

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное
общеобразовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра вычислительной механики и математики

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«14» января 2021 г., протокол № 5
Заведующий кафедрой



В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий по дисциплине (модулю)
«Математика»

Основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
49.03.01 Физическая культура

С направленностью (профилем)
Физкультурно-оздоровительные технологии

Форма обучения: заочная

Идентификационный номер образовательной программы: 490301-01-11

Тула 2021

Разработчик методических указаний



Бакулин Н.В., доцент, к.т.н., доцент

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Задача 1.

Теоретические сведения.

В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ положение любой точки задается тремя числами – *координатами* : $A(x_A, y_A, z_A)$ (рисунок 1).

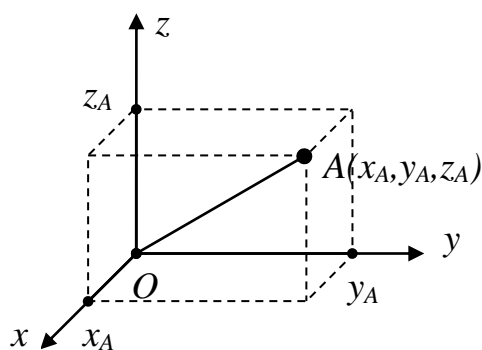


Рисунок 1.

Расстояние между двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

При решении задач аналитической геометрии на плоскости необходимы следующие сведения о прямой линии:

1) если точка $M(x; y)$ делит отрезок M_1M_2 ($M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$) в отношении λ , то координаты этой точки выражаются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (2)$$

если же точка $M(x; y)$ - середина отрезка M_1M_2 , то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad (3)$$

2) уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ и имеющей данный угловой коэффициент k , записывается в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1); \quad (4)$$

3) уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \text{ при этом } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad (5)$$

4) острый угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|, \quad (6)$$

при этом условие параллельности прямых имеет вид $k_1 = k_2$, а условие перпендикулярности

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}; \quad (7)$$

5) если прямая на плоскости задана *общим уравнением* $Ax + By + C = 0$, то $k_1 = -\frac{A}{B}$ - ее угловой коэффициент;

6) если в общем уравнении прямой поделить все члены на $C \neq 0$, получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{где } a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}; \quad (8)$$

7) точка пересечения двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определяется из решения системы уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Уравнение окружности с центром в точке $E(a, b)$ и радиусом R имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

(10)

Пример выполнения задания.

Даны вершины треугольника ABC : $A(-4; 8)$, $B(5; -4)$, $C(10; 6)$.

Найти: 1) длину стороны AB ; 2) уравнения сторон AB и AC в общем виде и их угловые коэффициенты; 3) внутренний угол A в радианах с точностью до 0,01; 4) уравнение высоты CD в общем виде и ее длину; 5) уравнение окружности, для которой высота CD есть диаметр.

Решение:

1) Расстояние d между двумя точками на плоскости определяется по формуле (1), в которую подставлены значения координат точек A и B (положим $z_1 = z_2 = 0$), тогда

$$AB = \sqrt{(5 - (-4))^2 + (-4 - 8)^2} = \sqrt{81 + 144} = 15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки имеет вид (5):

Подставив в (5) координаты точек A и B , получим уравнение прямой AB :

$$\frac{x - (-4)}{5 - (-4)} = \frac{y - 8}{-4 - 8}, \quad \frac{x + 4}{9} = \frac{y - 8}{-12}, \quad \frac{x + 4}{3} = \frac{y - 8}{-4},$$

$$3y - 24 = -4x - 16, \quad \text{или} \quad 4x + 3y - 8 = 0 \quad (AB).$$

Для нахождения углового коэффициента k_{AB} прямой AB разрешим полученное уравнение относительно y : $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$. Отсюда $k_{AB} = -\frac{4}{3}$. Под-

ставив в формулу (5) координаты точек A и C , найдем уравнение прямой

$$AC: \frac{x - (-4)}{10 - (-4)} = \frac{y - 8}{6 - 8}, \quad \frac{x + 4}{14} = \frac{y - 8}{-2}, \quad \frac{x + 4}{7} = \frac{y - 8}{-1},$$

$$7y - 56 = -x - 4 \quad \text{или} \quad x + 7y - 52 = 0 \quad (AC).$$

Отсюда $k_{AC} = -\frac{1}{7}$.

3) Угол между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых равны k_1 и k_2 , определяется по формуле (6). Угол A , образованный прямыми AB и AC , найдем по формуле (6), подставив в нее $k_1 = k_{AB} = -\frac{4}{3}$,

$$k_2 = k_{AC} = -\frac{1}{7}.$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{-\frac{1}{7} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{21}} = \frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}} = 1,$$

$$\angle A = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ \approx 0,79 \text{ рад.}$$

4) Так как высота CD перпендикулярна стороне AB , то угловые коэффициенты этих прямых связаны соотношением (7), поэтому

$$k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном угловым коэффициентом k направлении, имеет вид (4). Подставив в (4) координаты точки C и $k_{CD} = \frac{3}{4}$, получим уравнение высоты CD :

$$y - 6 = \frac{3}{4}(x - 10), \quad 4y - 24 = 3x - 30, \quad 3x - 4y - 6 = 0 \quad (CD).$$

Для нахождения длины CD определим координаты точки D , решив систему уравнений (AB) и (CD) :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - 4y - 6 = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда } x = 2, y = 0, \quad \text{то есть } D(2; 0).$$

Подставив в формулу (1) координаты точек C и D , находим:

$$CD = \sqrt{(10 - 2)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

5) Так как CD является диаметром искомой окружности, то ее центр E есть середина отрезка CD . Воспользовавшись формулой (3) деления отрезка пополам, получим:

$$x_E = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{10 + 2}{2} = 6, \quad y_E = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{6 + 0}{2} = 3.$$

Следовательно, $E(6; 3)$ и $R = \frac{CD}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Используя формулу (10), получаем уравнение искомой окружности: $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Задача 2.

Теоретические сведения.

Если известны начало вектора $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и конец $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1, \quad (11)$$

а его длина определяется выражением

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (12)$$

Вектор \vec{a} с координатами (x, y, z) может быть представлен разложением по ортам в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (13)$$

Если α, β, γ – углы, которые вектор \vec{a} образует с положительными направлениями осей координат, то $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора \vec{a} (рисунок 2). Тогда имеют место соотношения

$$x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, \quad y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \quad z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Для векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ вводятся операции сложения и умножения на число такие, что

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad \text{и} \quad \lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1),$$

где λ – любое число.

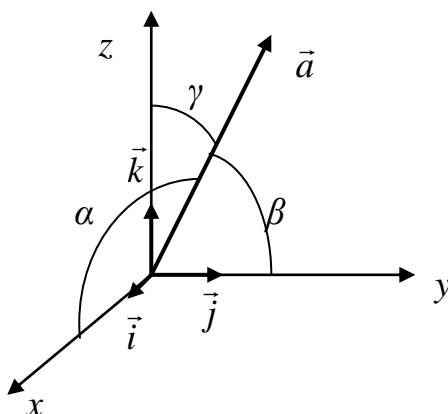


Рисунок 2.

Скалярным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} ($\vec{a} \cdot \vec{b}$) называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ

между ними, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ или, если векторы заданы своими координатами, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (14)$$

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называют *коллинеарными*. Признак коллинеарности векторов \vec{a} и \vec{b} является пропорциональность их координат:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (15)$$

Если векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны, то $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$. Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} определяется соотношением:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (16)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = (A, B, C)$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (17)$$

Пример выполнения задания.

Даны координаты трех точек: $A(3; 0; -5)$, $B(6; 2; 1)$, $C(12; -12; 3)$.

Требуется: 1) записать векторы \vec{AB} и \vec{AC} в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами \vec{AB} и \vec{AC} ; 3) составить уравнение плоскости, проходящей через точку C перпендикулярно векто-

ру \vec{AB} .

Решение:

1) Найдем координаты вектора \vec{AB} , подставив в формулу (11) координаты точек A и B , и запишем разложение этого вектора по ортам (13):

$$\vec{AB} = (6 - 3)\vec{i} + (2 - 0)\vec{j} + (1 + 5)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Подобным образом

$$\vec{AC} = (12 - 3)\vec{i} + (-12 - 0)\vec{j} + (3 + 5)\vec{k} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Модули векторов \vec{AB} и \vec{AC} найдем, подставляя их координаты в формулу (12):

$$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7, \quad \left| \vec{AC} \right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = 17.$$

2) Найдем косинус угла φ между векторами \vec{AB} и \vec{AC} . Для этого вычислим их скалярное произведение по формуле (14):

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \cdot 9 + 2 \cdot (-12) + 6 \cdot 8 = 51.$$

Тогда по формуле (16)

$$\cos \varphi = \frac{51}{7 \cdot 17} \approx 0,4286, \quad \varphi \approx 64^\circ 37' \approx 1,13 \text{ рад.}$$

3) По условию задачи искомая плоскость проходит через точку $C(12; -12;$

3) перпендикулярно вектору $\vec{AB} = (3, 2, 6)$. Подставляя в (17) $A = 3$, $B = 2$, $C = 6$,

$x_0 = 12$, $y_0 = -12$, $z_0 = 3$, получим:

$$3(x - 12) + 2(y + 12) + 6(z - 3) = 0,$$

или $3x + 2y + 6z - 30 = 0$ – искомое уравнение плоскости.

Задача 3.

Теоретические сведения.

Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Условием компланарности трех векторов $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Три вектора образуют *базис* в том случае, если они *некомпланарны*.

Если для векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ выполняется условие $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \neq 0$, то они образуют базис, и любой четвертый вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ может быть представлен разложением по этому базису в виде

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3, \quad (19)$$

где α, β, γ – координаты вектора \vec{b} в базисе, образованном векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Координаты α, β, γ находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = b_1 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = b_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = b_3 \end{cases} \quad (20)$$

Пример выполнения задания.

Показать, что векторы $\vec{a}_1(3; 1; 4)$, $\vec{a}_2(2; 1; -1)$, $\vec{a}_3(1; -1; 5)$ образуют базис трехмерного пространства. Найти координаты вектора $\vec{b}(5; 0; 3)$ в этом базисе.

Решение:

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Так как смешанное произведение отлично от нуля, то векторы некопланарны и образуют базис. Координаты вектора \vec{b} в этом базисе найдем, разложив его по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ следующим образом:

$$\vec{b} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3,$$

а координаты вектора \vec{b} в новом базисе найдем из системы уравнений (20)

$$\begin{cases} \alpha \cdot 3 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 5 \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (-1) = 0 \\ \alpha \cdot 4 + \beta \cdot (-1) + \gamma \cdot 5 = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}$$

Решим эту систему для заданных векторов методом Гаусса.

Поменяем местами первое и второе уравнения

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 5 \\ 4\alpha - \beta + 5\gamma = 3 \end{cases}.$$

После этого умножим первое уравнение на (-3) и сложим со вторым. Далее умножим первое уравнение на (-4) и сложим с третьим. Получим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -5\beta + 9\gamma = 3 \end{cases}.$$

Затем умножаем второе уравнение на (-5) и складываем с третьим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + 4\gamma = 5 \\ -11\gamma = -22 \end{cases}$$

Из последнего уравнения имеем $\gamma = 2$. Подставляем это значение во второе уравнение, получаем $\beta = 3$ и, наконец, из первого уравнения находим $\alpha = -1$.

Таким образом, подставив в уравнение (19) координаты вектора \vec{b} , получим

$$\vec{b} = -\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3.$$

Элементы линейной алгебры

Задача 4.

Теоретические сведения.

Неоднородная система трех уравнений с тремя неизвестными в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3 \end{cases}$$

и может быть записана в матричном виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{H}, \quad (21)$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов при неизвестных,

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \text{ матрица-столбец свободных членов.}$$

Если матрица \mathbf{A} – невырожденная, то есть имеет определитель, отличный от нуля, то существует матрица \mathbf{A}^{-1} , обратная к \mathbf{A} , так что $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ (\mathbf{E} – единичная матрица). Умножим обе части уравнения (22) на \mathbf{A}^{-1} и получим

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H},$$

или

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}, \quad (23)$$

поскольку $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}$.

Равенство (23) является решением системы уравнений (22).

Матрица, обратная к невырожденной матрице \mathbf{A} , находится по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

где A_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$) – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} , которое является произведением $(-1)^{i+j}$ на минор (определитель) второго порядка, полученный вычеркиваем i -й строки и j -го столбца в определителе матрицы \mathbf{A} ; Δ – определитель матрицы \mathbf{A} .

Пример выполнения задания.

Данную систему уравнений записать в матричной форме и решить ее с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Решение:

Выпишем для данной системы уравнений матрицу коэффициентов при неизвестных \mathbf{A} и столбец свободных членов \mathbf{H} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель Δ и алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы \mathbf{A} :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

следовательно, матрица \mathbf{A} имеет обратную матрицу \mathbf{A}^{-1} .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Тогда по формуле (24) обратная матрица равна

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (23) находим решение данной системы уравнений в матричной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H} &= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 3 \cdot 8 + (-1) \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 3 \cdot (-1) \\ -5 \cdot 1 - 1 \cdot 8 + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$.

Пределы

Задача 5.

Теоретические сведения.

Число A называют пределом функции $y=f(x)$ в точке a , если эта функция определена в некоторой окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a , и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Вычисление пределов арифметических выражений $f_1(x)/f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$ по пределам функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, из кото-

рых они составлены, не всегда возможно. В этих случаях говорят, что возникают неопределенности следующих видов:

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (0 \cdot \infty), (\infty - \infty), (1^\infty).$$

Для нахождения пределов таких неопределенных выражений нужно учитывать конкретный вид функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Например,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{x^n} = 0; \quad (25)$$

предел отношения двух многочленов $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$

первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1;$ (26)

второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1)^\infty = e.$ (27)

Величина $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$. Две бесконечно малые величины называются *эквивалентными*, если предел их отношения равен 1, то есть $\alpha(x) \sim \beta(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$. Под знаком предела любая бесконечно малая величина может быть заменена на эквивалентную ей. Приведем таблицу эквивалентных бесконечно малых при $x \rightarrow 0$ величин:

$$\begin{aligned} \sin x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a, \quad e^x - 1 \sim x, \\ \operatorname{tg} x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Пример выполнения задания.

Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{3x^2 + 10x + 3}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x),$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 5x}, \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{4x+5}.$$

Решение:

а) Подстановка предельного значения аргумента $x=-3$ приводит к неопределенному выражению вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Для устранения этой неопределенности разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь на множитель $(x+3)$. Такое сокращение здесь возможно, так как множитель $(x+3)$ отличен от нуля при $x \rightarrow -3$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{3x^2 + 10x + 3} &= \frac{4 \cdot (-3)^2 + 11 \cdot (-3) - 3}{3 \cdot (-3)^2 + 10 \cdot (-3) + 3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(4x-1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x-1}{3x+1} = \frac{4 \cdot (-3) - 1}{3 \cdot (-3) + 1} = \frac{13}{8}. \end{aligned}$$

б) При $x \rightarrow \infty$ выражение $\sqrt{x^2 + 3x} - x$ дает неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Для ее устранения умножим и разделим это выражение на $\sqrt{x^2 + 3x} + x$, после чего разделим числитель и знаменатель полученной дроби на x , учитывая формулу (25):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

в) При $x \rightarrow 0$ получим неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обозначим $\operatorname{arctg} 5x = y$. Тогда $5x = tgy$ и $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Применяя свойства пределов и формулу (26), имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 5x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{1}{5} tgy\right)}{y} = \frac{2}{5} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\cos y} = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

Эту задачу можно решить, используя эквивалентные замены бесконечно малых величин (28). Поскольку при $x \rightarrow 0$ эквивалентны $\operatorname{arctg} 5x \sim 5x$, можно записать

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} 5x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

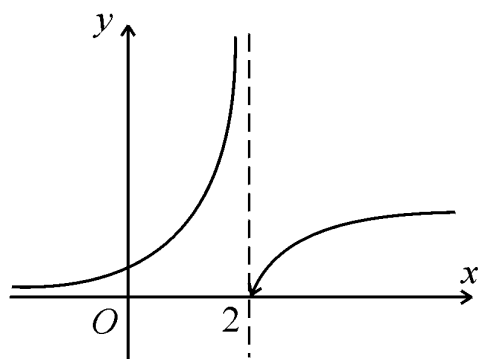
г) При $x \rightarrow \infty$ выражение $\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$ является неопределенностью вида (1^∞) . Для устранения этой неопределенности представим основание степени в виде суммы 1 и бесконечно малой (при $x \rightarrow \infty$) величины; после чего применим формулу второго замечательного предела (27):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1-4}{2x+1}\right)^{4x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+1}\right)^{4x+5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+1}\right)^{\left(\frac{2x+1}{-4}\right) \cdot \left(\frac{-4}{2x+1}\right) \cdot (4x+5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-4}{2x+1} \cdot (4x+5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-16x-20}{2x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-16}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-8} = \frac{1}{e^8}. \end{aligned}$$

Непрерывность функции

Задача. Найти точки разрыва функции $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$, пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.

Функция $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ имеет разрыв в точке $x = 2$, т.к. она в этой точке не определена. При этом:



$$\lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

б) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y = \frac{\frac{1}{2^{x+3}} + 4x - 8}{\frac{1}{2^{x+3}} + 4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка $x = -3$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1/(x+3)} + 4} = \frac{2^{-\infty} - 12 - 8}{2^{-\infty} + 4} = \frac{0 - 20}{0 + 4} = -5;$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1/(x+3)} + 4} = 1, \text{ т.к. при } x \rightarrow -3 + 0 \text{ имеем:}$$

$$2^{1/(x+3)} + 4x - 8 \sim 2^{1/(x+3)}; \quad 2^{1/(x+3)} + 4 \sim 2^{1/(x+3)}.$$

$$\text{Величина скачка } \Delta = 1 - (-5) = 6.$$

в) Найти точки разрыва, величину скачка Δ и построить график функции

$$y = \begin{cases} -3x, & x \leq 0 \\ 4 \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \frac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

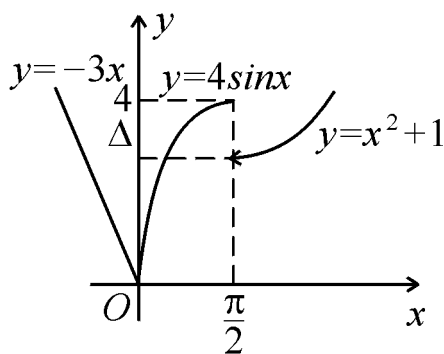
Данная функция непрерывна для $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$.

Исследуем только точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$, т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-3x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (4 \sin x) = 0;$$

$f(0) = -3x \Big|_{x=0} = 0$, следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (4 \sin x) = 4; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4;$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} (x^2 + 1) = \frac{\pi^2}{4} + 1 = 3,467,$$

следовательно, точка $x = \frac{\pi}{2}$ — точка разрыва. Величина скачка

$$\Delta = 4 - \left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) = 3 - \frac{\pi^2}{4} \approx 0,533.$$

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Таблица основных формул дифференцирования.

(Для сложных функций от x : $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$)

$$y = c, \quad y' = 0;$$

$$y = u^\alpha, \quad y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u';$$

$$y = a^u, \quad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$$

$$u = e^x, \quad y' = e^x \cdot u';$$

$$y = \log_a x, \quad y' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u' = \frac{\log_a e}{u} \cdot u';$$

$$y = \ln u, \quad y' = \frac{1}{u} \cdot u';$$

$$y = \sin u, \quad y' = \cos u \cdot u';$$

$$y = \cos u, \quad y' = -\sin u \cdot u';$$

$$y = \operatorname{tg} u, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$$

$$y = \operatorname{ctg} u, \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$$

$$y = \arcsin u, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$y = \arccos u, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$y = \operatorname{arctg} u, \quad y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$y = \operatorname{arctgu}, \quad y' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$y = shu, \quad y' = chu \cdot u';$$

$$y = chu, \quad y' = shu \cdot u';$$

$$y = th u, \quad y' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u';$$

$$y = cth u, \quad y' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u';$$

$$y = u^v, \quad y' = v u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

Общие правила:

$$(cu)' = cu';$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

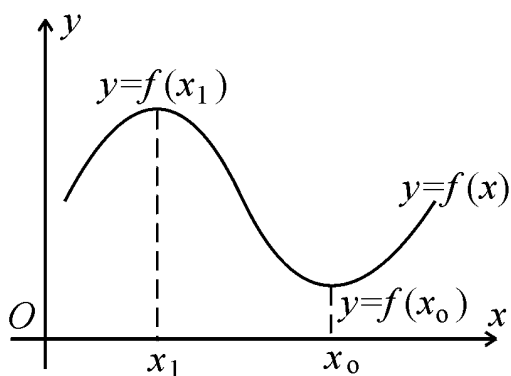
$$(u \cdot v)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек x_1, x_2 , принадлежащих данному интервалу (отрезку), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при $a < x < b$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками x (где $f'(x) = 0$ или же $f'(x)$ не существует).



Если существует такая двусторонняя окрестность точки x_0 , что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой минимума функции $y = f(x)$, а число $f(x_0)$ — минимумом

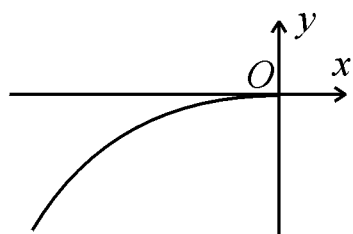
функции $y = f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_1$ некоторой

окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то x_1 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, а $f(x_1)$ – максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции – экстремумом функции. Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ или же $f'(x_0)$ не существует (*необходимое условие существования экстремума*). Обратное утверждение не верно: точки, в которых $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$.

Достаточный признак существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ следующий: если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ критической точки x_0 , что $f'(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$; если же $f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 – точка минимума функции $f(x)$. Если, наконец, найдется такое положительное число δ , что $f'(x)$ сохраняет неизменный знак при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, то точка x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Наименьшее (наибольшее) значение непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a; b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a; b]$.

Пример 1.1. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции $y = x \cdot \sqrt{-5x}$.



Область существования: $-5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Находим критические точки:

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{-5x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{-5x}} \cdot (-5) = \sqrt{-5x} - \frac{5x}{2\sqrt{-5x}} = \\ &= \frac{-10x - 5x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{-15x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3 \cdot (-5x)}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{-5x} \geq 0. \end{aligned}$$

При $x \leq 0$ функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке $x = 0$: $y(0) = 0$.

Пример 1.2. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции $y = \sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}$.





Область существования: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Находим критические точки:

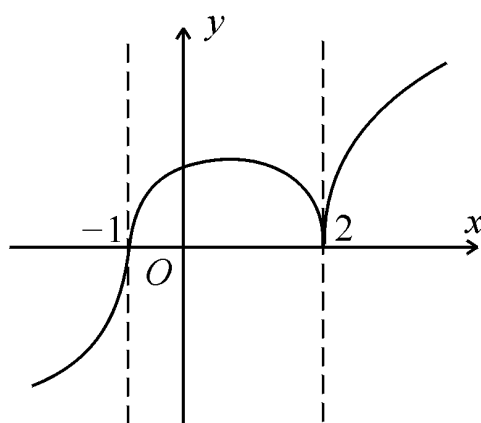
$$y' = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)(x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}},$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0,$$

y' не существует $\Rightarrow x_2 = -1; x_3 = 2$. Получили три критические точки.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	$+$	не сущ.	$+$	0	$-$	не сущ.	$+$
y				max		min	

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = -\infty.$$



$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} y'(x) = +\infty.$$

Так как $y'(x) = k$, где k – угловой коэффициент касательной, то при $x = -1$ и $x = 2$ касательная к графику функции перпендикулярна оси Ox .

$$y(-1) = 0; \quad y(0) = \sqrt[3]{4}; \quad y(2) = 0.$$

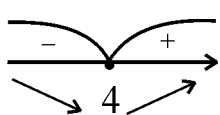
Пример 1.3. Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом 256 м^3 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть a – сторона квадрата основания, h – глубина бассейна;

$$a^2 h = 256 \Rightarrow a^2 = \frac{256}{h}, \quad a = \frac{16}{\sqrt{h}}, \quad h > 0;$$

$$S = S_{\text{бок}} + S_{\text{дна}} = 4ah + a^2 = 4 \cdot \frac{16}{\sqrt{h}} \cdot h + \frac{256}{h} = 64\sqrt{h} + \frac{256}{\sqrt{h}} = F(h);$$

$$F'(h) = \frac{64}{2\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32}{\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32h^{3/2} - 256}{h^2} = \frac{32}{h^2} (h^{3/2} - 8);$$



$F'(h) = 0 \Rightarrow h^{3/2} = 8; \quad h = 4$. При $h = 4$ величина $F(h) = S$ будет наименьшей.

Пример 1.4. Две прямые железные дороги AA_1 и BB_1 перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте C , причем $AC = 800$ км и $BC = 700$ км. Из пунктов A и B по направлению к C одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно 80 км/ч и 60 км/ч. Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим?

Отметим положение поездов в момент

$t > 0$ точками K и M .

$$AK = 80t; \quad BM = 60t;$$

$$CK = AC - AK = 800 - 80t;$$

$$CM = CB - BM = 700 - 60t;$$

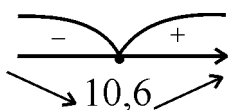
$$(KM)^2 = (CK)^2 + (CM)^2 = \\ = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2; \quad KM \text{ ми-}$$

нимально, если минимальна величина

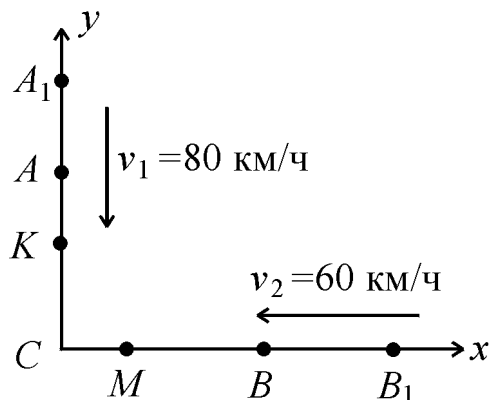
$$(KM)^2 = F(t) = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2;$$

$$F(t) = 2(800 - 80t) \cdot (-80) + 2(700 - 60t) \cdot (-60) =$$

$$= -128000 + 12800t - 84000t + 7200t = 20000t - 212000 = 0; \quad t = 10,6;$$



$t = 10,6$ – точка минимума функции $F(t)$. Через 10,6 часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.



АСИМПТОТЫ

Если точка $(x; y)$ непрерывно перемещается по кривой $y = f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Если существует число a такое, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$ и

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1$, то прямая $y = k_1 x + b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2$ и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2 x] = b_1$, то прямая $y = k_2 x + b_2$ будет асимптотой (левая наклонная асимптота).

График функции $y = f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

Пример 2.1. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = 2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1}.$$

Область существования: $x \neq 1$.

Ищем вертикальные асимптоты.

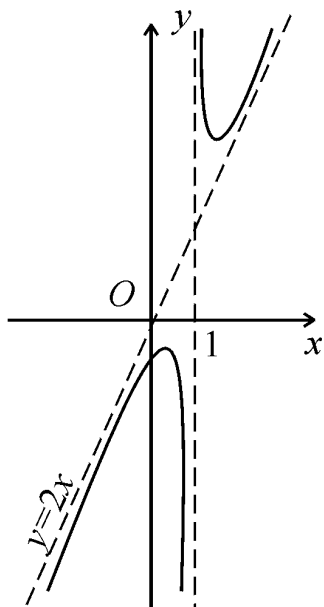
Функция имеет разрыв в точке $x = 1$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{-0} = 2 - \infty = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \left(2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{+0} = 2 + \infty = +\infty;$$

следовательно, $x = 1$ – вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$.



$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \left(2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} \right) = \\ &= 2 + 0 = 2; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} - 2x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} = 0. \end{aligned}$$

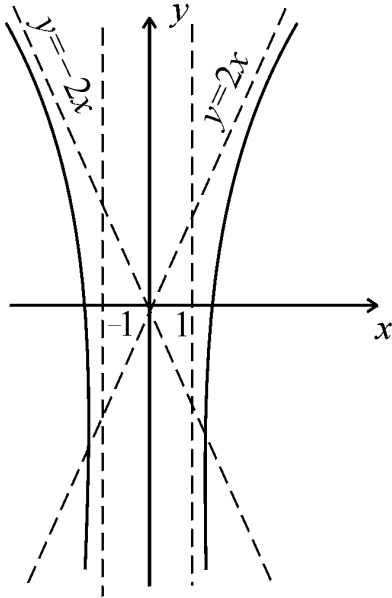
Следовательно, при $x \rightarrow \pm\infty$ существует асимптота $y = 2x$.

Пример 2.2. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Область существования: $x^2 - 1 > 0$; $x^2 > 1$; $x > 1$ и $x < -1$.

$$y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad y(-x) = \frac{2(-x)^2 - 9}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow y(x) = y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при $x > 1$, а затем отразить его симметрично относительно оси Oy .



$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2 - 9}{+0} = -\infty \Rightarrow x = 1 -$$

вертикальная асимптота при $x \rightarrow 1 + 0$.

Пусть $x \rightarrow 1 + \infty$.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9}{x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{9}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 2.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9 - 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 - 9)^2 - 4x^2(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}(2x^2 - 9 + 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-32x^2 + 81}{x^3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \left(2 - \frac{9}{x^2} + 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)} = 0.$$

При $x \rightarrow +\infty$ получаем асимптоту $y = 2x$. График данной функции пе-

ресекает ось Ox при $2x^2 - 9 = 0$, т.е. в точках $x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Пример 2.3. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}.$$

Область существования: $4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ и $x \neq -2$.

В точках $x_1 = -2$ и $x_2 = +2$ функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{-8 - 8 + 6 + 2}{-0} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{-8 - 8 + 6 + 2}{+0} = -\infty;$$

$x = -2$ — вертикальная асимптота.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{8 - 8 - 6 + 2}{+0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{8 - 8 - 6 + 2}{-0} = +\infty;$$

$x = 2$ — вертикальная асимптота.

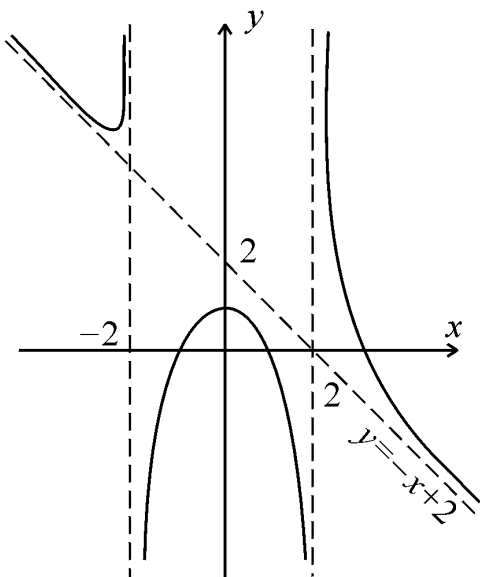
Наклонные асимптоты при $x \rightarrow \pm \infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{x(4 - x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - kx] =$$

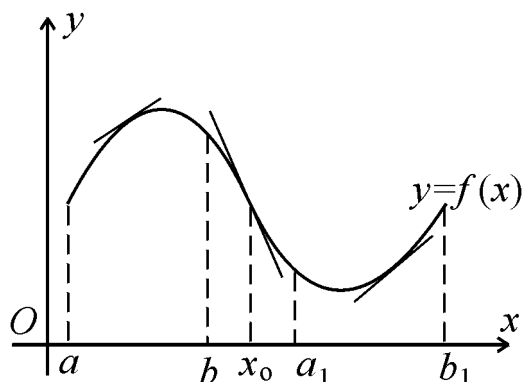
$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2 + x + 2}{4 - x^2} = 2.$$

При $x \rightarrow \pm \infty$ получаем асимптоту $y = -x + 2$.



НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ *вогнут вниз* на интервале $(a; b)$ (*вогнут вверх* на интервале $(a_1; b_1)$), если при $a < x < b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при



$a_1 < x < b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала $(a; b)$ (или интервала $(a_1; b_1)$). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y = f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$).

Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба*.

Для абсциссы точки перегиба x_0 графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками 2-го рода*. Критическая точка 2-го рода x_0 является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_0 - \delta < x < x_0$ и $x_0 < x < x_0 + \delta$, где δ – некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

Пример. Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

Имеем: $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода:

$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают всю область существования функции $(-\infty; +\infty)$ на три интервала.

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	–
y	∪	перегиб	∩	перегиб	∪

Получили: кривая вогнута вверх при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ и вогнута вниз при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Точки $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область существования этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области существования. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются): четность, периодичность и т.д.

Далее нужно найти точки разрыва, асимптоты, точки экстремума функции, точки перегиба и т.д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции.

Пример 4.1. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}.$$

Область существования: $x \in (-\infty; +\infty)$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

Так как функция определена при всех x , и у нее нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты при $x \rightarrow \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} = +\infty, \text{ следовательно, наклонных}$$




асимптот также нет.

Исследуем функцию по первой производной.

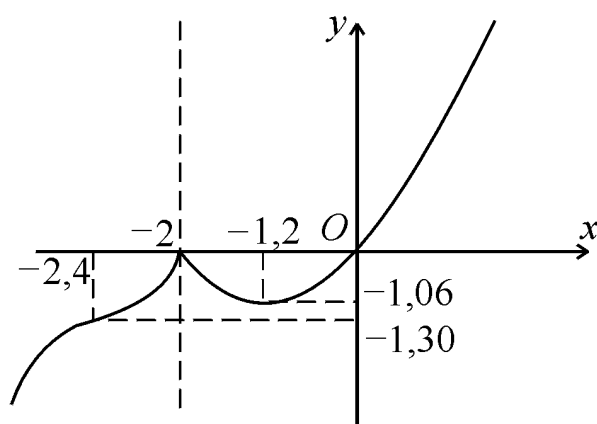
$$y' = \left[x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2} \right] = (x+2)^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{-1/3} = \frac{3(x+2) + 2x}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow 5x+6=0, \quad x=-1,2;$$

$$y' \text{ не существует} \Rightarrow x+2=0, \quad x=-2.$$

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1,2)$	$-1,2$	$(-1,2; +\infty)$
y'	$+$	не сущ.	$-$	0	$+$
y		max		min	

$y_{\max} = y(-2) = 0$ (касательная в этой точке перпендикулярна оси Ox).



$y_{\min} = y(-1,2) = -1,2 \cdot \sqrt[3]{0,64} \approx -1,06$
(касательная в этой точке параллельна оси Ox).

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = \left[\frac{5x+6}{(x+2)^{2/3}} \right] = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{x+2} - (5x+6) \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{15(x+2) - (5x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{10x+24}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

$y'' = 0$ при $x = -2,4$; y'' не существует при $x = -2$.

x	$(-\infty; -2,4)$	$-2,4$	$(-2,4; -2)$	-2	$(-2; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	не сущест.	$+$
y	\cap	перегиб	\cup		\cup

$$y_{\text{перегиба}} = y(-2,4) = -2,4 \cdot \sqrt[3]{(-2,4)^2} \approx -1,30; \quad y(0) = 0.$$

Пример 4.2. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2.$$

Область существования: $x \neq -2$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

$x = -2$ — точка разрыва, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left(\frac{4+1}{-0} \right)^2 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left(\frac{4+1}{+0} \right)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow x = 2$ — вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x \rightarrow \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = 0;$$




$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = 4.$$

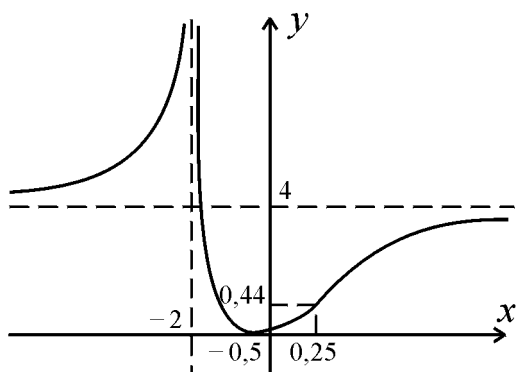
При $x \rightarrow \pm\infty$ получаем асимптоту $y = 4$.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0, \quad x = -0,5;$$

y' не существует $\Rightarrow x = -2$.

x	$(-\infty; -2)$	$(-2; -0,5)$	$-0,5$	$(-0,5; +\infty)$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y			min	



$$y_{\min} = y(-0,5) = 0.$$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = 6 \cdot \frac{2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 \cdot (2x+1)}{(x+2)^6} =$$

$$= 6 \cdot \frac{2(x+2) - 3(2x+1)}{(x+2)^4} = \frac{6(1-4x)}{(x+2)^4};$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 1 - 4x = 0; \quad x = 0,25;$$

$$y'' \text{ не существует} \Rightarrow x = -2.$$

x	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0,25)$	$0,25$	$(0,25; +\infty)$
y''	+	+	0	-
y	\cup	\cup	перегиб	\cap

$$y_{\text{перегиба}} = y(0,25) = \left(\frac{1,5}{2,25}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0,44.$$

Пример 4.3. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \frac{e^{x-3}}{x-3}.$$

Область существования: $x - 3 \neq 0; \quad x \neq 3.$

$y(x) \neq y(-x)$ – функция общего вида.

В точке $x = 3$ функция терпит разрыв, т.к. в ней она не определена.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{e^{x-3}}{x-3} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{e^{x-3}}{x-3} &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 3 - \text{вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

1) $x \rightarrow +\infty,$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x-3})'}{(x^2 - 3x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{2x - 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x-3})'}{(2x-3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{2} = +\infty, \text{ следовательно, при } x \rightarrow +\infty$$

наклонных асимптот нет.

2) $x \rightarrow -\infty$,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \frac{0}{+\infty} = 0;$$




$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-3}}{x-3} = 0,$$

при $x \rightarrow -\infty$ получаем асимптоту $y = 0$.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left(\frac{e^{x-3}}{x-3} \right)' = \frac{e^{x-3} \cdot (x-3) - e^{x-3}}{(x-3)^2} = e^{x-3} \cdot \frac{x-3-1}{(x-3)^2} = e^{x-3} \cdot \frac{x-4}{(x-3)^2},$$

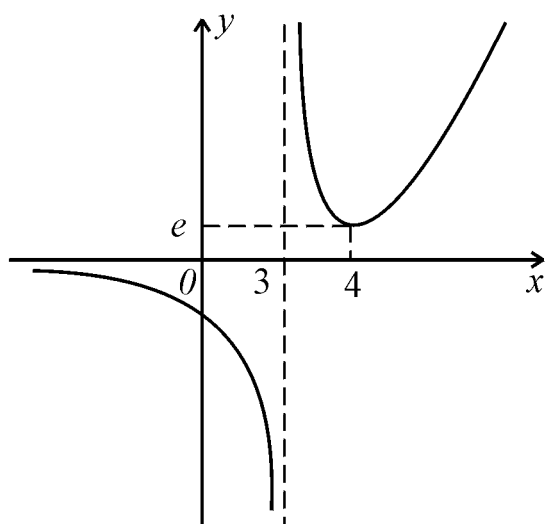
$$y' = 0 \Rightarrow x-4=0, \quad x=4; \quad y' \text{ не существует} \Rightarrow x=3.$$

x	$(-\infty; 3)$	$(3; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y'	—	—	0	+
y			min	

$$y_{\min} = y(4) = e \approx 2,72.$$

Исследуем функцию по второй производной.

$$\begin{aligned} y'' &= e^{x-3} \cdot \frac{x-4}{(x-3)^2} + e^{x-3} \cdot \frac{(x-3)^2 - (x-4) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \\ &= \frac{e^{x-3}}{(x-3)^2} \cdot \frac{x^2 - 7x + 12 - x + 5}{x-3} = \frac{e^{x-3} \cdot (x^2 - 8x + 17)}{(x-3)^3}; \quad y'' \neq 0; \end{aligned}$$



y'' не существует $\Rightarrow x = 3$.

x	$(-\infty; 3)$	$(3; +\infty)$
y''	—	+
y	\cap	\cup

$$y(0) = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \approx -0,02.$$

Пример 4.4. Провести полное исследование и построить график функции $y = \ln \frac{x+6}{x} - 1$.

Область существования: $\frac{x+6}{x} > 0$.

$$x > 0, \quad x < -6.$$



Функция общего вида.

$$\lim_{x \rightarrow -6-0} \left[\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = -\infty \Rightarrow x = -6 - \text{вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0+0} \left[\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = +\infty \Rightarrow x = -0 - \text{вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \frac{x+6}{x} - 1}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = -1.$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ получаем асимптоту $y = -1$.

Исследуем функцию по первой производной.

x	$(-\infty; -6)$	$(0; +\infty)$
y'	—	—
y	\searrow	\searrow

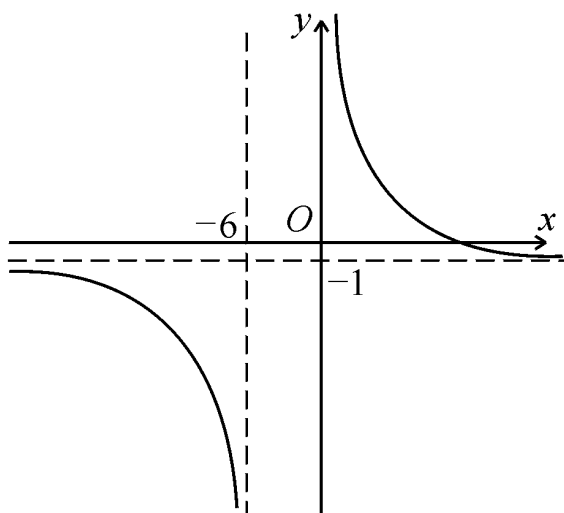
$$y' = \frac{x}{x+6} \cdot \frac{x-x-6}{x^2} = \frac{-6}{x(x+6)} \neq 0.$$

Экстремумов у функции нет.

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = -6 \cdot \frac{-(x+6+x)}{x^2(x+6)^2} = \frac{6(2x+6)}{x^2(x+6)^2} = \frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2};$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x+3=0; \quad x=-3 - \text{ не входит в область существования.}$$



x	$(-\infty; -6)$	$(0; +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	\cap	\cup

Точек перегиба нет.

$$\ln \frac{x+6}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{e-1};$$

$$y\left(\frac{6}{e-1}\right) = 0.$$

Интегральное исчисление функции одной переменной

Неопределенный интеграл

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $F(x)$ – результат интегрирования, C – произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$.
2. $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$, где A – постоянная.
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица простейших интегралов:

$$1. \int dx = x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1).$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

11.

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0).$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C, (A \neq 0).$$

Основные методы интегрирования:

1. Подведение под знак дифференциала:

а) к функции, стоящей под знаком дифференциала, можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) \pm A)$;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель:

$$df(x) = \frac{1}{A} d(A \cdot f(x));$$

в) под знак дифференциала подводится функция по правилу:

$$f'(x)dx = df(x).$$

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$$\int u dv = uv - \int v du, \text{ где } u = u(x), v = v(x).$$

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

$$а) \int a^x \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = a^x dx.$$

$$\text{б)} \int \sin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \sin ax dx.$$

$$\text{в)} \int \cos ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = P_n(x), \quad dv = \cos ax dx,$$

$$\text{г)} \int \ln ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \ln ax, \quad dv = P_n(x) dx,$$

$$\text{д)} \int \arcsin ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \arcsin ax, \quad dv = P_n(x) dx,$$

$$\text{е)} \int \operatorname{arctg} ax \cdot P_n(x) dx, \quad u = \operatorname{arctg} ax, \quad dv = P_n(x) dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен n -ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad \text{где } x = \varphi(t).$$

Пример выполнения задания.

Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а)} \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \text{б)} \int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx; \quad \text{в)} \int (3x + 4)e^{3x} dx.$$

Решение.

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \left(-\frac{1}{2}\right) \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \\ &= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C \right)' =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \cdot 3(\arcsin x)^2 \cdot (\arcsin x)' - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' + C' = \\
&= \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 17 & x^2 - 4x + 3 \\
\underline{x^3 - 4x^2 + 3x} & \\
4x^2 - 3x - 17 & \\
\underline{4x^2 - 16x + 12} & \\
13x - 29 &
\end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx &= \int \left(x + 4 + \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} \right) dx = \int x dx + \int 4 dx + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx = \\
&= \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3} dx.
\end{aligned}$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x - 29}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-1)}{(x-1)(x-3)},$$

значит $13x - 29 = A(x-3) + B(x-1)$.

При $x=3$ имеем $13 \cdot 3 - 29 = B(3-1)$, откуда $B=5$;

при $x=1$ имеем $13 \cdot 1 - 29 = A(1-3)$, откуда $A=8$.

Получаем $\frac{13x - 29}{(x-1)(x-3)} = \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3}$ и интегрируем

$$\begin{aligned}\int \frac{13x-29}{(x-1)(x-3)} dx &= \int \frac{8}{x-1} dx + \int \frac{5}{x-3} dx = 8 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 5 \int \frac{d(x-3)}{x-3} = \\ &= 8 \ln|x-1| + 5 \ln|x-3| + C\end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 8 \ln|x-1| + \ln|x-3| + C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{2} + 4x + 8 \ln|x-1| + \ln|x-3| + C \right)' &= \frac{2x}{2} + 4 + \frac{8}{x-1} + \frac{5}{x-3} = \\ &= \frac{(x+4)(x-1)(x-3) + 8(x-3) + 5(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^3-17}{x^2-4x+3},\end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Замечание.

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C; \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(-k+1)} (x-a)^{-k+1} + C,$$

($k=2,3,\dots$).

в) применим методом интегрирования по частям.

Примем $u=3x+4$, $dv=e^{3x}dx$, тогда $du=3dx$, $v=\frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле

интегрирования по частям получаем

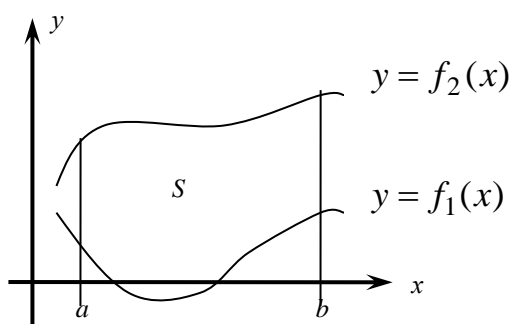
$$\begin{aligned}\int (3x+4)e^{3x} dx &= (3x+4) \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 3 dx = \frac{3x+4}{3} e^{3x} - \int e^{3x} dx = \\ &= \frac{3x+4}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3} e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C.\end{aligned}$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1) + C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}(3(x+1) + 1) = e^{3x}(3x+4),$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Определенный интеграл



Если на плоскости Oxy задана фигура, ограниченная двумя непрерывными линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь S такой фи-

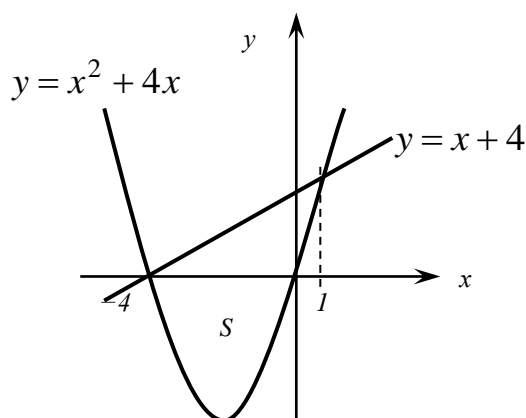
гуры может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx, \text{ где } f_2(x) \geq f_1(x) \text{ на отрезке } [a, b].$$

Пример 2.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение.

Заданные линии ограничивают на плоскости Oxy криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}, \quad x^2 + 4x = x + 4, \quad x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^1 (x + 4 - x^2 - 4x) dx = \int_{-4}^1 (4 - 3x - x^2) dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^1 = \\ &= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

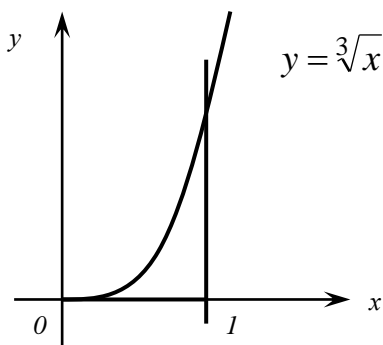
Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$,

1) вокруг оси Ox , вычисляются по формуле $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$;

2) вокруг оси Oy , вычисляются по формуле $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$.

Пример.2.2 Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей Ox и Oy криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y = \sqrt[3]{x}$, осью Ox и прямой $x = 1$.

Решение.



1) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox , равен

$$V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx = \pi \frac{x^{5/3}}{5/3} \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \text{ (куб. ед.)}$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy , равен

$$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x} dx = 2\pi \left. \frac{x^{7/3}}{7/3} \right|_0^1 = \frac{6\pi}{7} (\text{куб. ед.}).$$

Функции нескольких переменных

Переменная величина z называется *функцией двух переменных* x и y , если каждой паре значений (x, y) из данной области соответствует единственное определенное значение $z = f(x, y)$.

Для функции $z = f(x, y)$ вводятся понятия *частных производных* первого порядка, которые определяются выражениями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

и *частных производных* второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ *максимум (минимум)*, если значение этой функции в точке M_0 больше (меньше), чем значения функции в любой точке из окрестности точки M_0 .

Необходимыми условиями существования *экстремума* (максимума или минимума) дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ является равенство нулю ее частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Точки, в которых частные производные обращаются в ноль, называются *стационарными точками* функции $z = f(x, y)$. Для того чтобы стационарная точка являлась экстремумом, в ней должны выполняться до-

статочные условия. Обозначим $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{M_0}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{M_0}$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{M_0}$,

$$\Delta = AC - B^2.$$

Если в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$

$\Delta > 0, A > 0$, то M_0 есть точка минимума;

$\Delta > 0, A < 0$, то M_0 есть точка максимума;

$\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;

$\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример. Исследовать на экстремум функцию
 $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 + 6$.

Решение.

1. Найдем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2y.$$

2. Запишем необходимые условия существования экстремума

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 4 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

значит точка $M(1;2)$ является стационарной точкой функции.

3. Проверим выполнение в точке M достаточного условия. Для этого найдем вторые частные производные функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

В точке $M(1;2)$ $A = -2, B = 0, C = -2$ и $\Delta = (-2) \cdot (-2) - 0 = 4$. Поскольку $\Delta = 4 > 0, A = -2 < 0$, точка $M(1;2)$ является точкой максимума. Значение функции в этой точке $z|_M = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1^2 - 2^2 + 6 = 11$.

Функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$ принимает наибольшее и наименьшее значения в области D , ограниченной линией $\varphi(x, y) = 0$, либо в стационарных точках, расположенных внутри области D , либо на границе этой области.

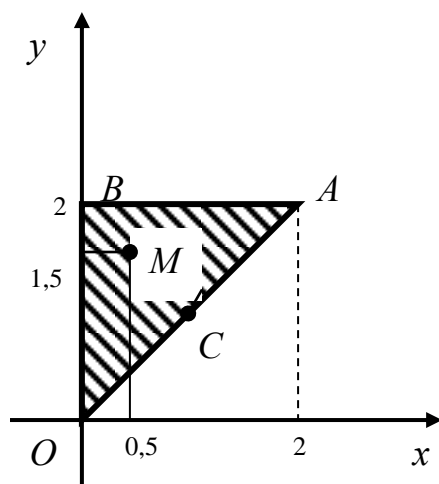
Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ в заданной области D решается по следующему плану:

1. Определяем стационарные точки функции, расположенные внутри области D , и вычисляем значения функции в этих точках.
2. Находим стационарные точки функции на границе $\varphi(x, y) = 0$ области или на отдельных ее участках, заданных различными уравнениями, и вычисляем значения функции в этих точках.
3. Из всех вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x - y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 2$, $y = x$.

Решение.

1. Найдем стационарные точки функции из условий равенства нулю частных производных функции



$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 1,5 \end{cases}$$

Стационарная точка $M(0,5;1,5)$ лежит внутри заданной области OAB .

Значение функции в точке M равно

$$z|_M = 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 1,5 - 4 \cdot 0,5 - 1,5 = -1,75.$$

2. Исследуем поведение функции на границах области:

а) на границе OA $y = x$, $0 \leq x \leq 2$, $z = x^2 + 2x \cdot x - 4 \cdot x - x$ или $z = 3x^2 - 5x$;

$$z' = 6x - 5, \quad z' = 0 \quad \text{при} \quad x = \frac{5}{6}, \quad \text{тогда} \quad y = \frac{5}{6} \quad (\text{так как } y=x).$$

$$\text{В точке } C\left(\frac{5}{6}; \frac{5}{6}\right) \text{ значение функции равно } z|_C = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} = -\frac{25}{12}.$$

Вычислим значения функции в крайних точках отрезка OA .

В точке $O(0;0)$ $z|_O = 0$, в точке $A(2;2)$ значение функции равно

$$z|_A = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 = 2.$$

б) на границе BA $y = 2$, $0 \leq x \leq 2$, $z = x^2 + 2x \cdot 2 - 4x - 2$ или $z = x^2 - 2$;

$$z' = 2x, \quad z' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \text{а } y = 2 \quad \text{согласно уравнению прямой } BA.$$

$$\text{В точке } B(0;2) \text{ значение функции равно } z|_B = 3 \cdot 0^2 - 2 = -2.$$

в) на границе OB $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$, $z = -y$;

$z' = -1 \neq 0$ при всех $y \in [0;2]$, следовательно, стационарных точек на линии OB нет.

3. Из всех вычисленных значений заданной функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$$z|_A = 2 \quad \text{— наибольшее значение функции в области}$$

OAB

$$z|_C = -\frac{25}{12} \quad \text{— наименьшее значение функции в области } OAB$$

Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называют дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x)}{f_1(y)} \rightarrow f_1(y)dy = f_2(x)dx, \quad (1)$$

или в дифференциальной форме

$$f_1(x) \cdot f_2(y)dx + f_3(x)f_4(y)dy = 0. \quad (2)$$

Разделим обе части уравнения (2) на произведение функций

$$f_2(y)f_3(x)$$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = 0 \quad (2')$$

и, после интегрирования, получим общий интеграл (общее решение) уравнения:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy = C.$$

При делении на $f_2(y)f_3(x)$ может произойти потеря некоторых частных решений. Пусть, например, при $y = y_0$ имеем $f_2(y_0) = 0$, тогда функция $y = y_0$ является решением уравнения (2'), т.к. $dy = dy_0 = 0$. Решением может также быть функция $x = x_0$, если $f_3(x_0) = 0$.

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого

$$\text{порядка } x(y+1)dx - (x^2+1)ydy = 0.$$

Решение:

Данное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, причем $f_1(x) = x$; $f_2(y) = y + 1$;

$f_3(x) = x^2 + 1$; $f_4(y) = -y$. Разделим обе части уравнения на произведение

$$f_2(y)f_3(x) = (y+1)(x^2+1)$$

и получим

$$\frac{xdx}{x^2+1} - \frac{ydy}{y+1} = 0.$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy = C,$$

используя подведение под знак дифференциала

$$\int \frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{x^2+1} - \int dy + \int \frac{d(y+1)}{y+1} = C,$$

получим общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2} \ln|x^2+1| - y + \ln|y+1| = C.$$

При делении на $f_2(y) = y+1$ потеряно частное решение: $y = -1$.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (3)$$

линейное относительно искомой функции и её производной, называется *линейным*.

Уравнение (3) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными следующим образом. Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций: $y = u(x) \cdot v(x)$. Одна из этих функций может быть абсолютно произвольной, а вторая определяется в зависимости от первой так, чтобы их произведение удовлетворяло уравнению (3).

Из равенства $y = u \cdot v$ находим $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тогда в соответствие с (3) имеем $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. Выберем в качестве $v(x)$ какое-нибудь частное решение уравнения

$$v' + p(x)v = 0, \quad (4)$$

тогда для отыскания $u(x)$ получим уравнение

$$u'v = q(x). \quad (5)$$

Найдем $v(x)$, разделяя переменные в (4):

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \text{ откуда } \ln v = -\int p(x)dx \text{ и } v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Зная $v(x)$, найдем $u(x)$ из уравнения (5):

$$\frac{du}{dx}v = q(x) \Rightarrow du = e^{\int p(x)dx} q(x)dx, \text{ тогда } u = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Общее решение линейного уравнения (3) имеет вид

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y' - 2y = 1$.

Решение.

Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций:

$$y = u(x) \cdot v(x), \text{ тогда } y' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

и подставим полученные выражения в заданное уравнение

$$u'v + uv' - 2uv = 1.$$

Вынесем за скобки $u(x)$

$$u'v + u(v' - 2v) = 1$$

и, приравнявая к нулю выражение в скобках, получим и решим два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' - 2v = 0$$

$$\frac{dv}{v} = 2dx$$

$$\ln v = 2x$$

$$v = e^{2x}$$

$$u'v = 1$$

$$\frac{du}{dx} e^{2x} = 1$$

$$du = e^{-2x} dx$$

$$u = \int e^{-2x} dx,$$

$$u = -\frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

Запишем общее решение заданного дифференциального уравнения в виде

$$y = uv = \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) \cdot e^{2x}, \text{ или } y = -\frac{1}{2} + C e^{2x}.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (6)$$

называется неоднородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами a_1 и a_2 .

Общее решение этого уравнения $y = \bar{y} + y^*$, где \bar{y} – общее решение соответствующего однородного уравнения; y^* – частное решение уравнения (6). Дифференциальное уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (7)$$

является однородным и называется соответствующим неоднородному уравнению (6). Общее решение однородного уравнения (7) находят по корням характеристического уравнения

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение может иметь три случая для корней r_1 и r_2 :

- 1) корни характеристического уравнения действительные и различные: $r_1 \neq r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\bar{y} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные;

2) корни характеристического уравнения действительные и равные:

$r_1 = r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\bar{y} = e^{r_1 x} (C_1 + C_2 x)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные;

3) корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа $r_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i, \beta \neq 0$. В этом случае общее решение уравнения

(7) записывается в виде $\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Частное решение y^* неоднородного уравнения (6) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в зависимости от вида правой части уравнения $f(x)$.

Первый случай. Правая часть уравнения (6) имеет вид $f(x) = P(x)e^{mx}$, где $P(x)$ – многочлен. Тогда уравнение (6) имеет частное решение вида

$$y^* = x^k Q(x) e^{mx}, \quad (8)$$

где $Q(x)$ – полный многочлен той же степени от x , что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами;

$k = 0$, если число m не является корнем характеристического уравнения;

$k = 1$, если число m является простым корнем характеристического уравнения;

$k = 2$, если число m является двукратным корнем характеристического уравнения.

Правило сохраняет свою силу и при $m = 0$, когда $f(x) = P(x)$ – многочлен.

Неопределенные коэффициенты в многочлене $Q(x)$ определяют подстановкой функции (8) и ее производных в уравнение (6) с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' - 3y' - 4y = 4x - 1, \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2 - 3r - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня $r_1 = -1, r_2 = 4$, следовательно, $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = 4x - 1 = (4x - 1) \cdot e^{0 \cdot x}$, где $m = 0$ и не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение при $k = 0$ ищем в виде $y^* = x^0 \cdot (Ax + B) \cdot e^{0 \cdot x} = Ax + B, (y^*)' = A, (y^*)'' = 0$. После подстановки в дифференциальное уравнение получаем

$$\begin{aligned} 0 - 3A - 4(Ax + B) &= 4x - 1; \\ -3A - 4Ax - 4B &= 4x - 1; \\ -4A \cdot x + (-3A - 4B) &= 4 \cdot x + (-1); \end{aligned}$$

$$x^1: -4A = 4; \quad A = -1$$

$$x^0: -3A - 4B = -1, \quad -4B = -1 + 3A = -4, \quad B = 1$$

Частным решением является функция $y^* = Ax + B = -1 \cdot x + 1 = 1 - x$. Общим решением является функция $y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - x + 1$.

Найдем значение констант C_1, C_2 из начальных условий. Для этого определим $y' = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x} - 1$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} y|_{x=0} = C_1 + C_2 + 1 = 2, \\ y'|_{x=0} = -C_1 + 4C_2 - 1 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Искомым частным решением является функция $y = e^{4x} - x + 1$.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 4 = 0$ имеет двукратный корень $r_1 = 2$, следовательно, $\bar{y} = e^{2x}(C_1 + C_2x)$. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = e^{2x}$, $m = 2$ является двукратным ($k = 2$) корнем характеристического уравнения, тогда частное решение ищем в виде

$$y^* = x^2 \cdot Ae^{2x}, \quad (y^*)' = x^2 \cdot 2Ae^{2x} + 2x \cdot Ae^{2x} = 2Ae^{2x}(x^2 + x),$$

$$(y^*)'' = 4Ae^{2x}(x^2 + x) + 2Ae^{2x}(2x + 1) = Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2).$$

После подстановки y^* и ее производных в исходное дифференциальное уравнение получаем

$$Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2) - 4 \cdot 2Ae^{2x}(x^2 + x) + 4Ae^{2x} \cdot x^2 = e^{2x},$$

$$Ae^{2x}(\cancel{4x^2} + \cancel{8x} + 2 - \cancel{8x^2} - \cancel{8x} + \cancel{4x^2}) = e^{2x},$$

$$2Ae^{2x} = e^{2x},$$

$$2A = 1, \quad A = \frac{1}{2}.$$

Частным решением является функция $y^* = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2$.

Общим решением является функция

$$y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2.$$

Найдем значение констант C_1, C_2 из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = e^{2x}(2C_1 + 2C_2x + C_2) + e^{2x}(x^2 + x),$$

и получим систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y|_{x=0} = e^0 \cdot C_1 = 2, \quad C_1 = 2$$

$$y'|_{x=0} = e^0 (2C_1 + C_2) = 3, \quad C_2 = -1$$

Искомым решением является функция $y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(2 - x) + \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2$.

Второй случай. Правая часть уравнения (6) имеет вид $f(x) = a \cos nx + b \sin nx$.

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то

$$y^* = A \cos nx + B \sin nx.$$

Если числа $\pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y^* = (A \cos nx + B \sin nx) \cdot x.$$

В частных случаях, когда a или b равно нулю, решение всё равно надо искать в указанном общем виде.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'' + 4y' + 13y = 5 \sin 3x, \quad y|_{x=0} = \frac{1}{8}, \quad y'|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 13 = 0$ имеет корни

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i,$$

тогда $\bar{y} = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Числа $\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому

$$y^* = A \sin 3x + B \cos 3x,$$

$$(y^*)' = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x,$$

$$(y^*)'' = -9A \sin 3x - 9B \cos 3x.$$

Подставляем y^* и ее производные в исходное уравнение и получаем

$$-9A \sin 3x - 9B \cos 3x + 4(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) + 13(A \sin 3x + B \cos 3x) = C,$$

$$(4A - 12B) \sin 3x + (4B + 12A) \cos 3x = 5 \cdot \sin 3x + 0 \cdot \cos 3x;$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin 3x: 4A - 12B = 5 \\ \cos 3x: 4B + 12A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = \frac{1}{8} \\ B = -\frac{3}{8} \end{array} \right\}.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{3}{8} \cos 3x.$$

Найдем значение констант C_1, C_2 из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = -2e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-2x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) +$$

$$+ \frac{3}{8} \cos 3x + \frac{9}{8} \sin 3x$$

и запишем систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y|_{x=0} = e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) - \frac{3}{8} = \frac{1}{8},$$

$$y'|_{x=0} = -2e^0 (C_1 + C_2 \cdot 0) + e^0 (C_1 \cdot 0 + 3C_2) + \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}, \\ C_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8} \right) = \frac{3}{8}. \end{array} \right.$$

Искомым решением является функция

$$y = e^{-2x} \left(\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{3}{8} \sin 3x \right) + \frac{1}{8} \sin 3x - \frac{3}{8} \cos 3x.$$

Ряды

Степенным рядом называют ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (9)$$

расположенный по степеням двучлена $(x-a)$.

В соответствии с теоремой Абеля ряд (9) сходится на интервале $x \in (a-R, a+R)$, а для всех x , лежащих вне этого интервала, ряд расходится. Число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда. На концах интервала (при $x = a-R$ и при $x = a+R$) вопрос о сходимости и расходимости данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда. У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ($R=0$), у других охватывает всю ось Ox ($R=\infty$).

Согласно признаку Даламбера радиус сходимости определяют по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (10)$$

Если воспользоваться признаком Коши, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

Пример. Найти интервал сходимости ряда и исследовать его

сходимость на краях интервала $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}$

Решение.

Радиус сходимости определим по формуле (10):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 10^{n+1}}{n \cdot 10^{n-1}} \right| = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 10 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 10.$$

На концах интервала: при $x = -10$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n \cdot 10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \text{ который является знакочередующимся и сходится по}$$

теореме Лейбница, так как его члены убывают по абсолютной величине

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \text{ При } x = 10 \text{ получим гармонический ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится. Таким образом, данный степенной ряд сходится при $x \in [-10; 10)$.

Основные элементарные функции имеют простые разложения по степеням x , которые представлены ниже:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1].$$

При приближенных вычислениях определенных интегралов требуется разложить подынтегральную функцию в степенной ряд, который в пределах интервала сходимости может быть почленно проинтегрирован. Используя формулу Ньютона – Лейбница, определенный интеграл вычисляют как частичную сумму получающегося числового ряда. Если ряд знако-

чередующийся, то точность приближенных вычислений не превосходит первого из отброшенных членов.

Пример. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда:

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Решение.

Используем разложение в ряд для функции $\sin x$ и подставим его в подынтегральное выражение

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{0,5} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\ &= \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)} + \dots \right) \Bigg|_0^{0,5} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 3! 3} + \frac{1}{2^5 5! 5} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{2n-1} (2n-1)! (2n-1)} + \dots \approx \\ &\approx 0,5 - 0,0069 + 0,00005 \approx 0,5 - 0,0069 \approx 0,4931 \approx 0,493. \end{aligned}$$

В вычислениях приведены первые три члена ряда с сохранением четырех знаков после запятой, так как заданная точность составляет 0,001. Третий член ряда отброшен, так как он по величине меньше заданной точности ($0,00005 < 0,001$). В окончательном результате проведено округление до трех знаков после запятой.

Теория вероятностей

При классическом определении *вероятность события* определяется равенством

$$P(A) = m/n,$$

где m – число элементарных исходов испытаний, благоприятствующих появлению события A , n – общее число элементарных исходов испытания.

Число сочетаний из l элементов по k называют количество комбинаций, составленных из l элементов по k , которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}.$$

Пример. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Решение:

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь три детали из пятнадцати, то есть $n = C_{15}^3$;

б) число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, равно числу способов, которыми можно выбрать три окрашенных детали из 10, то есть $m = C_{10}^3$;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{\frac{10!}{3! \cdot 7!}}{\frac{15!}{3! \cdot 12!}} = \frac{10! \cdot 12!}{7! \cdot 15!} = \frac{\cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{7!} \cdot \cancel{12!} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{24}{91} \approx 0,26.$$

Пример. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобрали 5 деталей. Определить вероятность того, что среди отобранных деталей ровно три стандартных.

Решение:

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь пять деталей из десяти, то есть $n = C_{10}^5$;

б) найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных пяти деталей ровно три стандартные): три стандартные детали можно выбрать из 7 стандартных деталей C_7^3 способами; при этом остальные $(5-3=2)$ детали должны быть нестандартными, которые можно выбрать из $(10-7=3)$ нестандартных деталей, имевшихся в партии, C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов $m = C_7^3 \cdot C_3^2$;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!}}{\frac{10!}{5! \cdot 5!}} = \frac{7! \cdot 5! \cdot 5!}{2! \cdot 4! \cdot 10!} = \frac{\cancel{7!} \cdot \cancel{4!} \cdot 5 \cdot 5!}{2 \cdot \cancel{4!} \cdot \cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{5!}{4 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{3}{8} = 0,375$$

Вероятность события A , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A),$$

где $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$.

Приведенную формулу называют *формулой полной вероятности*.

Пример. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь.

Найти вероятность того, что она окажется бракованной.

Решение:

а) обозначим через A событие – взятая деталь является бракованной. Можно сделать три предположения (гипотезы): H_1 – деталь выбрана из первой партии; H_2 – деталь выбрана из второй партии; H_3 – деталь выбрана из третьей партии. Поскольку число деталей во всех трех партиях равно, вероятности гипотез равны

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

б) условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из первой партии, $P_{H_1}(A) = 0$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из второй партии, $P_{H_2}(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из третьей партии, $P_{H_3}(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

в) искомая вероятность того, что выбранная наудачу деталь является бракованной, находится по формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Вероятность того, что в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), определяется по формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$ – вероятность того, что событие в каждом из испытаний не появится.

Пример. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех.

Решение:

а) пусть событие A – из 4 семян взойдут не менее трех семян; событие B – из 4 семян взойдут 3 семени; событие C – из 4 семян взойдут 4 семени. По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

б) вероятности событий B и C определим по формуле Бернулли:

$$P(B) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0,9^3 \cdot (1-0,9) = 0,2916,$$

$$P(C) = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0,9^4 = 0,6561.$$

в) искомая вероятность $P(A) = 0,2916 + 0,6561 = 0,9477$.

Если число повторяющихся испытаний велико, то определение вероятности по формуле Бернулли затруднено из-за громоздкости вычислений. В этом случае применяют приближенную формулу, выражающую *локальную теорему Лапласа*:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ определяются из таблицы, приведенной в приложении 1.

При малых значениях вероятности p для вычисления $P_n(k)$ применяют асимптотическую формулу Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } e = 2,7182...; \lambda = np.$$

Эта формула используется при $\lambda \leq 10$, причем чем меньше p и больше n , тем результат точнее.

Пример. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдут 350 семян.

Решение.

а) из условия задачи $p = 0,9; q = 1 - 0,9 = 0,1; n = 400; k = 350$. Тогда

$$x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -\frac{10}{6} \approx -1,67;$$

б) из таблицы в приложении 1 находим $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67) = 0,0989$;

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \cdot 0,0989 \approx 0,0165.$$

Пример. Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

Решение.

Из условия задачи $p = 0,0002; n = 10000; k = 6$. Тогда $\lambda = 10000 \cdot 0,0002 = 2$.

Искомая вероятность равна

$$P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} \approx \frac{64}{720} \cdot 0,1353 \approx 0,012.$$

Если вероятность наступления события A в каждом из n испытаний постоянна и равна p , то вероятность $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ того, что событие A в таких испытаниях наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, определяется по интегральной теореме Лапласа формулой:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

где $\alpha = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $\beta = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

Функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется функцией Лапласа. В приложении 2 даны значения этой функции для $0 \leq x \leq 5$. При $x > 5$ функция $\Phi(x) = 0,5$. При отрицательных значениях x в силу нечетности функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Используя функцию Лапласа, имеем

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Пример. Процент всхожести семян пшеницы равен 90%. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

Решение.

а) из условия задачи $p = 0,9$; $q = 1 - 0,9 = 0,1$; $n = 500$; $k_1 = 400$; $k_2 = 440$.

Тогда $\alpha = \frac{400 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -7,45$; $\beta = \frac{440 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,49$.

б) из таблицы в приложении 2 находим

$$\Phi(-1,49) = -\Phi(1,49) \approx -0,4319; \quad \Phi(-7,45) = -\Phi(7,45) \approx -0,5.$$

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(400 \leq k \leq 440) \approx \Phi(-1,49) - \Phi(-7,45) = -0,4312 + 0,5 = 0,0681.$$

Литература

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/91080> — Загл. с экрана.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2017. — 224 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/92615> — Загл. с экрана.
3. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 240 с. — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/4549> — Загл. с экрана.
4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов. Т.1 / Н.С.Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2010. — 416 с.
5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов : в 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2009. — 544 с.
6. Лакерник А.Р. Высшая математика. Краткий курс [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Лакерник А.Р.— Электрон. текстовые данные.— М.: Логос, 2008.— 528 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/9112.html>.— ЭБС «IPRbooks»
7. [Гмурман, В. Е.](#) Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2011. — 480 с. : ил. — (Основы наук). — Предм. указ.: с. 474-479. — ISBN 978-5-9916-1163-3 (Изд-во Юрайт). — ISBN 978-5-9692-1122-3 (ИД Юрайт).
8. Инченко О.В. Математика для заочников: учебное пособие./ О.В. Инченко, В.А. Кузнецова; Тула: Изд-во ТулГУ, 2019. 167с. ISBN 978-5-7679-4249-3.

Дополнительная литература

1. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. — Режим доступа : <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214370663049600009433>, по паролю
2. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. — Режим доступа по паролю : https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/201410021441294315510000_8498, по паролю

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. Дифференциальные уравнения [электронный ресурс] : ежемесячный математический журнал: журнал/ РАН. - М.: Наука/Интерпериодика, 2014 - . - ISSN 0374-0641.- Режим доступа : <http://elibrary.ru/issues.asp?id=9677>, со всех компьютеров НБ ТулГУ, по паролю
2. Успехи математических наук/ Российская академия наук. - М.: Наука, 1995-ISSN 0042-1316
3. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- Режим доступа: <https://tsutula.bibliotech.ru/>, по паролю.- Загл. с экрана
4. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.- Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/>, по паролю.- .- Загл. с экрана
5. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: <http://elibrary.ru/> , по паролю.- Загл. с экрана.
6. НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа, режим доступа <http://cyberleninka.ru/> ,свободный.- Загл. с экрана.
7. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://window.edu.ru.> ,свободный.- Загл. с экрана.
8. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://exponenta.ru.> ,свободный.- Загл. с экрана.