

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева

Кафедра «Ракетное вооружение»

Утверждено на заседании кафедры
«Ракетное вооружение»
«_13_» __01__2020 г., протокол №_5

И.о. зав. кафедрой

_____ А.В. Смирнов

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине (модулю)
«Компьютерные технологии в баллистике»**

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки
24.03.03 Баллистика и гидроаэродинамика

с направленностью (профилем)
Баллистика ракет и снарядов

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 240303-01-21

Тула 2021 год

**ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ
методических указаний**

Разработчик:

Дунаева И.В., доцент, к.т.н., доцент _____
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) _____ (подпись)

Оглавление

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОМЕХАНИКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.	4
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОМЕХАНИКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.	18
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.	26
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.	33
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5. РАЗРАБОТКА ЭТАПОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В СООТВЕТСТВИИ С ИНДИВИДУАЛЬНЫМ ЗАДАНИЕМ. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЁТНОЙ СХЕМЫ И ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ИНДИВИДУАЛЬНОМУ ЗАДАНИЮ.	38
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6. ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИНДИВИДУАЛЬНОМУ ЗАДАНИЮ.	40
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОБХОДИМЫХ ПАРАМЕТРОВ КОНСТРУКЦИИ	42

**Лабораторная работа №1. Построение дискретной модели для решения задач
тепломеханики методом конечных элементов.**

1. Цель и задачи работы.

При выполнении работы студенты должны закрепить теоретические знания по основам метода конечных элементов (МКЭ), как прямого вариационного метода, и получить практические навыки выбора типа конечных элементов для решения конкретной задачи, освоить работу в программе дискретизации области на конечные элементы, построить дискретную геометрическую модель.

2. Основы теории.

2.1. Краткая историческая справка.

Одним из наиболее эффективных численных методов, получивших в последнее время широкое распространение для решения наиболее сложных задач механики сплошной среды, строительной механики, теории теплопроводности, фильтрации и других, является метод конечных элементов. Возникновение МКЭ связано с решением задач космических исследований и относится к 1950 г., хотя развитие вспомогательных дисциплин (теория стержневых конструкций, матричная алгебра) началось значительно раньше (1850 г.). Впервые этот метод был опубликован в работе американских ученых Тернера М.; Клужа Р.; Мартина Х. и Топпа Л. Большой вклад в развитие МКЭ внесли советские ученые Розин Л А., Михлин С.Г. , Постнов В.А. и др.

Большое значение для теоретической разработки МКЭ имеет сделанное в 1963 г. представление этого метода как одного из вариантов метода Ритца решения вариационных задач. Связь МКЭ с процедурой минимизации некоторого функционала привела к его использованию не только в задачах строительной механики, но и к решению задач, описываемых уравнениями Лапласа, Пуассона (задачи теплопроводности, гидромеханики) и др.

Дальнейшее развитие МКЭ привело к его расширению на решение любых дифференциальных уравнений на основе метода Галеркина или способа наименьших квадратов, обеспечивающего получение уравнений для свойств конечных элементов. Таким образом, более общие теоретические обоснования МКЭ исключают необходимость вариационной формулировки физической задачи.

2.2. Основная концепция метода конечных элементов.

Будем рассматривать МКЭ, используя идею прямого приближенного решения вариационной формулировки проблемы, на основе которой строится для каждого конечного элемента связь: воздействие на КЭ (например, сила, тепловой поток) - ответная реакция КЭ (перемещение, температура). Дискретизация сплошной Среды в виде элементов, связанных конечным числом узловых связей, позволяет с одной стороны сохранить свойства Среды в каждом КЭ, а с другой, наличие конечного числа связей позволяет свести математическое описание поведения конструкции к конечному числу алгебраических уравнений.

В отличие от метода конечных разностей, аппроксимация,ложенная в основу МКЭ, имеет явно выраженную физическую природу, что облегчает контроль над решением задачи и использование метода. Аппроксимация,ложенная в основу МКЭ, имеет явно выраженную физическую природу, что облегчает контроль над решением задачи и использованием метода.

Исходя из вышеотмеченного, основная идея метода конечных элементов состоит в том, что любую непрерывную величину, такую, как температура, давление, перемещение необходимо аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей (конечных элементов). Эти кусочно-непрерывные функции определяются внутри каждого КЭ с помощью значений функции в узловых точках. Для каждого элемента может быть определен свой вид функции, но эти функции подбираются так, чтобы сохранилась их непрерывность вдоль границ элементов.

Основная концепция МКЭ может быть наглядно проиллюстрирована на одномерном примере распределения температуры в стержне (рис. 1).

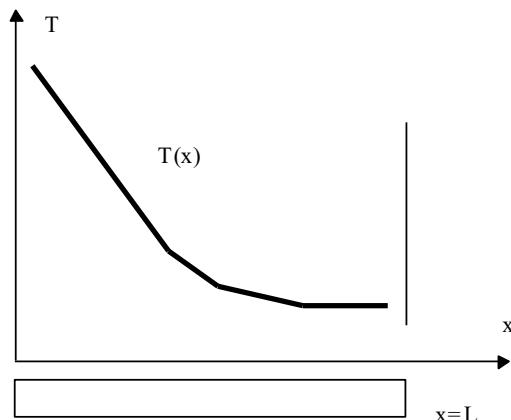


Рис. 1. Распределение температуры в стержне

Разбиение области L на конечные элементы может быть проведено различными способами. Можно, например, использовать четыре конечных элемента с линейным распределением температуры (рис.2). Можно взять два элемента, но для повышения точности аппроксимации ввести в эти элементы дополнительные узловые точки и использовать при этом аппроксимацию полиномом второй степени (рис.3).

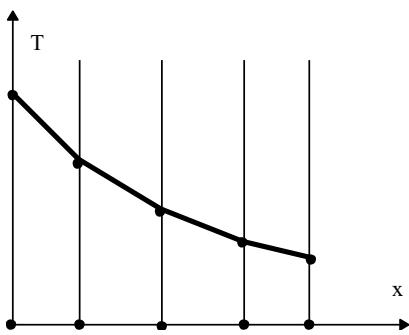


Рис. 2. Линейная аппроксимация распределения T

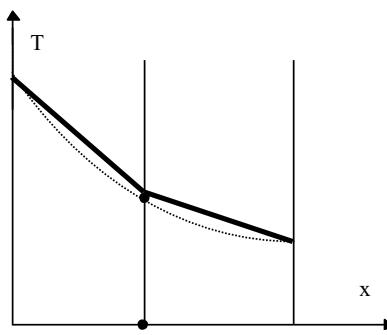


Рис.3. Аппроксимация распределения T параболой

Необходимо отметить, что во втором случае приближение будет также кусочно-непрерывным, т.к. углы наклона кривых каждого элемента в точке их контакта будут различны.

Вводя конечные элементы, мы переходим от бесконечного множества неизвестных температур в точках непрерывного стержня (рис.1) к конечному числу неизвестных температур в узловых точках дискретного стержня (рис.2, 3), так как в каждом конечном элементе между узловыми точками температура изменяется по известному заранее заданному закону.

Задача при этом сводится к нахождению таких значений узловых температур, которые обеспечивают наилучшее приближение к истинному распределению температуры. Это приближение осуществляется путем минимизации функционала, связанного с физической сущностью задачи. Для задачи распространения тепла минимизируется функционал, связанный с соответствующим дифференциальным уравнением теплопроводности, которое является для этого функционала уравнением Эйлера. Минимизация этого функционала в классе кусочно-непрерывных функций сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений относительно узловых температур.

Приведенные рассуждения аналогично могут быть сформулированы для двух- и трехмерных областей.

В двумерных задачах широкое распространение получили элементы в виде треугольника или четырехугольника. Стороны линейных элементов представляют собой прямые линии, а если используется аппроксимация полиномом второй (квадратичный элемент), третьей (кубический), то стороны могут быть криволинейными и иметь дополнительные узловые точки (рис.4).

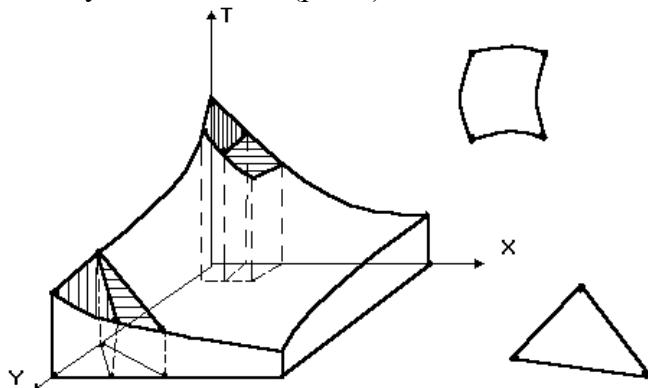


Рис. 4. Виды конечных элементов в двумерных задачах

При решении осесимметричных задач, характерных для двигателя, применяются осесимметричные элементы, имеющие треугольное или четырехугольное сечение (рис.6).

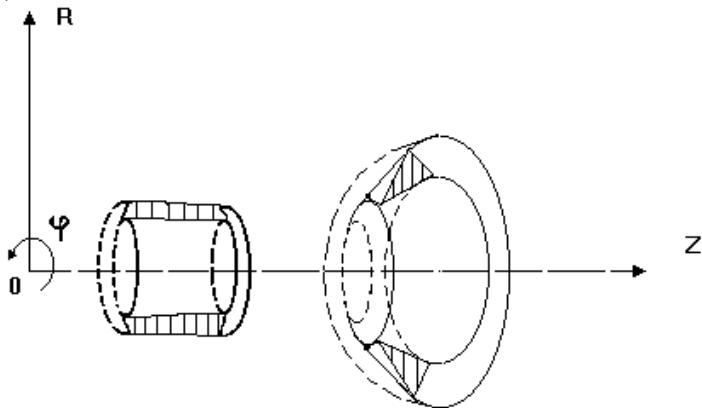


Рис. 5. Виды конечных элементов в осесимметричных задачах

Разбиение области на подобласти (КЭ) представляет собой первый шаг на пути решения задачи. Этот шаг не имеет еще строгого теоретического обоснования. Искусство разбиения области на КЭ зависит от имеющихся навыков. Дискретизация тела на КЭ включает задание числа, размеров и формы КЭ, которые используются для построения дискретной модели реального тела. Здесь необходимо учитывать, что, с одной стороны, элементы должны быть достаточно малыми для достижения высокой точности, но с другой, применение более крупных элементов сокращает вычислительную работу. Поэтому в зонах ожидаемых высоких градиентов исследуемой функции (например, температуры) уменьшают размеры КЭ и увеличивают их там, где ожидаемые значения функции изменяются незначительно. Возможность варьирования размеров элементов - важное достоинство метода конечных элементов.

Дискретизация одномерного тела проста, так как она сводится к делению отрезка на части, поэтому рассмотрим особенности разбиения двумерного тела на конечные элементы. В качестве КЭ выберем треугольник - простейший из двумерных элементов и достаточно широко используемый. Выделим ряд важных приемов, применяемых при дискретизации тела на КЭ.

Если граница тела криволинейна, то криволинейные границы элементов заменяют прямолинейными (или другими), используемыми в данном КЭ.

Не рекомендуется использовать КЭ, удлиненные в одном направлении, т.к. это снижает точность решения задачи.

Не обеспечит повышение точности использование конечных элементов, слишком сильно отличающихся по размерам (более чем в 10 раз).

При моделировании тел, бесконечно протяженных в одном или нескольких направлениях, необходимо ограничивать дискретную модель достаточно большой областью, так чтобы значения параметров на границе согласовались бы с достаточной точностью с известными данными.

Применение изложенных идей дискретизации проиллюстрировано на рис.7.

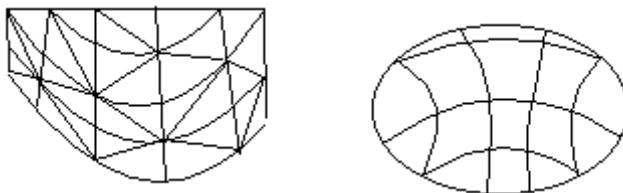


Рис.6. Дискретизация области на конечные элементы

3. Варианты заданий.

После освоения программ дискретизации двумерной области на конечные элементы и теплового расчета, студенту для конкретного объекта, выданного преподавателем, необходимо построить дискретную модель и выполнить ввод физических данных в программу теплового расчета.

Для выполнения лабораторной работы используются следующие задания:

1. Формирование исходных данных для численного решения задачи стационарной теплопроводности.
2. Формирование исходных данных для численного решения задачи нестационарной теплопроводности.
3. Формирование исходных данных для численного решения задачи механики деформируемого твердого тела.
4. Формирование исходных данных для численного решения задачи о термоан-пряженном состоянии твердого тела.

Viz2 – программа построения, визуализации и «сборки» области газа *.geo и контуров внутренних тел *.kon (при их наличии), установки активных границ и контрольных точек вывода информации в виде динамических графиков.

В файле **Gas2.prj** содержится информация по составу файлов проекта. По требованию пользователя могут быть созданы файлы точки останова, полный файл результатов (в машинных кодах) – *.rez и *.reF, предназначенные для «восстановления» процедуры расчета длительного газодинамического процесса, реализация которого может быть растянута на несколько дней и недель.

Файлы с расширением *.ini, *.tmp и *.re\$ являются внутренними вспомогательными файлами, которые создаются ПЭВМ в процессе работы ПК.

В соответствии с функциональным назначением программ ПК, используемыми средствами графического инженеринга и графического представления результатов, инструментарий ПК включает:

- функциональные клавиши ввода данных;
- функциональные клавиши редактирования и настройки;
- функциональные клавиши текущего контроля результатов;
- функциональные клавиши сохранения текущего состояния проекта.

Под «функциональной клавишей» – понимается кнопка с изображением, установленная на панели программы, активация (одинарный щелчок левой кнопки мыши) которой приводит к выполнению заданной команды или предписания.

Инструментарий программного комплекса

Инструментарий ПК (перечень функциональных клавиш) включает одно- и двухпозиционные видимые Button– компоненты:

- ВВОДА и РЕДАКТИРОВАНИЯ:

Вид изобра-	Назначение	Фай
-------------	------------	-----

жения		л (*.exe)
Ввод контура и дискретизация области		
1.		– ввод произвольного контура
1.1.		– добавление узла в контур
1.2.		– удаление узла из контура
1.3.		– перемещение узла в контуре
2.		– ввод контура с полярной дискретизацией в плоскости R,φ
3.		– ввод контура с декартовой дискретизацией в плоскости X,Y
4.		– прямоугольная дискретизация произвольного контура (выполняется после п.1)
5.		– линейная (интерполирующая) дискретизация произвольного контура (выполняется после п.1)
6.		– ввод активных границ в расчетной области
7.		– ввод границ зазоров
7.1.		– смещение точек границ зазоров
8.		– ввод узлов для вывода динамических графиков (только после «Оптимизации»)
9.		– ввод маркеров на теле для вывода динамических графиков (только после «Оптимизации»)
10.		– удаление элементов (при необходимости)
11.		– ввод регионов в расчетной области
12.		– ввод подобластей в расчетной области
13.		– проверка построения сетки
14.		– оптимизация формы сетки элементов
15.		– указание по одному (используется при вводе регионов, подобластей и удалении элементов)
16.		– указание группы (используется при вводе регионов, подобластей и удалении элементов)

Viz2

Viz2

17.		– сдвиг изображения	Gas2 , Term2, Viz2
18.		– масштаб изображения	
19.		– показать область крупным планом	
20.1.		– увеличить визуальное изображение расчетной области	
20.2.		– уменьшить визуальное изображение расчетной области	
20.3.		– вписать изображение расчетной области в размер окна	
21.		– вывод информации о созданной сетке с указанием числа узлов, элементов и длины ленточной матрицы	Viz2
22.		– показать нумерацию узлов	
23.		– показать нумерацию элементов	
24.		– показать узлы сетки расчетной области	Viz2
25.		– показать центры элементов	
26.		– показать объекты	
27.		– показать регионы	
28.		– показать подобласти	
29.		– показать границы	
30.		– показать контрольные точки для графиков на тес	Viz2
31.		– показать контрольные точки для графиков в облас	

Для создания контура и ввода его в файл NAME.geo необходимо в дополнительном файле, созданном с применением п.1, п.1.1, п.1.2, п.1.3 и сохраненном как NAME.con провести следующие операции (при нажатии соответствующих функциональных клавиш)

32.		– добавить контур объекта	Viz2
33.		– удалить контур объекта	

34.		– выделить и сохранить контур сетки	
35.		– показать только контур области	
36.		– показать контур области с наложением	
37.		– убедившись, что контур находится в заданном положении, сохранить файл NAME.geo	
Кроме того, доступны еще следующие операции:			
38.		– создать чистый лист	Viz2
39.		– открыть созданный ранее файл сетки или контура области	
40.		– индивидуальные настройки пользователя	
41.		– вызов помощи	Gas2 , Term2, Viz2
42.		– перерисовать область (Viz2), подготовить данные для повторного расчета (Term2, Gas2)	
43.		– выход из программы	

Перед созданием контура, предварительно необходимо ознакомиться с той документацией (КД, пакет чертежей и т.д.) на конкретное изделие.

Ваша задача: выделить на чертеже ту область, в которой необходимо провести расчет. В программе [Viz2](#) при задании контура Вы должны нарисовать только функциональную схему.

ГОСТ 2.102-68. Схема – это документ, на котором в виде условных (упрощенных) изображений или обозначений представлены составные части изделия, а также связи между ними.

Пример: ствол + снаряд. Если в задании, речь идет о внутрибаллистическом исследовании, то необходима детальная прорисовка контура канала ствола и снаряда, положения и установка параметров топливной навески и т.п. В случае же, анализа ударно-волновой картины, создаваемой в окружающем пространстве указанные выше нюансы внутрибаллистического исследования являются малозначимыми. В случае такой задачи, необходимо прорисовывать наружный контур ствола и, по возможности, всех внешних элементов, являющихся в реальном процессе источниками отраженных волн.

В конечном итоге, после того как Вами будут сформированы все файлы и выполнен расчет, на координатной плоскости можно будет посмотреть графики и фоновые картины в конкретных точках. Если в программе [Viz2](#) Вы не зададите точки для графиков, то в программах [Gas2](#) и [Term2](#) на координатной плоскости графики отображаться не будут.

Методика формирования файлов (*.geo)

Задание контура		
1		Укажите курсором на клавишу ввода контура и введите предполагаемый контур области (см. ОРГАНИЗАЦИЯ «Ввод контура»).
2		С помощью данной клавиши при необходимости можно добавить узел в уже существующий контур (см. ОРГАНИЗАЦИЯ «Добавление узла»).
3		При желании узел можно удалить (см. ОРГАНИЗАЦИЯ «Удаление узла»)
4		или переместить при необходимости (см. ОРГАНИЗАЦИЯ «Перемещение узла»).

После того как Вы создали замкнутый контур, надо разбить область, ограниченную данным контуром на элементарные ячейки. Выбор количества узлов (числа ячеек) в расчетной области определяется двумя взаимоисключающими критериями: с увеличением числа ячеек достигается повышение устойчивости и точности (сходимости) вычислительного процесса, при этом, одновременно, увеличивается и время проведения расчета.

Дискретизация плоской прямоугольной области		
1		Укажите курсором на данную клавишу.
2		В появившемся диалоговом окне задайте исходные параметры.
Дискретизация симметричной кольцевой области		
1		Укажите курсором на данную клавишу.

2	<p>В появившемся диалоговом окне задайте исходные параметры.</p>
---	--

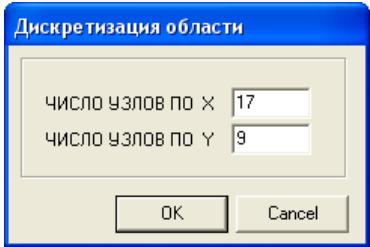
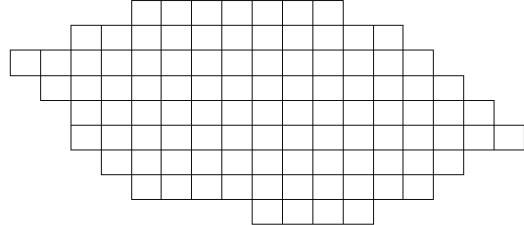
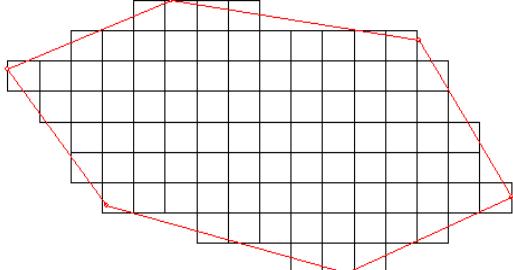
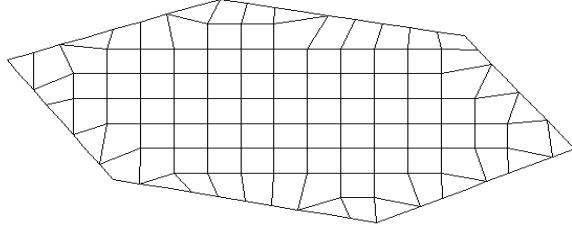
Дискретизация несимметричной кольцевой области

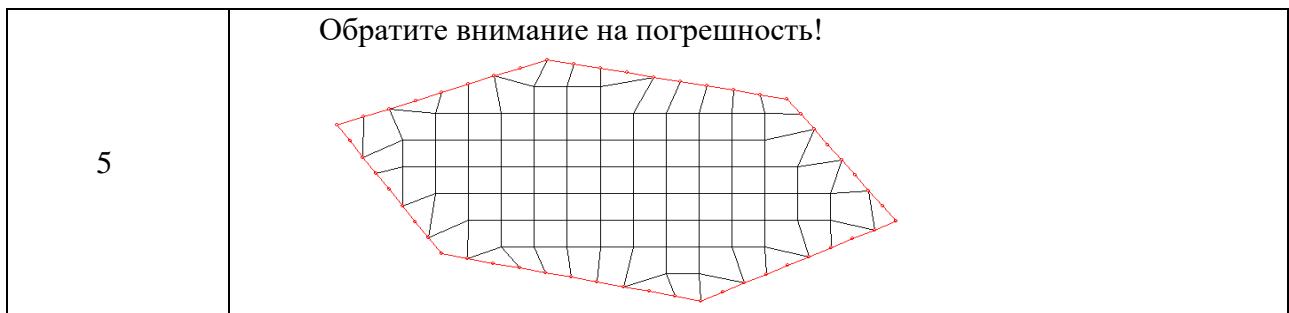
1	<p>Выберите в меню «Сетка» опцию «Создать дискретное разностенное кольцо»</p>
---	---

2	<p>В появившемся диалоговом окне задайте исходные параметры.</p>
---	--

Дискретизация области произвольной геометрии /1/

1		<p>Укажите курсором на данную клавишу.</p>
---	--	--

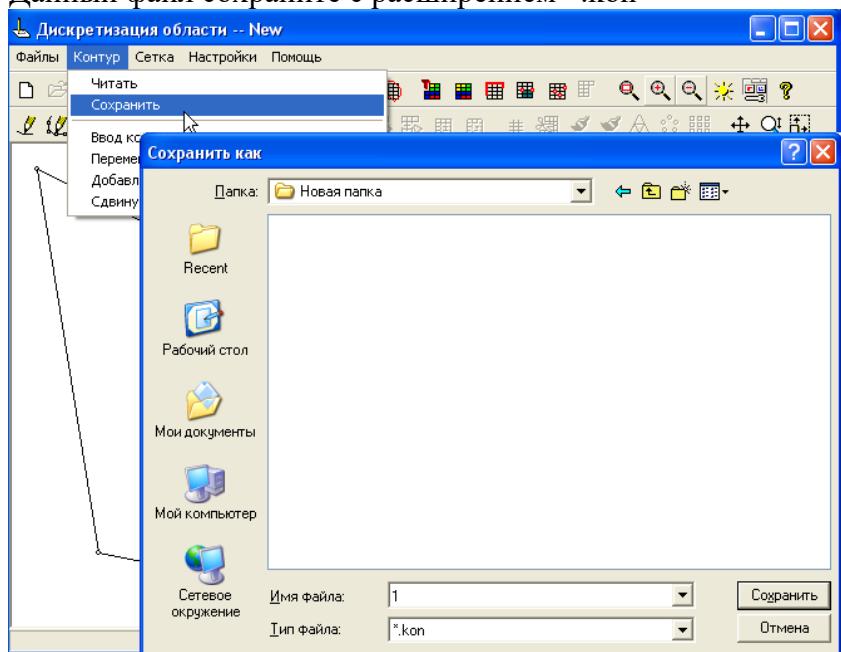
	В появившемся диалоговом окне задайте исходные параметры.
2	
3	Нажмите «OK» или клавишу [Enter].
4	Посмотрите на созданную сетку. 
5	Обратите внимание на погрешность! 
Дискретизация области произвольной геометрии /2/	
1	 Укажите курсором на данную клавишу.
2	В появившемся диалоговом окне задайте исходные параметры.
3	Нажмите «OK» или клавишу [Enter].
4	Посмотрите на созданную сетку. 



Методика формирования файлов (*.kon)

Графический файл с расширением «.kon» предназначен для создания образа плоской проекции подвижного (или неподвижного) тела (системы тел), размещаемых в расчетной области, процедура создания и редактирования которой была описана выше (методика формирования файла *.geo). После того как создан контур и сетка расчетной области, произведено редактирование и сохранение, можно добавить к последнему ещё один контур (объект). *Например:* ствол пушки + снаряд.

Для этого необходимо в программе **Viz2** на панели интерфейса выбрать иконку «Чистый лист». После загрузки листа нового проекта Вы можете нарисовать в нём контур и отредактировать координаты узлов. Форма контура может быть любой.

Добавление контура		
1		Укажите курсором на данную клавишу.
2		В появившемся диалоговом окне нарисуйте новый контур и отредактируйте его (см. п.5.3.3 «Задание контура»).
3		<p>Данный файл сохраните с расширением *.kon</p> 

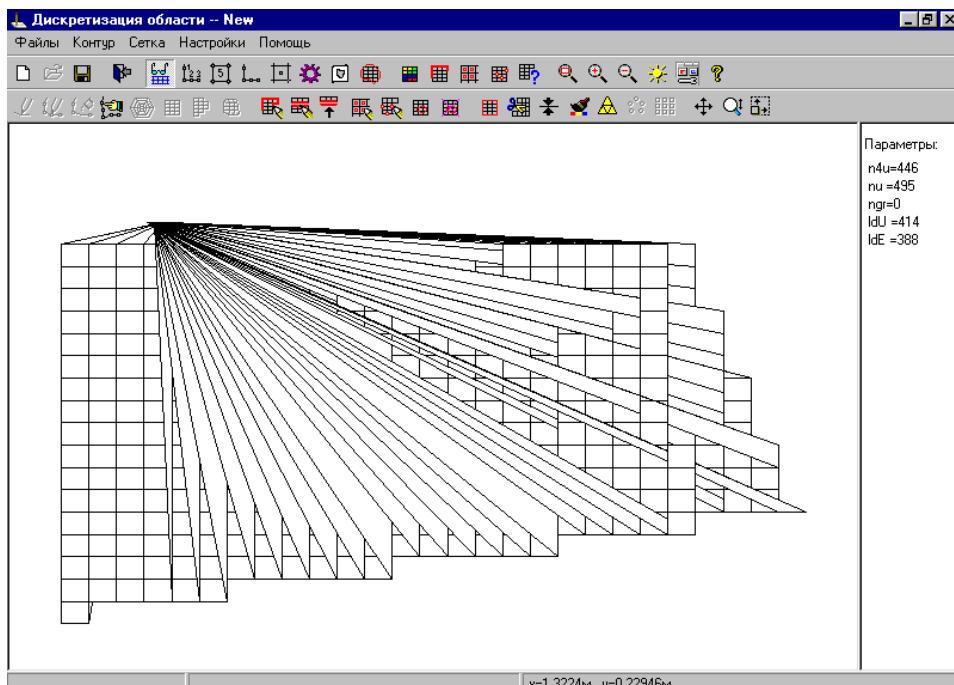
4	<p>Откройте существующий файл (*.geo).</p> <p><i>Рекомендации:</i> имена файлов рекомендуется создавать идентичными (одинаковыми), так как это в значительной степени облегчит работу с ними. Например: 1.geo – 1.kon – 1.dan и т.д.</p>	
5		<p>В файле *.geo, активируйте клавишу «Добавить объект».</p>
6	<p>В появившемся диалоговом окне найдите свой файл с расширением (*.kon). Активируйте его. Сохраните дополненный, таким образом, файл геометрии (*.geo).</p>	

Необходимо соблюдать порядок построения модели:

построение контура расчетной области;
дискретизация области;
оптимизация нумерации узлов;
оптимизация формы сетки;
ввод объектов (тел);
ввод подобластей;
ввод границ;
ввод узлов или элементов для графиков;
проверка сетки.

Разберем каждый пункт более подробно.

Строить контур расчетной области надо по часовой стрелке, иначе при линейной дискретизации области возможен подобный результат:



Дискретизация – один из самых важных этапов моделирования. Выбор числа элементов должен исходить из обеспечения двух противоречивых требований – с одной стороны требуемой точности решения, а с другой – ограничения по быстродействию и памяти вычислительной машины.

Выделим ряд важных приемов, применяемых при дискретизации тела на КЭ.

Не рекомендуется использовать КЭ, удлиненные в одном направлении, так как это снижает точность решения задачи.

Не обеспечит повышение точности использование конечных элементов в непосредственной близости, слишком сильно отличающихся по размерам (более чем в 10 раз). Целесообразно обеспечить плавное изменение размеров элементов в пространстве. Для этого необходимо выполнить операцию оптимизации формы сетки.

При моделировании тел, бесконечно протяженных в одном или нескольких направлениях, необходимо ограничивать дискретную модель достаточно большой областью, так чтобы значения параметров на границе согласовались бы с достаточной точностью с известными данными.

При осуществлении ступенчатой дискретизации с относительно крупной сеткой могут возникнуть высокие погрешности.

4. Порядок выполнения работы.

1. Изучение теоретических вопросов.
2. Изучение работы программы дискретизации двумерной области на конечные элементы.
3. Решение заданного варианта задачи:
построение контура исследуемой области;
дискретизация области;
удаление лишних конечных элементов;
перемещение узлов;
оптимизация сетки.

5. Указания по выполнению отчета.

Каждый студент составляет отчет, который должен содержать постановку задачи, ход решения, результаты и выводы по работе.

6. Контрольные вопросы.

Опишите преимущества и недостатки конечных элементов треугольной формы с линейной функцией аппроксимации.

Что такое «Ширина ленты»?

Зачем необходима оптимизация нумерации узлов сетки?

Зачем осуществляется оптимизация формы конечных элементов сетки?

Какие варианты дискретизации сложной области могут быть использованы в программе?

Лабораторная работа №2. Задание граничных и начальных условий для решения задач тепломеханики методом конечных элементов.

Методика формирования файлов (*.dan) для Term2

После того как созданы файлы (*.geo) и (*.kon), произведено их редактирование и сохранение, к ним необходимо добавить ещё один файл, а именно (*.dan).

Для этого необходимо в программе **Term2** на панели интерфейса выбрать иконку «Редактирование данных». После загрузки окна с именем **Noname.dan** Вы можете задать в нём исходные параметры для расчёта и отредактировать их при желании. Физическая размерность всех вводимых величин только в международной системе единиц (СИ).

В разделе «Параметры расчета» пользователем должны быть определены внешние параметры расчета, времени расчета и перечня создаваемых файлов.

В разделе «Детали и начальные условия» – определяются начальные параметры в области расчета с указанием числа деталей, номера материала, из которого они изготовлены, и начальной температуры деталей.

В разделе «Материалы» – определяются теплофизические и механические свойства материалов, причем механические свойства задаются в том случае, если необходимо рассчитать напряженно-деформированное состояние тел. Если же нужно рассчитать только температурные поля в исходной области механические свойства материалов не задаются. Теплофизические свойства материалов задаются вне зависимости от параметров выбранной модели расчета.

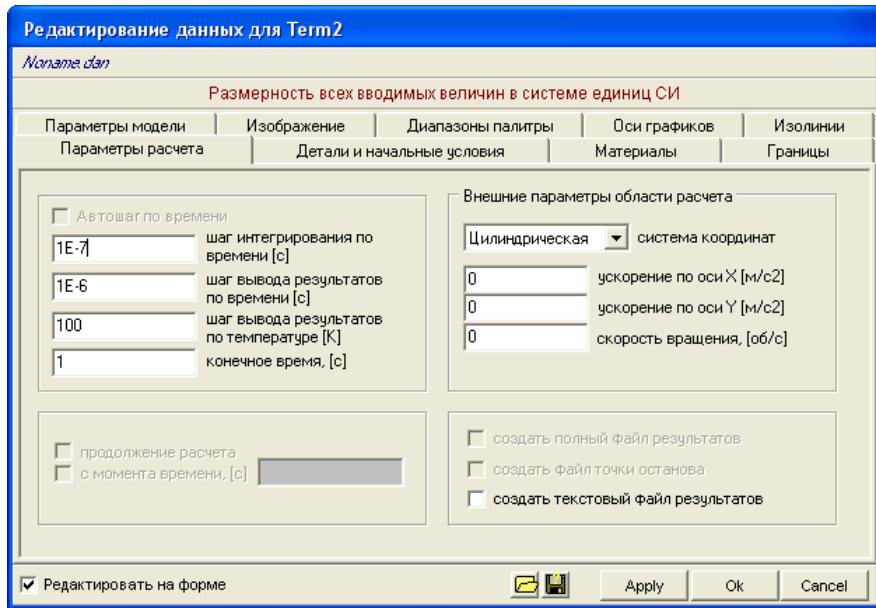
В разделе «Границы» – определяется количество и тип границ. Определяемое количество границ в данном разделе должно совпадать со значением ngr, определяемом при создании файла геометрии.

В разделе «Параметры модели», пользователь должен выбрать, что необходимо рассчитать: только температурные поля тел, только НДС тел или решить сопряженную задачу, включающую определение и температуры и НДС тел. В соответствии с выбранной моделью расчета необходимо указать метод решения системы уравнений МКЭ и задать соответствующие параметры расчета.

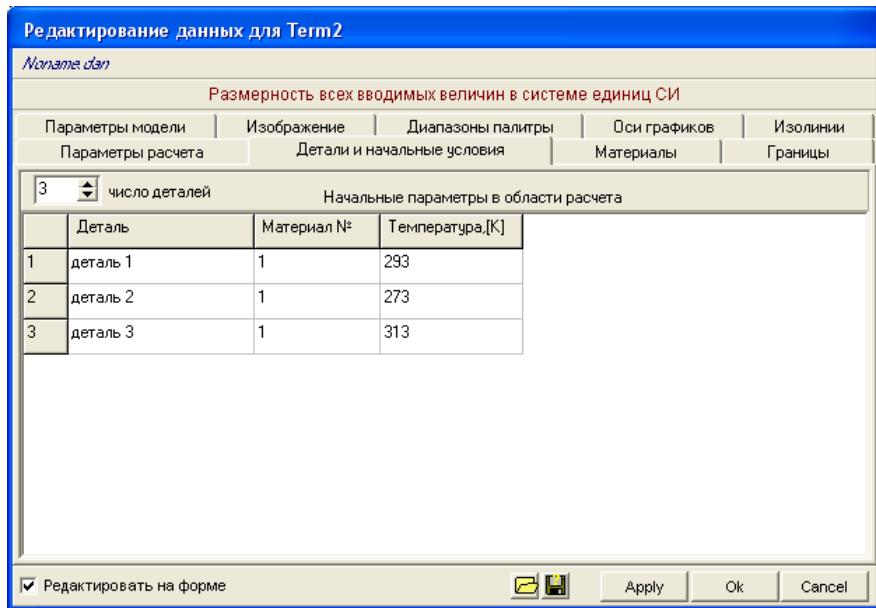
В нижней части окна, установлены клавиши открытия файла данных существующего проекта и сохранения исходных данных в форме файла *.dan. Клавиши «OK» и «Cancel» предназначены только для подтверждения (игнорирования) малых корректировок созданного и сохраненного файла данных.

Назначение прочих окон ПК являются очевидными. Их назначение и смысл определяется вводимыми расшифровками компонент.

В разделе «Параметры расчета» определяются внешние параметры области расчета, конечное время расчета, при необходимости задается автоматизация вычисления шага интегрирования по времени. Также в данном разделе пользователем (по желанию) определяются настройки создания файлов результатов.



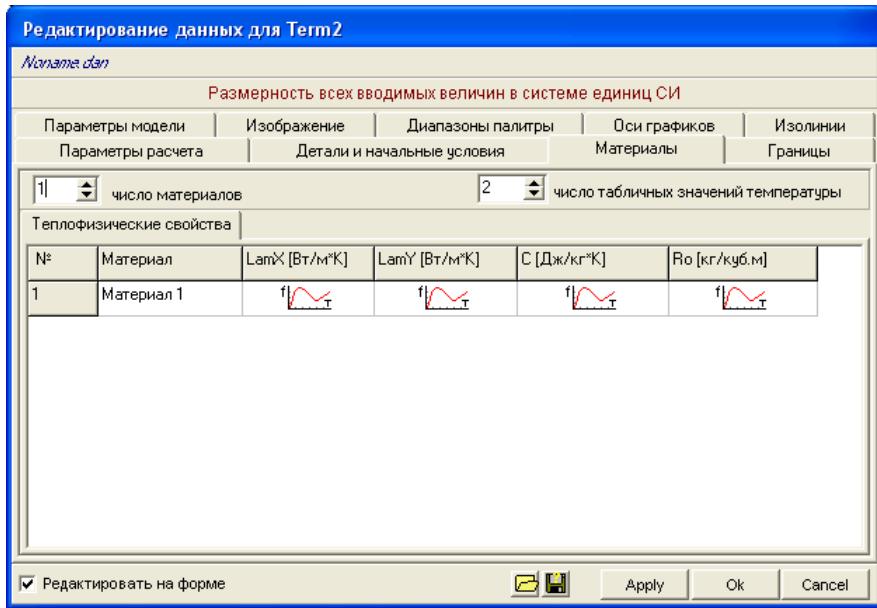
В разделе «Детали и начальные условия» задается число деталей, которое должно совпадать с количеством подобластей в файле геометрии, номер материала, из которого изготовлены детали, а также их начальная температура.



В разделе «Материалы» задается число материалов и определяются их теплофизические и механические свойства.

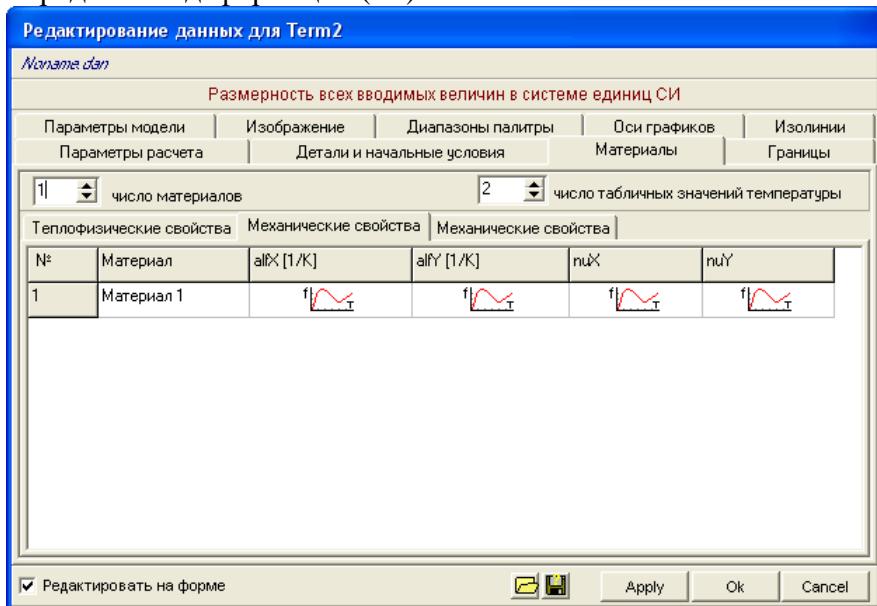
В качестве теплофизических свойств материала задаются:

- коэффициенты теплопроводности по осям OX (LamX) и OY (LamY);
- удельная теплоемкость (C);
- плотность (Ro).



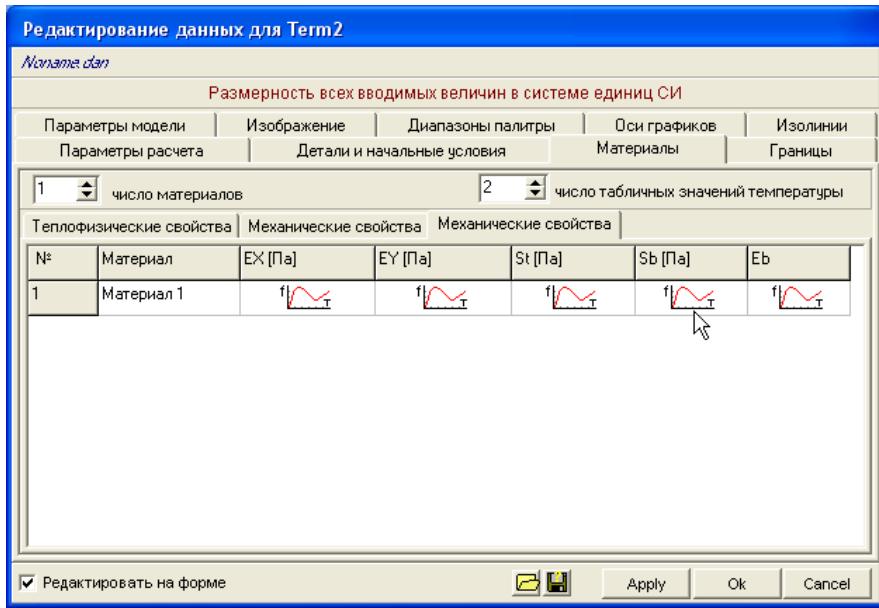
В случае если в разделе «Параметры модели» выбран пункт «Расчет НДС», то для материалов задаются следующие механические свойства:

- коэффициенты температурного расширения по осям OX (α_{fX}) и OY (α_{fY});
- коэффициенты Пуассона по осям OX (ν_{fX}) и OY (ν_{fY});
- модули упругости по осям OX (EX) и OY (EY);
- предел упругости (St);
- предел прочности (Sb);
- предельная деформация (Eb).

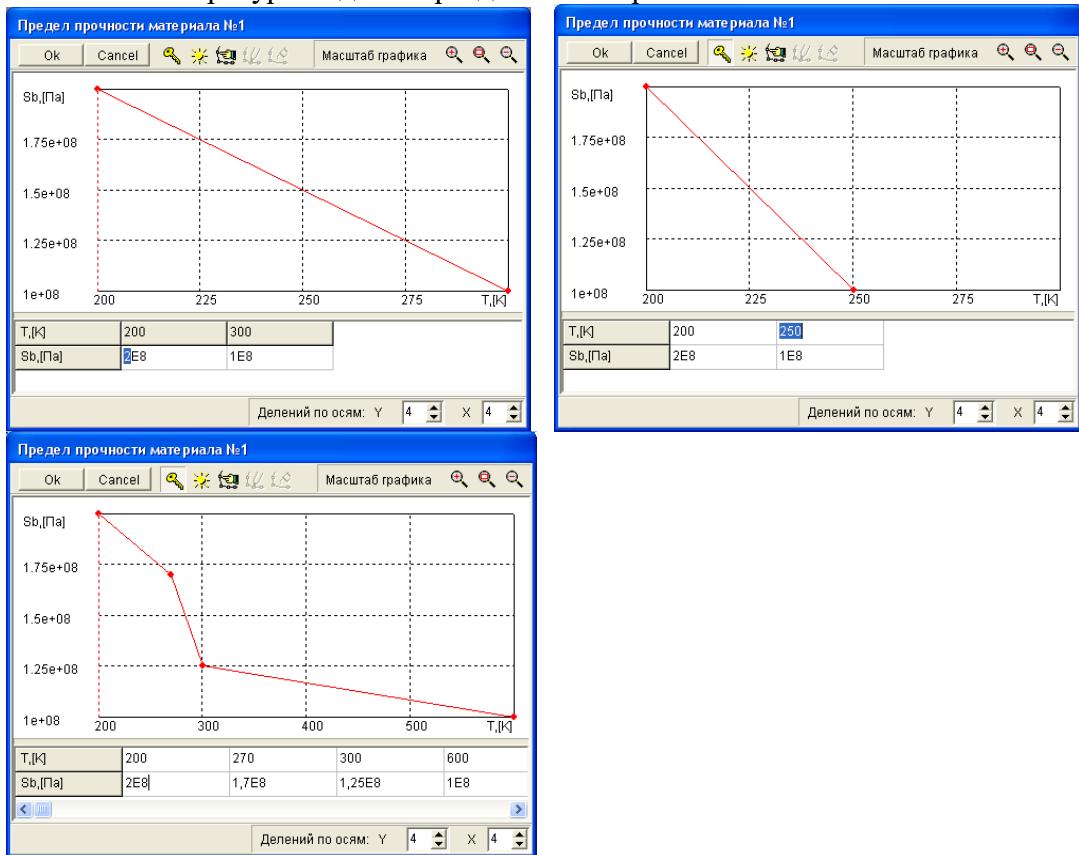


Для ввода закона изменения соответствующих свойств материала необходимо сделать двойной щелчок левой кнопкой мыши на том параметре, значение которого необходимо задать или изменить.

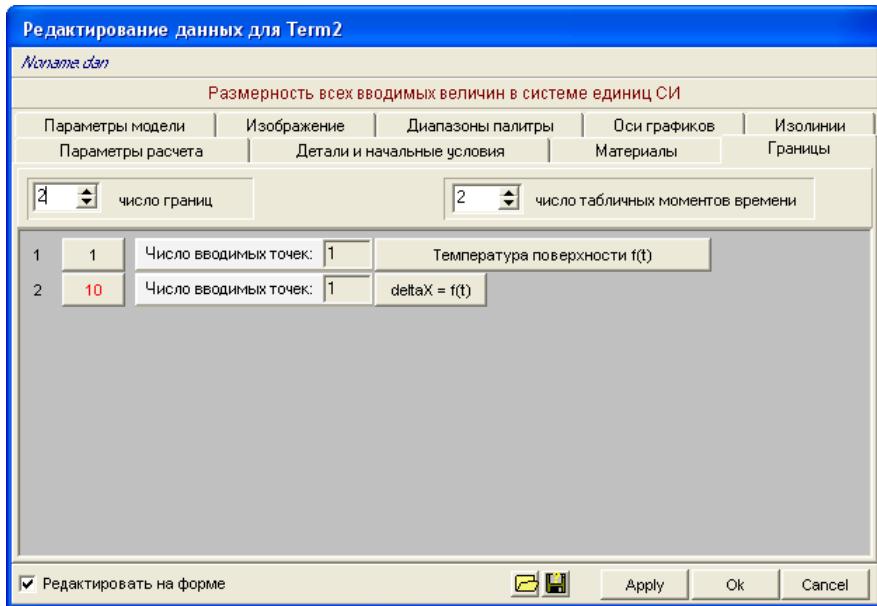
Например, для изменения предела прочности материала щелкните два раза левой кнопкой мыши на изображении графика для предела прочности материала 1.



В появившемся диалоговом окне задайте соответствующие значения предела прочности материала от температуры. Для редактирования аргумента таблицы (в данном случае температуры) щелкните левой кнопкой мыши на кнопке . Число табличных значений температуры задается разделе «Материалы».



В разделе «Границы» – определяется количество и тип границ. Определяемое количество границ в данном разделе должно совпадать со значением ngr, определяемом при создании файла геометрии.



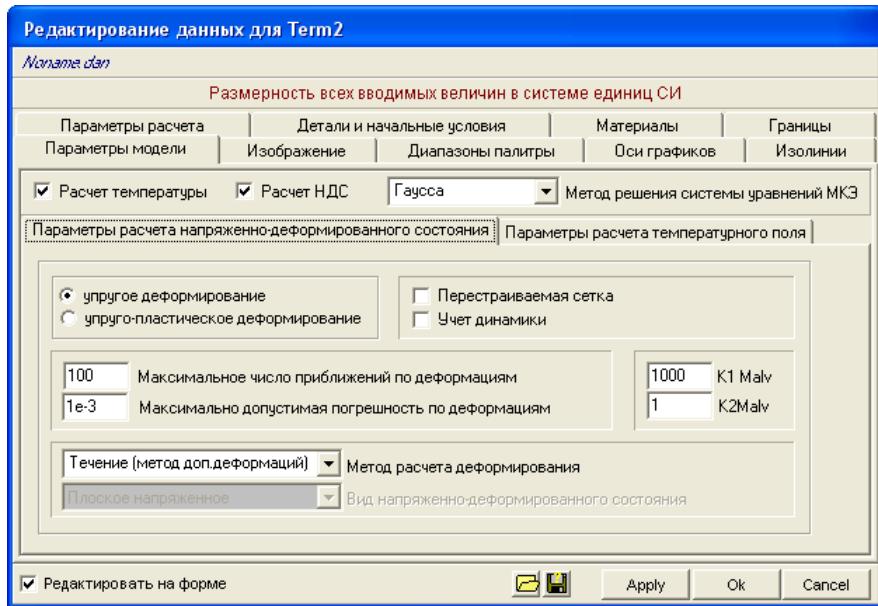
В разделе «Параметры модели», пользователь должен выбрать, что необходимо рассчитать: только температурные поля тел, только НДС тел или решить сопряженную задачу, включающую определение и температуры и НДС тел. В соответствии с выбранной моделью расчета необходимо указать метод решения системы уравнений МКЭ и задать соответствующие параметры расчета.

В случае расчета НДС необходимо:

- выбрать тип деформирования (упругое или упругопластическое);
- выбрать параметр «Перестраиваемая сетка» (в этом случае будет происходить перестроение сетки расчетной области на каждом шаге интегрирования в зависимости от деформаций);
- выбрать параметр «Учет динамики»;
- задать максимальное число приближений и максимально допустимую погрешность по деформациям;
- выбрать метод расчета деформирования.

В случае расчета температурных полей необходимо:

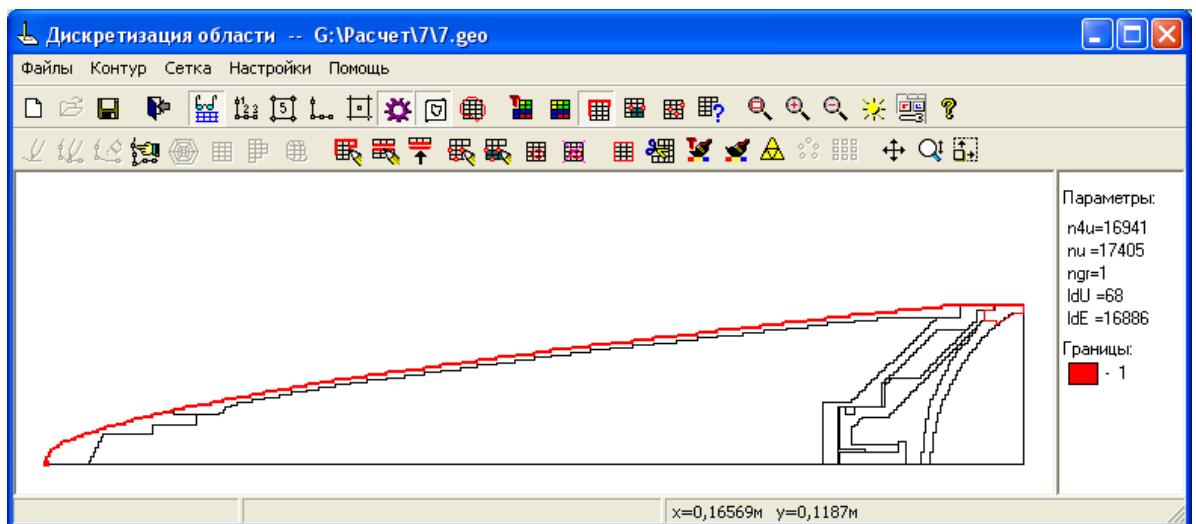
- задать максимальное число приближений и максимально допустимую погрешность по температуре.



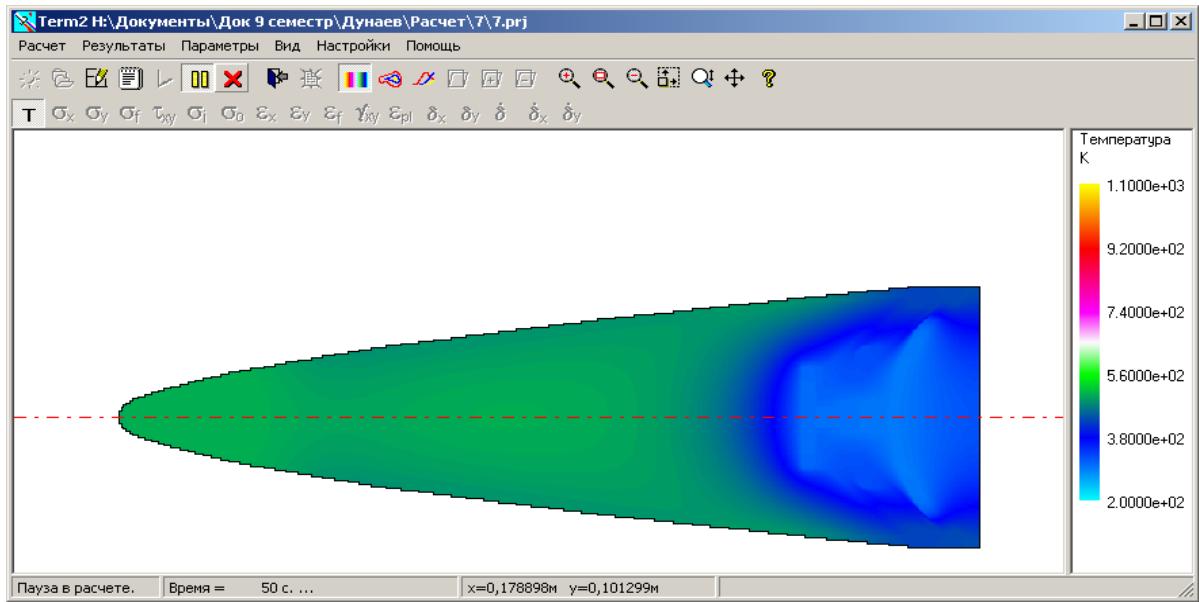
Необходимо соблюдать порядок построения модели:

построение контура расчетной области;
дискретизация области;
оптимизация нумерации узлов;
оптимизация формы сетки;
ввод объектов (тел);
ввод подобластей;
ввод границ;
ввод узлов или элементов для графиков;
проверка сетки.

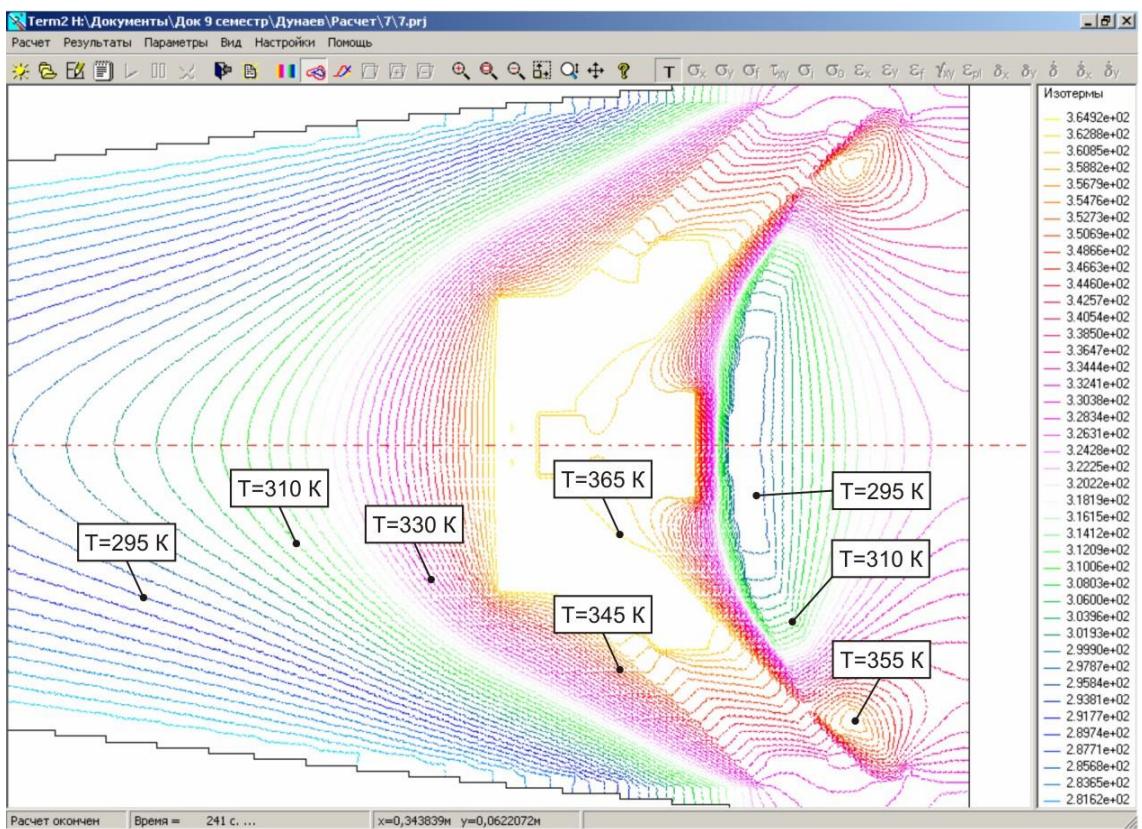
Ниже приведены примеры визуализации результатов вычислительных экспериментов с применением программного комплекса



Контур баллистического обтекателя ГСН
(красным цветом обозначена граница конвективного теплообмена)



Температурное поле баллистического обтекателя ГСН
в момент времени $t = 50\text{с}$



Температурное поле баллистического обтекателя ГСН
в момент времени $t = 243\text{с}$ (изолинии)

3. Варианты заданий.

После освоения интерфейсов программных комплексов CAD-системы 3D-проектирование изделий (деталей и сборок) любой степени сложности и CAE-системы моделирования процессов термомеханики, студенту для конкретного задания, выданного преподавателем, необходимо построить объемную 3D или 2D компьютерную модель, подготовить исходные геометрические и физические данные для проведения вычислительного эксперимента.

Для выполнения лабораторной работы используются следующие задания:

1. Подготовить исходные данные для проведения вычислительного эксперимента по исследованию стационарных тепловых процессов.
2. Подготовить исходные данные для проведения вычислительного эксперимента по исследованию нестационарных тепловых процессов.
3. Подготовить исходные данные для проведения вычислительного эксперимента по исследованию напряженно-деформированного состояния.
4. Подготовить исходные данные для проведения вычислительного эксперимента по исследованию процессов динамики деформирования.
5. Подготовить исходные данные для проведения вычислительного эксперимента по исследованию термонапряженного состояния.

4. Порядок выполнения работы.

1. Изучение теоретических вопросов.
2. Изучение работы программы дискретизации двумерной области на конечные элементы.
3. Решение заданного варианта задачи:
построение контура исследуемой области;
дискретизация области;
удаление лишних конечных элементов;
перемещение узлов;
оптимизация сетки.

5. Указания по выполнению отчета.

Каждый студент составляет отчет, который должен содержать постановку задачи, ход решения, результаты и выводы по работе.

6. Контрольные вопросы.

В чем состоит понятие «Вычислительный эксперимент»?

Какие программные продукты используются для построения 3D и 2D моделей конструкций на предприятиях отрасли?

Какие программные продукты используются для расчета процессов термомеханики на предприятиях отрасли?

Что такое CAE-системы?

С какой целью в программный комплекс Term2 входит программа Viz2?

Лабораторная работа №3. Решение задач стационарной теплопроводности методом конечных элементов.

1. Цель и задачи работы

При выполнении работы студенты должны изучить основы метода конечных элементов при решении задач стационарной теплопроводности; получить практические навыки в решении конкретной задачи; освоить работу в программе численного моделирования температурных полей; научиться интерпретировать визуальное представление результатов моделирования многомерных задач.

2. Основы теории

Рассмотрим применение МКЭ к решению плоской задачи теории теплопроводности в случае стационарного температурного поля.

В теории теплопроводности стационарное температурное поле в теле, занимающем двумерную область (рис. 1)

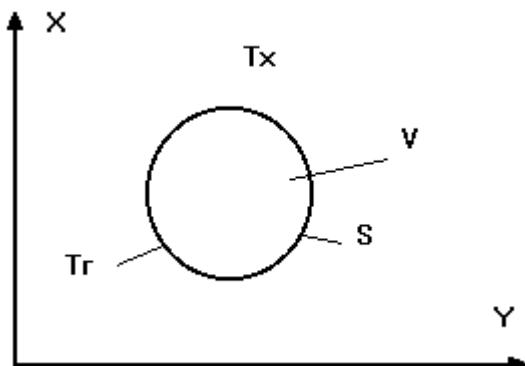


Рис. 1. Схема нагреваемого тела

описывается дифференциальным уравнением в частных производных

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0; \quad \forall x, y \in V, \quad (1)$$

с соответствующими граничными условиями на внешнем контуре S, например

$$T = T_s(x, y), \quad \forall x, y \in S, \quad (2)$$

где λ_x и λ_y – коэффициенты теплопроводности материала тела.

Записанное уравнение единственным образом определяет задачу. Однако возможна другая формулировка с помощью вариационного исчисления.

На основании теоремы Эйлера можно найти функционал, для которого уравнение (1) является уравнением Эйлера:

$$\Phi[T(x, y)] = \iint_{xy} \frac{1}{2} \lambda \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \right] dx dy, \quad \forall x, y \in V. \quad (3)$$

Экстремум такого функционала будет достигаться на такой функции распределения температуры $T(x, y)$ по области тела V , которая удовлетворяет уравнению (1), т.е. на функции реального распределения температуры.

Прямой метод решения такой вариационной задачи предполагает приближенную замену непрерывной функции $T(x, y)$ более простыми (линейными функциями, полиномами и т.д.) и последующую минимизацию функционала (3) в классе этих упрощенных функций. В методе конечных элементов широко используется аппроксимация функции $T(x, y)$ линейными функциями внутри каждого конечного элемента.

Линейная аппроксимация температуры в треугольном конечном элементе.

Введем зависимости, определяющие распределение искомой функции внутри конечного элемента, если известны ее значения в узловых точках (такой функцией может быть температура, перемещения и другие). На рис. 2 изображен треугольный конечный элемент.

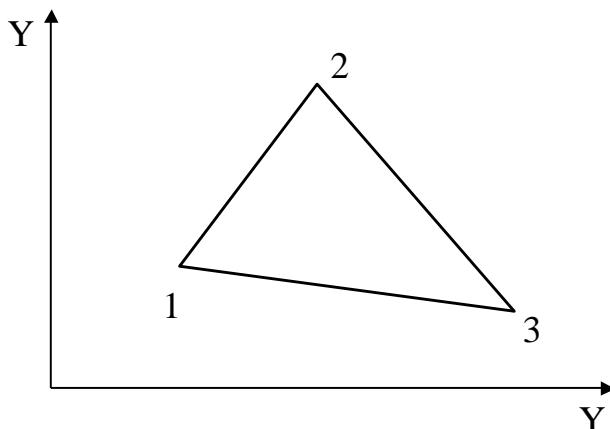


Рис. 2. Треугольный конечный элемент

Введем нумерацию его узлов, и будем обозначать значения величин в узловых точках с соответствующим индексом $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, T_1, T_2, T_3$, а разность величин между двумя точками с двойным индексом, например:

$$x_{21}=x_2-x_1$$

Линейная функция распределения температуры по конечному элементу в общем виде представляется зависимостью

$$T=a+bx+cy \quad (4)$$

где a, b и c - постоянные коэффициенты. Для нахождения этих трех констант воспользуемся тремя значениями температуры в узлах конечного элемента, что дает три алгебраических уравнения:

$$T_1=a+bx_1+cy_1;$$

$$T_2=a+bx_2+cy_2;$$

$$T_3=a+bx_3+cy_3 .$$

В результате решения этой системы получаем значения констант a, b и c , выраженные через геометрические параметры конечного элемента и узловые температуры. Подставляя их затем в уравнение (1) для функции T , находим

$$T=N_1T_1+N_2T_2+N_3T_3, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2S_T} y_{23}(x - x_3) - x_{23}(y - y_3); \\ N_2 &= \frac{1}{2S_T} y_{31}(x - x_1) - x_{31}(y - y_1); \\ N_3 &= \frac{1}{2S_T} y_{12}(x - x_2) - x_{12}(y - y_2); \\ S_T &= \frac{1}{2} x_{21}y_{32} - x_{32}y_{21}; \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты N_i называют коэффициентами формы, S_T -площадь треугольника.

Уравнение (2) в МКЭ записывают в матричной форме :

$$T = [N_i] \{T_i\}.$$

Данная линейная функция распределения температуры (или другой величины) обеспечивает ее непрерывность на границе с соседними элементами, т.к. это распределение линейно вдоль любой стороны треугольника и при одинаковом изменении величины в узлах такие же самые изменения будут и вдоль всей внутренней границы.

Отметим необходимые в дальнейшем такие геометрические характеристики конечного элемента, как координаты центра тяжести сечения

$$x_T = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3); \quad y_T = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3);$$

и объем в случае осесимметричной задачи

$$V \approx 2\pi r_T S_T$$

Вывод разрешающих уравнений МКЭ для конечного элемента тела. Рассмотрим область, показанную на рис. 3, которая разделена на треугольные конечные элементы.

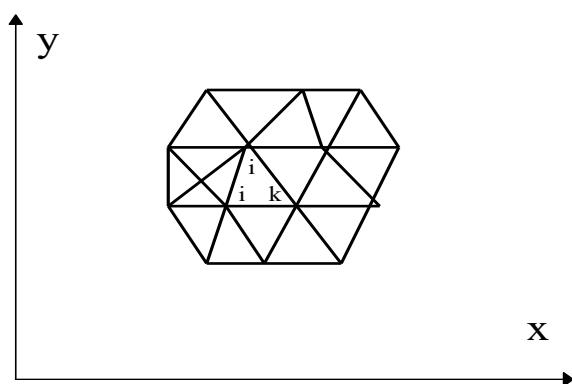


Рис. 3. Схема дискретизации области.

В каждом конечном элементе данной области узловые величины температуры определяют функцию

$$T = [N_i] \{T_i\} = [N_1; N_2; N_3] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Так как узловые величины однозначно определяют температуру во всей области, то функционал Φ можно минимизировать по отношению к этим величинам, рассматривая его в классе линейных функций (7):

$$\Phi = \iint_{xy} \frac{1}{2} \left[\lambda_x \left(\frac{\partial}{\partial x} [N_i] \{T_i\} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial}{\partial y} [N_i] \{T_i\} \right)^2 \right] dx dy$$

Осуществим указанные операции вначале для каждого конечного элемента, а затем составим общую систему уравнений для всего тела, путем суммирования уравнений по всем конечным элементам, из которых состоит исследуемое тело.

Подставляя функцию (7) в функционал (3) и дифференцируя его по узловой температуре T_1 , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{k3}}{\partial T_1} &= \iint_{xy} \frac{1}{2} \left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_1} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial T_1} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy = \\ &= \left[\lambda_x \frac{1}{2S_T} (y_{23} T_1 + y_{31} T_2 + y_{12} T_3) \frac{1}{2S_T} y_{23} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_y \frac{1}{2S_T} \left(-x_{23} T_1 - x_{31} T_2 - x_{12} T_3 \right) \frac{1}{2S_T} \times \right. \\ &\quad \left. \times (-x_{23}) \iint_{xy} dx dy = \left[\underbrace{\lambda_x y_{23} y_{23} + \lambda_y x_{23} x_{23}}_{\lambda_{11}^*} \right] T_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\underbrace{\lambda_x y_{31} y_{23} + \lambda_y x_{31} x_{23}}_{\lambda_{12}^*} \right] T_2 + \left[\underbrace{\lambda_x y_{12} y_{23} + \lambda_y x_{12} x_{23}}_{\lambda_{13}^*} \right] T_3 \right] \frac{1}{4S_T} \end{aligned}$$

Дифференцируя аналогично по T_2 и T_3 , получим

$$\frac{\partial \Phi_{k_3}}{\partial T_2} = \left[\begin{pmatrix} \lambda_x y_{23} y_{31} + \lambda_y x_{23} x_{31} \\ \lambda_{21}^* \end{pmatrix} T_1 + \begin{pmatrix} \lambda_x y_{31} y_{31} + \lambda_y x_{31} x_{31} \\ \lambda_{22}^* \end{pmatrix} T_2 + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} \lambda_x y_{12} y_{31} + \lambda_y x_{12} x_{31} \\ \lambda_{23}^* \end{pmatrix} T_3 \right] \frac{1}{4S_T},$$

$$\frac{\partial \Phi_{k_3}}{\partial T_3} = \left[\begin{pmatrix} \lambda_x y_{23} y_{12} + \lambda_y x_{23} x_{12} \\ \lambda_{31}^* \end{pmatrix} T_1 + \begin{pmatrix} \lambda_x y_{31} y_{31} + \lambda_y x_{31} x_{31} \\ \lambda_{32}^* \end{pmatrix} T_2 + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} \lambda_x y_{12} y_{12} + \lambda_y x_{12} x_{12} \\ \lambda_{31}^* \end{pmatrix} T_3 \right] \frac{1}{4S_T}$$

где Φ_{k_3} - функционал для одного конечного элемента.

В матричном виде полученные выражения запишутся следующим образом:

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_{k_3}}{\partial T_i} \right\} = [\lambda_{k_3}] \{T_i\}, \quad (8)$$

где $[\lambda_{k_3}]$ - матрица теплопроводности конечного элемента

$$[\lambda_{k_3}] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix}$$

Объединение конечных элементов. Окончательные уравнения процесса минимизации требуют объединения всех производных $\frac{\partial \Phi_{k_3}}{\partial T_i}$ для всех конечных элементов

и приравнивания их к нулю. Обозначая функционал для всего тела через Φ , получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T_i} = \sum_{j=1}^{N_{k_3}} \frac{\partial \Phi_{k_3}}{\partial T_i} = 0, \quad (9)$$

где N_{k_3} - общее число конечных элементов.

С учетом (8) уравнение (9) запишется в виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T_i} = \sum_{j=1}^{N_{k3}} \sum_{i=1}^3 [\lambda_{kj}] \{T_i\} = 0 \quad (10)$$

Суммирование элементов матрицы $[\lambda_{kj}]$ по всем конечным элементам дает матрицу теплопроводности $[\lambda]$ всего тела, составленного из конечных элементов. При этом уравнение (10) можно записать:

$$[\lambda] \{T\} = \{0\}, \quad (11)$$

где $\{T\}$ - матрица температур всех узловых точек тела.

На границе тела в граничных узловых точках задаются в соответствии с граничными условиями (2) температуры T_{irp} :

$$T_{irp} = T_s(x_i, y_i), x_i, y_i \in S$$

Полученная система алгебраических уравнений (11), (12) решается на ЭВМ.

Найденная в результате решения совокупность температур в узловых точках является приближенным решением вариационной задачи (3).

3. Варианты заданий.

После освоения программы численного моделирования процессов теплопроводности, студенту для конкретного тела и соответствующих граничных условий, выданых преподавателем, необходимо получить решение стационарной задачи.

Для выполнения лабораторной работы используется двумерная плоская постановка и следующие задания:

Выполнить численное исследование стационарных тепловых процессов в детали, представляющей собой односвязную область с граничными условиями первого и третьего рода.

Выполнить численное исследование стационарных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями первого рода.

Выполнить численное исследование стационарных тепловых процессов в детали, представляющей собой односвязную область с граничными условиями второго и третьего рода.

Выполнить численное исследование стационарных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями третьего рода.

Выполнить численное исследование стационарных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями первого и второго рода.

4. Порядок выполнения работы.

1. Изучение теоретических вопросов.

2. Изучение работы программы численного моделирования процессов теплопроводности.

3. Решение заданного варианта задачи:

построение дискретной модели тела для численного решения задачи стационарной теплопроводности;

задание свойств материалов тела, параметров теплообмена на границах;

получение температурного поля;

представление результатов в виде изотерм и в форме цветовой градации;

анализ результатов и выводы по работе.

5. Указания по выполнению отчета.

Каждый студент составляет отчет, который должен содержать постановку задачи, ход решения, результаты в различных формах представления температурного поля и выводы по работе.

6. Контрольные вопросы.

Опишите преимущества и недостатки метода конечных элементов для решения задачи теплопроводности.

Какие виды граничных условий могут быть заданы для решения стационарной задачи теплопроводности?

Для чего необходимо минимизировать ширину ленты?

Каким образом в программе моделирования температурного поля задаются пределы цветовой палитры, соответствующие представляемому температурному диапазону?

Каким образом в программе моделирования температурного поля осуществляется визуализация с помощью изотерм?

**Лабораторная работа №4. Решение задач нестационарной теплопроводности
методом конечных элементов.**

1. Цель и задачи работы

Получение практических навыков постановки и решения задачи нестационарной теплопроводности методом конечных элементов; подготовки и задания исходных данных; освоения программы численного моделирования процессов теплопроводности; научиться интерпретировать визуальное представление результатов моделирования многомерных нестационарных задач.

2. Основы теории

Для нестационарного процесса теплопроводности в дифференциальном уравнении теплопроводности добавляется член, учитывающий изменение внутренней энергии тела V во времени τ :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad \forall x, y \in V, \quad \tau > 0 \quad (1)$$

Искомое $T(x, y, \tau)$ нестационарной задачи теплопроводности помимо граничных условий на поверхности тела S

$$T = T_S(x, y), \quad \forall x, y \in S, \tau > 0$$

должно удовлетворять начальному условию

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad \forall x, y \in V, \tau = 0$$

заданному в момент времени $\tau = 0$, который принимают за начало отсчета.

Дополнительный член $-c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}$ появляется в связи с накапливанием тепла в

каждом элементарном объеме тела за счет теплоемкости материала.

Если рассмотреть уравнение (1) в фиксированный момент времени τ^* , то последний член можно рассматривать как некоторую заданную функцию пространственных координат.

$$q_V(x, y) = c\rho \frac{\partial T(x, y, \tau^*)}{\partial \tau};$$

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - q_V = 0, \quad (2)$$

$$\forall x, y \in V, \quad \tau = \tau^*.$$

Такое дифференциальное уравнение является уравнением Эйлера для функционала

$$\Phi[T(x, y)] = \iint_{xy} \left\{ \frac{1}{2} \left[\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - q_V T \right\} dx dy, \quad \forall x, y \in V; \quad (3)$$

или в развернутом виде для фиксированного τ^*

$$\Phi[T(x, y, \tau^*)] = \iint_{xy} \left\{ \frac{1}{2} \left[\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] - c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} T \right\} dx dy \quad (4)$$

Решение вариационной задачи (4) произведем с помощью приближенного прямого метода конечных элементов, при этом воспользуемся полученными ранее при решении задачи стационарной теплопроводности выводами.

Матрица теплоемкости конечного элемента. **Дополнительный член функционала (4) для конечного элемента V_k , представляющий собой в этом случае тепловой поток, поглощаемый конечным элементом при его нагреве, выразим через узловые сосредоточенные потоки тепла (т.е. существует только в трех узловых точках, и по объему не распределено):**

$$\begin{aligned} q &= \iint_{xy} c\rho \frac{\partial T}{\partial r} dx dy = \iint_{xy} c\rho \left[N_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} + N_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + N_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} \right] dx dy = \frac{\partial T_1}{\partial \tau} c\rho \iint_{xy} N_1 dx dy + \\ &\quad + \frac{\partial T_2}{\partial \tau} c\rho \iint_{xy} N_2 dx dy + \frac{\partial T_3}{\partial \tau} c\rho \iint_{xy} N_3 dx dy = \\ &= c_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + c_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + c_3 \frac{\partial T_3}{\partial \tau} = q_1 + q_2 + q_3 \end{aligned}$$

где $c_i = c\rho \iint_{xy} N_i dx dy$

Двойные интегралы в формуле для C_i могут быть достаточно легко вычислены для треугольника, однако при использовании формы конечного элемента, близкой к равностороннему треугольнику, они могут быть заменены приближенным значением $S_T/3$. При этом получим:

$$c_i \approx \frac{1}{3} c\rho S_T; \quad q_i \approx \frac{1}{3} c\rho S_T \frac{\partial T_i}{\partial \tau}$$

В матричной форме

$$\{q_i\} = \{c_i\}^T \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial \tau} \right\}, \quad (5)$$

где $\{C_i\}$ – матрица теплоемкости конечного элемента.

Рассматривая, как и ранее, функционал для области треугольного конечного элемента в классе линейных функций температуры и учитывая (5), получим

$$\Phi_{k_3} = \iint_{xy} \frac{1}{2} \left[\lambda_x \left(\frac{\partial}{\partial x} [N_i] \{T_i\} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial}{\partial y} [N_i] \{T_i\} \right)^2 \right] \times \\ \times dx dy + \sum_{i=1}^n \{c_i\}^T \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial r} \right\} \{T_i\}^T \quad (6)$$

Дифференцируя (6) по узловым температурам, получим

$$\left\{ \frac{\partial \Phi_{k_3}}{\partial T_i} \right\} = [\lambda] \{T_i\} + \{c_i\}^T \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial \tau} \right\}, \quad (7)$$

где матрица $[\lambda]$ – матрица теплопроводности конечного элемента, полученная ранее.

Окончательные уравнения процесса минимизации функционала получаются объединением всех производных $\frac{\partial \Phi_{k_3}}{\partial T_i}$ для всех конечных элементов и приравнивания их

$$\frac{\partial \Phi_{k_3}}{\partial T_i}$$

нулю:

$$\frac{\partial \Phi_{k_3}}{\partial T_i} = \sum_{j=1}^{N_{k_3}} \frac{\partial \Phi_{k_3}}{\partial T_j} = \sum_{j=1}^{N_{k_3}} \sum_{i=1}^n [\lambda_{k_3}] \{T_i\} + \{c_{k_3}\}^T \times \\ \times \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial \tau} \right\} = [\lambda] \{T_i\} + [C] \left\{ \frac{\partial T_s}{\partial \tau} \right\} = \{0\} \quad (8)$$

где $[C]$ - матрица теплоемкости конструкции.

Каждый член этой матрицы (а она в данном случае диагональна) характеризует интенсивность поглощения тепла в узловой точке тела при нагреве.

Решение системы уравнений МКЭ с использованием конечных разностей по времени. Система уравнений (8), в отличие от задачи стационарной теплопроводности, не позволяет непосредственно рассчитать температуры в узловых точках тела в некоторый момент времени, т.к. содержит производные $\frac{\partial T}{\partial \tau}$. Для выполнения численных расчетов

обычно осуществляют дискретизацию по времени с помощью метода конечных разностей, представляя производную по времени с помощью простейшей конечно - разностной формулы

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{T_{k+1} - T_k}{\Delta \tau};$$

где $\Delta \tau$ – шаг расчета по времени.

В этом случае систему уравнений (8) можно представить в виде (явная схема):

$$[\lambda] \{T_k\} = -[C] (\{T_{k+1}\} - \{T_k\}) \frac{1}{\Delta \tau};$$

Откуда

$$\frac{1}{\Delta\tau} [c] \{T_{k+1}\} = \left([\lambda] + [c] \frac{1}{\Delta\tau} \right) \{T_k\} \quad (9)$$

Уравнение (9) позволяет определить температуру в последующий момент времени ($k+1$) для всех узловых точек тела, если известна температура в предыдущий момент времени.

Таким образом, зная из начальных условий температуру в начальный момент, можем рассчитать распределение температур в теле для любого момента времени.

3. Варианты заданий

После освоения программы численного моделирования процессов нестационарной теплопроводности, студенту для конкретного тела и соответствующих начальных и граничных условий, выданных преподавателем, необходимо получить решение нестационарной задачи.

Для выполнения лабораторной работы используется двумерная плоская постановка и следующие задания:

Выполнить численное исследование нестационарных тепловых процессов в детали, представляющей собой односвязную область с граничными условиями первого и третьего рода.

Выполнить численное исследование нестационарных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями первого рода.

Выполнить численное исследование стационарных тепловых процессов в детали, представляющей собой односвязную область с граничными условиями второго и третьего рода.

Выполнить численное исследование нестационарных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями третьего рода.

Выполнить численное исследование нестационарных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями первого и второго рода.

4. Порядок выполнения работы

1. Изучение теоретических вопросов.

2. Изучение работы программы численного моделирования нестационарных процессов теплопроводности.

3. Решение заданного варианта задачи:

построение дискретной модели тела для численного решения задачи нестационарной теплопроводности;

задание свойств материалов тела, параметров теплообмена на границах, начальных условий;

проведение вычислительного эксперимента;

представление результатов в виде графиков температуры во времени, изотерм и в форме цветовой градации;

анализ результатов и выводы по работе.

5. Указания по выполнению отчета

Каждый студент составляет отчет, который должен содержать постановку задачи, ход решения, результаты в различных формах представления температурного поля и выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

Какие виды граничных условий могут быть заданы для решения нестационарной задачи теплопроводности?

В чем состоят преимущества и недостатки явной и неявной разностных схем при расчете нестационарной задачи теплопроводности?

Каким образом задается зависимость граничных условий от времени?

Каким образом в программе моделирования температурного поля задаются временные параметры разностной схемы?

В какой форме может быть визуально представлено температурное поле при решении нестационарной задачи?

Лабораторная работа №5. Разработка этапов вычислительного эксперимента в соответствии с индивидуальным заданием. Построение расчётной схемы и дискретной модели, соответствующей индивидуальному заданию.

1. Цель и задачи работы

Получение практических навыков постановки и решения задачи нестационарной теплопроводности методом конечных элементов; подготовки и задания исходных данных; освоения программы численного моделирования процессов теплопроводности; научиться интерпретировать визуальное представление результатов моделирования многомерных нестационарных задач.

2. Основы теории

Для нестационарного процесса теплопроводности осесимметричных конструкций дифференциальное уравнение теплопроводности приобретает вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} r \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} r \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = r c \rho \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad \forall r, z \in V, \tau > 0, \quad (1)$$

где r – радиус, z – осевая координата.

Искомое $T(x, y, \tau)$ нестационарной задачи теплопроводности помимо граничных условий на поверхности тела S

77

должно удовлетворять начальному условию

$$T(r, z, 0) = T_0, \forall r, z \in V, \tau = 0$$

заданному в момент времени $\tau=0$, который принимают за начало отсчета.

Для такого дифференциального уравнения используют функционал

$$\phi[T(r, z)] = \int \int \left\{ \left[\frac{1}{2} \lambda_r r \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_z r \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] - c \rho r \frac{\partial T}{\partial \tau} \right\} dr dz, \quad (3)$$

$$\forall r, z \in V, \tau = \tau^* > 0.$$

Вынося r за скобки, получаем:

$$\phi = \int \int \left\{ \left[\frac{1}{2} \lambda_r \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] - c \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} T \right\} r dr dz. \quad (4)$$

Решение вариационной задачи (4) произведем с помощью приближенного прямого метода конечных элементов, при этом воспользуемся полученными ранее при решении задачи стационарной теплопроводности выводами.

Дальнейшее решение этой задачи МКЭ проводится аналогично рассмотренной нами ранее задачи двумерного плоского температурного поля. Разница будет заключаться лишь в том, что в данном случае площадь каждого треугольника необходимо умножать на радиус его центра тяжести, т.е. учитывать изменение объема конечного элемента при удалении от оси тела. Решение осуществляется в соответствии с разностной схемой, описанной в предыдущей лабораторной работе.

3. Варианты заданий

После освоения программы численного моделирования процессов осесимметричной теплопроводности, студенту для конкретного тела и соответствующих начальных и

границых условий, выданных преподавателем, необходимо получить решение задачи для осесимметричной конструкции.

Для выполнения лабораторной работы используется двумерная осесимметричная постановка и следующие задания:

Выполнить численное исследование осесимметричных тепловых процессов в детали, представляющей собой односвязную область с граничными условиями первого и третьего рода.

Выполнить численное исследование осесимметричных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями первого рода.

Выполнить численное исследование осесимметричных тепловых процессов в детали, представляющей собой односвязную область с граничными условиями второго и третьего рода.

Выполнить численное исследование осесимметричных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями третьего рода.

Выполнить численное исследование осесимметричных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями первого и второго рода.

4. Порядок выполнения работы

1. Изучение теоретических вопросов.
2. Изучение работы программы численного моделирования осесимметричных процессов теплопроводности.

3. Решение заданного варианта задачи:

построение дискретной модели тела для численного решения задачи осесимметричной теплопроводности;

задание свойств материалов тела, параметров теплообмена на границах, начальных условий;

проведение вычислительного эксперимента;

представление результатов в виде графиков температуры во времени, изотерм и в форме цветовой градации;

анализ результатов и выводы по работе.

5. Указания по выполнению отчета

Каждый студент составляет отчет, который должен содержать постановку задачи, ход решения, результаты в различных формах представления температурного поля и выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

Какие виды граничных условий могут быть заданы для решения осесимметричной задачи теплопроводности?

В чем состоят преимущества и недостатки явной и неявной разностных схем при расчете нестационарной задачи теплопроводности?

Каким образом задается зависимость граничных условий от времени?

Каким образом в программе моделирования температурного поля задаются временные параметры разностной схемы?

В какой форме может быть визуально представлено температурное поле при решении нестационарной задачи?

Лабораторная работа №6. Задание граничных и начальных условий для решения задач, соответствующих индивидуальному заданию.

1. Цель и задачи работы

При выполнении работы студенты должны получить практические навыки выбора типа конечных элементов для решения конкретной нелинейной задачи; освоить работу в программе дискретизации области на конечные элементы, построить дискретную модель, ввести необходимые данные для нелинейной задачи, провести исследование и сравнить результаты с решением линейной задачи.

2. Основы теории

При решении практических задач коэффициент теплопроводности материалов, как правило, не может быть принят постоянной величиной, а представляет некоторую функцию температуры

$$\lambda = \lambda(T)$$

Вариационная формулировка такой задачи, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x} \lambda_x(T) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \lambda_y(T) \frac{\partial T}{\partial y} = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

сложна. В связи этим в инженерной практике часто используют для решения подобных задач МКЭ функционал линейной задачи, предполагая в нем коэффициент теплопроводности в пределах каждого конечного элемента: постоянной величиной

$\lambda_i = \text{const}$ на каждом шаге расчета, что сводит нелинейную задачу к линейной, рассмотренной нами выше.

При использовании малых шагов расчета по времени, когда температура не успевает значительно измениться за интервал времени $\Delta\tau$, величину λ_i рассчитывают по значениям температуры конечных элементов в предыдущий момент времени:

$$\lambda_{i,k+1} = \lambda(T_{i,k})$$

При укрупненных шагах расчета по времени и при решении стационарных задач используют метод последовательных приближений. На первом шаге приближения принимают всюду коэффициент теплопроводности равным $\lambda_{i,1} = \lambda(T_0)$. На втором

шаге приближения по полученным температурам первого шага $T_{i,1}$ рассчитывают

$\lambda_{i,2} = \lambda(T_{i,1})$ и затем вновь решают температурную задачу при уточненных $\lambda_{i,2}$.

Указанную процедуру уточнения продолжают до тех пор, когда значения температур во всех узловых точках для двух последних приближений не совпадут в пределах допуска \sum_T .

Указанная процедура решения нелинейных задач принципиальных трудностей не имеет и легко программируется. В качестве дополнительных исходных данных необходимо вводить в память таблицу коэффициентов теплопроводности в функции температуры.

3. Варианты заданий

После освоения программы численного моделирования процессов нелинейной теплопроводности, студенту для конкретного тела и соответствующих начальных и

граничных условий, выданных преподавателем, необходимо получить решение нелинейной задачи.

Выполнить численное исследование нелинейных тепловых процессов в детали, представляющей собой односвязную область с граничными условиями первого и третьего рода.

Выполнить численное исследование нелинейных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями первого рода.

Выполнить численное исследование нелинейных тепловых процессов в детали, представляющей собой односвязную область с граничными условиями второго и третьего рода.

Выполнить численное исследование нелинейных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями третьего рода.

Выполнить численное исследование нелинейных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями первого и второго рода.

4. Порядок выполнения работы

1. Изучение теоретических вопросов.
2. Изучение работы программы численного моделирования нелинейных процессов теплопроводности.
3. Решение заданного варианта задачи:
 - построение дискретной модели тела для численного решения задачи нелинейной теплопроводности;
 - задание свойств материалов тела, параметров теплообмена на границах, начальных условий;
 - проведение вычислительного эксперимента;
 - представление результатов в виде графиков температуры во времени, изотерм и в форме цветовой градации;
 - анализ результатов и выводы по работе.

5. Указания по выполнению отчета

Каждый студент составляет отчет, который должен содержать постановку задачи, ход решения, результаты в различных формах представления температурного поля и выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

Чем отличается решение линейной и нелинейной задач теплопроводности?

Какие виды граничных условий могут быть заданы для решения нелинейной задачи теплопроводности?

Чем отличается решение линейной и нелинейной задач теплопроводности в случаях стационарных и нестационарных процессов?

Как зависит коэффициент теплопроводности от температуры для конструкционных материалов, приведите примеры?

От чего зависит число итераций при решении нелинейных задач теплопроводности?

Лабораторная работа №7. Анализ результатов решения и определение необходимых параметров конструкции

1. Цель и задачи работы

При выполнении работы студенты должны получить практические навыки решения конкретной ортотропной задачи; освоить работу в программе расчета температурного поля в конструкции из ортотропных материалов.

2. Основы теории

В инженерной практике часто приходится иметь дело с материалами, обладающими анизотропией свойств. Коэффициенты теплопроводности таких материалов в различных направлениях могут существенно различаться, что должно быть учтено при проведении расчетов. МКЭ позволяет достаточно просто учитывать анизотропию теплопроводящих свойств материалов при расчетах температурных полей.

В случае ортотропности свойств материала (что наиболее распространено в практике) функционал температурного поля примет вид:

$$\Phi = \int \int \frac{1}{2} \left[\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

где λ_x и λ_y - коэффициенты теплопроводности в направлении осей x и y соответственно. Указанные изменения функционала Φ приведут к изменению матрицы теплопроводности конечного элемента, которая в данном случае примет вид:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} (\lambda_y x_{23} x_{23} + \lambda_x y_{23} y_{23}), & (\lambda_y x_{31} x_{23} + \lambda_x y_{31} y_{23}), & (\lambda_y x_{12} x_{23} + \lambda_x y_{12} y_{23}), \\ (\lambda_y x_{23} x_{31} + \lambda_x y_{23} y_{31}), & (\lambda_y x_{31} x_{31} + \lambda_x y_{31} y_{31}), & (\lambda_y x_{12} x_{31} + \lambda_x y_{12} y_{31}), \\ (\lambda_y x_{23} x_{12} + \lambda_x y_{23} y_{12}), & (\lambda_y x_{31} x_{12} + \lambda_x y_{31} y_{12}), & (\lambda_y x_{12} x_{12} + \lambda_x y_{12} y_{12}), \end{bmatrix}.$$

Дальнейшая последовательность вычислений по формированию матрицы теплопроводности конструкции в целом сохраняется без изменения.

В модуле ввода физических данных программы расчета температурного поля необходимо задать в соответствующих полях ввода необходимые значения коэффициентов теплопроводности, различающиеся по осям x и y .

3. Варианты заданий

После освоения программы численного моделирования процессов нестационарной теплопроводности, студенту для конкретного ортотропного тела и соответствующих начальных и граничных условий, выданных преподавателем, необходимо выполнить моделирование.

Для выполнения лабораторной работы используется двумерная постановка и следующие задания:

Выполнить численное исследование ортотропных тепловых процессов в детали, представляющей собой односвязную область с граничными условиями первого и третьего рода.

Выполнить численное исследование ортотропных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями первого рода.

Выполнить численное исследование ортотропных тепловых процессов в детали, представляющей собой односвязную область с граничными условиями второго и третьего рода.

Выполнить численное исследование ортотропных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями третьего рода.

Выполнить численное исследование ортотропных тепловых процессов в детали, представляющей собой многосвязную область с граничными условиями первого и второго рода.

4. Порядок выполнения работы

1. Изучение теоретических вопросов.

2. Изучение работы программы численного моделирования ортотропных процессов теплопроводности.

3. Решение заданного варианта задачи:

построение дискретной модели тела для численного решения задачи ортотропной теплопроводности;

задание свойств материалов тела, параметров теплообмена на границах, начальных условий;

проведение вычислительного эксперимента;

представление результатов в виде графиков температуры во времени, изотерм и в форме цветовой градации;

анализ результатов и выводы по работе.

5. Указания по выполнению отчета

Каждый студент составляет отчет, который должен содержать постановку задачи, ход решения, результаты в различных формах представления температурного поля и выводы по работе.

6. Контрольные вопросы

Какие виды граничных условий могут быть заданы для решения ортотропных задач теплопроводности?

Приведите примеры ортотропных элементов конструкций?

Каким образом задается ортотропность коэффициента теплопроводности?

Можно ли решать анизотропные задачи теплопроводности с помощью рассмотренной методики моделирования?

В какой форме может быть визуально представлено температурное поле при решении ортотропных задач теплопроводности?

Литература

1. Самарский А.А. Введение в численные методы : учеб.пособие для вузов / А.А. Самарский; МГУ им. М.В.Ломоносова .— 3-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2005 .— 288 с.
2. Горбачев Д.В. Численные методы решения экстремальных задач: учебное пособие / Д. В. Горбачев ; ТулГУ .— Тула : Изд-во ТулГУ, 2014 .— 114 с. : ил. <https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2015031313284668525800006490>
3. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учебник для вузов / Л. Э. Эльсгольц. 2-е изд., стер. М. : Наука, 1969. 424 с. : ил.
4. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Недра, 1974. - 239 с.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Пер. с англ. - М.: Мир, 1979. - 392 с.
6. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : Учебник / Л.Э.Эльсгольц. 4-е изд. М. : Эдиториал УРСС, 2000. 320с.