

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева

Кафедра «Ракетное вооружение»

Утверждено на заседании кафедры  
«Ракетное вооружение»  
«16» 01 2019 г., протокол №5

/Заведующий кафедрой

 Н.А.Макаровец

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
по выполнению лабораторных работ  
по дисциплине (модулю)**

**«Теория поиска и принятия решений»**

**основной профессиональной образовательной программы  
высшего образования – программы специалитета**

по специальности

**24.05.02 Проектирование авиационных и ракетных двигателей**

со специализацией

**Проектирование ракетных двигателей твердого топлива**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 240502-01-19

Тула 2019 год

**Разработчик методических указаний**

Фомичева О.А., доцент, к.т.н., доцент

*(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)*



*(подпись)*

## **Содержание**

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1 Решение задачи оптимизации методом линейного программирования .....	4
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2 Принятие решений при многих критериях ...	40
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 Теория игр и принятие решений в условиях неопределенности.....	59
Список литературы.....	74

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

## Решение задачи оптимизации методом линейного программирования

**Цель:** Изучить возможности надстройки Поиск решения пакета MS Excel для решения однокритериальных задач теории принятия решений.

**Порядок выполнения работы:**

1. Изучение теории и примера.
2. Построение математической модели проблемы в виде задачи линейного программирования.
3. Решение задачи с использованием надстройки Поиск решения пакета MS Excel.
4. Анализ чувствительности решения с использованием сценариев.
5. Составление отчёта по лабораторной работе, в котором представляется:
  - формулировка индивидуального задания;
  - математическая модель и пояснение к её построению;
  - снимок экрана монитора, содержащий табличную модель задачи, снимки отчетов по результатам, устойчивости и пределам, а также снимок отчета по сценариям с содержательными пояснениями к ним;
  - выводы по лабораторной работе.

### Теория

Процесс принятия управленческого решения можно представить как последовательность выполнения следующих действий (этапов выработки решения).

**I. Анализ ситуации и формализация исходной проблемы.** На этом этапе надо просто четко сформулировать проблему, понять и сформулировать цели, которые хочется достичь в виде решения проблемы. Другими словами, надо *поставить проблему*, четко определить *цели, возможные решения и факторы*, влияющие на решение проблемы. Часто результат этого этапа представляют в виде *формальной модели* проблемы (пока записанной обычным языком), где были бы собраны воедино цели, решения и факторы и где бы присутствовала основа для формализации отношений между ними.

**II. Построение математической модели,** т. е. перевод формальной модели, построенной на предыдущем этапе, на язык математических отношений.

**III. Анализ математической модели и получение математического решения проблемы.** На этом этапе анализируется построенная математическая модель, проверяется адекватность модели и находится решение математической задачи, вытекающей из этой модели. Если для решения математической задачи используется вычислительная техника, то предварительно строится также *компьютерная модель* задачи. Обычно этот этап наиболее простой из всех этапов процесса принятия решения, поскольку здесь, как правило, используются известные и апробированные алгоритмы решения математических задач.

**IV. Анализ математического решения проблемы и формирование управлеченческого решения.** На этом этапе анализируется полученное математическое решение (выполняется так называемый *анализ чувствительности*), и затем на основе этого математического решения формируется управлеченческое решение.

После выполнения этих этапов следует этап реализации принятого решения.

**I.** Рассмотрим первый этап процесса принятия решения: анализ проблемы и формализация исходной проблемы. Этот этап можно рассматривать как первую стадию перехода от реального мира к компьютерному представлению проблемы.

На данном этапе надо четко сформулировать свою проблему, понять и сформулировать цели, которые хочется достичь в виде решения проблемы. Другими словами, надо четко *поставить проблему*. Поэтому на данном этапе на простом русском языке надо

- ◆ *сформулировать проблему*, по возможности максимально четко;
- ◆ *сформулировать цели*, которые должны быть достигнуты в результате реализации найденного решения;
- ◆ указать, что считать *решением* проблемы (решение должно гарантировать достижение целей);
- ◆ выявить и описать *возможности* достижения целей;
- ◆ выявить и описать *факторы*, от которых может зависеть решение проблемы;
- ◆ выявить и описать *ограничения*, препятствующие достижению целей;
- ◆ описать возможные *альтернативные* способы решения проблемы.

Эти пункты и составляют формальную модель проблемы. Таким образом, формальная модель — это просто четкое описание вашей проблемы, в котором необходимо выделить перечисленные пункты.

**Пусть некий лакокрасочный завод «Олимп», в связи с изменившейся конъюнктурой рынка хочет разработать новый производственный план для выпуска краски типов А и Б, не трогая пока производство другой продукции.** Допустим, что «Олимп» имеет месячный цикл производства. Таким образом, нужно определить, сколько в месяц следует производить краски типа А и сколько — типа Б. Ответ вроде бы простой: чем больше, тем лучше, конечно, с учетом производственных возможностей. Итак, вот *первая цель* — увеличить до *максимума* производство как продукции А, так и продукции Б. Допустим, производственные мощности позволяют выпускать в месяц суммарно 500 т краски всех типов. Вот появилось *первое ограничение* — общее количество краски типов А и Б не должно превышать 500 т.

Как видно, первую цель достичь можно, однако проблема остается плохо поставленной, поскольку дает неоднозначное решение. Поэтому

вспомним, что всякое производство должно приносить прибыль. Теперь можно сформулировать *вторую цель* — производственный план должен приносить *максимальную* прибыль. Пусть одна тонна краски А приносит в среднем 2000 руб. прибыли, а одна тонна краски Б — 2500 руб. Здесь величины *удельной* прибыли (т.е. прибыли на одну тонну краски) являются *факторами*, которые влияют на конечную цель.

На этом шаге мы сделали огромное *упрощение* реальной ситуации, т. к. *удельная* прибыль любого производимого изделия зависит от многих факторов (конъюнктуры рынка, стоимости исходных материалов, себестоимости производства, уровня рентабельности и т. д.) и не является величиной постоянной даже на протяжении относительно небольшого временного промежутка. Тем более сложно предсказать и трудоемко подсчитать ее значение на будущий более-менее продолжительный период времени. Можно только *оценить* будущую *удельную* прибыль, да и то с определенной степенью точности. Пусть в нашем примере получены оценки будущей *удельной* прибыли производства краски типа А: от 1500 до 2300 руб., а краски типа Б: от 2100 до 3000 руб. Приведенные выше величины *удельных* прибылей 2000 и 2500 руб. являются наиболее вероятными ожидаемыми значениями. Далее именно эти величины примем за значения *удельных* прибылей, а возможные последствия от их неточного задания рассмотрим при проведении анализа полученного решения.

Очевидно, что для достижения второй цели надо производить только краску типа Б и забыть о краске типа А. Однако отдел маркетинга требует, чтобы краски типа А производилось не менее 200 т в месяц, поскольку есть договоры на такое количество, а краску типа Б нельзя производить более 150 т, поскольку большее количество трудно реализовать. Итак, имеем еще *два ограничения*: произведенное количество краски А должно быть не меньше 200 т, а краски Б — не более 150 т.

При таких ограничениях даже начальник производства составит план: надо производить 350 т краски А и 150 т краски Б. Этот план учитывает только ограничения по производственным мощностям и маркетинговые ограничения. Но для производства любой продукции нужны еще исходные материалы. Пусть на изготовление красок А и Б необходимо сырье трех видов согласно следующей таблице.

1.		Краска А, Краска Б, Месячный за-			
	кг		кг	пас, т	
1.	C	2.	50	3.	100
		сыре 1		4.	50
5.	C	6.	70	7.	80
		сыре 2		8.	30
9.	C	10.	40	11.	70
		сыре 3		12.	25

В этой таблице показано, сколько и какого сырья необходимо для производства одной тонны краски А и одной тонны краски Б, а также величины месячных запасов этого сырья. Очевидно, что общее количество сырья, используемого для производства краски, не должно превышать их месячные запасы. Таким образом, имеем еще *три ограничения* — по одному для каждого типа сырья. С учетом этих ограничений производственный план «на пальцах» уже не подсчитаешь.

Здесь сделано еще одно существенное упрощение реальной ситуации — реальный процесс производства чего бы то ни было зависит не только от наличия исходных материалов, необходимых для создания конечного продукта, но и от многих других факторов: наличия достаточных производственных мощностей, наличия рабочей силы, периодичности поступления исходных материалов, качества этих материалов и т.д. Здесь эти факторы отброшены, оставлены только ограничения на сырье трех видов. При этом сделано еще одно неявное допущение, что другие компоненты, необходимые для производства краски, имеются в достаточном количестве и не влияют на объемы производства.

Итак, что же мы имеем после небольшого анализа проблемы.

◆ *Постановка проблемы*: разработать производственный план, который максимизировал бы прибыль с учетом всех видов ограничений.

◆ *Цель*: максимизировать прибыль.

◆ *Решение*: количество тонн краски А и Б, производимых в месяц.

◆ *Факторы*, от которых зависит решение: значения удельной прибыли каждого типа краски, предельное число производимой краски, предельные числа производимых красок типов А и Б (маркетинговые ограничения), количества сырья (необходимых для производства одной тонны краски), значения запасов сырья (всего 14 факторов).

◆ *Факторы*, влияющие на прибыль: все перечисленные факторы, кроме значений количества сырья, необходимого для производства одной тонны краски. (Считаем, что на рецептуру красок мы влиять не можем.)

◆ *Ограничения*: на предельное общее количество производимой краски, на предельные количества производимых красок А и Б в отдельности, на предельные количества используемого сырья (всего 6 ограничений).

Мы выделили факторы, влияющие на прибыль отдельно, чтобы в дальнейшем провести анализ чувствительности решения именно по этим факторам.

И еще одно замечание: при такой размытой постановке исходной проблемы можно сформулировать много разных целей. Например, можно составить производственный план, который бы минимизировал себестоимость продукции. Можно сформулировать более сложные цели (что обычно имеет место в реальных ситуациях), например, максимизировать прибыль и одно-

временно минимизировать использование каких-то исходных материалов, которые являются дорогими или дефицитными. При этом в зависимости от сформулированных целей могут выделяться разные факторы, влияющие на эти цели, и могут формироваться разные ограничения. В нашем примере мы ограничимся сформулированной целью максимизации прибыли.

**II.** Построение математической модели означает перевод формальной модели, построенной на предыдущем этапе, на четкий язык математических отношений. Математическая модель должна содержать три основных компонента.

**1. Переменные**, значения которых необходимо вычислить (это *переменные решения* из формальной модели).

**2. Целевая функция** — это *цель*, записанная математически в виде функции от переменных. Обязательно указывается, что необходимо сделать с этой функцией для решения проблемы: найти ее максимум, минимум или конкретное заданное значение.

**3. Ограничения** — записанные математически *ограничения* из формальной модели.

Если определены переменные, то построение целевой функции и ограничений обычно не вызывает затруднений, поскольку на предыдущем этапе и цель и ограничения уже формулировались с привязкой к переменным решения.

В нашем примере обозначим через  $x_1$  и  $x_2$  переменные, которые определяют месячные объемы производства краски (в тоннах) типа А и Б соответственно. Напомним, что 1 тонна краски А приносит прибыль 2000 руб., а 1 тонна краски Б — 2500 руб. Тогда суммарная прибыль при производстве  $x_1$  тонн краски А и  $x_2$  тонн краски Б составит

$$z = 2000*x_1 + 2500*x_2 \text{ (руб.)}$$

Это и есть целевая функция, которую необходимо *максимизировать*.

Теперь запишем ограничения. Первое ограничение говорит о том, что суммарный объем производства краски обоих типов не должен превышать 500 т. Это запишется так:  $x_1 + x_2 \leq 500$ . Маркетинговые ограничения записываются просто:  $x_1 \geq 200$  и  $x_2 \leq 150$ . Теперь надо записать ограничения на сырье. Напомним, что сырья 1 на производство 1 т краски А расходуется 0,05 т (50 кг) и 0,1 т (100 кг) на производство 1 т краски Б. Таким образом, всего на производство  $x_1$  тонн краски А и  $x_2$  тонн краски Б потребуется  $0,05*x_1 + 0,1*x_2$  тонн сырья 1. Эта величина не должна превышать 50 т. Отсюда получаем ограничение:  $0,05*x_1 + 0,1*x_2 \leq 50$ . Подобным способом получаем еще два ограничения на сырье 2 и сырье 3:  $0,07*x_1 + 0,08*x_2 \leq 30$  и  $0,04*x_1 + 0,07*x_2 \leq 25$ . Еще одно неявное ограничение состоит в том, что переменные  $x_1$  и  $x_2$  должны быть неотрицательными (если не вдаваться в

мистику, то отрицательные объемы производства физически просто невозможны). Это ограничение называется *условием неотрицательности переменных* и записывается так:  $x_1 \geq 0$  и  $x_2 \geq 0$ . Однако заметим, что условие неотрицательности для переменной  $x_1$  здесь излишне, поскольку имеем более сильное ограничение  $x_1 \geq 200$ . Поэтому неравенство  $x_1 \geq 0$  исключаем из списка ограничений.

Обратите особое внимание на то, что размерности всех переменных и параметров должны быть согласованы. Поэтому в нашем примере удельные расходы сырья переведены из килограммов в тонны, поскольку переменные измеряются в тоннах.

Обычно ограничение записывают таким образом, чтобы в левой части неравенства находилось выражение с переменными, а в правой части неравенства — только числа. Тогда левую часть неравенства называют *функцией ограничения*.

Окончательно математическая модель нашей проблемы запишется следующим образом:

максимизировать  $z = 2000*x_1 + 2500*x_2$  при выполнении ограничений

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 500, \\x_1 &\geq 200, \\x_2 &\leq 150, \\0,05*x_1 + 0,1*x_2 &\leq 50, \\0,07*x_1 + 0,08*x_2 &\leq 30, \\0,04*x_1 + 0,07*x_2 &\leq 25, \\x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Любое решение (т.е. пара значений переменных  $x_1$  и  $x_2$ ), удовлетворяющее *всем* ограничениям модели, называется *допустимым*. В нашем примере решение  $x_1 = 200$  и  $x_2 = 150$  будет допустимым, поскольку не нарушает ни одного ограничения, включая условия неотрицательности. Чтобы убедиться в этом, надо подставить значения  $x_1 = 200$  и  $x_2 = 150$  в левые части ограничений, выполнить вычисления и проверить, что ни одно неравенство не нарушается. Значение целевой функции при этом решении будет равно  $z = 2000*200 + 2500*150 = 775\,000$  (руб.).

Итак, математическая модель построена, осталось найти решение модели. Для выполнения этого дела мы привлечем программу электронных таблиц Excel, а еще точнее — надстройку **Поиск решения**.

**III.** Прежде чем начать выполнение каких-либо вычислений в Excel, надо перевести нашу построенную математическую модель на рабочий лист Excel. Для этого следует определить, в каких ячейках будут располагаться переменные решения, записать в нужные ячейки формулы, по которым бу-

дут вычисляться целевая функция и функции ограничений (левые части ограничений), надо записать в отдельные ячейки значения правых частей ограничений. Всю эту совокупность значений и формул, записанных на рабочем листе, назовем *табличной моделью*.

Для табличных моделей задач оптимизации не существует общепринятых канонов их построения. Вот некоторые рекомендации, которые облегчат дальнейшее применение средства **Поиск решения**.

◆ Значения переменных располагаются в отдельных ячейках и группируются в отдельный блок ячеек.

◆ Каждому ограничению отводится отдельная строка или столбец таблицы. Ограничения группируются в отдельный блок ячеек.

◆ Желательно, чтобы ячейки, содержащие переменные и значение целевой функции, а также все ограничения, имели заголовки.

◆ Коэффициенты целевой функции должны храниться в отдельной строке, располагаясь непосредственно под или над соответствующими переменными; формула для вычисления целевой функции должна находиться в соседней ячейке.

◆ В каждой строке ограничений за ячейками, содержащими коэффициенты данного ограничения, следует ячейка, в которую записывается вычисленное значение функции ограничения (значение левой части ограничения). За ней может следовать ячейка, в которой стоит соответствующий знак неравенства или равенства ограничения, а затем ячейка, содержащая значение правой части ограничения. Желательно, чтобы правые части ограничений были константами, а не формулами. Дополнительно можно иметь ячейку, в которой вычислена разность между значениями левой и правой частей неравенства.

◆ Условия неотрицательности переменных решения не обязательно включать в табличную модель. Как правило, они опускаются и указываются непосредственно в диалоговом окне средства **Поиск решения**.

В результате выполнения этих рекомендаций все основные коэффициенты модели содержатся в отдельных ячейках, поэтому их легко изменять, не меняя формул модели. Благодаря группированию упрощается работа со средством **Поиск решения**, поскольку для указания переменных или ограничений можно использовать *диапазоны ячеек*, т.е. задавать переменные и ограничения группой, а не по отдельности. Наличие заголовков сделает понятной эту табличную модель не только вам, но и другим людям.

Пример табличной модели для нашей задачи показан на рис. 1. Здесь значения переменных решения записаны в ячейках B4 и C4 с соответствующими заголовками в ячейках B3 и C3. *Вначале значения переменных произвольные*. Коэффициенты, стоящие перед переменными в формуле целевой функции, записаны в ячейки B8 и C8, а само значение целевой функции вычисляется в ячейке D8 (соответствующие заголовки записаны над этими ячейками). Ниже в диапазоне B11:C17 записаны коэффициенты

функций ограничений, в диапазоне D11:D17 вычисляются значения левых частей ограничений, в диапазоне E11:E17 записаны знаки неравенств ограничений, а в диапазоне F11:F17 — значения правых частей ограничений. Наконец, внизу в строке 20 под «левым» заголовком **Решение** еще раз повторены значения переменных и целевой функции.

A	B	C	D	E	F
Производственный план для завода "Олимп"					
Переменные решения					
3	x1	x2			
4	100	100			
5					
6	Коэффициенты целевой функции		Значение целевой функции		
7	c1	c2			
8	2000	2500	450000		
9					
10	Ограничения	Коэффициенты	Левая часть	Правая часть	
11	Производственное	1	200 <=	500	
12	2-е маркетинговое	0	100 <=	150	
13	Сырье 1	0,05	0,1	15 <=	50
14	Сырье 2	0,07	0,08	15 <=	30
15	Сырье 3	0,04	0,07	11 <=	25
16	Неотрицательность	0	1	100 >=	0
17	1-е маркетинговое	1	0	100 >=	200
18					
19	x1	x2	z		
20	Решение	100,00 т	100,00 т	450000	
21					

Рис. 1. Табличная модель для вычисления производственного плана

Формулы, по которым выполняются все вычисления на данном рабочем листе, показаны на рис. 2. Для вычисления линейных функций подходит функция **СУММПРОИЗВ(массив1;массив2)**, которая суммирует попарные произведения элементов двух диапазонов, заданных аргументами функции **массив1** и **массив2**. Например, формула **=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B8:C8)**, вычисляющая значение целевой функции в ячейке D8, эквивалентна такой формуле: **=B4\*C4+B8\*C8**. Абсолютные ссылки **\$B\$4:\$C\$4** на диапазон B4:C4, содержащий значения переменных  $x_1$  и  $x_2$ , сделаны для того, чтобы можно было скопировать эту формулу из ячейки D8 в ячейки D11:D17 для вычисления левых частей неравенств, где также участвуют значения переменных решения.

A	B	C	D	E	F
Производственный план для завода "Олимп"					
Переменные решения					
3	x1	x2			
4	100	100			
5					
6	Коэффициенты целевой функции		Значение целевой функции		
7	c1	c2			
8	2000	2500	=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B8:C8)		
9					
10	Ограничения	Коэффициенты	Левая часть	Правая часть	
11	Производственное	1	1	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B11:C11) <=	500
12	2-е маркетинговое	0	1	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B12:C12) <=	150
13	Сырье 1	0,05	0,1	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B13:C13) <=	50
14	Сырье 2	0,07	0,08	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B14:C14) <=	30
15	Сырье 3	0,04	0,07	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B15:C15) <=	25
16	Неотрицательность	0	1	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B16:C16) >=	0
17	1-е маркетинговое	1	0	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$C\$4;B17:C17) >=	200
18					
19	x1	x2	z		
20	Решение	=ФИКСИРОВАННЫЙ(B4;2)&" т"	=ФИКСИРОВАННЫЙ(C4;2)&" т"	=D8	
21					

Рис. 2. Формулы табличной модели

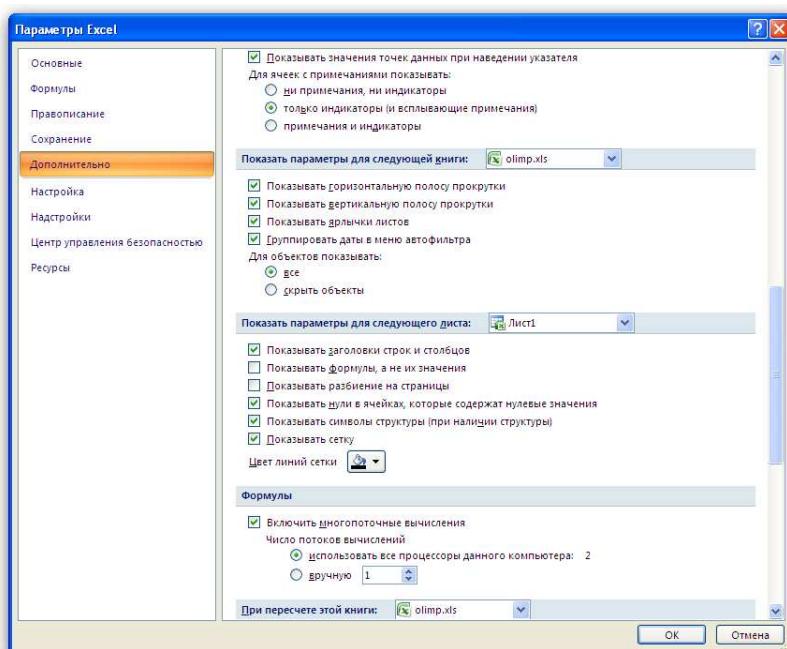
Левые части ограничений, поскольку это линейные функции, также вычисляются с помощью функции **СУММПРОИЗВ**. Даже если это простые

ограничения типа  $x_2 \leq 150$ , которые здесь представляются как  $0*x_1 + 1*x_2 \leq 150$  (ограничение 2 на рис. 1).

Обратите внимание на то, что ограничения сгруппированы по типу неравенств — сначала идут ограничения типа  $\leq$ , а затем типа  $\geq$ . Конечно, порядок представления этих групп несуществен.

Существенно само наличие групп однотипных ограничений, что позволит в дальнейшем задавать их в средстве **Поиск решения** не по отдельности, а целой группой. Знаки неравенств в диапазоне E11:E17 вставлены только для пояснения ограничений, средство **Поиск решения** их не использует. Зато средство **Поиск решения** использует заголовки строк, содержащих ограничения (использует в своих отчетах, как показано далее). Поэтому рекомендуется давать более содержательные заголовки, даже чем те, что показаны на рис. 1 в ячейках A11:A17. Например, такие: **Ограничение на объем производства, Маркетинговое ограничение** или **Ограничение, не знаю, откуда оно взялось**. С другой стороны, заголовки не являются обязательным элементом табличной модели — средство **Поиск решения** прекрасно вычислит результат и без них. Заголовки полезны для документирования модели.

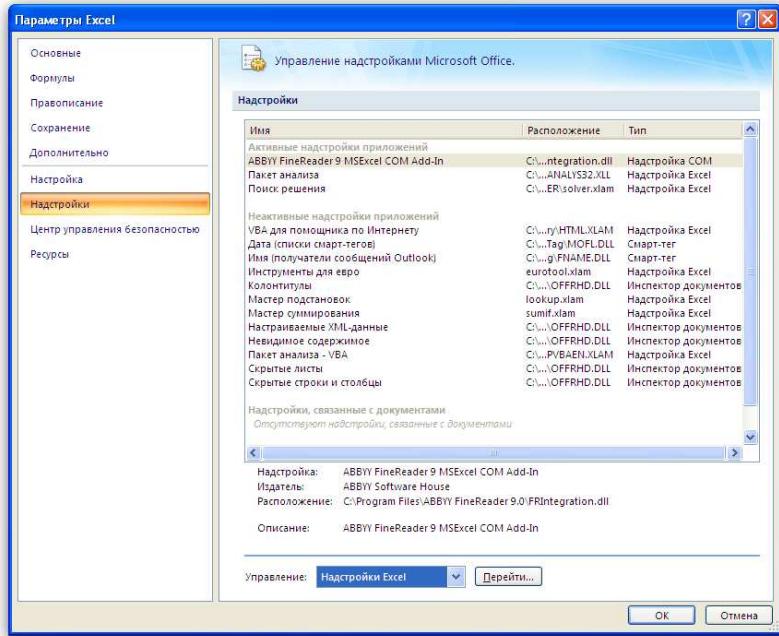
Если вы не знаете, как отобразить на рабочем листе Excel формулы, а не значения (как на рис. 2), то это делается так. Надо выполнить команду **Сервис->Параметры** и в открывшемся диалоговом окне **Параметры** на вкладке **Вид** установить флажок **формулы**. Отображение формул может оказаться полезным, полезно при отладке модели. В Excel 2007 и выше отображение формул осуществляется через меню **Параметры Excel->Дополнительно**, выбирая для данного листа **Показывать формулы, а не их значения**



Теперь, когда табличная модель построена и проверена, пришло время ее решить. Для этого используем надстройку Excel **Поиск решения**. Ес-

ли в меню **Сервис** вы не находите одноименной команды, то это означает, что данная надстройка не подключена к Excel. Для ее подключения выполните команду **Сервис->Надстройки** и в открывшемся диалоговом окне **Надстройки** в списке **Доступные надстройки** установите флажок **Поиск решения**.

Для Excel 2007 и выше **Поиск решения** находится во вкладке **Данные->Анализ**. Подключение осуществляется через меню **Параметры Excel->Надстройки**. Выбираем в списке **Надстройки Excel** и нажимаем кнопку **Перейти...**



Покажем общую схему применения средства **Поиск решения** для решения задач линейной оптимизации.

Сначала надо познакомиться с терминологией, относящейся к средству **Поиск решения**, т.е. надо знать, как там называют переменные решения, целевую функцию и ограничения. Так вот,

- ◆ переменные решения, точнее, ячейки, содержащие значения этих переменных, называются *изменяемыми ячейками*,
- ◆ ячейка, содержащая значение целевой функции, называется *целевой ячейкой*,
- ◆ ограничения так и будут называться *ограничениями*.

Схема применения средства **Поиск решения** выглядит так:

1. Пусть на рабочем листе Excel уже создана табличная модель задачи линейной оптимизации.
2. После проверки и отладки модели переходим к этапу оптимизации, выбрав команду **Поиск решения** в меню **Сервис**.
3. В открывшемся диалоговом окне **Поиск решения** укажите данные, необходимые для поиска оптимального решения (рис. 3).

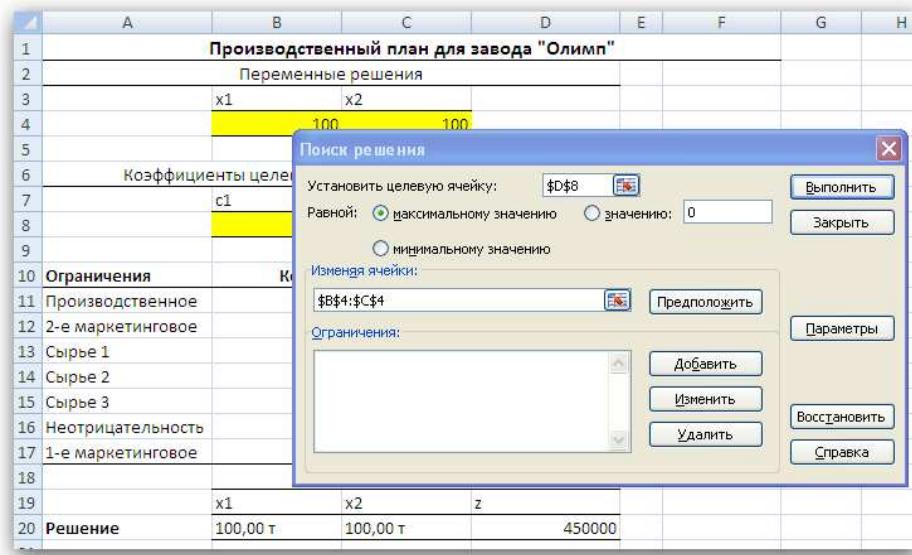


Рис. 3. Задание параметров для поиска решения

- В поле **Установить целевую ячейку** вводится адрес ячейки, содержащей значение целевой функции. Для нашей модели в это поле следует ввести **D8**, но лучше щелкнуть указателем мыши на этой ячейке, чтобы ввести ее адрес автоматически.

- Параметры области **Равной** диалогового окна **Поиск решения** позволяют задать тип оптимизации. В данном случае необходимо максимизировать значение целевой функции. Для этого нужно щелкнуть на переключателе **максимальному значению**.

- Поле **Изменяя ячейки** позволяет указать ячейки, в которых содержатся переменные модели; в данном случае это диапазон B4:C4.

Далее необходимо задать ограничения. Щелчок на кнопке **Добавить** открывает диалоговое окно **Добавление ограничения**, показанное на рис. 4,

- В нашем примере в поле **Ссылка на ячейку** вводим или указываем на рабочем листе ссылку на диапазон **D11:D15**, в соседнем поле оставляем знак неравенства  $\leq$ , а в поле **Ограничение** вводим или указываем на рабочем листе ссылку на диапазон **F11:F15**.

- Щелкаем на кнопке **Добавить** и вводим вторую группу ограничений: в поле **Ссылка на ячейку** вводим **D16:D17**, в соседнем раскрывающемся списке выбираем знак неравенства  $\geq$ , а в поле **Ограничение** вводим **F16:F17**. Затем щелкаем на кнопке **OK** и возвращаемся в диалоговое окно **Поиск решения**.

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "Производственный план для завода \"Олимп\"". A dialog box titled "Добавление ограничения" (Add constraint) is open, overlaid on the spreadsheet. The dialog box contains fields for "Ссылка на ячейку:" (\$D\$11:\$D\$15) and "Ограничение:" (<=), with a value of "\$F\$11:\$F\$15". Below the dialog box is a table of constraints:

Ограничения	Коэффициенты	Левая часть	Правая часть
Производственное	1	200 <=	500
2-е маркетинговое	0	100 <=	150
Сырье 1	0,05	15 <=	50
Сырье 2	0,07	15 <=	30
Сырье 3	0,04	11 <=	25
Неотрицательность	0	100 >=	0
1-е маркетинговое	1	100 >=	200
<b>Решение</b>	<b>100,00 т</b>	<b>100,00 т</b>	<b>450000</b>

Рис. 4. Задание ограничений

После задания ограничений при необходимости в диалоговом окне **Параметры поиска решения**, которое открывается после щелчка на кнопке **Параметры** диалогового окна **Поиск решения**, следует задать дополнительные условия для поиска решения.

Параметры **Максимальное время**, **Предельное число итераций**, **Относительная погрешность**, **Допустимое отклонение** и **Сходимость** можно оставить без изменений, тем более что параметр **Допустимое отклонение** имеет отношение к целочисленным моделям, а параметр **Сходимость** — к нелинейным моделям.

- В данном примере, поскольку мы работаем с линейной моделью, надо установить флажок **Линейная модель** (рис. 5).

- Если в модели условия неотрицательности налагаются на *все* переменные, следует установить флажок **Неотрицательные значения**. В нашем примере условие неотрицательности налагается только на переменную  $x_2$  поэтому этот флажок мы не устанавливаем.

- Флажок **Автоматическое масштабирование** рекомендуем устанавливать всегда.

- Если хотите проследить каждую итерацию процесса вычисления, установите флажок **Показывать результаты итераций**. Если хотите сразу получить результат вычислений без подглядывания в вычислительную кухню, не устанавливайте этот флажок.

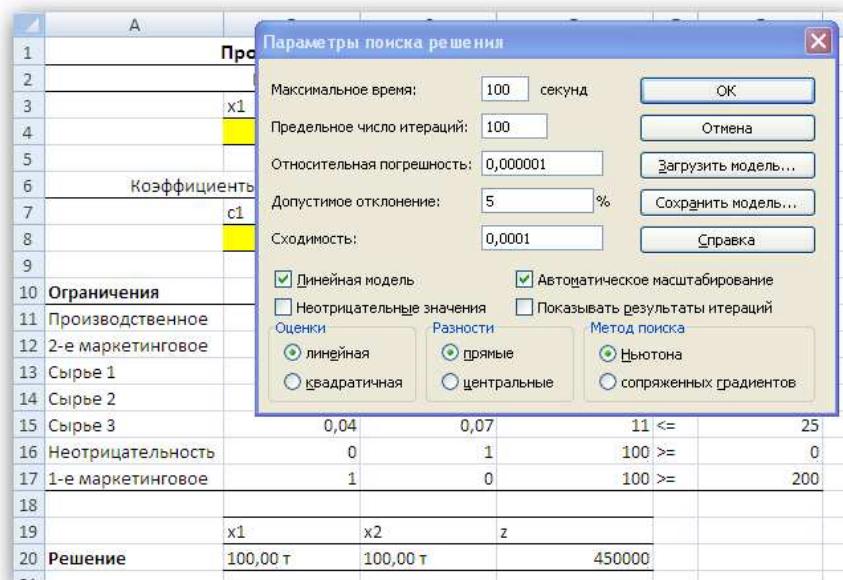
- Переключатели, расположенные в областях **Оценки**, **Разности**, **Метод поиска**, предназначены для нелинейных моделей. Поэтому сейчас мы их оставляем без внимания.

- Щелчок на кнопке **OK** возвращает в диалоговое окно **Поиск решения**.

После задания необходимых данных (указания ячейки, содержащей формулу для вычисления целевой функции, ячеек, в которых находятся переменные, и задания ограничений) щелкните на кнопке **Выполнить**.

Средство **Поиск решения** выполняет оптимизацию. В процессе вычислений в строке состояния отображаются число итераций и значения целевой функции при переборе множества допустимых решений задачи. Эта информация позволяет следить, как продвигается процесс оптимизации больших моделей, где он может длиться достаточно долго.

После окончания работы **Поиск решения** выведет на экран диалоговое окно **Результаты поиска решения** (рис. 6), в котором можно указать, обновить ли исходную модель (т.е. занести ли в ячейки значения оптимального решения) и создавать ли отчет.



*Рис. 5. Диалоговое окно Параметры поиска решения*

Диалоговое окно **Результаты поиска решения** сообщает о завершении поиска (см. рис. 6). Если оптимальное решение найдено, в диалоговом окне **Результаты поиска решения** должно отобразиться сообщение **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.** Если получено такое сообщение, можно или сохранить найденное решение, выбрав соответствующий параметр, или отбросить его, выбрав параметр **Восстановить исходные значения.** В результате ячейкам переменных будут возвращены значения, которые в них находились до запуска программы **Поиск решения.** Существует возможность также получить три типа отчетов о решении. Каждый отчет выводится на новый лист рабочей книги.

Рис. 6. Успешное завершение решения задачи оптимизации

В нашем примере решение найдено, оно показано на рис. 6: надо производить 257,14 т краски А и 150 т краски Б, при этом будет получена прибыль в размере 889 285,17 руб. В диалоговом окне **Результаты поиска решения** мы также указали, что надо создать отчеты.

**IV.** Теперь покажем, что делать дальше с полученным «компьютерным» решением, и как на его основе найти «настоящее» решение проблемы.

Итак, решение математической модели получено. Ну и что с ним дальше делать — бегом бежать внедрять в жизнь? Нет, бежать пока рано. Надо вспомнить, что мы получили решение только для *модели* реальной проблемы, а не решение самой проблемы. В процессе построения модели были сделаны различные допущения, упрощающие реальную ситуацию, в результате чего мы смогли ее формализовать. Зависимости, зафиксированные в модели, только приближенно отображают реальные зависимости между факторами и переменными решения и целью. Наши знания факторов, влияющих на цель, зияют пробелами — значения многих параметров модели мы знаем только приближенно. Ну, а если реальные значения параметров хотя бы немного отличаются от тех, которые заложены в модели, то насколько может измениться решение и изменится ли вообще?

На эти и подобные вопросы должен дать ответы анализ полученного решения. На «научном» языке этот анализ называется *анализом чувствительности решения*. Он проводится после получения оптимального решения математической модели и дает важную информацию, которую можно и нужно использовать при принятии решения в реальной ситуации.

a. Анализ чувствительности должен дать ответы на следующие вопросы.

◆ В каких пределах могут изменяться параметры модели так, чтобы сохранилось полученное решение?

◆ Какие ограничения связанные (т.е. лимитируют (сдерживают) целевую функцию), а какие ограничения не влияют на решение?

♦ Если изменить значения правых частей связанных ограничений, то насколько может измениться значение целевой функции?

♦ Если значение какой-то переменной решения равно нулю, то при каких условиях она может принять положительное значение? (Вопрос весьма актуален для моделей производства.)

b. Средство **Поиск решения** может генерировать три вида отчетов: отчет по результатам, отчет по устойчивости и отчет по пределам. Все перечисленные виды отчетов и именно в той форме, которая показана ниже на рис. 8—10, **Поиск решения** создает только для линейных моделей. Для целочисленных моделей недоступны отчеты по устойчивости и по пределам, а для нелинейных моделей отчет по устойчивости имеет другой вид. Рассмотрим применение отчетов для выполнения анализа чувствительности линейных моделей.

c. На рис. 7 показан рабочий лист Excel с найденным решением математической модели, а на рис. 8—10 — отчеты, сгенерированные средством **Поиск решения**.

Производственный план для завода "Олимп"					
Переменные решения					
x1	x2				
257,1428571	150				
Коэффициенты целевой функции			Значение целевой функции		
c1	c2				
2000	2500		889285,7143		
Ограничения		Коэффициенты	Левая часть	Правая часть	
Производственное		1	407,1428571 <=	500	
2-е маркетинговое		0	150 <=	150	
Сырье 1		0,05	0,1	27,85714286 <=	50
Сырье 2		0,07	0,08	30 <=	30
Сырье 3		0,04	0,07	20,78571429 <=	25
Неотрицательность		0	1	150 >=	0
1-е маркетинговое		1	0	257,1428571 >=	200
x1	x2		z		
257,14 т	150,00 т		889 285,71 р		
Решение					

Рис. 7. Решение линейной модели для завода «Олимп»

Целевая ячейка (Максимум)				
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат	
\$D\$8	Значение целевой функции	450000	889285,7143	
Изменяемые ячейки				
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат	
\$B\$4	x1	100	257,1428571	
\$C\$4	x2	100	150	
Ограничения				
Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус
\$D\$11	Производственное Левая часть	407,1428571	\$D\$11<=\$F\$11	не связан.
\$D\$12	2-е маркетинговое Левая часть	150	\$D\$12<=\$F\$12	связанное
\$D\$13	Сырье 1 Левая часть	27,85714286	\$D\$13<=\$F\$13	не связан.
\$D\$14	Сырье 2 Левая часть	30	\$D\$14<=\$F\$14	связанное
\$D\$15	Сырье 3 Левая часть	20,78571429	\$D\$15<=\$F\$15	не связан.
\$D\$16	Неотрицательность Левая часть	150	\$D\$16>=\$F\$16	не связан.
\$D\$17	1-е маркетинговое Левая часть	257,1428571	\$D\$17>=\$F\$17	не связан.

Рис. 8. Отчет по результатам

Отчет по результатам полезен для анализа чувствительности только тем, что там явно указано, какие ограничения *связанные* и какие *несвязанные*. Эти данные приведены в отчете в таблице **Ограничения** в столбце

**Статус.** В столбце **Разница** той же таблицы показаны значения разностей между левыми и правыми частями ограничений.

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$4	x1	257,1428571	0	2000	187,5	2000
\$C\$4	x2	150	0	2500	1E+30	214,2857143

Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
SD\$11	Производственное Левая часть	407,1428571	0	500	1E+30	92,85714286
SD\$12	2-е маркетинговое Левая часть	150	214,2857143	150	50	150
SD\$13	Сырье 1 Левая часть	27,85714286	0	50	1E+30	22,14285714
SD\$14	Сырье 2 Левая часть	30	28571,42857	30	6,5	4
SD\$15	Сырье 3 Левая часть	20,78571429	0	25	1E+30	4,214285714
SD\$16	Неотрицательность Левая часть	150	0	0	150	1E+30
SD\$17	1-е маркетинговое Левая часть	257,1428571	0	200	57,14285714	1E+30

*Rис. 9. Отчет по устойчивости*

d. Более существенен для анализа чувствительности отчет по устойчивости. В таблице **Изменяемые ячейки** этого отчета приведена информация о значениях изменяемых ячеек:

- ◆ адреса изменяемых ячеек;
- ◆ их имена (созданные заранее или составленные из заголовков строк и столбцов, на пересечении которых находятся изменяемые ячейки); если имен нет, то это поле остается пустым;
- ◆ значения переменных в этих ячейках, найденные средством **Поиск решения**;
- ◆ нормированная стоимость — это неудачный перевод термина *reduced cost*, который можно перевести как «цена, которая уменьшает целевую функцию». Она показывает, как изменится оптимальное значение целевой функции при выпуске продукции, которой нет в оптимальном плане. В нашем случае оптимальный план предполагает выпуск обоих видов красок, поэтому их нормированная стоимость равна нулю. Если бы оптимальное значение какой-либо из неизвестных было равно нулю ( $x_i = 0$ ), а нормированная стоимость равнялась бы, например,  $-3$ , то принудительный выпуск 2-х единиц этой переменной  $x_i$  (т. е. добавление нового ограничения  $x_i \geq 2$ ) привел бы к изменению (уменьшению) целевой функции на  $2*(-3) = -6$  единиц. Отметим, что из равенства нулю оптимального значения неизвестной не следует автоматически, что ее нормированная стоимость будет отлична от нуля;
- ◆ целевой коэффициент — коэффициент, стоящий при данной изменяемой переменной в формуле целевой функции;
- ◆ значения в столбцах **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** показывают, в каких пределах может изменяться целевой коэффициент при условии, что найденные значения переменных останутся неизменными.

В таблице **Ограничения** приведена информация об ограничениях:

- ◆ адреса ячеек, на значения которых наложены ограничения;

♦ их имена (созданные заранее или составленные из заголовков строк и столбцов, на пересечении которых находятся изменяемые ячейки); если имен нет, то это поле остается пустым;

♦ значения в этих ячейках, найденные средством **Поиск решения**;

♦ **теневая цена** показывает, насколько изменится значение целевой функции, если на единицу изменится значение правой части данного ограничения; теневая цена отлична от нуля только тогда, когда данное ограничение в оптимальном решении является связанным (и решение не вырождено);

♦ значения правых частей ограничений;

♦ значения в столбцах **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** показывают пределы изменения правой части ограничения, в которых действует приведенное значение теневой цены данного ограничения<sup>1</sup>.

Наиболее важными данными для анализа чувствительности в этом отчете являются нормированные стоимости и теневые цены, применение которых рассмотрим ниже. *Важно отметить*, что значения теневых цен подсчитаны в предположении, что изменяется значение правой части только *одного* ограничения при условии постоянства всех остальных параметров модели.

В отчете по пределам показано, в каких пределах с учетом всех ограничений могут изменяться переменные (значения в столбцах **Верхний предел** и **Нижний предел**) и какие при этом значения будет принимать целевая функция (значения в столбцах **Целевой результат**). Отметим, что если на значения переменной не налагаются явные ограничения, за дающие ее верхнюю (или нижнюю) границу, то в столбцах **Верхний предел** и **Целевой результат** (или **Нижний предел** и **Целевой результат**) для этой переменной будут стоять значения ошибки **#Н/Д**.

Целевое		
Ячейка	Имя	Значение
\$D\$8	Значение целевой функции	889285,7143

Изменяемое		
Ячейка	Имя	Значение
\$B\$4	x1	257,1428571
\$C\$4	x2	150

Нижний		Целевой		Верхний	
предел	результат	предел	результат	предел	результат
200	775000	257,1428571	889285,7143	150	889285,7143
-1,10845E-10	514285,7143				

Rис. 10. Отчет по пределам

Начнем анализ чувствительности для нашего примера. Во-первых, заметим, что переменные решения нулевые значения не принимают, и это облегчает нашу жизнь. Рассмотрим ограничения. Первое ограничение, задающее предельный объем производства, лимитирующим (связанным) не является. Отсюда следует простой вывод, что такой производственный план

<sup>1</sup> Значения 1Е+30 в столбце **Допустимое увеличение** (или **Допустимое уменьшение**) таблиц **Изменяемые ячейки** и **Ограничения** показывают, что допускается неограниченное возрастание (или убывание) значения соответственно целевого коэффициента или правой части ограничения.

мощности завода задействует не в полной мере. Это большой «минус» данного плана.

Посмотрим, что сдерживает объемы производства. Лимитирующими являются второе маркетинговое ограничение и ограничение по сырью 2 (на это указывает отчет по результатам и ненулевые значения теневых цен для этих ограничений в отчете по устойчивости). Влиять на маркетинговое ограничение трудно, поскольку против отдела маркетинга просто так не по-прешь, для этого нужны веские обоснования, а их, конечно, нет. Да это и не имеет особого смысла — чтобы полностью загрузить мощности производства, надо запланировать еще почти 93 тонны краски, а на такое увеличение производства краски типа Б «добро» никто не даст, так как даже объем в 150 тонн трудно продать.

Другое лимитирующее ограничение определяется наличием на складе запаса сырья 2. Разберемся с этим параметром. Взглянем на теневую цену этого ограничения, она равна 28 571,43. Это означает, что изменение на одну единицу величины правой части данного ограничения (т.е. изменение величины запаса сырья 2 на 1 тонну) приведет к изменению на 28 571,43 руб. величины прибыли (значения целевой функции). Очевидно, что в данном случае при увеличении значения правой части ограничения значение целевой функции будет возрастать, а при уменьшении — убывать. Насколько же нужно увеличить запас сырья 2, чтобы полностью загрузить все производственные мощности? К сожалению, отчет по устойчивости прямого ответа на этот вопрос не дает.

Посмотрим на число в столбце **Допустимое увеличение** для этого ограничения. Оно равно 6,5. Это значит, что, увеличивая значение правой части ограничения до величины 36,5, мы остаемся в рамках прежнего решения — значения переменных и целевой функции, конечно, будут изменяться, но лимитирующими и нелимитирующими останутся прежние ограничения. Если же значение правой части ограничения будет равно или превысит величину 36,5, то в качестве лимитирующего в игру вступит другое ограничение, которое на данный момент не является лимитирующим.

Чтобы узнать, что же получится при изменении правой части пятого ограничения до величины 36,5, надо опять запускать **Поиск решения**. Итак, вносим в ячейку F14 значение 36,5 и выбираем команду **Сервис->Поиск решения**. В диалоговом окне **Поиск решения** ничего менять не надо (средство **Поиск решения** сохраняет все установки своего предыдущего использования), можно сразу щелкнуть на кнопке **Выполнить**. Не забудьте также задать создание отчетов по результатам нового поиска.

Новое решение показано на рис. 11. В этом решении  $x1 = 350$ ,  $x2 = 150$  и  $z = 1\ 075\ 000$ . Новым лимитирующим ограничением стало первое ограничение, задающее предельный объем производства. Нам повезло, что изменение только одного параметра модели (значения правой части ограни-

чения по сырью 2) уже привело к решению (производственному плану), где производственные мощности завода задействованы полностью. В общем случае, если действительно есть необходимость задействовать все мощности производства, скорее всего, пришлось бы проверять другие лимитирующие ограничения и пробовать изменять их правые части.

Производственный план для завода "Олимп"				
Переменные решения				
x1	x2			
350	150			
Коэффициенты целевой функции		Значение целевой функции		
c1	c2	2000	2500	1075000
Ограничения		Коэффициенты	Левая часть	Правая часть
Производственное		1	1	500 <= 500
2-е маркетинговое		0	1	150 <= 150
Сырье 1		0,05	0,1	32,5 <= 50
Сырье 2		0,07	0,08	36,5 <= 36,5
Сырье 3		0,04	0,07	24,5 <= 25
Неотрицательность		0	1	150 >= 0
1-е маркетинговое		1	0	350 >= 200
Решение		x1	x2	z
Решение		350,00 т	150,00 т	1 075 000,00 р

Рис. 11. Новое оптимальное решение

Итак, что мы имеем? Оптимальным производственным планом будет производство 350 тонн краски типа А и 150 тонн краски типа Б. Однако, чтобы выполнить такой план, надо увеличить месячные запасы сырья 2 на 6,5 тонн, а месячные запасы сырья 1 и сырья 3 можно уменьшить на 17,5 и 0,5 тонн соответственно. Это уже не совсем очевидный результат. (Но и этот результат можно было получить другим способом, поскольку нетрудно подсчитать необходимые запасы сырья для производства 350 тонн краски А и 150 тонн краски Б, — однако до этого еще надо было бы додуматься.) Затем надо подсчитать, на сколько увеличится (и увеличится ли) себестоимость краски, если докупить дополнительные объемы сырья 2, так как возрастут расходы по крайней мере на хранение сырья. Это может повлиять на удельную прибыль краски, т. е. могут измениться значения коэффициентов при переменных в формуле целевой функции. А если это произойдет, то все вычисления надо начинать сначала. Кроме того, надо вспомнить, что значения этих коэффициентов известны нам только приближенно. Поэтому далее следует рассмотреть влияние коэффициентов при переменных в формуле целевой функции.

Напомним, что в отчете по устойчивости эти коэффициенты названы целевыми коэффициентами, мы также для краткости будем использовать это название. (Кроме того, как показано на рис. 7, этим коэффициентам с самого начала присвоены имена  $c_1$  и  $c_2$ .) В последнем отчете по устойчивости (рис. 12) в таблице **Изменяемые ячейки** в столбцах **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** приведены значения, на которые могут изменяться целевые коэффициенты при условии сохранения решения. Сохранение решения здесь означает сохранение значений переменных ре-

шения, но значение целевой функции может изменяться. Однако следует учесть, что эти числа имеют смысл при выполнении дополнительного условия, а именно, что целевые коэффициенты изменяются по одному, а не совместно. Таким образом, на основании данных отчета по устойчивости можно утверждать, что если коэффициент  $c1$  при переменной  $x1$  будет изменяться в пределах от 0 до 2500 или коэффициент  $c2$  при переменной  $x2$  будет изменяться в пределах от 2000 до бесконечности, то значения этих переменных останутся прежними. Но каким будет решение, если изменятся *оба* целевых коэффициента? Отчет по устойчивости ответа на этот вопрос не дает. Ну, а если нет готового ответа, его следует найти самому. Что для этого надо сделать? Правильно, надо решить еще несколько задач.

В нашем примере целевой коэффициент  $c1$  при переменной  $x1$  может изменяться в пределах 1500 до 2300, а целевой коэффициент  $c2$  при переменной  $x2$  — в пределах от 2100 до 3000. Хотя эти пределы не перекрывают крайние значения, которые показаны в отчете по устойчивости, необходимо все-таки проверить решение при совместном изменении значений целевых коэффициентов. Здравый смысл подсказывает, что решение останется прежним до тех пор, пока целевой коэффициент  $c1$ , будет меньше целевого коэффициента  $c2$ . Поэтому проверим решение, если коэффициент  $c1$  будет равен 2300, а коэффициент  $c2$  будет равен 2100. Записываем эти числа в ячейки B8 и C8 соответственно и запускаем **Поиск решения**, ничего не меняя в его установках. Получим новое решение, показанное на рис. 13.

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$4	x1	350	0	2000	500	2000
\$C\$4	x2	150	0	2500	1E+30	500

Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$D\$11	Производственное Левая часть	500	2000	500	0	150
\$D\$12	2-е маркетинговое Левая часть	150	500	150	0	150
\$D\$13	Сырье 1 Левая часть	32,5	0	50	1E+30	17,5
\$D\$14	Сырье 2 Левая часть	36,5	0	36,5	1E+30	0
\$D\$15	Сырье 3 Левая часть	24,5	0	25	1E+30	0,5
\$D\$16	Неотрицательность Левая часть	150	0	0	150	1E+30
\$D\$17	1-е маркетинговое Левая часть	350	0	200	150	1E+30

Рис. 12. Отчет по устойчивости для последнего решения

Производственный план для завода "Олимп"				
Переменные решения				
x1	x2			
500	-1,36453E-10			
Коэффициенты целевой функции			Значение целевой функции	
c1	c2		1150000	
2300	2100		1150000	
Ограничения				
	Коэффициенты	Левая часть	Правая часть	
Производственное	1	1	500	$\leq$ 500
2-е маркетинговое	0	1	-1,36453E-10	$\leq$ 150
Сырье 1	0,05	0,1	25	$\leq$ 50
Сырье 2	0,07	0,08	35	$\leq$ 36,5
Сырье 3	0,04	0,07	20	$\leq$ 25
Неотрицательность	0	1	-1,36453E-10	$\geq$ 0
1-е маркетинговое	1	0	500	$\geq$ 200
	x1	x2	z	
Решение	500,00 т	0,00 т	1 150 000,00 р	

Рис. 13. Решение при крайних значениях целевых коэффициентов

Как можно было и предположить, если удельная прибыль краски Б меньше удельной прибыли краски А, то производить краску Б невыгодно (значение 1,4E-10 можно считать нулем). Отметим, что прибыль при данном решении больше, чем в предыдущем решении (1 150 тыс. руб. против 1 075 тыс. руб.), а сырья всех видов потребуется меньше (ни одно ограничение по сырью не является лимитирующим). И все-таки, если для поддержания ассортимента продукции необходимо производить краску Б, то насколько надо увеличить ее удельную прибыль, чтобы ее производство стало выгодным? Здравый смысл опять подсказывает, что надо хотя бы сравнять удельные стоимости обоих типов краски. На это же указывает число 200 в столбце **Допустимое увеличение** и в строке **x2** таблицы **Изменяемые ячейки** отчета по устойчивости для данного решения (рис. 14).

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Резуль. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$4	x1	500	0	2300	1E+30	200
\$C\$4	x2	-1,36453E-10	0	2100	200	1E+30

Ограничения						
Ячейка	Имя	Резуль. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$D\$11	Производственное Левая часть	500	2300	500	21,42857143	300
\$D\$12	2-е маркетинговое Левая часть	-1,36453E-10	0	150	1E+30	150
\$D\$13	Сырье 1 Левая часть	25	0	50	1E+30	25
\$D\$14	Сырье 2 Левая часть	35	0	36,5	1E+30	1,5
\$D\$15	Сырье 3 Левая часть	20	0	25	1E+30	5
\$D\$16	Неотрицательность Левая часть	-1,36453E-10	-200	0	150	1E+30
\$D\$17	1-е маркетинговое Левая часть	500	0	200	300	1E+30

Рис. 14. Отчет по устойчивости для решения при крайних значениях целевых коэффициентов

Если значения удельных прибылей равны, то получим случай *множественных альтернативных оптимальных решений* задачи линейной оптимизации: любая пара неотрицательных чисел  $x_1$  и  $x_2$  таких, что их сумма равна 500 и  $x_2 \leq 150$ (ограничения должны выполняться), будет решением данной задачи, при этом значения целевой функции для любых таких решений будут одинаковыми. Чтобы убедиться в этом, введите в ячейки B8 и C8 одинаковые значения, например 2300. Затем в ячейки B4 и C4 введите числа, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, и запустите **Поиск решения**. Наверняка вы получите решение с введенными вами значениями переменных. Если же в ячейки B4 и C4 вы введете произвольные числа в качестве начальных значений для переменных  $x_1$  и  $x_2$  то получите либо решение  $x_1 = 500$  и  $x_2 = 0$  (рис. 15), либо решение  $x_1 = 350$  и  $x_2 = 150$  (рис. 16). Это так называемые «крайние» решения. Других решений, хотя их существует бесконечно много, вы не получите.

Производственный план для завода "Олимп"				
Переменные решения				
x1	x2			
500	0			
Коэффициенты целевой функции		Значение целевой функции		
c1	c2	1150000		
2300	2300	1150000		
Ограничения		Коэффициенты	Левая часть	Правая часть
Производственное	1	1	500 <=	500
2-е маркетинговое	0	1	0 <=	150
Сырье 1	0,05	0,1	25 <=	50
Сырье 2	0,07	0,08	35 <=	36,5
Сырье 3	0,04	0,07	20 <=	25
Неотрицательность	0	1	0 >=	0
1-е маркетинговое	1	0	500 >=	200
x1	x2	z		
500,00 т	0,00 т	1 150 000,00 р		
Решение				

Рис. 15. Решение, предлагающее отказаться от краски Б

На практике при решении задач линейной оптимизации множественные оптимальные решения встречаются относительно редко. Скорее, эта ситуация может проявиться при проведении анализа чувствительности, как в нашем примере. Признак того, что при данном решении существуют другие альтернативные решения, опять дает отчет по устойчивости. Если в таблице **Изменяемые ячейки** в столбцах **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** для некоторых переменных присутствуют нули, то это и является признаком того, что существуют альтернативные решения. Например, на рис. 17 показан отчет по устойчивости для нашей задачи, когда целевые коэффициенты равны 2300, а  $x_1 = 350$  и  $x_2 = 150$ . Как видите, в столбцах **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** таблицы **Изменяемые ячейки** действительно присутствуют нулевые значения. В других отчетах, показанных выше, нулей в этих столбцах вы не найдете, поскольку там множественных альтернативных решений не было.

Производственный план для завода "Олимп"				
Переменные решения				
x1	x2			
350	150			
Коэффициенты целевой функции		Значение целевой функции		
c1	c2	1150000		
2300	2300	1150000		
Ограничения		Коэффициенты	Левая часть	Правая часть
Производственное	1	1	500 <=	500
2-е маркетинговое	0	1	150 <=	150
Сырье 1	0,05	0,1	32,5 <=	50
Сырье 2	0,07	0,08	36,5 <=	36,5
Сырье 3	0,04	0,07	24,5 <=	25
Неотрицательность	0	1	150 >=	0
1-е маркетинговое	1	0	350 >=	200
x1	x2	z		
350,00 т	150,00 т	1 150 000,00 р		
Решение				

Рис. 16. Альтернативное решение, сохраняющее производство краски Б

Если некоторые переменные принимают нулевые значения, то еще одним признаком присутствия альтернативных решений будут нулевые значения нормированных стоимостей для этих переменных.

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результат.	Нормир. значение	Целевой стоимость	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$4	x1		350	0	2300	0
\$C\$4	x2		150	0	2300	1E+30
Ограничения						
Ячейка	Имя	Результат.	Теневая цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$D\$11	Производственное Левая часть	500	2300	500	0	150
\$D\$12	2-е маркетинговое Левая часть	150	0	150	1E+30	0
\$D\$13	Сырье 1 Левая часть	32,5	0	50	1E+30	17,5
\$D\$14	Сырье 2 Левая часть	36,5	0	36,5	1E+30	0
\$D\$15	Сырье 3 Левая часть	24,5	0	25	1E+30	0,5
\$D\$16	Неотрицательность Левая часть	150	0	0	150	1E+30
\$D\$17	1-е маркетинговое Левая часть	350	0	200	150	1E+30

Рис. 17. Отчет по устойчивости в случае множественных решений

Пересмотреть все альтернативные решения невозможно, поскольку они составляют бесконечное множество.

Что дает наличие альтернативных решений? Хорошо это или плохо? Плохо, поскольку решений бесконечно много, и надо сделать выбор из бесконечного множества решений. Хорошо — поскольку с «точки зрения» целевой функции все эти решения равнозначны, можно привлечь дополнительный критерий отбора решений, который изначально не учитывался в модели. Тем самым можно улучшить решение, сделать его «более оптимальным», но в соответствии с *новым критерием*. Например, в нашем примере среди альтернативных решений можно найти такое решение, которое обеспечивает минимальные суммарные запасы сырья при той же величине прибыли. Легко убедиться, что при решении  $x_1 = 500$  и  $x_2 = 0$  потребуется 80 тонн всех видов сырья, а при решении  $x_1 = 350$  И  $x_2 = 150$  — 93,5 тонн.

Прежде чем подвести итоги анализа чувствительности, надо как-то записать и структурировать ту информацию, которую мы получили в результате этого анализа. Для этого можно нарисовать таблицу, где для тех значений параметров модели, которые изменились при проведении анализа чувствительности, были бы приведены значения переменных решения и соответствующие значения целевой функции. В Excel есть средство для создания подобных таблиц. Это средство называется *сценарии*.

**Сценарий** — это сохраненные как единое целое значения ячеек рабочего листа, содержащие значения и формулы. Excel имеет возможность быстрого переключения между различными сценариями. Поэтому, если сохранить в качестве сценария значения параметров модели и значения переменных решения, можно быстро восстановить табличную модель и ее решение при различных наборах параметров. Кроме того, на основе сохраненных сценариев Excel может создать отчет или в виде структурированной таблицы или в виде сводной таблицы. Сценарии могут быть очень полезными при проведении анализа чувствительности (для сравнения различных решений) и для документирования результатов анализа.

Покажем на нашем примере, как создавать и сохранять сценарии и как на их основе затем построить отчет. Конечно, сценарии надо сохранять по мере их «созревания», т. е. после каждого изменения, внесенного в таб-

личную модель. Но, допустим, что мы забыли об этом правиле или вообще ничего не знали о сценариях. И сейчас хотим наверстать упущенное, создав кучу сценариев на все случаи жизни.

Перед началом создания сценариев сделаем маленькое, но существенное замечание о том, что следует сохранять в сценариях. В сценариях сохраняются **константы**, т. е. такие значения, которые в ячейки рабочего листа введены напрямую, а не вычислены по формулам. Значения переменных решения, хотя они вычисляются с помощью средства **Поиск решения**, также считаются константами, поскольку для их определения *не используются* формулы рабочего листа. Возникает естественный вопрос: как же сохранить результаты вычислений? Ответ простой: они не сохраняются, а вычисляются заново при восстановлении на рабочем листе ранее сохраненных констант сценария или при создании отчета по сценариям. В своих сценариях мы будем сохранять значения переменных решения, значения целевых коэффициентов и значения правых частей ограничений.

Итак, вспомним нашу первую модель и ее решение, где целевые коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  равнялись соответственно 2000 и 2500, а правая часть пятого ограничения равнялась 30. Восстановите на рабочем листе эти значения и запустите средство **Поиск решения** для получения решения. Надеюсь, вы получили прежнее решение:  $x_1 = 257,14$ ,  $x_2 = 150$  и  $z = 889285,71$  (см. рис. 7).

Чтобы создать новый сценарий для текущего рабочего листа, выполните следующие действия.

1. Выберите команду **Сервис->Сценарии** (В Excel 2007 — **Данные->Анализ “что если”**).
2. В открывшемся диалоговом окне **Диспетчер сценариев** щелкните на кнопке **Добавить** (рис. 18).
3. В диалоговом окне **Изменение сценария** введите название сценария в поле ввода **Название сценария** (рис. 19). Желательно давать содержательные названия, показывающие отличия данного сценария от других. В нашем примере первый сценарий назовем **Исходный**.
4. В поле ввода **Изменяемые ячейки** введите адреса ячеек, содержащих константы, задающие параметры модели. Эти ячейки в сценариях называются *изменяемые ячейки*. В нашем примере надо ввести **B4:C4;B8:C8;F11:F17**. Проще всего вводить адреса ячеек путем выделения ячеек непосредственно на рабочем листе.
5. В поле ввода **Примечание** желательно ввести комментарии к создаваемому сценарию. Если вы не введете комментарии, то Excel автоматически создаст примечание, содержащее имя создателя сценария (по зарегистрированному имени пользователя) и дату его создания.
6. Щелкните в диалоговом окне **Изменение сценария** на кнопке **OK**.

**7.** В открывшемся диалоговом окне **Значения ячеек сценария** проверьте и при необходимости измените значения для изменяемых ячеек (рис. 20).

**8.** Щелкните в диалоговом окне **Значения ячеек сценария** на кнопке **OK**, что создает сценарий и возвращает в диалоговое окно **Диспетчер сценариев**.

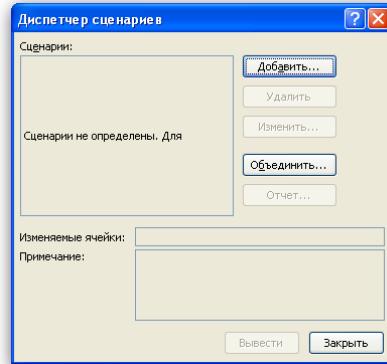


Рис. 18. Диалоговое окно *Диспетчер сценария* — основное окно для работы со сценариями

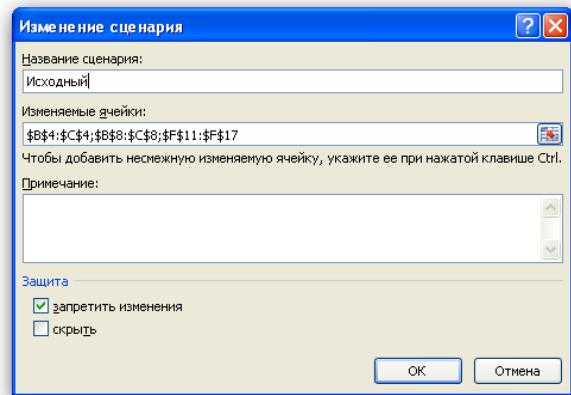


Рис. 19. Диалоговое окно *Изменение сценария* — создание нового сценария

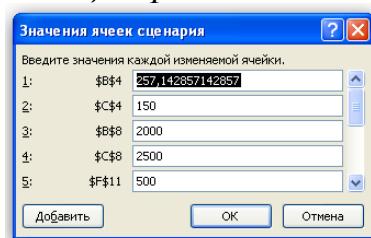


Рис. 20. Задание значений для нового сценария

Сценарий создан. Чтобы посмотреть, как сценарий вычисляет результаты (и для проверки сохраненных в сценарии значений), измените какие-либо значения на рабочем листе (например, измените значения переменных решения) и затем выполните следующие простые действия. Выберите команду **Сервис->Сценарии**, в открывшемся диалоговом окне **Диспетчер сценариев** в списке **Сценарии** выберите сценарий, который вы хотите отобразить, и щелкните на кнопке **Вывести**. Excel должен воспроизвести на рабочем листе решение нашей первой задачи, которое показано-

на рис. 7. Если есть какие-нибудь числовые расхождения между тем, что показано на рис. 7, и результатами восстановленного сценария, то проверьте в сценарии значения изменяемых ячеек.

Далее создаем сценарий для решения, где правая часть пятого ограничения заменена значением 36,5. Для этого введите в ячейку F14 данное значение и найдите решение с помощью средства **Поиск решения** (см. рис. 11). Затем повторите описанные выше действия по созданию сценария. Этот новый сценарий назовем, к примеру, **Полная загрузка**.

Подобным образом создаем сценарий, где удельные прибыли красок обоих типов равны, и поэтому Excel предлагает отказаться от производства краски **Б** (см. рис. 15). Этот сценарий назовем **Без краски Б**. Наконец, создадим еще один сценарий, где удельные прибыли красок также равны, но требуется произвести 150 тонн краски **Б** (см. рис. 16). Этому сценарию дадим название **Даешь краску Б!**.

Создать отчет по имеющимся сценариям можно следующим образом.

1. Выберите команду **Сервис->Сценарии**.

2. В открывшемся диалоговом окне **Диспетчер сценариев** щелкните на кнопке **Отчет**.

3. В диалоговом окне **Отчет по сценарию** укажите, какой тип отчета вы хотите создать — выберите переключатель **структур** для создания итогового отчета в виде структурированного рабочего листа либо переключатель **сводная таблица** — для создания итогового отчета в виде сводной таблицы (рис. 21). Для сценариев решения задач оптимизации наиболее подходит отчет в виде структурированного рабочего листа.

4. В поле ввода **Ячейки результата** введите адреса ячеек (вручную или путем выделения их непосредственно на рабочем листе), содержащих итоговые результаты. Для задач оптимизации *обязательно* надо указать ячейку с целевой функцией, а также, коль в сценариях сохраняются значения правых частей ограничений, ячейки с формулами, вычисляющими значения левых частей ограничений.

5. Щелкните на кнопке **OK**.

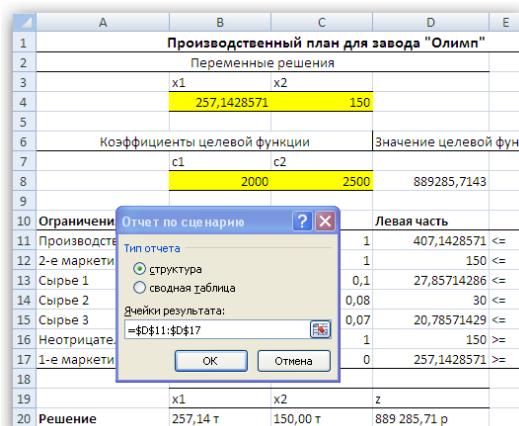


Рис. 21. Диалоговое окно **Отчет по сценарию**

Отчет по сценариям будет легко читаться и будет понятен с первого взгляда, если изменяемым ячейкам сценариев и ячейкам результатов (задаваемых при создании отчета) присвоить уникальные имена, соответствующие их «сущности». Присвоить имена ячейкам можно, в частности, с помощью команды **Вставка->Имя->Присвоить**. В противном случае ячейки в столбце В отчета останутся пустыми и заполнять их придется вручную.

Готовый отчет по нашим сценариям показан на рис. 22. Этот отчет может послужить необходимому делу документирования и обоснования принятия решения. Он послужит основой для заключительных выводов выполненного анализа чувствительности.

Подведем итоги выполнения анализа чувствительности в нашем примере.

1. Первоначальное решение (сценарий **Исходный** в отчете на рис. 22) — производить 257,14 т краски А и 150 т краски Б, при этом будет получена прибыль в размере 889 285,17 руб. — не загружает полностью производственные мощности.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								

**Структура сценария**

	Текущие значения:	Исходный	Полная загрузка	Без краски Б	Даешь краску Б!
<b>Изменяемые:</b>					
\$B\$4	257,1428571	257,1428571	350	500	350
\$C\$4	150	150	150	0	150
\$B\$8	2000	2000	2000	2300	2300
\$C\$8	2500	2500	2500	2300	2300
\$F\$11	500	500	500	500	500
\$F\$12	150	150	150	150	150
\$F\$13	50	50	50	50	50
\$F\$14	30	30	36,5	36,5	36,5
\$F\$15	25	25	25	25	25
\$F\$16	0	0	0	0	0
\$F\$17	200	200	200	200	200
<b>Результат:</b>					
\$D\$11	407,1428571	407,1428571	500	500	500
\$D\$12	150	150	150	0	150
\$D\$13	27,85714286	27,85714286	32,5	25	32,5
\$D\$14	30	30	36,5	35	36,5
\$D\$15	20,78571429	20,78571429	24,5	20	24,5
\$D\$16	150	150	150	0	150
\$D\$17	257,1428571	257,1428571	350	500	350

Примечания: столбец "Текущие значения" представляет значения изменяемых ячеек в момент создания Итогового отчета по Сценарию. Изменяемые ячейки для каждого сценария выделены серым цветом.

Rис. 22. Отчет по сценариям

2. Чтобы полностью загрузить производственные мощности, надо увеличить месячный запас сырья 2 с 30 до 36,5 тонн (сценарий **Полная загрузка** в отчете на рис. 22), при этом следует производить 350 т краски А и 150 т краски Б, тогда будет получена прибыль в размере 1 075 000 руб.

3. Первые два решения имеют силу, если удельная прибыль краски Б превышает удельную прибыль краски А. Если удельная прибыль краски Б меньше удельной прибыли краски А, то производить краску Б нерентабельно.

4. Если удельная прибыль краски Б примерно равна удельной прибыли краски А, то прибыль не зависит от количества произведенной краски Б (сценарии **Без краски Б** и **Даешь краску Б!** в отчете на рис. 22). При этом рационально отказаться от производства краски Б или уменьшить ее производство до минимума, поскольку это сокращает необходимый для производства суммарный запас всех видов сырья (сценарий **Без краски Б**).

Вот так можно кратко подвести итоги анализа нашей *математической* модели реальной ситуации. Как эти итоги и полученные «оптимальные» решения будут интерпретированы в реальную ситуацию, какое влияние они окажут (и окажут ли) на процесс принятия реального решения, как это решение будет воплощаться в жизнь — это вопросы реальной жизни, ответить на которые может только сама жизнь.

### **Варианты заданий**

#### **Задача 1**

На швейной фабрике для изготовления четырёх видов изделий может быть использована ткань трёх артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в таблице. В ней также указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной. Сколько ткани каждого из артикулов может сэкономить фабрика не теряя прибыли? Насколько минимально нужно поднять цену на четвертое изделие, чтобы это увеличило прибыль? Что произойдет с прибылью, если фабрике будет необходимо выпускать изделие 3 в количестве не меньше 5 штук?

Артикул тка-ни	Норма расхода ткани (м) на одно изде- лие вида				Общее количе- ство ткани
	1	2	3	4	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	-	4	800
Цена одного изделия (руб.)	9±2	6	4±3	7	

#### **Задача 2**

Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудо-

дования приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной. Что произойдет с общей прибылью, если прибыль от продажи продукции вида 4 вырастет втрое? Как изменится общая прибыль, если предприятию будет необходимо выпускать не меньше 1 единиц продукции 3? Если увеличить время использования фрезерных станков на 80 станко-часов, то можно ли будет уменьшить время использования других станков?

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на единицу продукции вида				Общий фонд рабочего времени (станко-ч)
	1	2	3	4	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	-	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	-	340
Прибыль от реализации единицы продукции (руб.)	8	3	2±1	1	

### Задача 3

Для перевозок груза на трёх линиях могут быть использованы суда трёх типов. Производительность судов при использовании их на различных линиях характеризуются данными, приведёнными в таблице. В ней же указаны общее время, в течение которого суда каждого типа находятся в эксплуатации, и минимально необходимые объёмы перевозок на каждой линии. Определить, какие суда, на какой линии и в течение какого времени следует использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку судов с учётом возможного времени их эксплуатации. Как изменится общий объем перевозок, если производительность судов вида III на третьей линии возрастет вдвое, а на второй — уменьшится до 8 млн. тонномиль в сутки? Возможно ли в этом случае выполнить заданный объем перевозок? На какой линии выгоднее всего использовать суда вида I?

Тип судна	Производительность судов (млн. тонномиль в сутки) на линии			Общее время эксплуатации судов
	1	2	3	
I	8	14	11	300
II	6	15	13	300
III	12	12	4	300

Заданный объём перевозок (млн. Тонно-миль)	3000	5400	3300	
--	------	------	------	--

#### Задача 4

Компания "Bermuda Paint" специализируется на производстве технических лаков. Представленная ниже таблица содержит информацию о ценах продажи и соответствующих издержках производства единицы полировочного и матового лаков.

Лак	Цена продажи 1 галлона, ф. ст.	Издержки производства 1 галлона, ф. ст
Матовый	13,0	9,0
Полировочный	16,0	10,0

Для производства 1 галлона матового лака необходимо затратить 6 мин. трудозатрат, а для производства одного галлона полировочного лака — 12 мин. Резерв фонда рабочего времени составляет 400 чел.-ч. в день. Размер ежедневного запаса необходимой химической смеси равен 100 унциям, тогда как ее расход на один галлон матового и полировочного лаков составляет 0,05 и 0,02 унции соответственно. Технологические возможности завода позволяют выпускать не более 3000 галлонов лака в день.

В соответствии с соглашением с основным оптовым покупателем компания должна поставлять ему 5000 галлонов матового лака и 2500 галлонов полировочного лака за каждую рабочую неделю (состоящую из 5 дней). Кроме того, существует профсоюзное соглашение, в котором оговаривается минимальный объем производства в день, равный 2000 галлонов. Администрации данной компании необходимо определить ежедневные объемы производства каждого вида лаков, которые позволяют получать максимальный общий доход.

Требуется:

а) Определить ежедневный оптимальный план производства и соответствующую ему величину дохода.

б) Для исходной задачи (не учитывающей сверхурочные работы) определить промежуток изменений показателя единичного дохода за 1 галлон полировочного лака, в котором исходное оптимальное решение остается прежним.

#### Задача 5

Найти решение, состоящее в определении плана изготовления изделий А, В и С, обеспечивающего максимальный их выпуск, в стоимости выраженной с учётом ограничений на возможное использование сырья трёх

видов. Нормы расхода сырья каждого вида на одно изделие, цена одного изделия соответствующего вида, а также имеющегося сырья, приведены в таблице. Можно ли сэкономить сырье не уменьшая общей прибыли? Что произойдет с прибылью, если перед предприятием поставлена задача выпустить не менее пяти изделий вида А?

Вид сырья	Нормы затрат (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	13.	B	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (руб.)	9±1	10±2	16	-

### Задача 6

Полиграфическая компания выпускает рекламные издания LinksLetter и Ragged Edge, которые покупатели могут брать в местных магазинах и ресторанах. Компания получает доход, продавая место для размещения рекламы в своих изданиях. Стоимость LinksLetter составляет \$50 за тысячу экземпляров, а стоимость Ragged Edge — \$100 за тысячу экземпляров. Чтобы напечатать тысячу экземпляров LinksLetter требуется один час, а печать тысячи экземпляров Ragged Edge занимает всего полчаса. На следующей неделе ресурс времени печати составит 120 ч. Обе рекламные газеты складываются фальцевальной машиной, ресурс рабочего времени которой составляет 200 ч в неделю, причем она складывает обе газеты с одинаковой скоростью 1000 экземпляров в час. Компания хочет полностью использовать время печатного станка, минимизировав при этом затраты на производство печатной продукции. Определите оптимальный производственный план и его минимальную стоимость.

Предположим, что цели менеджера полиграфической компании изменились. Теперь он решил максимизировать получаемую от публикаций прибыль. Он определил, что прибыль от тысячи экземпляров LinksLetter составляет \$25, а от тысячи экземпляров Ragged Edge — \$45. Необходимо напечатать не менее 60000 экземпляров LinksLetter и не менее 30000 экземпляров Ragged Edge. Ограничения на ресурс рабочего времени печатного станка и фальцевальной машины остаются прежними. Каким будет оптимальный производственный план? Какие ограничения являются связывающими?

### Задача 7

Завод может производить пять различных продуктов в произвольном соотношении. В выпуске каждого продукта принимают участие три станка, как показано в таблице. Все цифры даны в минутах на фунт продукта.

Продукт	Время работы станка, мин/фунт		
	1	2	3
A	12	8	5
B	7	9	10
C	8	4	7
D	10	0	3
E	7	11	2

Ресурс рабочего времени каждого станка составляет 128 ч в неделю. Все продукты конкурентоспособны и все их произведенное количество может быть продано по цене \$5, \$4, \$5, \$4 и \$4 за фунт продукта A, B, C, D и E соответственно. Переменные затраты на зарплату составляют \$4 в час для станков 1 и 2 и \$3 в час для станка 3. Стоимость материалов, затраченных на выпуск каждого фунта продуктов A и C, составляет \$2, а продуктов B, D и E — \$1. Руководство хочет максимизировать прибыль компании. Сколько часов отработает каждый станок, и в каких единицах измеряются теневые цены для ограничений, задающих ресурс рабочего времени для станков? Какую цену фирма может позволить себе заплатить за получение дополнительного часа рабочего времени станка 2? На сколько может увеличиться цена продажи продукта A, прежде чем изменится оптимальный производственный план?

### Задача 8

На ткацкой фабрике для изготовления трёх артикулов ткани используются станки двух типов, пряжа и красители. В таблице указаны производительность станка каждого типа, нормы расхода пряжи и красителей, цена 1 метра ткани данного артикула, а также общий фонд рабочего времени станков каждого типа, имеющихся в распоряжении фабрики, фонды пряжи и красителей и ограничения на возможный выпуск тканей данного артикула.

Ресурсы	Нормы затрат на 1 м ткани артикула			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность станков (станко-ч):				
I типа	0,02	-	0,04	200
II типа	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа (кг)	1,0	1,5	2,0	15000
Красители (кг)	0,03	0,02	0,025	450
Цена 1м ткани (руб.)	5	8	8	-
Выпуск ткани (м):				
Минимальный	1000	2000	2500	-
Максимальный	2000	9000	4000	-

Составить такой план изготовления тканей, согласно которому будет произведено возможное количество тканей данного артикула, а общая стоимость всех тканей максимальна. Можно ли будет при этом сэкономить ресурсы пряжи и красителей? Будут ли полностью загружены станки?

### Задача 9

Машиностроительное предприятие для изготовления четырёх видов продукции использует токарное, фрезерное, сверлильное, расточное и шлифовальное оборудование, а также комплектующие изделия.

Кроме того, сборка изделий требует выполнения определённых сборочно-наладочных работ. Нормы затрат всех видов на изготовление каждого из изделий приведены в таблице. В этой же таблице указаны наличный фонд каждого из ресурсов, прибыль от реализации единицы продукции данного вида, а также ограничения на возможный выпуск продукции 2-го и 3-го вида.

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от её реализации является максимальной.

Ресурсы	Нормы затрат на изготовление одного изделия				Общий объём ресурсов
	1	2	3	4	
Производительность оборудования (человек-ч):					
Токарного	550	-	620	-	64270
Фрезерного	40	30	20	20	4800
Сверлильного	86	110	150	52	22360
Расточного	160	92	158	128	26240
Шлифовального	-	158	30	50	7900
Комплектующие изделия (шт)	3	4	3	3	520
Сборочно-наладочные работы (человек-ч)	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	315	278	573	370	-
Выпуск (шт.):					
Минимальный	-	40	-	-	-
Максимальный	-	-	120	-	-

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации является максимальной. Можно ли будет при этом сэкономить комплектующие изделия? Будет ли полностью загружено оборудование?

### Задача 10

Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в следующей таблице:

Питательные вещества	Содержание (г) питательных веществ в 1 кг продуктов						
	Мясо	рыба	молоко	Масло	сыр	крупа	картофель
Белки	180	190	30	10	260	130	21
Жиры	20	3	40	865	310	30	2
Углеводы	-	-	50	6	20	650	200
Минеральные соли	9	10	7	12	60	20	10
Цена 1 кг продуктов (руб.)	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

### Задача 11

Для перевозок трёх видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объёмы имеющегося сырья каждого вида, а также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие вида			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность оборудования (норм-ч):				
I типа	2	-	4	200
II типа	4	3	1	500
Сырьё (кг):				
1-го вида	10	15	20	1495
2-го вида	30	20	25	4500
Цена одного изделия (руб.)	10	15	20	-
Выпуск (шт.):				
Минимальный	10	20	25	-
Максимальный	20	40	100	-

Составить такой план производства продукции, согласно которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготавляемой продукции максимальна. Можно ли будет при этом получить экономию сырья? Будет ли полностью загружено оборудование? Что произойдет с величиной прибыли, если цену на изделие 1 увеличить на 20%?

### Задача 12

При производстве четырёх видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операции, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице.

Технологическая операция	Нормы затрат времени (ч) на обработку 1 км кабеля вида				Общий фонд рабочего времени (ч)
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	7200
Наложение изоляции	1,0	0,4	0,8	0,7	5600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11176
Освинцевание	3,0	-	1,8	2,4	3600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4200
Прибыль от реализации 1 км кабеля	1,2	0,8	1,0	1,3	-

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготовленной продукции является максимальной. Кабель какого вида производить выгоднее всего?

### Задача 13

На мебельной фабрике изготавливается пять видов продукции: столы, шкафы, диваны-кровати, кресла-кровати и тахты. Нормы затрат труда, а также древесины и ткани на производство единицы продукции данного вида приведены в таблице.

Ресурсы	Норма расхода ресурса на единицу продукции					Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	диван-кровать	кресло-кровать	тахта	
Трудозатраты (человека-ч)	4	8	12	9	10	3456
Древесина ( $\text{м}^3$ )	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Ткань (м)	-	-	6	4	5	2400
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	8	10	16	14	12	-
Выпуск (шт.):						
1. Минимальный	120 480	90 560	20 180	40 160	30 120	- -
Максимальный						

В этой же таблице указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении фабрики, а также указано (на основе изучения спроса), в пределах каких объемов может изготавляться каждый вид продукции.

Определить план производства продукции мебельной фабрикой, согласно которому прибыль от её реализации является максимальной. Можно ли при этом будет сэкономить древесину и ткань?

### Задача 14

Из четырех видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества А, 30 ед. – вещества В и 24 ед. – вещества С. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указано в таблице. В ней же приведена цена 1 кг сырья каждого вида.

Составить смесь, содержащую не менее необходимого количества данного вида и имеющую минимальную стоимость.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида			
	1	2	3	4
14. А	1	1	-	4
В	2	-	3	5
С	1	2	4	6
Цена 1 кг сырья (руб.)	5	6	7	8

### Варианты индивидуальных заданий

Номер задания соответствует номеру студента в журнале.

	Варианты														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Задачи	1	2	12	3	4	9	2	6	10	12	8	5	7	6	4
	4	6	8	7	11	5	13	14	6	1	5	10	13	1	9

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

### Принятие решений при многих критериях

**Цель:** Приобрести навыки решения многокритериальных задач с использованием пакета

#### 1. Основы теории

Ежедневно мы сталкиваемся с необходимостью принимать решения с учетом множества целей и критериев. Перечислим некоторые из них

- Выбор работы из нескольких предложенных вакансий
- Выбор компьютера (автомобиля, холодильника и т. п.)
- Принятие решения о том, какой новый продукт выпускать первым.
- Выбор места для нового ресторана, отеля, производственного объекта и т. д.
- Выбор учебного заведения.
- Составление рейтинга городов по условиям проживания
- Выбор нового пакета прикладных программ от конкурирующих производителей.

При покупке автомобиля, например, необходимо учитывать такие факторы как: цена, безопасность, объем двигателя, экономия топлива и т. д. В каждом из перечисленных выше примеров при принятии сложных решений требуется учитывать множество факторов.

Простейшим способом принятия решений в подобных ситуациях является присвоение критериям, определяющим качество решения, весовых коэффициентов и вычисление для альтернативных решений оценок по шкале от 1 (наихудшее) до 10 (наилучшее) путем суммирования произведений значений каждого критерия на его весовой коэффициент. Решение с наивысшей суммой будет наиболее предпочтительным. Назовем такой метод выбора решения *методом рейтинга приоритетов*.

Рассмотрим пример, в котором необходимо выбрать компьютер для офиса. Выбор осуществляется среди трех моделей: модель А с процессором AMD Athlon II X2 с частотой 2.9 ГГц, модель В с процессором Intel Core 2 Duo с частотой 3 ГГц и модель С с процессором Intel Core i3-530 с частотой 2.93 ГГц. При выборе учитываются следующие критерии: цена, эффективность (частота процессора), емкость жесткого диска и наличие гарантии и обслуживания. Далее решаем, что при принятии решения цене присваивается весовой коэффициент, например, 0,50 (50% общего веса), эффективности — 0,15 (15%), емкости жесткого диска — 0,20 (20%) и наличию гарантии — 0,15 (15% общего веса). Затем производится оценка каждой модели компьютера по указанным четырем критериям. Их оценки по шкале от 1 до 10 (как описывалось выше) показаны в табличной модели на рис. 1 (рабочая книга Компьютер.XLS)

Критерий	Вес	Ранги альтернатив		
		Модель А	Модель В	Модель С
Цена	50%	5	8	3
Скорость	15%	7	5	9
Ж. диск	20%	9	4	10
Гарантия	15%	7	10	7
	100%	6,4	7,05	5,9

	B	C	D	E	F	G
Критерий	Вес	Модель А			Ранги альтернатив	
Цена	0,5	5		8		3
Скорость	0,15	7		5		9
Ж. диск	0,2	9		4		10
Гарантия	0,15	7		10		7
	=СУММ(C4:C7)	=СУММПРОИЗВ(\$C\$4:\$C\$7;E4:E7)		=СУММПРОИЗВ(\$C\$4:\$C\$7;F4:F7)		=СУММПРОИЗВ(\$C\$4:\$C\$7;G4:G7)

Рис. 1. Модель принятия решения при покупке компьютера

Как видим, наибольшую сумму баллов 7,05 набрала модель В, поэтому купить следует именно ее.

Метод рейтинга приоритетов прост в использовании, однако при его применении на практике возникает ряд сложностей (при задании оценочных шкал для разнородных критериев, при выставлении оценок альтернативам), преодолеть которые можно с помощью более совершенного метода — метода анализа иерархий.

*Метод анализа иерархий* также основан на идее использования взвешенных средних, однако в нем применяется более надежный и согласованный метод присвоения оценок и весовых коэффициентов. МАИ основывается на попарном сравнении альтернативных решений по каждому критерию. Затем проводится аналогичный ряд сравнений, чтобы оценить относительную важность каждого критерия и таким образом определить весовые коэффициенты. Основная процедура выглядит так.

1. Определяются рейтинги всех возможных вариантов решений по каждому критерию следующим образом.
  - создается матрица попарных сравнений по всем критериям,
  - полученная матрица нормализуется,
  - для получения соответствующих рейтингов усредняются значения в каждой строке,
  - вычисляются и проверяются коэффициенты согласованности.
2. Определяются весовые коэффициенты критериев.
  - создается матрица попарных сравнений по всем критериям,
  - полученная матрица нормализуется,
  - для получения весовых коэффициентов усредняются значения в каждой строке,
  - вычисляются и проверяются коэффициенты согласованности.
3. Вычисляется взвешенный средний рейтинг для каждого варианта решения и выбирается решение, набравшее наибольшее количество баллов

Продемонстрируем применение данной процедуры на новом примере. Компании SleepwellHotels нужно выбрать лучший пакет бухгалтерского программного обеспечения из предлагаемых некоторыми поставщиками. Эта задача была поручена заведующему отделом Марку Джеймсу. Он выделил трех поставщиков, предлагаемое программное обеспечение которых сможет удовлетворить основные потребности компании RevenueTechnologyCorporation (RTC), PRAISEStrategicSolutions (PSS) и

ElCheapo (EC). Критерии, которые он считает важными в выборе программного обеспечения: 1) общая стоимость программной системы, 2) обеспечение обслуживания на протяжении следующего года, 3) сложность и надежность лежащих в основе математических процедур и 4) возможность адаптации системы под условия Sleepwell. Первый шаг процедуры МАИ состоит в попарном сравнении продавцов по каждому критерию. Для этого используем стандартную шкалу сравнения, приведенную в следующей таблице

Рейтинг	Описание
1	Однаковое предпочтение
3	Умеренное предпочтение
5	Явное предпочтение
7	Очевидное предпочтение
9	Абсолютное предпочтение

Также можно присваивать значения рейтинга 2, 4, 6 и 8, которые определяются как средние от ближайших рейтингов.

Марк начал с первого критерия (общая стоимость) и внес в лист Стоимость рабочей книги ПО.XLS данные, показанные на рис. 2. Таблицу следует читать таким образом: указанный в строке поставщик сравнивается с поставщиком, указанным в столбце. Если указанный в строке поставщик предпочтительней, то соответствующее число от 1 до 9 записывается в ячейку на пересечении строки и столбца. Если же предпочтительней поставщик, указанный в столбце, то 1 делится на соответствующее число от 1 до 9, и результат записывается в ячейку на пересечении строки и столбца. Очевидно, что поскольку любой поставщик одинаково предпочителен по сравнению с самим собой, то во все диагональные ячейки заносится значение 1. По показателю общей стоимости поставщику RTC отдается среднее между умеренным и явным предпочтение в сравнении с поставщиком PSS. Поэтому в ячейку второго столбца первой строки заносится число 4 (ячейка C4). Поставщику EC отдается предпочтение от одинакового до умеренного перед поставщиком RTC, поэтому в ячейке третьего столбца первой строки записано число 1/2 (ячейка D4). Марк так запрограммировал свою таблицу, что после ввода элементов справа от диагонали (ячейки C4, D4 и D5) обратные предпочтения вычисляются автоматически. Например, поскольку при сравнении поставщика 1 с поставщиком 2 было записано 4, то при сравнении поставщика 2 с поставщиком 1 автоматически получается 1/4 (ячейка B5).

A	B	C	D
	RTC	PSS	EC
RTC		1	4
PSS		0,25	1
EC		2	7
			0,5 0,142857 1

	A	B	C	D
	RTC	PSS	EC	
RTC	1	4	0,5	
PSS	=1/C3	1	=1/D3	
EC	=1/D3	=1/D4	1	

Рис. 2. Попарное сравнение по показателю стоимости

После выполнения всех попарных сравнений матрицу необходимо нормализовать. Это выполняется путем суммирования чисел в каждом столбце и последующего деления каждого элемента столбца на полученную для данного столбца сумму. Результаты данной операции представлены в ячейках B12..D14 на рис. 3. Следующий шаг состоит в вычислении балла для каждого продавца по критерию общей стоимости. Эти значения показаны на рис. 3 в столбце Е. Видно, что наивысший средний балл по данному критерию имеет поставщик ЕС

	A	B	C	D	E
2					
3		RTC	PSS	EC	
4	RTC		1	4	0,5
5	PSS		0,25	1	0,142857
6	EC		2	7	1
7					
8	Сумма	3 25	12	1 642857	
9					
10	НОРМАЛИЗАЦИЯ				
11		RTC	PSS	EC	Среднее
12	RTC	0,308	0,333	0,304	0,315
13	PSS	0,077	0,083	0,087	0,082
14	EC	0,615	0,583	0,609	0,602
7					
8	Сумма =СУММ(В4..В6) =СУММ(С4..С6) =СУММ(Д4..Д6)				
9					
10	НОРМ.				
11		RTC	PSS	EC	Среднее
12	RTC	=B4/B\$8	=C4/C\$8	=D4/D\$8	=СРЗНАЧ(В12:D12)
13	PSS	=B5/B\$8	=C5/C\$8	=D5/D\$8	=СРЗНАЧ(В13:D13)
14	EC	=B6/B\$8	=C6/C\$8	=D6/D\$8	=СРЗНАЧ(В14:D14)

Рис. 3. Нормализованная матрица для критерия общей стоимости

Завершив нормализацию матрицы, необходимо вычислить коэффициент согласованности и проверить его значение. Цель этой операции состоит в том, чтобы убедиться в согласованности задания предпочтений в исходной таблице. Например, если по критерию общей стоимости задана явная предпочтительность поставщика 1 перед поставщиком 2 и умеренная предпочтительность поставщика 2 по сравнению с поставщиком 3, то при сравнении поставщиков 1 и 3 задание одинаковой предпочтительности приведет к несогласованности, еще большая несогласованность возникнет при указании, что 3 предпочтительней 1. Вычисление коэффициента согласованности состоит из трех этапов.

1. Вычисляется мера согласованности для каждого поставщика.
2. Определяется индекс согласованности ИС.
3. Вычисляется коэффициент согласованности как отношение ИС/ИР, где ИР — индекс рандомизации.

Для вычисления меры согласованности можно воспользоваться функцией умножения матриц Excel МУМНОЖ. Как показано на рис. 4, для поставщика 1 (RTC) средний рейтинг каждого поставщика (ячейки E12:E14) умножается на соответствующее количество баллов в первой строке (ячейки B4:D4), эти произведения суммируются, и сумма делится на средний рейтинг первого поставщика (ячейка E12). Аналогичные вычисления осуществляются для 2 и 3 поставщика. В идеальном случае меры согласованности должны быть равны числу возможных альтернативных решений (в нашем случае имеется 3 решения, т.е. 3 поставщика). Для вычисления индекса согласованности определяется средняя мера согласованности всех трех поставщиков, из нее вычитается количество возможных вариантов решения  $n$  и результат делится на  $n-1$ . Индекс согласованности ИС показан на рис. 4 в ячейке F16, его значение равно 0,001. Последний этап определения коэффициента согласованности заключается в делении ИС на индекс раномизации ИР, значения которого для различных значений  $n$  вычисляются в методе МАИ специальным образом и приведены в таблице ниже.

<b><i>n</i></b>	<b>Индекс рандомизации</b>
2	0,00
3	0,58
4	0,90
5	1,12
6	1,24
7	1,32
8	1,41
9	1,45
10	1,51

Коэффициент согласованности записан в ячейке F20 и равен 0,002.

	A	B	C	D	E	F
2						
3		RTC	PSS	EC		
4	RTC	1	0,5	6		
5	PSS	0,25	1	8		
6	EC	2	7	1		
7						
8	Сумма	3,25	12	15	042857	
9						
10	<b>НОРМАЛИЗАЦИЯ</b>					
11		RTC	PSS	EC	Среднее	Мера согласованности
12	RTC	0,306	0,333	0,304	0,315	3 0019
13	PSS	0,077	0,083	0,087	0,082	3 000
14	EC	0,615	0,583	0,609	0,602	3 004
15						
16	ИС =					0,001
17						
18	ИР =					0,58
19						
20					Коэф. согласованности =	0,002
	E		F			
11	Среднее		Мера согласованности			
12	=СРЗНАЧ(В12:D12)		=МУМНОЖ(В4 D4,\$E\$12 \$E\$14)/E12			
13	=СРЗНАЧ(В13:D13)		=МУМНОЖ(В5 D5,\$E\$12:\$E\$14)/E13			
14	=СРЗНАЧ(В14:D14)		=МУМНОЖ(В6 D6,\$E\$12 \$E\$14)/E14			
15						
16	ИС =		=((СРЗНАЧ(F12:F14) - 3)/2			
17						
18	ИР =		0,58			
19						
20	Коэф. согласованности		=F16/F18			

Рис. 4. Коэффициент согласованности для критерия общей стоимости

	A	B	C	D	E	F	G
2							
3		RTC	PSS	EC			
4	RTC	1	0,5	6			
5	PSS	2	1	8			
6	EC	0,166667	0,125	1			
7							
8	Сумма	3,166667	1,625	15			
9							
10	<b>НОРМАЛИЗАЦИЯ</b>						
11		RTC	PSS	EC	Среднее	Мера согласованности	
12	RTC	0,316	0,308	0,400	0,341	3,0200	
13	PSS	0,632	0,615	0,533	0,593	3,0315	
14	EC	0,053	0,077	0,067	0,065	3,0034	
15							
16	ИС =					0,009	
17							
18	ИР =					0,58	
19							
20					Коэф. согласованности	0,016	

Рис. 5. Коэффициент согласованности для критерия обслуживания

	A	B	C	D	E	F	G
2							
3		RTC	PSS	EC			
4	RTC	1	1	5			
5	PSS	1	1	5			
6	EC	0,2	0,2	1			
7							
8	Сумма	2,2	2,2	11			
9							
10	<b>НОРМАЛИЗАЦИЯ</b>						
11		RTC	PSS	EC	Среднее	Мера согласованности	
12	RTC	0,455	0,455	0,455	0,455	3 0000	
13	PSS	0,455	0,455	0,455	0,455	3,000	
14	EC	0,091	0,091	0,091	0,091	3 000	
15							
16					ИС =	0,000	
17							
18					ИР =	0,58	
19							
20					Коэф согласованности =	0,000	

Рис. 6. Коэффициент согласованности для критерия сложности

	A	B	C	D	E	F	G
2							
3		RTC	PSS	EC			
4	RTC	1	0,25	3			
5	PSS	4	1	6			
6	EC	0,333333	0,166667	1			
7							
8	Сумма	5 333333	1 416667	10			
9							
10	<b>НОРМАЛИЗАЦИЯ</b>						
11		RTC	PSS	EC	Среднее	Мера согласованности	
12	RTC	0,188	0,176	0,300	0,221	3,0399	
13	PSS	0,750	0,706	0,600	0,685	3,1094	
14	EC	0,063	0,118	0,100	0,093	3,0131	
15							
16					ИС =	0,027	
17							
18					ИР =	0,58	
19							
20					Коэф согласованности =	0,047	

Рис. 7. Коэффициент согласованности для критерия адаптации

В случае абсолютной согласованности предпочтений мера согласованности будет равна 3, следовательно, ИС будут равны нулю, и коэффициент согласованности также будет равен нулю. Если этот коэффициент слишком велик (больше 0,10 по оценке Саати), значит, менеджер был недостаточно последователен в своих оценках, поэтому следует вернуться назад и пересмотреть результаты попарных сравнений (в большинстве случаев обнаруживается элементарная ошибка, и коэффициент согласованности сигнализирует о ее наличии).

Теперь необходимо проделать то же самое для остальных трех критериев. Для этого следует трижды скопировать рабочий лист Стоимость, создав тем самым три новых рабочих листа (назовем их Обслуживание, Сложность и Адаптация), а затем надо просто изменить параметры попарных сравнений. Результаты этих действий показаны на рис. 5-7. Во всех случаях значения коэффициента согласованности заключены в пределах от 0 до 0,047, это означает, что Марк был достаточно последователен в своих оценках. Кроме того, можно заметить, что компания PSS оказалась лучшей по критерию обслуживания, RTC и PSS — лучшие по критерию сложности, aPSS — лучшая по критерию адаптации.

На этом первый этап работы заканчивается. На втором этапе осуществляются аналогичные попарные сравнения для определения весов критериев. Процесс аналогичен предыдущему в том, что опять производятся сравнения, однако теперь сравниваются не поставщики, как это было на этапе 1, а критерии. Эти действия выполняются на рабочем листе Веса, показанном на рис. 8.

	Стоимость	Обслуживание	Сложность	Адаптация		
1 Стоимость	1	6	0,5	3		
2 Обслуживание	0,1666667	1	0,125	0,3333333		
3 Сложность	2	8	1	5		
4 Адаптация	0,3333333	3	0,2	1		
5 Сумма	3 500	18,000	1,825	9,333		
6						
7 НОРМАЛИЗАЦИЯ						
	Стоимость	Обслуживание	Сложность	Адаптация	Среднее	Мера согласованности
8 Стоимость	0,286	0,333	0,274	0,321	0,304	4,0713
9 Обслуживание	0,048	0,056	0,068	0,036	0,052	4,0108
10 Сложность	0,571	0,444	0,548	0,536	0,525	4,0869
11 Адаптация	0,095	0,167	0,110	0,107	0,120	4,0229
12					ИС =	0,016
13					ИР =	0,9
14					Коэф. согласованности =	0,018
15						
16						
17						
18						
19						
20						

C	D	E	F	G
1				
2				
3 Обслуживание	Сложность	Адаптация		
4 6	=1/2	3		
5 1	=1/8	=1/3		
6 =1/D5	1	5		
7 =1/E6	=1/E6	1		
8 =СУММ(С4:С7)	=СУММ(Д4:Д7)	=СУММ(Е4:Е7)		
9				
10				
11 Обслуживание	Сложность	Адаптация	Среднее	Мера согласованности
12 =C4/C\$8	=D4/D\$8	=E4/E\$8	=СРЗНАЧ(В12:Е12)	=МУМНОЖ(В4:Е4:\$F\$12:\$F\$15)/F12
13 =C5/C\$8	=D5/D\$8	=E5/E\$8	=СРЗНАЧ(В13:Е13)	=МУМНОЖ(В5:Е5:\$F\$12:\$F\$15)/F13
14 =C6/C\$8	=D6/D\$8	=E6/E\$8	=СРЗНАЧ(В14:Е14)	=МУМНОЖ(В6:Е6:\$F\$12:\$F\$15)/F14
15 =C7/C\$8	=D7/D\$8	=E7/E\$8	=СРЗНАЧ(В15:Е15)	=МУМНОЖ(В7:Е7:\$F\$12:\$F\$15)/F15
16			ИС =	=((СРЗНАЧ(Г12:Г15)-4)/3
17			ИР =	0,9
18			согласованности =	=G18/G1B
19				
20				

Рис. 8. Коэффициент согласованности для весов критерииев

Оказалось, что показатель сложности и надежности математических алгоритмов имеет наибольший вес (52,5% в ячейке F14), за ним идет стоимость (30,4% в ячейке F12). Приятно, что меры согласованности оказались близки к 4, поэтому индекс согласованности и коэффициент согласованности близки к нулю.

Последний шаг состоит в вычислении взвешенных средних оценок для каждого варианта решения и применении полученных результатов для принятия решения о том, у какого поставщика будет куплено новое программное обеспечение. Заключительные вычисления сделаны на листе Сравнение в той же самой рабочей книге ПО.XLS(рис. 9). На основании полученных результатов можно сделать вывод, что компания RTC (показатель

0,378 в ячейке C8) несколько превосходит компанию PSS (0,376 в ячейке D8), а компания EC от них заметно отстала.

	A	B	C	D	E
1			Рейтинги		
2	Критерии	Веса	RTC	PSS	EC
3	Стоимость	0,304	0,315	0,082	0,602
4	Обслуживание	0,052	0,341	0,593	0,065
5	Сложность	0,525	0,455	0,455	0,091
6	Адаптация	0,120	0,221	0,685	0,093
7					
8	Взвешенные ср рейтинги		0,378	0,376	0,245

	B	C	D	E
2	Веса	RTC	PSS	EC
3	=Beca!F12 =Стоимость!E12		=Стоимость!E13	=Стоимость!E14
4	=Beca!F13 =Обслуживание!E12		=Обслуживание!E13	=Обслуживание!E14
5	=Beca!F14 =Сложность!E12		=Сложность!E13	=Сложность!E14
6	=Beca!F15 =Адаптация!E12		=Адаптация!E13	=Адаптация!E14
7				
8		=СУММПРОИЗВ(\$E\$3:\$E\$8;C3:C8)	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$B\$8;D3:D8)	=СУММПРОИЗВ(\$E\$3:\$E\$8)

Рис. 9. Взвешенное среднее рейтингов с использованием весов

## Варианты заданий 1

### Задача 1

Нужно произвести выбор секретаря из девушек, подавших резюме. Отбор девушек проходит по пяти критериям:

1. Знание делопроизводства.
2. Внешний вид.
3. Знание английского языка.
4. Знание компьютера.
5. Умение разговаривать по телефону.

Собеседование прошли пять девушек:

1. Ольга
2. Елена
3. Светлана
4. Галина
5. Жанна

После собеседования получились следующие описания девушек:

**1. Ольга.** Приятная внешность. Отличное знание английского языка. Хорошее поведение. Нет навыков работы на компьютере, посредственное общение по телефону.

**2. Елена.** Красивая, приятная внешность, хорошее умение общаться по телефону. Незнание английского языка, нет навыков работы на компьютере, делопроизводство знает весьма плохо.

**3. Светлана.** Очень хорошее знание делопроизводства, хорошие навыки работы на компьютере, достаточно хорошо общается по телефону,

очень исполнительная. Не очень приятная внешность, посредственное знание английского языка.

**4. Галина.** Достаточно хорошо знает делопроизводство, неплохие навыки работы на компьютере, по телефону общается на высоком уровне, достаточно хорошее поведение. Плохое знание английского языка, неприятная внешность.

**5. Жанна.** Приятная внешность, очень хорошее поведение, неплохие навыки работы на компьютере, достаточно хорошее знание английского языка. По телефону общается плохо, не знает делопроизводство.

### **Задача 2**

Джек выбирает университет, в котором бы он хотел получить высшее образование. Он остановился на двух из них: Гарварде и Стэнфорде и определил такие критерии выбора университета: размер стипендии, престиж университета, стоимость жизни и достоинства города, где находится университет.

Стипендия в Гарварде немного выше, чем в Стэнфорде. Престиж обоих университетов примерно одинаков. Стоимость жизни в Гарварде заметно дешевле, но зато достоинства города, где расположен Стэнфорд заметно выше.

Достоинства города, где расположен университет, для Джека немного более важны, чем стоимость жизни в нем. В свою очередь, престиж университета немного важнее, по сравнению с городскими красотами. А вот размер стипендии значит гораздо больше даже по сравнению с престижем.

В какой университет вы посоветеете поступить Джеку? Чему равны средние рейтинги университетов по критерию престижа? Чему равны средние веса критериев?

### **Задача 3**

Необходимо выбрать один из вариантов программного обеспечения (ПО) для создания интернет-магазина. Пусть существуют два варианта такого ПО: А и Б. В качестве критериев отбора ПО принимаются:

1. Стоимость.
2. Сопровождение разработчиками.
3. Пользовательский интерфейс.
4. Предоставляемые функции.

Сопровождение разработчиками (например, бесплатная тех. поддержка, обучение персонала) при выборе ПО оцениваются как заметно более важные по сравнению с характеристиками пользовательского интерфейса. Еще более важным критерием являются предоставляемые ПО возможности (функции). Но основным при принятии решения все же является стоимость.

Предположим, А — это дорогая система с широким набором пользовательских функций, удобным пользовательским интерфейсом, сопровождаемая разработчиками а система Б — простая и недорогая разработка.

Покупка какого ПО будет более предпочтительной в соответствии с указанными критериями?

#### Задача 4

Решив купить автомобиль, человек сузил свой выбор до трех моделей: *Mercedes*, *Mitsubishi*, *Honda*. Факторами, влияющими на его решение, являются: стоимость автомобиля (С), стоимость обслуживания (О), стоимость поездки по городу (Г) и сельской местности (М). Следующая таблица содержит необходимые данные, соответствующие трехгодичному сроку эксплуатации автомобиля.

Модель автомобиля	С (долл.)	О (долл.)	Г (долл.)	М (долл.)
<i>Mercedes</i>	62000	1800	4500	1500
<i>Mitsubishi</i>	35000	1200	2250	750
<i>Honda</i>	40000	600	1125	600

Наиболее существенными критериями при принятии решения являются стоимость автомобиля и стоимость его обслуживания. Поездки по сельской местности совершаются редко сравнительно с поездками по городу.

Используйте указанные стоимости для построения матриц сравнений. Оцените согласованность матриц и определите модель автомобиля, которую следует выбрать.

#### Задача 5

Gert's Sports — быстро развивающаяся сеть спортивных магазинов на Восточном побережье США. Владелец сети Боб Гертц скопил солидный капитал, чтобы открыть новые магазины в районе Чикаго. Для снабжения новых магазинов компании Гертца потребуется расширить склады. За поддержкой он может обратиться к услугам одной из трех финансовых компаний. У каждой из них есть свои преимущества в условиях кредита и обслуживании клиентов Боб оценил рейтинги этих компаний:

Рейтинги по условиям кредита

	Big Bank	Little Bank	US Bucks
Big Bank	1	2	0,143
Little Bank	0,5	1	6
US Bucks	7	0,167	1

Рейтинги по обслуживанию клиентов

	Big Bank	Little Bank	US Bucks
Big Bank	1	0,25	1
Little Bank	4	1	0,5
US Bucks	1	2	1

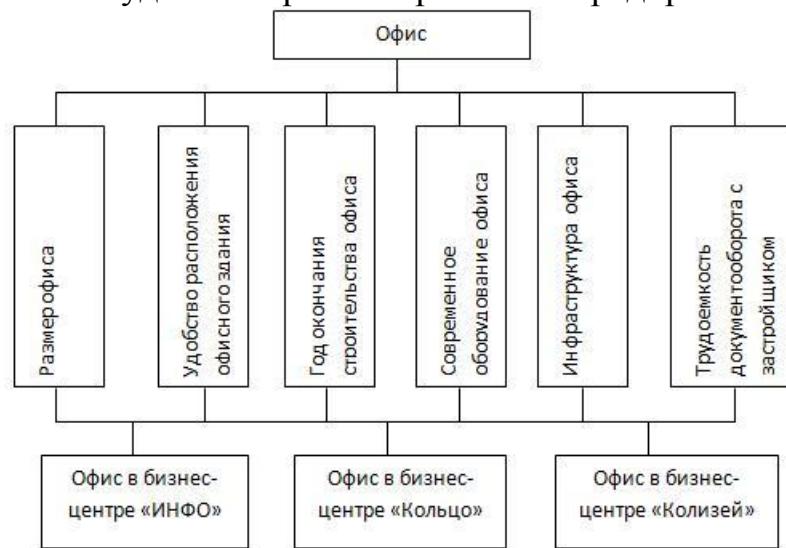
С помощью МАИ определите единственный источник финансирования для компании Гертца. Определите согласованность рейтингов.

### Задача 6

Индивидуальный предприниматель решил купить (или построить по договору со строительной компанией) нежилое помещение (офис), чтобы потом сдавать его в аренду. На рынке предлагаются три альтернативы с приблизительно одинаковой стоимостью (в целях исключения очевидного фактора предпочтения, хотя и не обязательно). У каждой альтернативы есть свои преимущества и недостатки по выделенным предпринимателем критериям:

- размеры офиса (площадь);
- удобство расположения офисного здания;
- год окончания строительства офиса;
- современное оборудование офиса (цифровая телефонная линия, высокоскоростной Интернет и др.);
- инфраструктура офиса (парковка, охрана, пункты питания, фитнеса и т.п.);
- трудоемкость документооборота с застройщиком.

Задача заключается в выборе одного из трех вариантов офиса, который наиболее полно удовлетворяет потребности предпринимателя.



Наиболее важными при оценки недвижимости предприниматель полагает удобство расположения офисного здание и инфраструктуру офиса. Менее важными он считает размеры офиса и его оборудование. Однако размеры офиса заметно важнее при принятии решения, по сравнению с трудоемкостью документооборота и годом окончания строительства офиса.

При парной оценке трех вариантов по каждому из критериев были получены следующие матрицы сравнения

Размер офиса

	ИН-ФО	Кольцо	Колизей
ИНФО	1	2	1/3
Кольцо	1/2	1	1/5
Колизей	3	5	1

Удобство расположения

	ИН-ФО	Кольцо	Колизей
ИНФО	1	1	2
Кольцо	1	1	3
Колизей	1/2	1/3	1

Год окончания строительства

	ИН-ФО	Кольцо	Колизей
ИНФО	1	1/5	1/7
Кольцо	5	1	1/3
Колизей	7	3	1

Современное оборудование офиса

	ИН-ФО	Кольцо	Колизей
ИНФО	1	4	5
Кольцо	1/4	1	5
Колизей	1/5	1/5	1

Инфраструктура офиса

	ИН-ФО	Кольцо	Колизей
ИНФО	1	1/2	3
Кольцо	2	1	3
Колизей	1/3	1/3	1

Трудоемкость документооборота

	ИН-ФО	Кольцо	Колизей
ИНФО	1	5	3
Кольцо	1/5	1	3
Колизей	1/3	1/3	1

Являются ли полученные оценки согласованными?

### Задача 7

Gert's Sports — быстро развивающаяся сеть спортивных магазинов на Восточном побережье США. Владелец сети Боб Гертц скопил солидный капитал, чтобы открыть новые магазины в районе Чикаго. Он может построить магазины трех типов: супермаркеты, торговые центры и Интернет-магазин. Постройка одного супермаркета стоит \$3,5 млн., в нем работает 150 человек, постройка торгового центра стоит \$1,7 млн., в нем работает 65 человек, открытие интернет-магазина стоит \$1 млн. и в нем занято 50 человек. Ожидаемая прибыль для супермаркета, торгового магазина и интернет-магазина составляет 1, 0,5 и 1 млн. долл. соответственно.

Гертц может вложить в открытие магазинов до \$10 млн. При этом он хочет добиться максимального дохода с учетом своих предпочтений относительно количества занятых сотрудников. Оцените ситуацию с помощью МАИ. Предполагается, что учитываются два критерия — доход и количество занятых. Рейтинги по обоим критериям, данные Бобом, приведены в таблицах ниже.

Количество магазинов каждого типа ограничено демографическими факторами региона: интернет-магазинов может быть не более одного, супермаркетов — не более трех, а торговых центров — не более семи.

#### Рейтинг доходности

	Супер- маркет	Торговый центр	Интернет- магазин
Супермаркет	1	0,25	0,142857
Торговый центр	4	1	0,2
Интернет- магазин	7	5	1

#### Рейтинг по количеству занятых

	Супер- маркет	Торговый центр	Интернет- магазин
Супермаркет	1	0,25	0,3333
Торговый центр	4	1	0,5
Интернет- магазин	3	2	1

На основании данных рейтингов найдите наилучшие решения по строительству магазинов. Оцените согласованность рейтингов.

#### Задача 8

Gert's Sports — быстро развивающаяся сеть спортивных магазинов на Восточном побережье США. Владелец сети Боб Гертц ищет поставщиков хоккейного снаряжения. Он ожидает резкого повышения уровня продаж в связи с необычно холодной зимой. Он пришел к выводу, что при выборе поставщика нужно исходить из его способности обеспечить своевременную доставку заказа. Рейтинги четырех возможных поставщиков Боб оценил так

	Sticks Supply	Puck's House	Rinks Inc.	Goal Tenders
Sticks Supply	1	3	1	0,5
Puck's House	0,33333	1	0,5	0,25
Rinks Inc.	1	2	1	1
Goal Tenders	2	4	1	1

Методом МАИ выберите двух лучших поставщиков. Был ли Боб последователен при составлении рейтингов?

#### Задача 9

Отдел кадров фирмы сузил поиск будущего сотрудника до трех кандидатур: Стива (S), Джейн (J) и Майлса (M). Конечный отбор основан на трех критериях: собеседование (C), опыт работы (O) и рекомендации (P).

Отдел кадров полагает, что наиболее важным критерием при приеме на работу являются рекомендации с предыдущих мест работы. Немного уступают ему по важности результаты собеседования с претендентом. Опыт работы по сравнению с рекомендациями имеет существенно меньшую важность.

После проведенного собеседования с тремя претендентами, сбора данных, относящихся к опыту их работы и рекомендациям, построены матрицы  $A_C$ ,  $A_O$  и  $A_P$ . Какого из трех кандидатов следует принять на работу? Оцените согласованность данных.

$$A_C = J \begin{pmatrix} S & J & M \\ 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 5 & 1 \end{pmatrix}, A_O = J \begin{pmatrix} S & J & M \\ 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_P = J \begin{pmatrix} S & J & M \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Задача 10

Помогите Марлен Уитт выбрать работу после окончания колледжа. Она получила три предложения от работодателей в Бакерсфилде, Фресно и Ойлдейле (все — города штата Калифорния) и определила три важных для нее критерия выбора: заработка плата, стабильность работы и привлекательность города. Соответствующие данные представлены в рабочей книге Работа.XLS.

- а) Чему равны средние рейтинги по критерию зарплаты?
- б) Согласованы ли заданные Марлен оценки? Как можно изменить попарные оценки, чтобы согласовать их?
- в) Чему равны средние веса критериев?
- г) Какую работу вы посоветуете выбрать?

### Задача 11

Кевин и Джун (*К* и *Д*) покупают новый дом. Рассматриваются три варианта — А, Б и С. Кевин и Джун согласовали два критерия для выбора дома: площадь зеленой лужайки (Л) и близость к месту работы (Б), а также разработали матрицы сравнений, приведенные ниже. Необходимо оценить три дома в порядке их приоритета и вычислить коэффициент согласованности каждой матрицы.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{A} = \frac{\mathbf{K}}{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_K = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \\
 & \mathbf{A}_{KL} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{KB} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\
 & \mathbf{A}_{DL} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{DB} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

### Задача 12

Помогите Гордону Шамвею выбрать новый автомобиль. Он остановил свой выбор на трех моделях, Buick Regal, Toyota Camry и Honda Accord, и указал три основных для него критерия цена, надежность (по отзывам покупателей), скорость. Соответствующие данные представлены в рабочей книге Авто.XLS.

- а) Чему равны средние рейтинги по критерию скорости?
- б) Чему равны средние веса критериев?
- в) Был ли Чарльз последователен при задании весов?
- г) Какой автомобиль вы рекомендуете купить?

### Задание 2

Предлагается выбрать покупку с помощью

а) рейтинга приоритетов (пример — см. Компьютер.XLS и Плер.XLS);

б) с помощью МАИ. Для этого необходимо:

1. Сформулировать критерии выбора.

2. Определить и обосновать рейтинги альтернатив по каждому критерию. Оценить их согласованность.

3. Определить рейтинг критериев. Оценить их согласованность.

4. Выбрать наиболее предпочтительное решение.

Количество критериев должно быть не меньше трех. Количество вариантов решений (товаров) — не меньше четырех (указать марки). Схема решения аналогична заданию 1.

Примеры товаров для выбора:

1. Стиральная машина
2. Телевизор
3. mp3-плеер
4. Мобильный телефон
5. Автомобиль

6. Кухонная плита
7. Кухонный комбайн
8. Ноутбук
9. Холодильник
10. Микроволновая печь
11. Цифровой фотоаппарат
12. DVD-плеер
13. Лазерный принтер
14. Сканер
15. Монитор

## **2. Методические указания по выполнению лабораторной работы**

Порядок выполнения работы:

- 1) Задание 1: определение наилучшей альтернативы с помощью метода анализа иерархий (МАИ)
    1. Изучение примера.
    2. Построение иерархии «цели—критерии—альтернативы».
    3. Попарное сравнение критериев, перевод результатов сравнений в численную форму. Нормализация и проверка согласованности суждений с помощью пакета MS Excel.
    4. Попарное сравнение оценок альтернатив по каждому из критериев. Нормализация и проверка согласованности суждений с помощью пакета MS Excel.
    5. Вычисление вектора приоритетов по каждому из критериев.
    6. Определение наилучшей альтернативы.
  - 2) Задание 2: выбор покупки
    1. выбор покупки с помощью рейтинга приоритетов.
    2. выбор покупки с помощью МАИ.
  - 3) Составление отчёта по лабораторной работе, в котором представляется:
    1. формулировка индивидуального задания;
    2. иерархия «цели—критерии—альтернативы»;
    3. снимки экрана монитора, содержащие матрицы сравнений критериев и альтернатив, вычисление векторов приоритетов, проверку согласованности и определение наилучшей альтернативы;
    6. Результаты расчета
- Заключение.
- Библиографический список.
- Приложение.
- Приведенный состав и содержание пояснительной записки является примерным. В процессе выполнения в соответствии с конкретным заданием на курсовую работу он может быть изменен.
- Титульный лист* пояснительной записки выполняется в соответствии с принятыми в ТулГУ требованиями.

*Задание* на курсовую работу приводится в соответствии с определенным преподавателем вариантом из Приложения 1 настоящих методических указаний.

*Содержание* представляет собой перечень и рубрикацию разделов, глав и пунктов пояснительной записки, их наименование и номера страниц.

В *введении* в пояснительной записке указываются цель и задачи данной курсовой работы, их место в общем процессе создания нового образца.

В основных разделах пояснительной записки представляется последовательное решение поставленных задач. В конце каждого раздела приводятся выводы.

В *заключении* приводятся основные итоги выполненной работы.

*Библиографический список* содержит все источники информации, использованные при выполнении курсовой работы, на которые в тексте пояснительной записки имеются ссылки.

В *Приложении* приводится листинг программы.

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3**

### **Теория игр и принятие решений в условиях неопределенности**

**Цель:** Приобрести навыки поиска рациональных решений в условиях неопределенности вызванной конфликтом интересов.

**Порядок выполнения работы:**

1) *Задание 1: решение игры с заданной матрицей платежей*

1. Изучение теории.
2. Определение по заданной матрице платежей нижней и верхней цены игры. Существует ли в игре равновесие в чистых стратегиях?
3. Сведение задачи теории матричных игр к задаче линейного программирования (ЛП)
4. Решение задачи ЛП с помощью пакета MS Excel (определение цены игры и оптимальной стратегии для каждого из игроков).

2) *Задание 2: решение игры*

6. Изучение примеров.
7. Построение матрицы платежей.
8. Сведение задачи теории матричных игр к задаче ЛП
9. Решение задачи ЛП с помощью пакета MS Excel и ответы на дополнительные вопросы задания.

3) Составление отчёта по лабораторной работе, в котором для каждого задания представляется:

- формулировка задания;
- снимки экрана монитора, содержащие матрицу игры, формулировку задачи ЛП, найденное решение (цену игры и оптимальные стратегии игроков) и ответы на дополнительные вопросы.

## Теория

В теории игр рассматриваются ситуации, связанные с принятием решений, в которых два или более разумных противника имеют конфликтующие цели. Само слово «игра» применяется для обозначения некоторого набора правил и соглашений, составляющих данный вид игры, например: футбол, карточная игра, шахматы. Эти ситуации принятия решений отличаются от рассмотренных ранее, где природа, хотя и могла находиться в различных состояниях, но не преследовала каких-либо целей и, следовательно, не рассматривалась в роли соперника.

В игре заинтересованные стороны называются *игроками*, каждый из которых имеет некоторое множество вариантов выбора (не меньше двух, иначе он фактически не участвует в игре, поскольку заранее известно, что он предпримет). В экономике модель поведения лиц в виде игры возникает, например, при попытке нескольких фирм завоевать наиболее выгодное место на конкурентном рынке, или, например, при желании нескольких лиц (кампаний) разделить некоторое количество продукта (ресурса, финансовых средств) между собой так, чтобы каждому досталось как можно больше. Игроками в конфликтных экономических ситуациях, моделируемых в виде игры, являются производственные и непроизводственные фирмы, банки, отдельные люди и другие экономические агенты. В военных приложениях модель игры используется, например, для наилучшего выбора средств (из имеющихся или потенциально возможных) поражения военных целей противника или защиты от его нападения.

Для игр характерна неопределенность результата. Причины или источники неопределенности относятся к трем группам:

- 1) Комбинаторные источники (шахматы);
- 2) Случайные факторы (игра в орлянку, кости, карточные игры, где случаен расклад);
- 3) Неопределенность имеет стратегическое происхождение: игрок не знает, какого рода образа действий придерживается его противник. Здесь неопределенность исходит от другого лица.

Далее мы будем рассматривать игровые модели конфликтов, в которых участвуют два противника, каждый из которых имеет конечное число вариантов выбора решений. С каждой парой решений связан платеж, который один из игроков выплачивает другому (т.е. выигрыш одного игрока равен проигрышу другого). Такие игры принято называть *конечными играми двух лиц с нулевой суммой*.

В игре принимают участие два игрока: А и В. В распоряжении каждого игрока имеется конечное множество вариантов выбора — *стратегий*. Пусть  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  — множество стратегий игрока А,  $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  — множество стратегий игрока В. С каждой парой стратегий связан платеж, который один из игроков выплачивает другому. Т.е., когда игрок А выбирает страте-

гию  $a_i$  (свою  $i$ -ю стратегию), а игрок В — стратегию  $b_j$ , то результатом такого выбора становится платеж  $H(a_i, b_j)$ . Поскольку стратегий конечное число, то платежи  $H(a_i, b_j)$  образуют матрицу размерности  $n \times m$ , называемую *матрицей платежей* (или *матрицей игры*). Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока А, а столбцы — стратегиям игрока В.

Пусть два игрока А и В играют в игру, основанную на подбрасывании монеты. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают герб (Г) или решку (Р). Если результаты двух подбрасываний монеты совпадают (т.е. ГГ или РР), то игрок А получает один доллар от игрока В. Иначе игрок А платит один доллар игроку В.

Для каждого из игроков возможны 2 варианта результатов: выпадения герба или решки, следовательно матрица платежей имеет размерность  $2 \times 2$ .

	$B_G$	$B_P$
$A_G$		
$A_P$		

Если результаты двух подбрасываний (т.е. подбрасываний монеты игроками А и В) совпадают, то платеж в 1 доллар получает игрок А. Будем строить матрицу игры, с точки зрения игрока А, т.е. его выигрыши оценивать как положительные, а проигрыши — как отрицательные (с точки зрения В все будет наоборот и мы вполне могли бы построить матрицы платежей, ориентируясь на его точку зрения).

	$B_G$	$B_P$
$A_G$	1	
$A_P$		1

Если результаты подбрасывания различаются, то доллар получает В, значит платеж А равняется  $-1$  доллар. В игре с нулевой суммой выигрыш игрока В равносителен проигрышу игрока А и равен поэтому  $-H(a_i, b_j)$ .

	$B_G$	$B_P$
$A_G$	1	-1
$A_P$	-1	1

Т.о., мы построили матрицу игры, описывающую заданную ситуацию. Предполагается, что матрица игры обоим игрокам известна.

Исход игры зависит от поведения обоих игроков, которое основывается на выборе правильных стратегий игры, т.е. таких вариантов, при которых так платеж данному игроку будет наибольшим. Однако, в отличие от

методов оптимизации, в теории игр игрок не может просто стремиться к максимуму, он вынужден считаться с действиями соперника. Существенно, что ни один из партнеров не знает, какую стратегию применит его противник. Таким образом, имеет место ситуация полной неопределенности, при которой теория вероятности также не может помочь игрокам в выборе решения.

Рассмотрим процесс принятия решений обеими сторонами, предполагая, что оба игрока будут действовать рационально. Если игрок А не знает, как поступит его противник, то, действуя наиболее целесообразно и не желая рисковать, он выберет такую стратегию, которая гарантирует ему наибольший из наименьших выигрышей при любой стратегии противника.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
A <sub>1</sub>	2	-3	4
A <sub>2</sub>	-3	4	-5
A <sub>3</sub>	4	-5	6

Т.е., А предполагает, что В умен и будет вести себя так, чтобы доставить противнику наибольшие неприятности. Тогда, при выборе 1-й стратегии, А может рассчитывать лишь на худший для себя результат -3. При выборе 2-й и 3-й стратегий он может рассчитывать на -5. Из всех возможных стратегий целесообразнее выбрать ту, что принесет максимальный возможный доход (минимальные возможные убытки, как в нашем случае). В нашем случае это стратегия 1.

Принято говорить, что при таком образе действий игрок А руководствуется *принципом максиминного выигрыша*. Этот выигрыш определяется формулой

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина  $\alpha$  называется *нижней ценой игры, максиминным выигрышем*, или сокращенно *максимином*. Это тот гарантированный минимум, который игрок А может себе обеспечить, придерживаясь наиболее осторожной стратегии.

Очевидно, аналогичное рассуждение можно провести и за игрока В. Так как он заинтересован в том, чтобы обратить выигрыш А в минимум, он должен просмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша при этой стратегии. Поэтому внизу матрицы мы выпишем максимальные значения по каждому столбцу

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Все эти максимумы хороши для А, но крайне неприятны для В. Поскольку противник также учитывает нашу разумность, то выбирает из этих вариантов наименьший

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

— больше этой суммы игрок В точно не потеряет. Величина  $\beta$  называется *верхней ценой игры*, иначе — «минимаксом».

Принцип осторожности, который определяет выбор партнерами стратегий, соответствующих максиминному выигрышу или минимаксному проигрышу, часто называют принципом минимакса, а стратегии, вытекающие из этого принципа, — *минимаксными стратегиями*. Можно доказать, что всегда  $\alpha \leq \beta$ ,  $\square$ чем и объясняются названия "нижняя цена" и "верхняя цена".

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	$\alpha_i$
A <sub>1</sub>	2	-3	4	-3
A <sub>2</sub>	-3	4	-5	-5
A <sub>3</sub>	4	-5	6	-5
$\beta_j$	4	4	6	

Матрица игры в общем виде

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	...	B <sub>m</sub>	$\alpha_i$
A <sub>1</sub>	a <sub>11</sub>	a <sub>12</sub>	...	a <sub>1m</sub>	$\alpha_1$
A <sub>2</sub>	a <sub>21</sub>	a <sub>22</sub>	...	a <sub>2m</sub>	$\alpha_2$
...	...	...	...	...	...
A <sub>n</sub>	a <sub>n1</sub>	a <sub>n2</sub>	...	a <sub>nm</sub>	$\alpha_m$
$\beta_j$	$\beta_1$	$\beta_2$	...	$\beta_n$	

Нижняя цена игры  $\alpha = -3$ ; верхняя цена игры  $\beta = 4$ . Наша максиминная стратегия есть A<sub>1</sub>; применяя ее систематически, мы можем твердо рассчитывать выиграть не менее -3 (проиграть не более 3). Минимаксная стратегия противника есть любая из стратегий B<sub>1</sub> и B<sub>2</sub>, применяя их систематически, он, во всяком случае, может гарантировать, что проиграет не более 4. Если мы отступим от своей максиминной стратегии (например, выберем стратегию A<sub>2</sub>), противник может нас «наказать» за это, применив стратегию B<sub>3</sub> и сведя наш выигрыш к -5. Но если противник выберет стратегию B<sub>3</sub>, то мы в свою очередь можем выбрать A<sub>3</sub> и он проиграет 6 и т.д. Таким образом, положение, при котором оба игрока пользуются своими минимаксными стратегиями, является неустойчивым и может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии противной стороны.

Однако существуют некоторые игры, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Это те игры, для которых нижняя цена равна верхней:

$$\alpha = \beta$$

Если нижняя цена игры равна верхней, то их общее значение называется *ценой игры*, и обозначают  $\gamma$ .

Например, в игре, матрица которой приведена ниже, верхняя и нижняя цены игры оказываются равными:  $\alpha = \beta = \gamma = 0.6$ .

Элемент 0,6, выделенный в платежной матрице, является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. В геометрии точку на поверхности, обладающую аналогичным свойством (одновременный минимум по одной координате и максимум по другой), называют *седловой точкой*. По аналогии этот термин применяется и в теории игр. Элемент матрицы, обладающий этим свойством, называется седловой точкой матрицы, а про игру говорят, что она имеет *седловую точку*.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	a <sub>i</sub>
A <sub>1</sub>	0,4	0,5	0,7	0,3	0,3
A <sub>2</sub>	0,8	0,4	0,3	0,7	0,3
A <sub>3</sub>	0,7	<b>0,6</b>	0,8	0,9	<b>0,6</b>
A <sub>4</sub>	0,7	0,2	0,4	0,6	0,2
β <sub>j</sub>	0,8	<b>0,6</b>	0,8	0,9	

Для игр с седловой точкой решение игры обладает следующим замечательным свойством. Если один из игроков (например А) придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок (В) будет любым способом отклоняться от своей оптимальной стратегии, то для игрока, допустившего отклонение, это никогда не может оказаться выгодным. Это утверждение легко проверить на примере рассматриваемой игры с седловой точкой.

В этом случае наличие у любого игрока сведений о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока: если он не хочет действовать против своих же интересов, он должен придерживаться своей оптимальной стратегии. Т.е. пара оптимальных стратегий в игре с седловой точкой является как бы «положением равновесия».

Анализируя матрицу игры, мы пришли к заключению, что если каждому игроку предоставлен выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь этой стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α. Возникает естественный вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α, если применять не одну-единственную «чистую» стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий? Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, в теории игр называются *смешанными стратегиями*.

Для матричной игры  $n \times m$  обозначим через  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  — смешанную стратегию игрока А, где  $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Через  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$  обозначим смешанную стратегию игрока В, где

$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_m \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^m q_j = 1$ . Здесь  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — вероятности использования игроком А в смешанной стратегии своих чистых стратегий  $a_i$ , и  $q_1, q_2, \dots, q_m$  — вероятности использования игроком В в смешанной стратегии своих чистых стратегий  $b_j$ .

Математическое ожидание выигрыша игрока А запишется в виде

$$M(P, Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j.$$

Смешанная стратегия, которая гарантирует игроку наибольший возможный средний выигрыш (или наименьший возможный средний проигрыш), называется его *оптимальной смешанной стратегией*. Пусть  $P^*$  — смешанная стратегия игрока А,  $Q^*$  — смешанная стратегия игрока В. Пара смешанных стратегий  $(P^*, Q^*)$ , при которой  $M(P, Q^*) \geq M(P^*, Q^*) \geq M(P^*, Q)$ , называют *седловой точкой игры*, а математическое ожидание выигрыша  $\gamma = M(P^*, Q^*)$  — *ценой игры*, причем всегда  $\gamma \leq M(P, Q) \leq M(P^*, Q^*)$ .

Общим методом нахождения решения игры любой конечной размерности является ее сведение к задаче линейного программирования. Из основного положения теории игр следует, что при использовании смешанных стратегий такое оптимальное решение всегда существует и цена игры  $\gamma$  находится между верхним и нижним значениями игры ( $\gamma \leq M(P, Q) \leq M(P^*, Q^*)$ ).

Допустим, что смешанная стратегия игрока А складывается из стратегий  $a_1, a_2, \dots, a_n$  с вероятностями  $p_i$  (некоторые из значений вероятностей могут быть равны нулю). Оптимальная смешанная стратегия игрока В складывается из стратегий  $b_1, b_2, \dots, b_m$  с вероятностями  $q_j$ . Условия игры определяются платежной матрицей  $H(a_i, b_j)$  с элементами  $a_{ij} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ . Если игрок А применяет оптимальную смешанную стратегию, а игрок В — чистую стратегию  $b_j$ , то средний выигрыш игрока А (математическое ожидание выигрыша) составит

$$p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \dots + p_n a_{nj}.$$

Игрок А стремится к тому, чтобы при любой стратегии игрока В его выигрыш был не меньше, чем цена игры  $\gamma$ , а сама цена игры была максимальной. Такое поведение игрока А описывается следующей задачей линейного программирования:

$\gamma \rightarrow \max$  (игрок А стремится максимизировать свой выигрыш)

$$p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \dots + p_n a_{n1} \geq \gamma,$$

$$p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \dots + p_n a_{n2} \geq \gamma,$$

...

$$p_1 a_{1m} + p_2 a_{2m} + \dots + p_n a_{nm} \geq \gamma,$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

$$p_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

Используя обозначения  $x_i = p_i/\gamma$  и соотношение  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ , получим  $\gamma = 1/(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ . Отсюда

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &\rightarrow \min \\ a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n &\geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n &\geq 1, \\ &\dots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{nm}x_n &\geq 1, \\ x_i &\geq 0, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Эта задача всегда имеет решение  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ , получив которое (например, с помощью надстройки Поиск решения MS Excel) можно найти цену игры  $\gamma = 1/(x_1^* + x_2^* + \dots + x_n^*)$  и оптимальные значения вероятностей  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — оптимальную смешанную стратегию игрока А.

Обратите внимание на то, что матрица игры представлена в неравенствах в транспонированном виде.

Поведению игрока В соответствует двойственная задача линейного программирования:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n \rightarrow \max$$

(эквивалентно  $\gamma \rightarrow \min$ : игрок В стремится минимизировать свой средний проигрыш)

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n &\leq 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n &\leq 1, \\ &\dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n &\leq 1, \\ y_i &\geq 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Здесь  $y_j = q_j/\gamma$ .

Если в исходной платежной матрице имеется хотя бы один неположительный элемент, то первым шагом в процедуре сведения игры к задаче линейного программирования должно быть ее преобразование к матрице, все элементы которой строго положительны. Для этого достаточно увеличить все элементы исходной матрицы на одно и то же число

$$d > \max_i \max_j |a_{ij}|, \quad a_{ij} \leq 0.$$

При таком преобразовании матрицы оптимальные стратегии игроков не изменятся. Если исходная матрица увеличивалась на  $d$ , то для получения цены первоначальной игры,  $\gamma$  нужно уменьшить на  $d$ .

## Варианты заданий 1

### Задача 1

	B1	B2	B3	B4
--	----	----	----	----

A1	8	6	2	8
A2	8	9	4	5
A3	7	5	3	5

**Задача 2**

	B1	B2	B3	B4
A1	4	-4	-5	6
A2	-3	-4	-9	-2
A3	6	7	-8	-9
A4	7	3	-9	5

**Задача 3**

	B1	B2	B3	B4
A1	1	9	6	0
A2	-2	3	8	4
A3	-5	-2	10	-3
A4	7	4	-2	-5

**Задача 4**

	B1	B2	B3	B4
A1	-1	9	6	8
A2	-2	10	4	6
A3	5	3	0	7
A4	7	-2	8	4

**Задача 5**

	B1	B2	B3	B4
A1	0,8	0,6	0,2	-0,8
A2	-0,8	0,9	-0,4	0,5
A3	1,7	0,5	0,3	0,6

**Задача 6**

	B1	B2	B3

A1	3	6	1
A2	5	2	3
A3	2	2	-5

**Задача 7**

	B1	B2	B3	B4
A1	3	7	1	3
A2	4	8	0	-6
A3	6	-9	-2	4

**Задача 8**

	B1	B2	B3	B4
A1	10	40	12	9
A2	17	16	13	14
A3	23	8	10	25

**Задача 9**

	B1	B2	B3	B4
A1	-2	1	9	-2
A2	-2	5	4	6
A3	3	2	0	0
A4	7	-2	8	4

**Задача 10**

	B1	B2	B3	B4
A1	-3	2	9	6
A2	-2	5	4	6
A3	5	3	1	-5
A4	8	-2	8	4

**Задача 11**

	B1	B2	B3	B4
A1	-8	6	0	7

A2	3	-1	4	4
A3	5	4	3	4

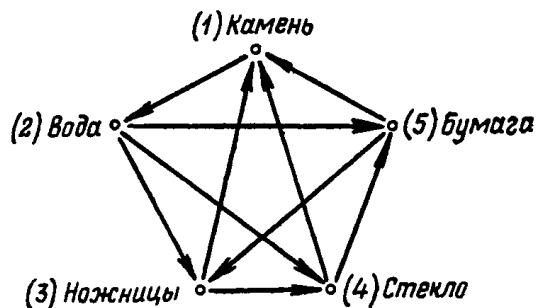
## Варианты заданий 2

### Задача 1

По условиям игры «Камень—вода—ножницы—стекло—бумага»:

- вода смачивает камень;
- бумага горит лучше воды;
- ножницы режут бумагу;
- камень разбивает ножницы;
- ножницы стоят дороже, чем вода;
- стекло более хрупкое, чем вода и ножницы;
- камень толще, чем стекло и бумага;
- бумага гибче, чем стекло.

Эти соотношения можно выразить с помощью следующего рисунка, на котором стрелками указаны направления подчинения:



Обозначив выигрыш, проигрыш и ничью соответственно как 1, -1 и 0, постройте платежную матрицу и определите оптимальные стратегии игроков и цену игры.

### Задача 2

Известный актер обдумывает, где бы ему провести в текущем году отпуск. Он рассматривает 6 возможных вариантов: Монте-Карло (МК), Гавайские острова (Г), Багамские острова (Б), Канарские острова (К), Сочи (С), озеро Байкал (ОБ). Единственный критерий для выбора места отдыха — стремление избежать журналистов, которые могут испортить ему отдох. Если они его «выследят», отпуск будет испорчен (полезность равна 0). В противном случае, все будет, как запланировано (полезность равна 1). Вследствие различных географических условий, журналисты могут обнаружить актера с определенной (известной) вероятностью: в Монте-Карло с вероятностью 0,34; на Гавайских островах с вероятностью 0,12; на Багамских островах с вероятностью 0,16; на Канарских островах с вероятностью 0,4; в Сочи с вероятностью 0,5; на озере Байкал с вероятностью 0,2.

Опишите данную ситуацию, как игру двух лиц с нулевой суммой (актер — игрок 1, журналисты — игрок 2).

Вычислите цену игры и определите минимаксные стратегии обоих игроков. Чему равна максимальная ожидаемая полезность отпуска актера? С какой вероятностью актер поедет в отпуск на Байкал? Чему равна верхняя цена игры? В каком из мест наиболее вероятно будет отдыхать актер?

### Задача 3

Однажды на «Диком Западе» произошел следующий случай. Группа из пяти индейцев осадила лагерь, охраняемый четырьмя белыми. У лагеря два входа E1 и E2. Белый разведчик установил, что перед входом E1 находится как минимум один индеец, а перед входом E2 как минимум два индейца. Расположение других индейцев неизвестно. Командир осажденных может расположить себя и трех солдат у входов E1 и E2. Причем, у каждого входа должен быть как минимум один человек. Предполагается, что численно превосходящая (у каждого входа) группа берет в плен всю группу противника без собственных потерь, в то время как при равенстве сил перед каким-либо входом потеря с обеих сторон нет. В качестве платежа (выигрыша) выступает разность числа пленных.

- а) Определите все чистые стратегии обоих противников.
- б) Постройте платежную матрицу, считая игроком 1 обороняющуюся сторону.
- в) Упростите матрицу насколько это возможно и найдите оптимальные стратегии сторон.
- г) с какой частотой следует белым использовать стратегию: расположить по два человека у каждого входа?
- д) кто больше в среднем захватит пленных, белые или индейцы? (1 - белые, 2 - индейцы)
- е) какова абсолютная величина разности числа захваченных обеими сторонами пленных?
- ж) с какой частотой следует белым использовать стратегию: расположить у первого входа одного, а у второго трех человека?
- з) с какой частотой следует индейцам использовать стратегию: расположить у первого входа трех, а у второго двух воинов?

### Задача 4

В нашем распоряжении имеются три вида вооружения: A1, A2, A3; у противника — три вида самолетов: B1, B2, B3. Наша задача — поразить самолет; задача противника — сохранить его непораженным. Самолеты B1, B2 и B3 поражаются при использовании вооружения A1 соответственно с вероятностями 0,9, 0,4 и 0,2; при использовании A2 — с вероятностями 0,3, 0,6 и 0,8; при использовании A3 — с вероятностями 0,5, 0,7 и 0,2.

### **Задача 5**

Сельскохозяйственное предприятие производит картофель. Посевная площадь картофеля составляет 100 га. Хозяйство имеет договор с магазином, который гарантированно закупит весь произведённый картофель по цене 4 у.д.е. за 1 кг. При выращивании картофеля хозяйство может принять одно из трёх решений, различающихся по сумме затрат на производство продукции:

A1. Провести комплексную обработку растений для предотвращения поражения сорняками, вредителями и болезнями (затраты — 6 млн. у.д.е.).

A2. Провести частичную обработку растений (затраты — 4 млн. у.д.е.).

A3. Не проводить обработку растений (затраты — 2.5 млн. у.д.е.).

В зависимости от погодных условий, наличия и развития сорняков, вредителей и болезней возможны следующие ситуации:

S1. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней неблагоприятные.

S2. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней обычные.

S3. Условия для развития сорняков, вредителей и болезней благоприятные.

Значения урожайности картофеля (ц/га) в зависимости от решений сельскохозяйственного предприятия и развития сорняков, вредителей и болезней приведены в таблице

Стратегии хозяйства	Развитие сорняков, вредителей и болезней		
	S1	S2	S3
A1	260	260	260
A2	255	200	1450
A3	250	100	40

Определите наиболее оптимальную стратегию предприятия и цену игры. Дайте экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

### **Задача 6**

Страна В засыпает подводную лодку в один из двух районов. Страна А, располагая тремя противолодочными кораблями, стремится обнаружить лодку противника. Страна В стремится этого избежать. Вероятность обнаружения подводной лодки в 1-м районе одним противолодочным кораблем равна  $p_1 = 0,4$ , во втором —  $p_2 = 0,6$ .

Предполагается, что обнаружение лодки каждым кораблем является независимым событием. Страна А может посыпать в различные районы разное количество кораблей (распределение кораблей по районам есть ее стратегия).

Считая страну А игроком 1, построить игру и найти оптимальное распределение противолодочных кораблей по регионам.

Какова цена игры? С какой частотой стороне А следует посыпать в регион 2 три противолодочных корабля? С какой частотой стороне А следует посыпать в регион 1 один противолодочный корабль? С какой частотой стороне В следует посыпать подлодку в регион 2?

### Задача 7

В одном сельскохозяйственном районе погода в течение вегетационного периода в среднем может быть холодной или теплой. На ферме с площадью в 1500 акров планируется посев двух культур. Если вегетационный период холодный, то ожидаемая прибыль от урожая составляет 20 долларов на акр для культуры I и 10 долларов на акр для культуры II. Если же вегетационный период теплый, то ожидаемая прибыль оценивается в 10 долларов за акр для культуры I и 30 долларов за акр для культуры II.

Опишите конкуренцию между фермером и погодой как матричную игру.

Какова оптимальная стратегия фермера, когда нет никакой информации относительно вероятностей теплой или холодной погоды? Если погода с равной вероятностью может быть теплой или холодной, то сколько акров следует отвести фермеру под каждую культуру?

### Задача 8

В экспериментах ворон и попугайчиков обучают распознаванию чисел до семи. Используется следующая схема эксперимента. Рацион вороны R и попугайчика C должен определяться матричной игрой. Каждой птице показывают три карточки с нанесенными на них двумя, четырьмя и семью точками. Если обе птицы выбирают одну и ту же карточку, то R получает из рациона C количество червяков, равное удвоенному числу точек на карточке. Если они выбирают разные карточки, то C получает из рациона R количество червей, равное разнице в числе точек на карточках.

В предположении, что ходы делаются независимо (например, с помощью двух наборов карточек), требуется описать этот эксперимент как матричную игру. Найти оптимальные чистые стратегии игроков. Чьи шансы на выигрыш предпочтительнее в случае чистых стратегий? Найти оптимальные смешанные стратегии. Чьи шансы предпочтительнее в этом случае?

### Задача 9

В игре двух лиц, именуемой двухпальцевой игрой Морра, каждый игрок показывает один или два пальца и одновременно отгадывает число пальцев, которые покажет его противник. Игрок, который угадал, выигрывает сумму, равную суммарному числу показанных противниками пальцев. Иначе игра заканчивается вничью.

Сформулируйте задачу в виде игры двух лиц с нулевой суммой и решите игру методами линейного программирования. Существует ли в данной

игре седловая точка в чистых стратегиях? Кто из игроков в среднем выигрывает и сколько? Как часто игрок А должен говорить, что его противник показал два пальца?

### Задача 10

Джек часто ездит между двумя городами. При этом есть возможность выбрать один из двух маршрутов: маршрут А представляет собой скоростное шоссе в четыре полосы, маршрут В — узкую объездную дорогу.

Патрулирование дорог осуществляется ограниченным числом полицейских. Если все полицейские расположены на одном маршруте, то Джек, обычно едущий «на грани фола», несомненно, получит штраф в 100 долл. за превышение скорости. Если полицейские патрулируют на двух маршрутах в соотношении 50 на 50, то имеется 50 %-ная вероятность, что Джек получит штраф в 100 долл. на маршруте А и 30 %-ная вероятность, что он получит такой же штраф на маршруте В. Кроме того, маршрут В длиннее, поэтому бензина расходуется на 15 долл. больше, чем на маршруте А. Определите наилучшую стратегию для Джека.

### Задача 11

В магазине работает охранная служба — двое полицейских в штатском. Торговый зал магазина делится на две условные зоны — в зоне А почти всегда посетителей значительно больше, чем в зоне В. Имеется некоторая позиция Т вне торговой площади, в Т установлена телекамера. В каждой из двух условных зон может находиться вор. Полицейские же могут находиться в А, в В или в Т. Предполагается, что известны вероятности обнаружения вора в определенной зоне при условии, что полицейский находится в фиксированном месте. Так, вора, находящегося в А, полицейский на том же месте заметит с вероятностью 0.4; из зоны Т он заметит его в зоне А с вероятностью 0.3; и т.д. в соответствии с таблицей

	Т	А	В
A	0.3	0.4	0.1
B	0.5	0.2	0.7

Так как полицейских двое, то они могут находиться вместе или в разных местах.

Для каждой из ситуаций необходимо подсчитать вероятность обнаружения вора в каждой зоне и построить на ее основе матрицу игры (название строки — место вора, столбца — охраны). Определить, существует ли в игре седловая точка. Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры.

### Контрольные вопросы

1. Какова роль информации при принятии решений?
2. В чем сущность контроллинга?

3. Каковы основные идеи реинжиниринга бизнеса?
4. Обсудите базовые определения в области информационных систем управления предприятием.
5. Каковы основные задачи ИСУП?
6. Каково место ИСУП в системе контроллинга?
7. Дайте классификацию типовых информационных систем управления предприятием.

### **Список литературы**

#### **Основная литература**

1. Петровский А.Б. Теория принятия решений : учебник для вузов / А. Б. Петровский .— Москва : Академия, 2009 .— 400 с.
2. Грешилов А.А. Математические методы принятия решений : учеб. пособие для вузов / А.А. Грешилов.— М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2006 .— 584с.
3. Золотухин А.Я. Элементы теории игр : учеб. пособие для вузов / А. Я. Золотухин, В. И. Чеботарев ; ТулГУ.— Тула : Изд-во ТулГУ, 2008 .— 202 с.

#### **Дополнительная литература**

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология: учеб. пособие для втузов / Е.С. Вентцель.— 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2001 .— 208с.
2. Воробьев С.А. Теория игр и исследование операций : учебное пособие / С. А. Воробьев ; ТулГУ, Каф. прикладной математики и информатики .— Тула : Изд-во ТулГУ, 2012 .— 103 с.