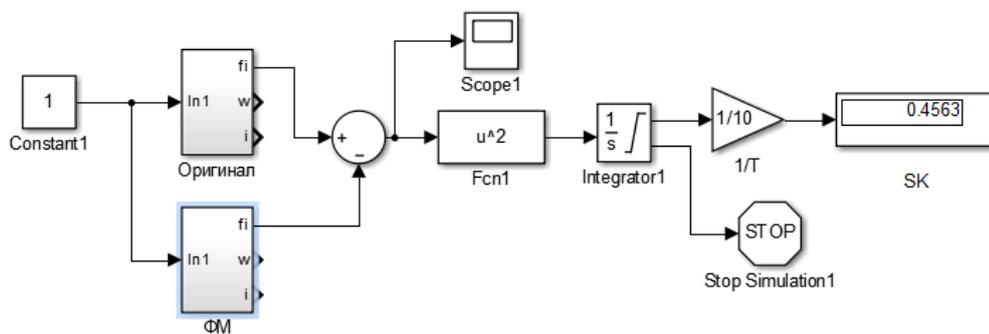


Рис.24 Схема вычисления среднеквадратического критерия аппроксимации по углу.

СК ошибки:  $0.4563 \text{ [рад]}^2$ .

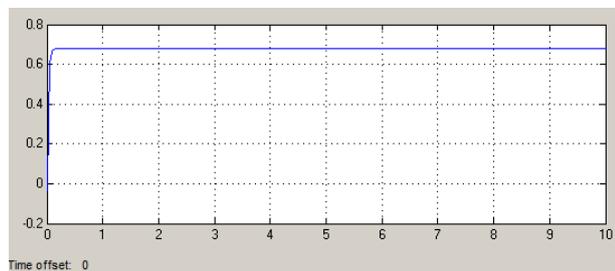


Рис.25 Ошибка идентификации (угол).

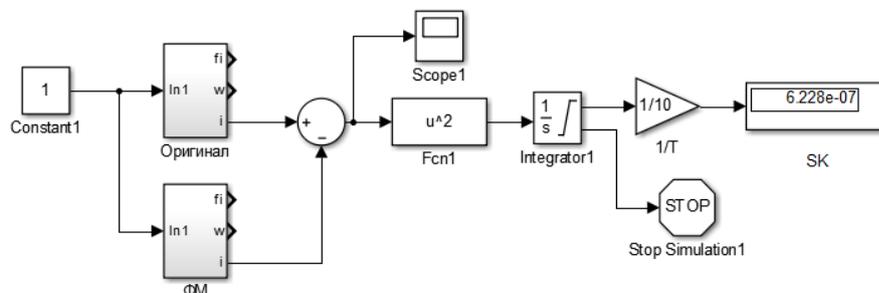


Рис.26 Схема вычисления среднеквадратического критерия аппроксимации по току.

СК ошибки:  $6.228e-7 \text{ [A]}^2$ .

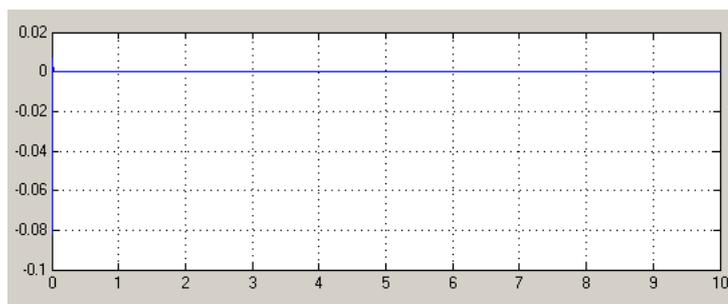


Рис.27 Ошибка идентификации (ток).

## ВЫВОДЫ

В процессе исследования ЭСП постоянного тока и его ФМ:

- Составлены Simulink-схемы оригинала и ФМ;
- Получены критерии подобия оригинала и ФМ методом анализа уравнений;
- Сформулирована задача проектирования ФМ ЭСП в условиях масштабирования инерционной и силовой нагрузки.
  - Спроектирована ФМ с уменьшенным в 10 раз моментом инерции нагрузки;
  - Выявлены два приемлемых варианта коррекции параметров ФМ-1 и ФМ-2;
  - Выполнено сравнение осциллограмм работы ФМ и оригинала, которое подтвердило правильность проектирования ФМ.

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНО-СТЕНДОВЫХ ИСПЫТАНИЙ МОМЕНТНОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА

### 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

#### 1.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу проектирования физической модели (ФМ) для испытаний силового моментного ЭСП большой мощности, который реализован на двигателе серии ДБМ. Предполагается, что ФМ в стенде работает на уменьшенную в  $n$  раз относительно оригинала инерционную нагрузку. Потребность в физическом моделировании возникает, например, на этапе синтеза и экспериментальной отработки закона управления силовым приводом наведения и стабилизации, когда макетный образец еще не создан. Такой подход делает доступным, удешевляет и упрощает экспериментальную отработку и динамические испытания ЭСП.

Моментные двигатели с постоянными магнитами поставляются зарубежными компаниями Danaher Motion/Kollmorgen, Axsys, Moog, Parker, ETEL, Siemens и др

ОАО «Машиноаппарат» и ООО «МЭЛМА» (г. Москва) впервые в отечественной электротехнической промышленности разработали серию бесконтактных моментных электродвигателей ДБМ, охватывающую широкий диапазон вращающих моментов – от 0,01 до 16 Н·м.



Рис. 1. Общий вид электродвигателей серии ДБМ

Функциональная схема электрического привода на базе бесконтактного исполнительного двигателя представлена на рис. 2.

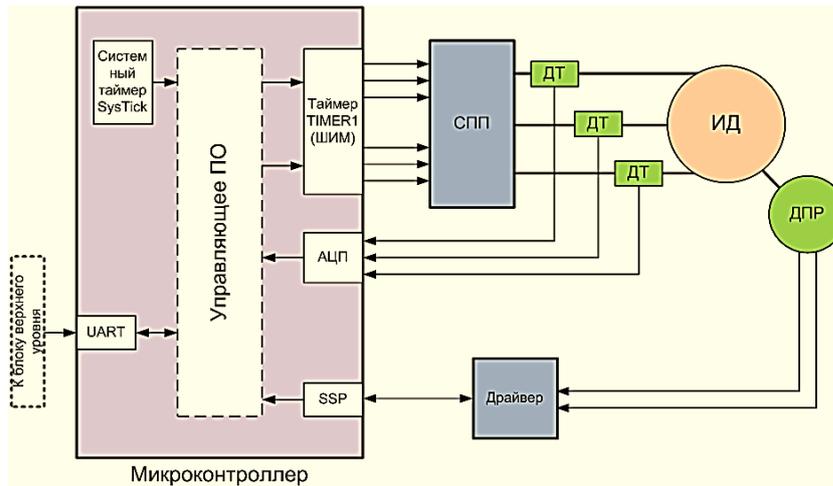


Рис. 2. Функциональная схема электрического привода на базе бесконтактного двигателя: СПП – силовой полупроводниковый преобразователь; ДТ – датчик тока; ИД – исполнительный двигатель; ДПР – датчик положения ротора

### 1.2 Проектирование физической модели

Рассмотрим два варианта проектирования ФМ ЭСП, связанные с выбором прототипа модели:

- 1) прототип – это оригинальный двигатель ДБМ-100-0.4-1.5-2;
- 2) прототип – это двигатель той же серии, но меньшей мощности, например, ДБМ-50-0.04-6-2.

Параметры ДБМ представлены на интернет-сайте производителей.

Учитывая то, что мощные ДБМ имеют значительную стоимость (десятки тыс.р.), последний вариант является предпочтительным. Подчеркнем, что ДБМ малой мощности имеют стоимость в разы меньшую, чем мощные высокомоментные ДБМ. Выберем в качестве прототипа ФМ второй вариант.

Задача проектирования ФМ рассматривается как задача создания новой технической системы, удовлетворяющей системе требований:

- 1) **подобия функционирования** в виде равенства критериев подобия в оригинале и модели, либо в виде равенства индикаторов подобия единице

$$\frac{m_{Cm} \cdot m_{Ce} \cdot m_L}{m_J \cdot m_R^2} = 1; \quad \frac{m_z \cdot m_U \cdot m_L}{m_{Ce} \cdot m_R} = 1;$$

$$\frac{m_{T_1} \cdot m_L}{m_R} = 1; \quad \frac{m_{T_2} \cdot m_L}{m_R} = 1;$$

$$\frac{m_{K\Phi} \cdot m_{U_{вх}}}{m_U} = 1; \quad \frac{m_{K\Phi} \cdot m_{K_{OC}} \cdot m_{\varphi}}{m_U} = 1,$$

где  $m_{\alpha}$  – масштаб воспроизведения в ФМ некоторой величины  $\alpha$  оригинала, причем  $m_{\alpha} = \frac{\alpha_m}{\alpha_{op}}$ . Здесь индексами “op” обозначается оригинал, “m” – модель.

- 2) **тождественности функционирования** оригинала и модели в данном случае – по уровням входного воздействия и сигнала ошибки;

- 3) **тождественности параметров** оригинала и модели (в данном случае не задаются);

4) *специфики реализации* ФМ, которая обусловлена необходимым отличием параметров модели от параметров оригинала. В частности, прототип модели ДБМ-50 имеет в два раза меньшее по сравнению с оригиналом число пар полюсов  $Z$ , т.е.  $m_Z = 0.5$ .

Параметры ФМ, которые допускают коррекцию в стенде, следующие: напряжение питания  $U$ , коэффициент противо-эдс  $c_e$ , коэффициент передачи фильтра  $k_\phi$ , коэффициент обратной связи  $k_{OC}$ , постоянные времени фильтра  $T_1, T_2$ , момент инерции нагрузки  $J$ . Таким образом, множество корректируемых параметров ФМ имеет вид

$$\{U, C_e, k_\phi, k_{OC}, T_1, T_2, J\}.$$

В результате синтеза ФМ выбран приемлемый вариант и рассчитаны масштабы по корректируемым параметрам:

$$m_U = 1.5; m_{c_e} = 0.4179; m_J = 0.3042;$$

$$m_{T_1} = m_{T_2} = m_T; m_{k_\phi} = m_U; m_{k_{OC}} = m_\phi^{-1}.$$

При этом масштабы воспроизведения в ФМ переменных (времени, ошибки, тока, скорости, угла) следующие:

$$m_t = 0.5571; m_e = 1; m_i = 0.7222;$$

$$m_\varepsilon = 6.4431; m_\omega = 3.5837; m_\phi = 2$$

Рассмотренный вариант ФМ обеспечивает строгое подобие функционирования, т.к. выполняются равенства единице всех индикаторов подобия. В ФМ имеет место масштабирование уровней тока, скорости, угла, причем в ускоренном масштабе времени (ускорение в 1.8 раза). При этом обеспечивается тождественность по уровням входного сигнала и сигнала ошибки.

Отметим, что ускоренный масштаб по времени обусловлен меньшим в модели по сравнению с оригиналом числом пар полюсов. Практически важно, что ускоренный масштаб протекания процессов при лабораторно-стендовых испытаниях сокращает время статистических испытаний и экономит ресурсы привода и стенда.

### 1.3 Сравнительный анализ оригинала и его ФМ

Компьютерное моделирование функционирования ЭСП и его ФМ подтвердило достоверность полученных теоретических результатов (рис. 3).

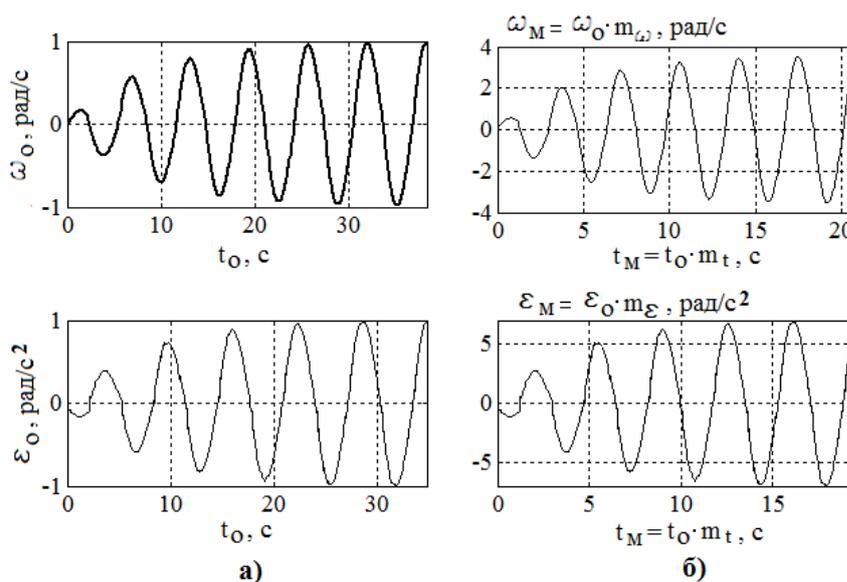


Рис. 3. Разгон ЭСП и его ФМ до предельных на классе входных сигналов  $V$  скорости и ускорения: а) оригинал; б) физическая модель

В случае необходимости проводить испытания в реальном масштабе времени следует в качестве прототипа ФМ использовать двигатель с тем же количеством пар полюсов, что и оригинал, либо использовать непосредственно двигатель-оригинал.

Пусть за прототип ФМ взят оригинальный двигатель, который работает на уменьшенную в  $n$  раз инерционную нагрузку. В этом случае рассчитанный вариант коррекции ФМ предусматривает  $n$ -кратное уменьшением в модели таких параметров как: коэффициента противоэда, напряжения питания, коэффициента передачи фильтра и момента нагрузки.

Данный вариант обеспечивает строгое подобие оригинала и ФМ, а также тождественность функционирования модели оригиналу по времени, скорости, углу, входному сигналу и ошибке. При этом в ФМ имеет место  $n$ -кратное уменьшение уровней тока, вращающего и нагружающего моментов.

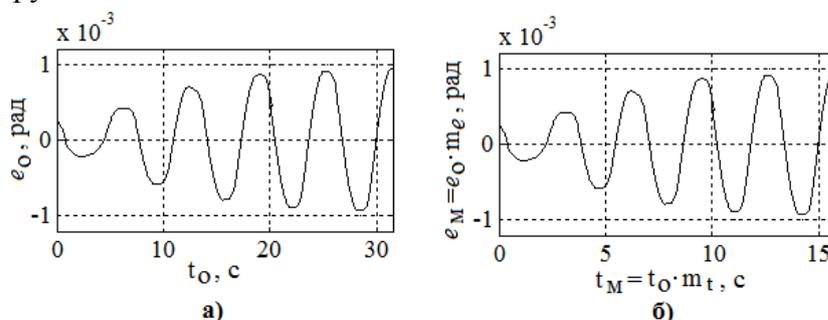


Рис. 4. Осциллограммы точностных испытаний в режиме разгона ЭСП по ошибке:  
а) оригинал; б) физическая модель

#### 1.4 Изучение конструкции механической подсистемы автоматизированного нагрузочного стенда

Стенд состоит из двух моментных двигателей ДБМ70-0,16-3-2 и ДБМ 120-1,6-0,5-3, расположенных соосно и связанных механически. Каждый из двигателей имеет возможность функционировать в двух режимах:

- в режиме исполнительного двигателя;
- в режиме нагрузочного двигателя.

Переключение между режимами предполагается осуществлять программно.

Стенд позволит задавать кинематические параметры нагрузки путем изменения момента инерции нагрузки – осуществляется с помощью изменения массогабаритных характеристик навешиваемой изменяемой нагрузки; жесткость механической передачи предполагается изменять с помощью различной толщины пластины, соединяющей валы двигателей.

Параметры стенда:

- исследуемый/нагружающий двигатель №1: ДБМ70-0,16-3-2
- нагружающий/исследуемый двигатель №2: ДБМ 120-1,6-0,5-3
- датчик положения ротора: ЛИР-ДА190А-3-Н-21-05-RS-3-2
- тип управляющего микроконтроллера: 1986ВЕ92У

3D модель стенда в пакете Solid Works представлена на рис. 5.

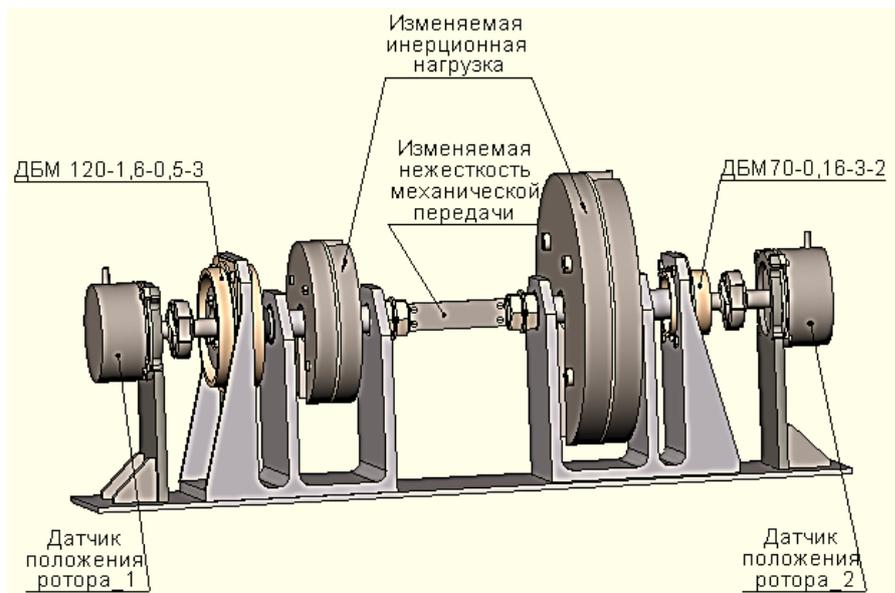


Рис. 5. 3D-модель механической подсистемы автоматизированного нагрузочного стенда

Отличительной особенностью стенда является выбор в качестве базовых мехатронных модулей – силовых систем с двухфазным и трехфазным исполнительными двигателями. Это позволяет считать его универсальным инструментом, позволяющим отработать алгоритмы управления и их микропроцессорную реализацию для различных конструктивных особенностей исполнительных двигателей.

## Список использованной литературы

1. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления: [Учебное издание] / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – 4-е изд., перераб. и доп. — СПб: Профессия, 2004. – 752с.
2. Пупков К.А. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.5, Методы современной теории автоматического управления / К.А. Пупков [и др.]; под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова: учебник для вузов: в 5 т. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: МГТУ им. Баумана, 2004. –784с.
3. Коновалов Б.И., Лебедев Ю.М. Теория автоматического управления: учебное пособие / Б.И. Коновалов, Ю.М. Лебедев – 3-е изд. доп. и перераб. – СПб.: Лань, 2010. – 224 с.
4. Герман-Галкин С.Г. Matlab & Simulink. Проектирование мехатронных систем на ПК. Санкт-Петербург: Корона-Век, 2008. -368 с.
5. Глаголев В.В. Математическое моделирование в системе MATLAB: учеб. пособие / В.В. Глаголев ; ТулГУ.— Тула: Изд-во ТулГУ, 2009.— 88 с.
6. Павловский, Ю.Н. Имитационное моделирование: учеб. пособие для вузов / Ю. Н. Павловский, Н. В. Белотелов, Ю. И. Бродский .— М.: Академия, 2008.— 236 с
7. Пасько Н.Н. Статистическое моделирование процессов и систем: учеб. пособие для вузов / Н. И. Пасько, А. Н. Иноземцев, С. Г. Зайков.— Тула: Изд-во ТулГУ, 2008 .— 112 с.
8. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: учебное пособие / А.А. Первозванский. 3-е изд., стер. СПб.: Лань, 2015. 624 с.
9. Мамонтов М.А. Аналогичность. – М: изд. МО СССР, 1971. – 60 с.
10. Кочубиевский И.Д. Динамическое моделирование и испытания технических систем / И.Д. Кочубиевский, В.А. Стражмейстер, Л.В. Калиновская, П.А. Матвеев – М.: Изд-во Энергия, 1978. – 303 с.
11. Подчуфаров Б.М., Подчуфаров Ю.Б., Воробьев В.В. Построение и использование физических имитационных систем: учеб. пособие - Тула, ТулПИ, 1986. – 96 с.
12. Воробьев В.В. Метод гарантированной точности для релейных следящих систем/ В.В. Воробьев, Н.Н. Макаров, Парамонова А.А. //Мехатроника, автоматизация, управление, № 10 (127). – М., Новые технологии, 2011. – С. 32 – 38.
13. Воробьев В.В. Системный подход к разработке и испытаниям высокоточных систем на классе сигналов / В.В. Воробьев, О.О. Морозов, А.Г. Ефромеев, А.А. Огурцов, А.К. Ломакин // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 12: в 3 ч. Ч. 3, Тула: Изд-во ТулГУ, 2017. С. 115 - 126.
14. Елецкая Г.П., Илюхина Н.С., Панков А.П. Электромеханические системы: учеб. пособие. – Тула, ТулПИ, 1990. – 116 с.
15. Макаров Н.Н. Анализ и синтез систем автоматического управления с использованием системы MATLAB: учеб. пособие / Н.Н. Макаров, С.В. Феофилов. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. – 68 с.
16. Макаров Н.Н., Феофилов С.В. Применение пакета MATHCAD в анализе и синтезе систем автоматического управления: учеб. пособие / Н.Н. Макаров, С.В. Феофилов ; ТулГУ .— Тула : Изд-во ТулГУ, 2007 .— 169 с.