


МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт высокоточных систем им. В.П. Грязева
Кафедра «Системы автоматического управления»

Утверждено на заседании кафедры
«Системы автоматического управления»
«22» января 2020 г., протокол №6

Заведующий кафедрой



О.В. Горячев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Компьютерное управление мехатронными системами»
основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата
по направлению подготовки
15.03.06 Мехатроника и робототехника
с направленностью (профилем)
Мехатроника

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 150306-01-20

Тула 2020 год

Разработчик методических указаний

Горячев Олег Владимирович, зав. каф. САУ, д.т.н., проф
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)



(подпись)

Данное учебное пособие представляет собой практическое руководство для решения задач, связанных с анализом характеристик мехатронных систем с компьютерным управлением в частотной области. Последовательно рассматриваются задачи построения математических моделей объектов управления мехатронных систем, формирования передаточных функций, Z- передаточных функций, решения разностных уравнений, методы программирования, задачи анализа устойчивости и точности дискретных импульсных систем.

Предназначено для подготовки бакалавров по направлению 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» и инженеров по специальности 24.05.06 «Системы управления летательными аппаратами», а также для аспирантов и инженеров, занимающихся исследованием и разработкой мехатронных систем с компьютерным управлением.

Ил. Табл. Библиогор.: назв.

Печатается по решению библиотечно-издательского совета.

Рецензенты:

Артющев В.В., зам. начальника отделения АО «КБ приборостроения им. академика А.Г.Шипунова»;

Котов В.В., д-р техн. наук, профессор кафедры «Робототехника и автоматизация производства»

ISBN _____

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	6
1. Математическое описание и анализ линейных непрерывных динамических систем	8
1.1. Типовые сигналы, используемые при анализе характеристик динамических систем	8
1.2. Математическое описание систем управления во временной области	9
1.3. Математическое описание систем управления в операторной форме	10
1.4. Логарифмические амплитудно-фазовые частотные характеристики элементарных динамических звеньев	13
1.5. Формирование структурной схемы динамических систем по дифференциальным уравнениям	15
1.6. Составление дифференциального уравнения по структурной схеме	19
1.7. Расчет процессов в динамических системах	21
1.7.1. Принцип суперпозиции. Свободное и вынужденное движение	22
1.7.2. Аналитический расчет переходных процессов в динамических системах.....	23
2. Анализ характеристик импульсных систем.....	27
2.1. Решетчатые функции	27
2.2. Основы формирования разностного уравнения по заданной структурной схеме ИСУ	28
3. Основы Z-преобразования.....	31
3.1. Основы теории вычетов.....	31
4. Математическое описание дискретных систем. Z-передаточные функции....	36
4.1. Z-передаточные функции с простыми полюсами.....	36
4.2. Передаточные функции с кратными полюсами.....	41
4.3. Определение z-передаточной функции по заданной структурной схеме МПВС	43
5. Анализ выходных процессов линейных импульсных динамических систем.	48
6. Передаточные функции замкнутых импульсных систем.....	58
7. Построение логарифмических амплитудно-фазовых псевдочастотных характеристик	64
8. Анализ устойчивости линейных импульсных систем.....	72
9. Определение точностных характеристик линейных импульсных систем	74
10. Методы программирования.....	82
10.1. Способ прямого программирования.	82
10.2. Способ параллельного программирования.	85
10.3. Способ последовательного программирования	86
10.4 Методы программирования для передаточных функций высокого порядка	87
11. Преобразование конечно-разностных уравнений к каноническим формам	90
12. Синтез алгоритмов наблюдения	103
13. Задания для самостоятельной работы	116
13.1. Определение вычетов.....	116
13.2. Определение Z- передаточной функции.....	117

13.3. Расчет переходных процессов в импульсных системах.....	118
13.4. Расчет свободного и вынужденного движений в системе	119
13.5. Построение псевдочастотных характеристик дискретной системы....	120
13.6. Анализ точности линейных импульсных систем.....	121
13.7. Переход от Z-передаточной функции к системе разностных уравнений (методы программирования)	123
13.8. Анализ точности линейных импульсных систем.....	125
13.9. Анализ устойчивости линейных импульсных систем.....	128
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	131
Список литературы.....	132

ПРЕДИСЛОВИЕ

Компьютерные системы, реализующие цифровой способ управления, находят все более широкое применение в практике создания систем управления самыми различными объектами: это бытовая и промышленная техника, технологическое оборудование, транспорт, военная техника и т.д. При проектировании систем с компьютерным управлением необходимо решение задач, связанных с построением математических моделей объектов управления, преобразования математических моделей к формам, удобным для последующей работы, формированием структурных схем систем управления, алгоритмов дискретного управления, анализа устойчивости и точности систем управления, анализа влияния дискретизации сигналов по времени на характеристики системы. Используемые при этом методики имеют специфические особенности, обусловленные свойствами дискретных систем управления. В связи с этим необходимым элементом подготовки специалистов в области проектирования систем с компьютерным управлением механическими объектами является приобретение опыта решения практических задач построения математических моделей объектов управления, представления математических моделей в форме дифференциальных уравнений, передаточных функций, полученных на основе преобразования Лапласа, перехода к Z - передаточным функциям, решения разностных уравнений, построения псевдочастотных характеристик, анализа устойчивости и точности дискретных систем управления.

В первом разделе пособия рассматриваются типовые задачи матричного счисления, которые находят широкое применение в практике проектирования систем управления. Основное внимание при этом уделяется расчету определителей, миноров и алгебраических дополнений.

Во втором разделе рассматриваются основы линейного преобразования линейных пространств, собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.

Третий раздел посвящен рассмотрению вопросов, связанных с построением математических моделей объектов управления, представляющих собой линейные, аналоговые (непрерывные) динамические системы, и анализу характеристик объектов управления во временной и частотной областях. Значительное внимание уделено формированию системы дифференциальных уравнений объекта на основе его структурной схемы.

В четвертом разделе рассматриваются задачи, ориентированные на закрепление математических основ теории дискретных систем управления. Изложение начинается с рассмотрения основ теории вычетов и Z -преобразования. Приведены примеры получения Z - передаточных функций для объектов управ-

ления на основе передаточных функций с простыми и кратными полюсами. Рассмотрены методики определения реакции дискретной системы на входные решетчатые функции. Значительное внимание уделено особенностям структурных преобразований дискретных систем, а также практическим методикам анализа устойчивости и точности дискретных систем. Рассмотрены также вопросы построения разностных уравнений дискретных систем, основанные на применении различных методов программирования.

В пятом разделе представлены задания, которые могут быть использованы студентами для самостоятельной подготовки по курсу «Компьютерное управление мехатронными системами».

В заключение хотелось бы высказать слова искренней благодарности студентам и аспирантам кафедры САУ Тульского государственного университета, оказавшим помощь в компьютерной верстке и редактировании данного учебного пособия: _____.

1. Математическое описание и анализ линейных непрерывных динамических систем

1.1. Типовые сигналы, используемые при анализе характеристик динамических систем

Среди всего многообразия входных сигналов, действующих в системах управления, выделяют так называемые типовые сигналы, реакция на которые позволяет оценить качество системы управления.

К типовым сигналам управления относят:

- импульсное входное воздействие;
- единичную ступенчатую функцию;
- гармоническое входное воздействие.

Первые два сигнала используют для оценки качества системы во временной области, последний сигнал – в частотной.

1) *Дельта – функция:*

$$\int_b^a f(t) \delta(t - \tau) d\tau = \begin{cases} f(\tau + 0), \tau \in [a, b), \\ 0, \tau \in (-\infty, a) \cup [b, \infty). \end{cases} \quad (1.1)$$

Справедливо для любой кусочно-непрерывной функции $f(\tau)$.

2) *Единичная ступенчатая функция (рис. 1.1):*

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 1, t > \tau, \\ 0, t \leq \tau. \end{cases} \quad (1.2)$$

Момент τ соответствует моменту приложения входного воздействия к системе управления.

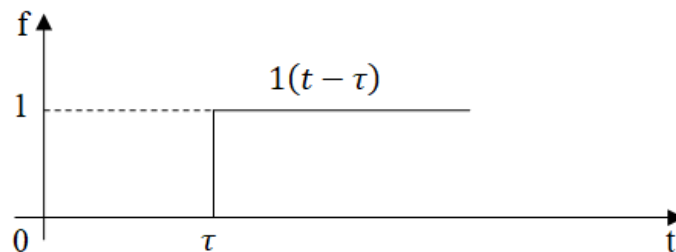


Рис. 1.1. Единичная ступенчатая функция

3) *Гармоническое входное воздействие.*

$$f(t) = 1(t) * A \sin \omega t \text{ или } f(t) = 1(t) * A e^{j\omega t} \quad (1.3)$$

4) Движение по закону \arctg .

$$f(t) = B \cdot \arctg(\omega t) \quad (1.4)$$

1.2. Математическое описание систем управления во временной области

Непрерывные процессы, протекающие в системах управления, могут быть описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями с соответствующими начальными условиями. Тогда, если известен входной сигнал, выходной сигнал определяется в результате решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Задача Коши состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям.

Функциональная схема ЭСП с ИД постоянного тока приведена на рис. 1.2.

На рис. 1.2 обозначены: КУ – коэффициент усиления, УМ – усилитель мощности, ИД – исполнительный двигатель, Р – редуктор, ТГ – тахогенератор, Н – нагрузка.

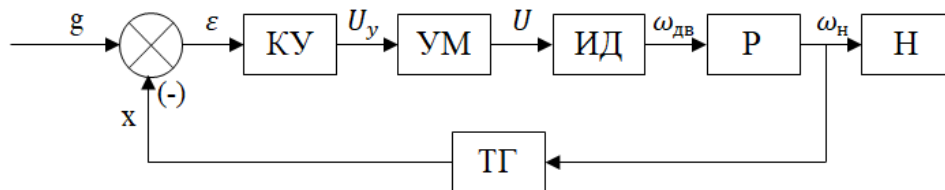


Рис. 1.2. Функциональная схема ЭСП с ИД постоянного тока

Элементы функциональной схемы описываются следующими уравнениями:

ИД:

$$J_{\text{дв}} \frac{d\omega_{\text{дв}}}{dt} = M_{\text{дв}} - M_{\text{н}}; M_{\text{н}} = 0;$$

$$M_{\text{дв}} = c_m \cdot i;$$

$$U = c_e \omega_{\text{дв}} + iR + L \frac{di}{dt}$$

Р:

$$\omega_{\text{дв}} = \frac{\omega_{\text{н}}}{k_p};$$

Н: Момент инерции нагрузки $J_{\text{н}}$.

Приведенный момент инерции нагрузки:

$$J_{\text{нп}} = J_{\text{дв}} + \frac{J_{\text{н}}}{k_p^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{УМ:} \quad & k_{ym} = 1; \\
\text{КУ:} \quad & k_{ky}; \\
& \varepsilon = g - x; \\
& x = \omega_n \cdot k_{mz}.
\end{aligned}$$

Преобразуем полученные уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_{\partial\theta}}{dt} &= \frac{1}{J_{\partial\theta}} M_{\partial\theta}; \\
M_{\partial\theta} &= c_m \cdot i; \\
\frac{di}{dt} &= (U - c_e \omega_{\partial\theta} - iR) \frac{1}{L}; \\
\frac{d\varphi_n}{dt} &= \omega_n; \\
U_y &= \varepsilon k_{ky}; \\
\varepsilon &= g - \omega_n \cdot k_{mz}.
\end{aligned}$$

В общем случае одномерная линейная нестационарная система управления описывается дифференциальным уравнением

$$a_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_0(t) x(t) = b_m(t) \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_0(t) g(t), \quad (1.5)$$

Где $g(t)$ – входной сигнал; $x(t)$ – выходной сигнал; t – текущее время; $a_n(t), \dots, a_0(t); b_m(t), \dots, b_0(t)$ – параметры системы; n, m – заданные числа.

Начальные условия:

$$x(t_0) = x_0; \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0; \dots x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}; \quad (1.6)$$

где t_0 – момент подачи входного сигнала.

Если коэффициенты уравнения постоянны, система называется линейной стационарной.

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_0 x(t) = b_m \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_0 g(t), \quad (1.7)$$

1.3. Математическое описание систем управления в операторной форме

При анализе систем управления часто прибегают к операторной форме записи, используя алгебраизированный оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt}.$$

С использованием алгебраизированного оператора дифференцирования дифференциальные уравнения системы можно записать в операторной форме:

$$\begin{aligned} D(p) \cdot x(t) &= M(p) \cdot g(t); \\ D(p) &= a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0; \\ M(p) &= b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из операторной формы следует способ изображения стационарной системы в виде структурных схем (рис. 1.3).

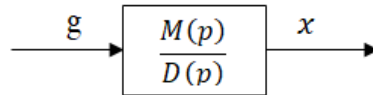


Рис. 1.3. Структурная схема системы

Сложные системы управления, как правило, состоят из элементарных и типовых звеньев. Напомним наиболее часто используемые элементарные и типовые звенья.

1. Усилительное звено (рис. 1.4):

$$x(t) = k(t) \cdot g(t)$$

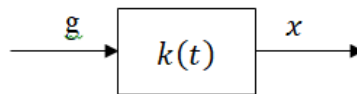


Рис. 1.4. Структурная схема усилительного звена

2. Дифференцирующее звено (рис. 1.5):

$$x(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

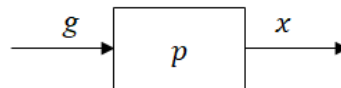


Рис. 1.5. Структурная схема дифференцирующего звена

Тахогенератор:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_n}{dt} &= \omega_n; \\ x &= \omega_n \cdot k_{m2} = k_{m2} \cdot \frac{d\varphi_n}{dt}. \end{aligned}$$

3. Интегрирующее звено (рис. 1.6):

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= g(t); \\ px(t) &= g(t); \\ x(t) &= \frac{1}{p} g(t).\end{aligned}$$

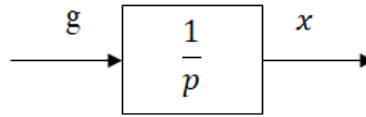


Рис. 1.6. Структурная схема интегрирующего звена

Для примера рассмотрим процесс изменения угловой скорости ω диска с моментом инерции J под действием управляющего момента внешних сил M из состояния покоя:

$$\begin{aligned}J \frac{d\omega}{dt} &= M; \\ \omega(t_0) &= 0; \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{J} M.\end{aligned}$$

Принимаем

$$\begin{aligned}x &= \omega; \\ x &= \frac{M}{J}.\end{aligned}$$

Замечание: первые три звена называются элементарными, так как они не могут быть представлены через другие звенья.

4. Аperiodическое звено (рис. 1.7):

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = g(t),$$

T – постоянная времени.

Операторная форма записи:

$$\begin{aligned}(Tp + 1)x(t) &= g(t); \\ \frac{x(t)}{g(t)} &= \frac{1}{Tp + 1}.\end{aligned}$$

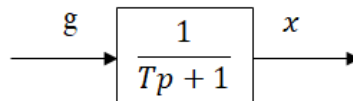


Рис. 1.7. Структурная схема апериодического звена

5. Колебательное звено (рис. 1.8):

$$T^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = g(t),$$

где T - постоянная времени, ξ - коэффициент демпфирования;

$$|\xi| < 1.$$

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)x(t) = g(t)$$

$$\frac{x(t)}{g(t)} = \frac{1}{(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}$$

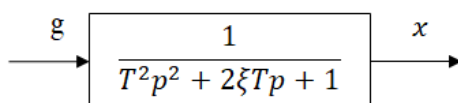


Рис. 1.8. Структурная схема колебательного звена

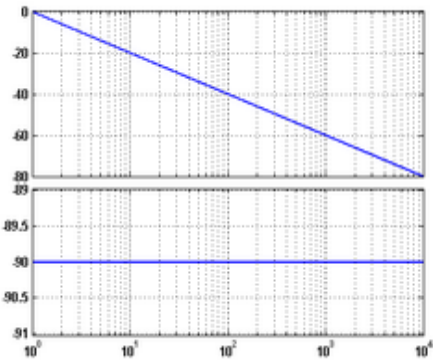
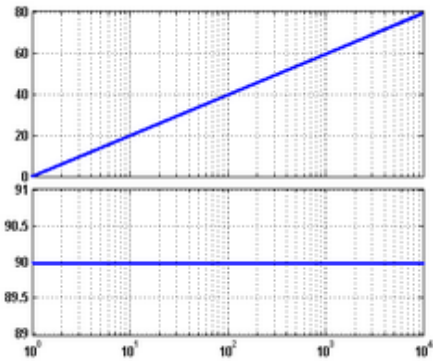
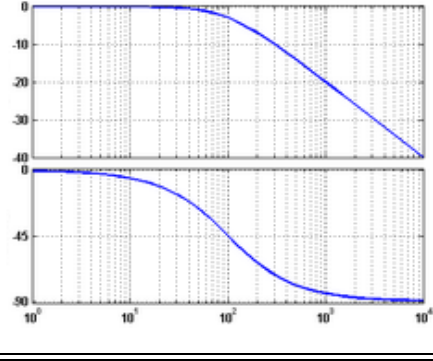
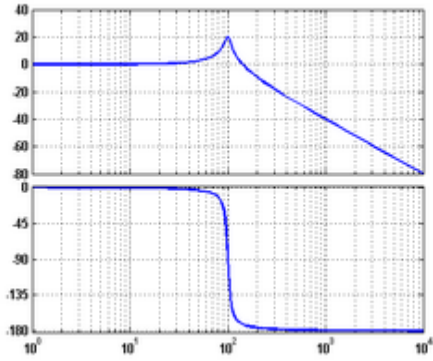
1.4. Логарифмические амплитудно-фазовые частотные характеристики элементарных динамических звеньев

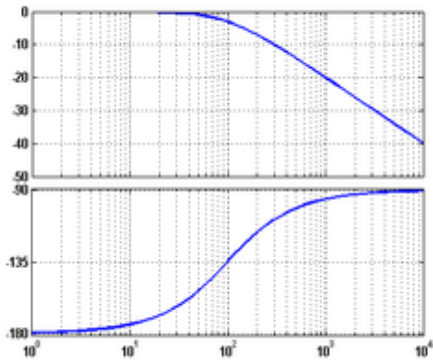
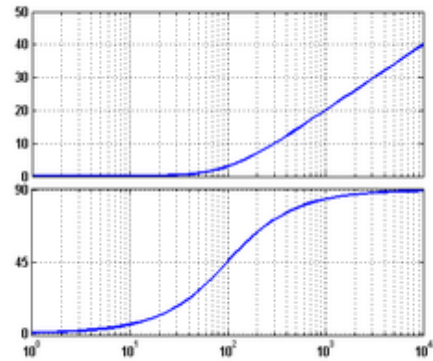
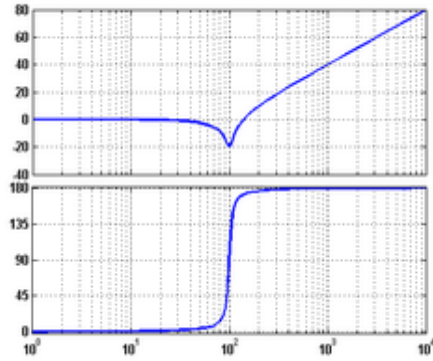
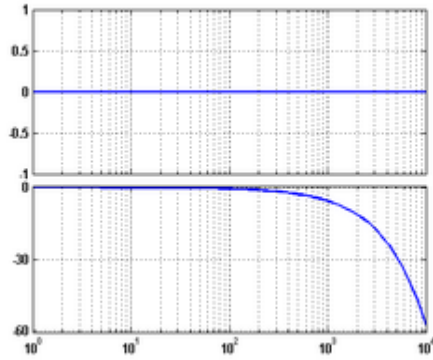
В табл. 1 приведены передаточные функции и ЛАФЧХ некоторых типовых элементарных звеньев, s — комплексная переменная. Большая часть линейных стационарных систем может быть представлена в виде соединения таких звеньев.

Таблица 1

ЛАФЧХ некоторых элементарных звеньев

№	Звено	Передаточная функция	ЛАФЧХ	Примечания
1	Пропорциональное	K		$K = 100$

2	Идеальное интегрирующее	$\frac{1}{s}$		
3	Идеальное дифференцирующее	s		
4	Апериодическое (реальное интегрирующее)	$\frac{1}{Ts + 1}$		$T = 0,01$
5	Колебательное	$\frac{1}{T^2 s^2 + 2 \xi T s + 1}$		$T = 0,01$ $\xi = 0.1$

6	Неустойчивое апериодическое	$\frac{1}{Ts - 1}$		$T = 0,01$ Немини- мально- фазовое
7	Форсирующее	$Ts + 1$		$T = 0,01$
8	Форсирующее второго порядка	$T^2 s^2 + 2 \xi Ts + 1$		$T = 0,01$ $\xi = 0.1$
9	Чистого запаздывания	e^{-sT}		$T = 0.0001$

1.5. Формирование структурной схемы динамических систем по дифференциальным уравнениям

Структурные схемы строятся с помощью элементарных, типовых звеньев и сумматоров, описывающих преобразования сигналов. Они служат одним из языков описания систем управления. По структурным схемам, как правило, находятся эквивалентный оператор системы управления, а затем решаются различные задачи анализа.

Алгоритм построения структурной схемы

1. Выразить член со старшей производной из дифференциального уравнения и представить полученное соотношение с помощью сумматоров, интегрирующих, дифференцирующих и усилительных звеньев.
2. Все низшие производные получить как сигналы на соответствующих выходах последовательно соединенных интегрирующих звеньев.
3. Начальные условия представить как постоянные во времени воздействия, приложенные на входах интегрирующих звеньев.

Примеры

Пример 1.1. Построить структурную схему системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$4\ddot{x} - 3\dot{x} + x = 2\dot{g}$$

с начальными условиями:

$$x(0) = x_0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Решение:

Выражаем из уравнения член со старшей производной:

$$4\ddot{x} - 3\dot{x} + x = 2\dot{g};$$

$$4\ddot{x} = 2\dot{g} + 3\dot{x} - x;$$

$$\ddot{x} = \frac{2\dot{g} + 3\dot{x} - x}{4};$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\dot{g} + \frac{3}{4}\dot{x} - \frac{1}{4}x.$$

Изобразим схему получения сигнала \ddot{x} (рис. 1.9).

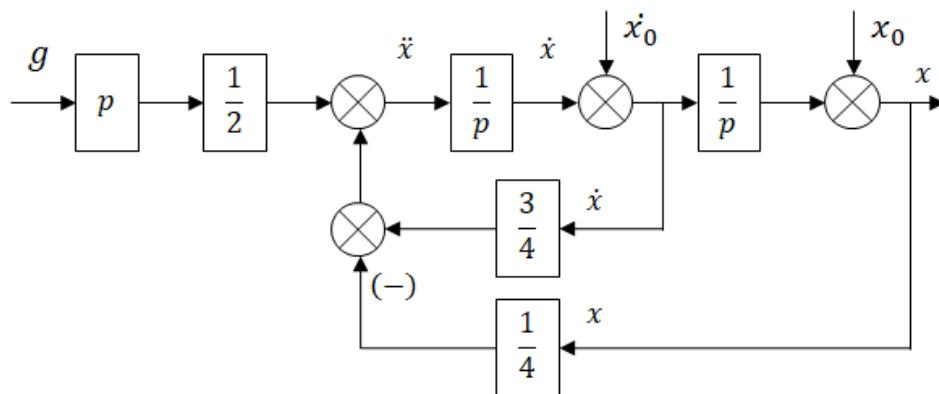


Рис. 1.9. Структурная схема системы

Пример 1.2. Построить структурную схему системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\sin t \cdot \ddot{x} + t\ddot{x} + tg^2tx = \dot{g} + 2g$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0; \ddot{x}(0) = \ddot{x}_0.$$

Решение:

Выражаем из уравнения член со старшей производной:

$$\sin t \cdot \ddot{x} + t\ddot{x} + tg^2tx = \dot{g} + 2g$$

$$\sin t \cdot \ddot{x} = \dot{g} + 2g - t\ddot{x} - tg^2tx.$$

Изобразим схему получения сигнала \ddot{x} (рис. 1.10).

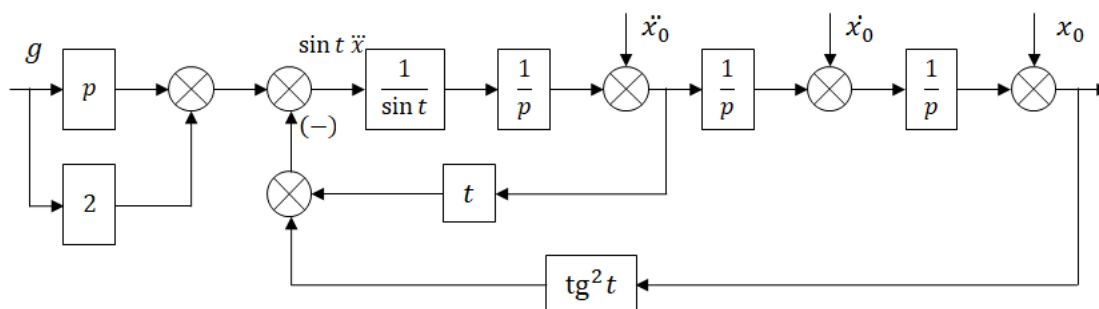


Рис. 1.10. Структурная схема системы

Пример 1.3. Составить структурную схему по системе уравнений:

$$\Delta p_{0p}(p) = \frac{a_{11}\Delta p_o(p) + \Delta X_{0p}(p)a_{15}\left(\frac{a_{110}}{a_{15}}p + 1\right)}{a_{13}\left(\frac{p}{a_{13}} - 1\right)};$$

$$\Delta X_{0p}(p) = \frac{a_{31}\Delta p_{\delta}(p) + a_{32}\Delta p_{0p}(p)}{a_{33}\left(\frac{1}{a_{33}}p^2 - \frac{a_{34}}{a_{33}}p - 1\right)}.$$

По системе уравнений составим структурную схему (рис. 1.11):

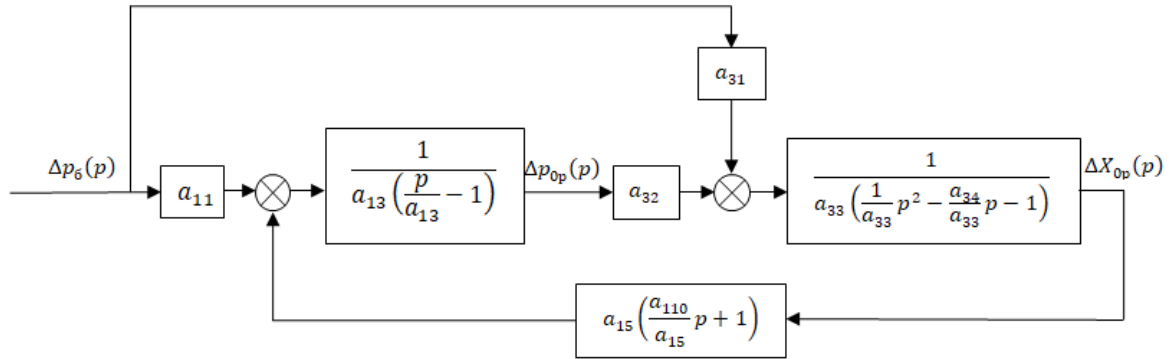
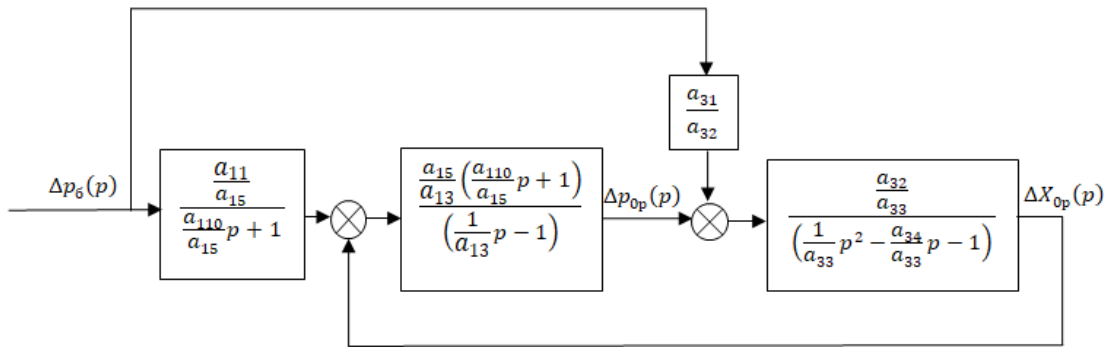


Рис. 1.11. Структурная схема линейной модели системы



Выполним структурные преобразования для получения единичной обратной связи (рис. 1.12):

Рис. 1.12. Преобразованная схема системы

Проведем замену:

$$\begin{aligned} \frac{a_{11}}{a_{15}} &= k_1; & \frac{a_{15}}{a_{13}} &= k_3; & \frac{a_{31}}{a_{32}} &= k_4; & \frac{a_{32}}{a_{33}} &= k_5; \\ \frac{a_{110}}{a_{15}} &= T_1; & \frac{1}{a_{13}} &= -T_2; & \frac{1}{a_{33}} &= -T_3^2; & \frac{a_{34}}{a_{33}} &= T_4. \end{aligned}$$

В соответствии с введенными заменами структурная схема примет следующий вид (рис. 1.13):

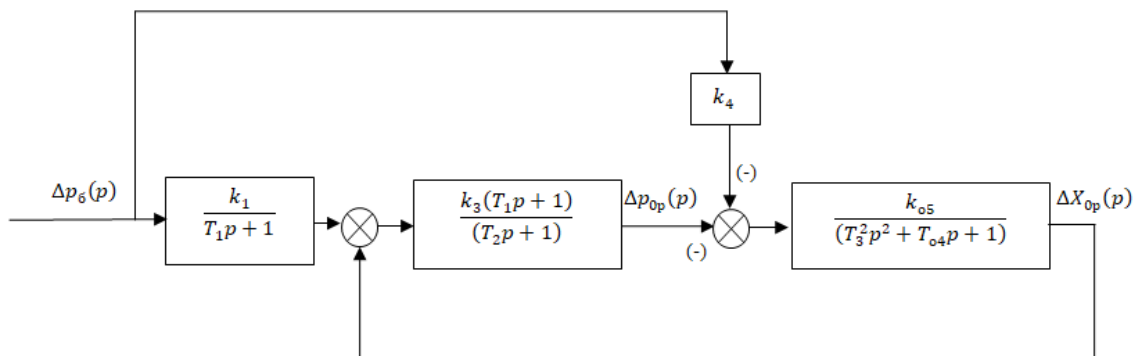
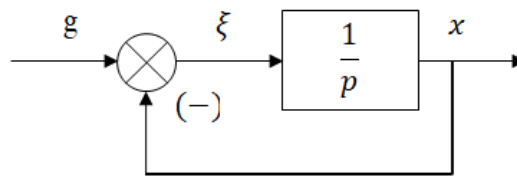


Рис. 1.13. Преобразованная структурная схема системы

1.6. Составление дифференциального уравнения по структурной схеме

Для записи дифференциального уравнения следует обозначить на схеме все промежуточные сигналы, записать уравнения для каждого звена и для каждого сумматора и из полученной системы дифференциальных и алгебраических уравнений исключить промежуточные переменные.



Пример 1.4. Составить дифференциальное уравнение по структурной схеме, показанной на рис. 1.14.

Рис. 1.14. Структурная схема системы

Решение:

1-е звено:
$$x = \frac{1}{p} \xi;$$

2-е звено:
$$\xi = g - x.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{p}(g - x); \\ px &= g - x; \\ px + x &= g; \\ \dot{x}(t) + x(t) &= g(t). \end{aligned}$$

Пример 1.5. Составить дифференциальное уравнение по структурной схеме, изображенной на рис. 1.15.

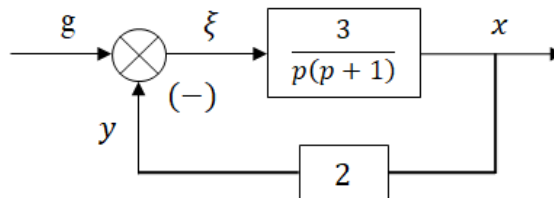


Рис. 1.15. Структурная схема системы

Решение:

1-е звено:
$$x = \frac{3}{p(p+1)} \xi;$$

2-е звено:

$$y = 2x;$$

3-е звено:

$$\xi = g - y.$$

Отсюда

$$x = \frac{3}{p(p+1)}(g - 2x);$$

$$(p^2 + p)x = 3(g - 2x);$$

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 6x(t) = 3g(t).$$

Пример 1.6. Найти эквивалентную передаточную функцию САУ со структурной схемой, показанной на рис. 1.16.

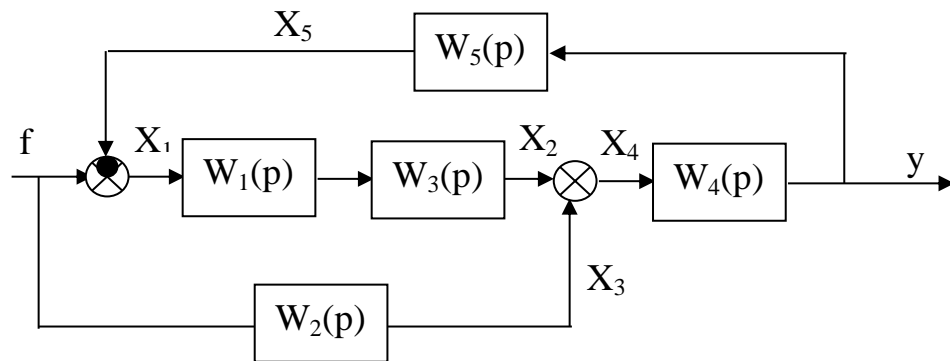


Рис. 1.16. Структурная схема системы

На рисунке: $W_1(p) = \frac{1}{p}$; $W_2(p) = k_1$; $W_3(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}$; $W_4(p) = \frac{1}{p}$;

$$W_5(p) = k_2.$$

Решение:

1. Вводим вспомогательные переменные X_1 - X_5 .

2. Записываем систему уравнений:

$$x_1 = f - x_5;$$

$$x_2 = W_1(p)W_3(p)x_1;$$

$$x_3 = W_2(p)f;$$

$$x_4 = x_2 + x_3;$$

$$y = W_4(p)x_4;$$

$$x_5 = W_5(p)y;$$

3. Исключаем вспомогательные переменные:

3.1.

$$x_1 = f - W_5(p)y;$$

$$x_4 = W_1(p)W_3(p)x_1 + W_2(p)f;$$

$$y = W_4(p)x_4;$$

$$3.2. \quad x_4 = W_1(p)W_3(p)(f - W_5(p)y) + W_2(p)f;$$

$$y = W_4(p)x_4;$$

$$3.3. \quad y = W_4(p)(W_1(p)W_3(p)(f - W_5(p)y) + W_2(p)f);$$

$$y = W_1(p)W_3(p)W_4(p)(f - W_5(p)y) + W_2(p)W_4(p)f;$$

$$y = W_1(p)W_3(p)W_4(p)f - W_1(p)W_3(p)W_4(p)W_5(p)y + W_2(p)W_4(p)f;$$

$$(W_1(p)W_3(p)W_4(p) + W_2(p)W_4(p))f = y + W_1(p)W_3(p)W_4(p)W_5(p)y;$$

$$y(1 + W_1(p)W_3(p)W_4(p)W_5(p)) = (W_1(p)W_3(p) + W_2(p))W_4(p)f$$

$$y = \frac{(W_1(p)W_3(p) + W_2(p))W_4(p)}{1 + W_1(p)W_3(p)W_4(p)W_5(p)}f$$

4. Эквивалентная передаточная функция системы будет иметь вид:

$$\Phi(p) = \frac{(W_1(p)W_3(p) + W_2(p))W_4(p)}{1 + W_1(p)W_3(p)W_4(p)W_5(p)}$$

Подставляем значения передаточных функций:

$$W_1(p) = \frac{1}{p}; \quad W_2(p) = k_1; \quad W_3(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}; \quad W_4(p) = \frac{1}{p}; \quad W_5(p) = k_2.$$

$$\Phi(p) = \frac{\left(\frac{1}{p(T_1 p + 1)} + k_1 \right) \frac{1}{p}}{1 + \frac{k_2}{p^2(T_1 p + 1)}};$$

$$\Phi(p) = \frac{\frac{1}{p^2(T_1 p + 1)} + \frac{k_1}{p}}{1 + \frac{k_2}{p^2(T_1 p + 1)}};$$

$$\Phi(p) = \frac{\frac{1 + k_1(T_1 p + 1)}{p^2(T_1 p + 1)}}{\frac{p^2(T_1 p + 1) + k_2}{p^2(T_1 p + 1)}} = \frac{(1 + k_1(T_1 p + 1))p^2(T_1 p + 1)}{p^2(T_1 p + 1)(p^2(T_1 p + 1) + k_2)} = \frac{(1 + k_1(T_1 p + 1))}{(p^2(T_1 p + 1) + k_2)};$$

$$\Phi(p) = \frac{1 + k_1(T_1 p + 1)}{p^2(T_1 p + 1) + k_2}.$$

1.7. Расчет процессов в динамических системах

Постановка задачи

Пусть известны:

а) входной сигнал $g(t)$;

б) система, описываемая дифференциальным уравнением

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = b_m(t)g^{(m)}(t) + \dots + b_0(t)g(t),$$

в) начальные условия:

$$x(0) = x_0;$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$

Требуется найти выходной сигнал $x(t)$.

1.7.1. Принцип суперпозиции. Свободное и вынужденное движение

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции: эффект, создаваемый суммой нескольких воздействий, равен сумме эффектов каждого из воздействий в отдельности. Поэтому выходной сигнал линейной системы представляется в виде суммы свободного и вынужденного движений:

$$x(t) = x_c(t) + x_{\text{вын}}(t). \quad (1.9)$$

1) *Свободное движение* $x_c(t)$ - происходит при отсутствии внешнего воздействия ($g(t) = 0$) вследствие ненулевых начальных условий. Оно является решением однородного дифференциального уравнения, соответствующего исходному уравнению системы:

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = 0$$

с заданными начальными условиями.

В случае, когда начальные условия нулевые, свободное движение в системе отсутствует ($x_c(t) = 0$).

2) *Вынужденное движение* $x_{\text{вын}}(t)$ происходит вследствие внешнего воздействия $g(t)$ при нулевых начальных условиях. Оно является решением неоднородного уравнения при нулевых начальных условиях.

Вынужденное движение отлично от нуля только после приложения внешнего воздействия.

Подчёркивая эту причинно-следственную связь, вынужденное движение системы при внешнем воздействии, отличном от нуля при $t > t_0$, обозначим:

$$x_{\text{вын}}(t) \cdot 1(t - t_0),$$

где $1(t - t_0)$ – единичная ступенчатая функция.

Выходной сигнал системы будет иметь вид

$$x(t) = x_i(t) + x_{\text{вын}}(t) 1(t - t_0). \quad (1.10)$$

Замечания:

1) *Общее решение дифференциального уравнения находится по формуле*

$$x_0(t) = c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t), \quad (1.11)$$

где $c_1 \dots c_n$ – произвольные постоянные; $\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t)$ – функциональная система решений уравнения.

Если система стационарная, то сначала определяются корни $\lambda_1 \dots \lambda_n$ характеристического уравнения:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Если корни действительные, разные, то общее решение имеет вид

$$x_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \quad (1.12)$$

Если среда корней есть кратный действительный корень λ_j кратности k , то ему соответствует следующая составляющая общего решения:

$$x_{0j}(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1}) e^{\lambda_j t},$$

где $c_1 \dots c_k$ – произвольные постоянные.

Паре комплексных сопряженных корней $\alpha_j + \beta_j i$ соответствует решение

$$x_{0j}(t) = e^{\alpha_j t} (c_1 \cos \beta_j t + c_2 \sin \beta_j t), \quad (1.13)$$

а паре комплексных сопряженных корней кратности k

$$x_{0j}(t) = e^{\alpha_j t} [(c_1 + c_2 t + \dots + c_k t^{k-1}) \cos \beta_j t + (d_1 + d_2 t + \dots + d_k t^{k-1}) \sin \beta_j t] \quad (1.14)$$

2) *Частное решение находим методом вариации произвольных постоянных или методом подбора.*

1.7.2. Аналитический расчет переходных процессов в динамических системах

Алгоритм аналитического расчёта переходных процессов состоит из трёх основных пунктов:

1. Найти свободное движение, решив однородное дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями.
2. Найти вынужденное движение, решив неоднородное дифференциальное уравнение с нулевыми начальными условиями.
3. Определить выходной сигнал как сумму свободного и вынужденного движений.

Рассмотрим примеры, расчёта переходных процессов.

Пример 1.7. Найти реакцию системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$T\ddot{x}(t) + x(t) = g(t),$$

на входной сигнал $g(t) = 1(t)$ при нулевых начальных условиях.

Решение:

1) Находим свободное движение.

Так как начальные условия нулевые, то свободное движение отсутствует:

$$x_i(0) = 0.$$

2) Находим вынужденное движение как решение уравнения $T\ddot{x}(t) + x(t) = 1$, при $x(0) = 0$.

а) Общее решение однородного уравнения

$$\begin{aligned} T\ddot{x}(t) + x(t) &= 0; \\ T\lambda + 1 &= 0; \end{aligned} \quad ; \quad \lambda = -\frac{1}{T};$$

$$x_0(t) = ce^{-t/T}.$$

б) Частное решение неоднородного уравнения

$$x_n(t) = 1.$$

в) Общее решение неоднородного уравнения

$$x(t) = x_0(t) + x_n(t) = ce^{-t/T} + 1.$$

г) Из начального условия

$$x(0) = c + 1 = 0; \quad c = -1.$$

Окончательно

$$x_{\text{вых}}(t) = 1 - e^{-t/T}.$$

3) Выходной сигнал определяется вынужденным движением:

$$x(t) = x_{\text{вых}}(t) = 1 - e^{-t/T}.$$

Пример 1.8. Найти свободное и вынужденное движение, а также выходной сигнал системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) + x(t) = g(t).$$

Начальные условия:

$$x(0) = 0,5; \quad g(t) = 1(t).$$

Решение:

Находим свободное движение.

Характеристическое уравнение

$$x + 1 = 0 \quad ; \quad x = -1;$$

$$x_0(t) = ce^{-t}.$$

Из начального условия получаем

$$x_0(0) = 0,5 = c ; \quad c = 0,5.$$

Окончательно свободное движение

$$x_0(t) = 0,5e^{-t}.$$

Находим вынужденное движение как решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) + x(t) = 1$$

при начальном условии: $x(0) = 0$.

а) Общее решение

$$x_0(t) = ce^{-t}.$$

б) Частное решение

$$x_n(t) = 1.$$

в) Общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_0(t) + x_n(t) = ce^{-t} + 1,$$

Отсюда

$$c = -1;$$

$$x_{\text{вын}} = -e^{-t} + 1.$$

Выходной сигнал определяется по формуле

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-t} + 1 = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} ; \quad t \geq 0.$$

Пример 1.9. Найти свободное и вынужденное движение, а также выходной сигнал системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = g(t).$$

Начальные условия

$$x(0) = 1 ; \quad \dot{x}(0) = 3$$

при входном сигнале:

$$g(t) = \begin{cases} 2e^{3t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

1) Определяем свободное движение как решение однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0.$$

При начальных условиях

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 3;$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2};$$

$$\lambda_1 = +2; \quad \lambda_{1,2} = +1.$$

Общее решение:

$$x_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Из начальных условий

$$c_1 + c_2 = 1 \quad c_2 = 2,$$

$$c_1 + 2c_2 = 3 \quad c_1 = -1,$$

а свободное движение

$$x_c(t) = -e^{-t} + 2e^{2t}.$$

2) Находим вынужденное движение как решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 2e^{3t}.$$

а) Общее решение:

$$x_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

б) Частное решение $x_n(t) = A \cdot e^{3t}$ подставим в исходное уравнение:

$$9e^{3t} A - 9 \cdot A e^{3t} + 2A e^{3t} = 2e^{3t};$$

$$A = 1;$$

$$x_n(t) = e^{3t}.$$

в) Общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_0(t) + x_n(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + e^{3t}.$$

г) Подставим нулевые начальные условия:

$$x(0) = c_1 + c_2 + 1 = 0;$$

$$\dot{x}(0) = c_1 + 2c_2 + 3 = 0;$$

$$c_1 = 1; \quad c_2 = -2;$$

$$x_{\text{вын}}(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t}.$$

3) Выходной сигнал определяется по формуле

$$x(t) = -e^t + 2e^{2t} + e^t - 2e^{2t} + e^{3t} = e^{3t}.$$

2. Анализ характеристик импульсных систем

2.1. Решетчатые функции

В простейшем варианте структурная схема разомкнутой импульсной системы управления может быть представлена в виде (рис.2.1).

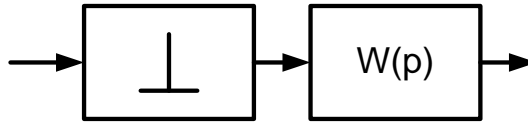


Рис.2.1.

Особенностью функционирования импульсных систем управления является дискретизация процессов управления по времени, что приводит к необходимости перехода от непрерывных функций к решетчатым функциям.

Решетчатыми называют функции определенные в тактовые моменты времени t_1, t_2, \dots

Любой непрерывной функции можно поставить в соответствие некоторое множество решетчатых функций переменной t :

$$t = nT + \varepsilon T \quad (0 \leq \xi \leq 1);$$

$$f[nT, \xi T],$$

где t – некоторое текущее время, T – период дискретизации по времени; ξ – смещение решетчатой функции относительно моментов квантования (дискретизации), n – номер дискреты; nT – дискретное время.

Аналогами производной для непрерывной функции для решетчатой функции являются конечные разности решетчатых функций.

Прямая конечная разность первого порядка

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n].$$

Аналогично разность второго порядка

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n].$$

Разность k -го порядка решетчатой функции $f[n]$ определяется формулой

$$\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n]. \quad (2.1)$$

Разность любого порядка можно выразить через значение решетчатой функции $f[n]$. В частности, для разницы второго порядка получим

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n].$$

Примеры

Пример 2.1. Задана решетчатая функция $f[n] = a$, $a = \text{const}$. Найти конечную разность первого порядка:

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n] = 0.$$

*Пример 2.2. Задана решетчатая функция $f[n] = a * n + b$. Найти конечную разность первого порядка:*

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n] = a(n+1) + b - an - b = a.$$

Пример 2.3. Определить конечные разности первого и второго порядка экспоненциальной функции:

$$f[n] = e^{cn};$$

$$\Delta f[n] = e^{c(n+1)} - e^{cn} = e^{cn}(e^c - 1);$$

$$\Delta^2 f[n] = e^{c(n+1)}(e^c - 1) - e^{cn}(e^c - 1) = (e^c - 1)(e^{cn}e^c - e^{cn}) = (e^c - 1)e^{cn}(e^c - 1).$$

2.2. Основы формирования разностного уравнения по заданной структурной схеме ИСУ

Задана разомкнутая ИСУ (рис. 2.2):



Рис. 2.2. Разомкнутая цифровая (дискретная) система управления

На рис. 2.2 приняты следующие обозначения: ЭНП – экстраполятор нулевого порядка; $W_{нч}(p)$ – передаточная функция непрерывной части (объекта управления).

Необходимо научиться строить математические модели элементов цифровой системы и системы в целом. Алгоритм решения разбивается на этапы:

- 1) Определение алгоритм работы ЦВУ.
- 2) Определение передаточной функции объекта управления – $W_{нч}(p)$.
- 3) Определение передаточной функции приведенной непрерывной части системы: $W_{нч}(p)$.
- 4) Определение разностных уравнений, описывающих функционирование объекта управления в дискретные моменты времени.
- 5) Определение z -передаточной функции системы в целом.

Примеры

Пример 2.4. Получить разностное уравнение и определить z -передаточную функцию программы интегрирования, реализуемую на цифровой управляющей машине.

Рассмотреть решение задачи для случаев использования в качестве методов интегрирования:

- а) метода Эйлера;
- б) метода трапеций.

Решение:

Формулы численного интегрирования являются аппроксимациями разностных уравнений, которые получаются с помощью хорошо известного рода Тейлора:

- а) При решении дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dt} = f(t) ;$$
$$y(0) = 0 ;$$

Воспользуемся первым членом разложения функции y в ряд Тейлора. Тогда

$$y[n + 1] = y[n] + T \cdot f[n] ;$$

T – величина шага интегрирования ;

n – номер дискреты (шага) .

Разностное уравнение:

$$y[n + 1] - y[n] = T \cdot f[n] .$$

- б) При интегрировании по методу трапеций воспользуемся двумя членами ряда Тейлора:

$$y[n + 1] = y[n] + T \cdot f[n] + \frac{T^2}{2} \cdot f' [n] .$$

Аппроксимируем производную следующим образом:

$$f' [n] = \frac{f[n] - f[n - 1]}{T} .$$

Тогда

$$y[n + 1] = y[n] + T \cdot f[n] + \frac{T}{2} \cdot [f[n] - f[n - 1]] ;$$

$$y[n + 1] = y[n] + \frac{T}{2} \cdot (3 \cdot f[n] - f[n - 1]) .$$

Пример 2.5. Вывести разностное уравнение и определить передаточную функцию программы дифференцирования, реализуемой МПВС методом первой прямой конечной разности.

Решение:

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = y(t)$$

должно быть реализовано МПВС.

Уравнение расчета производной и соответствующая ему z -передаточная функция алгоритма, имеют вид

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{T};$$

Задания, рекомендованные для самостоятельной проработки по материалу параграфа 2

Определите прямую и обратную первую конечную разность для функции:

$$f[k]=3; f[k]=2k; f[k]=3; f[k]=e^{2k}; f[k]=k^2+2; f[k]=2k; f[k]=k(k^2+1)$$

3. Основы Z-преобразования

3.1. Основы теории вычетов

Важное место в изучении и в применении теории ФКП занимает исследование их поведения в особых точках, где нарушается аналитичность функции. В частности, это точки, где функции не определены.

В особых точках возможны следующие варианты:

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ – не существует и равен ∞ ;
- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ – существует и равен конечному числу;
- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \rightarrow \infty$.

Точка a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если найдется такое кольцо $0 < |z - a| < R$, в котором функция $f(z)$ аналитическая, причем в самой точке a функция $f(z)$ не является аналитической.

Изолированная особая точка называется полюсом, если функция $f(z)$ неограниченно возрастает при $z \rightarrow a$.

Каждый полюс a функции $f(z)$ превращается в нуль « a » функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Порядок полюса « a » функции $f(z)$ называется порядок нуля « a » функции $\varphi(z)$. Говорят, что функция $\varphi(z)$ имеет в точке a нуль порядка m , если

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(m-1)}(a) = 0, \quad (3.1)$$

но

$$\varphi^{(m)}(a) \neq 0.$$

Вычетом функции $f(z)$ называется c_{-1} коэффициент в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана.

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ ($a \neq \infty$) называется число $\frac{1}{2\pi i} \int_l f(z) dz$, где l – достаточно малая окружность $|z - a| = \rho$, такая, что в круге $|z - a| \leq \rho$, нет других особых точек, кроме точки $z = a$. В этом случае величина вычета не зависит от величины радиуса ρ .

Обозначается вычет функции $f(z)$ в точке a :

$$\text{Res } f(z) \Big|_{z=a}. \quad (3.2)$$

Из курса математики известно, что

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a} = c_{-1}, \quad (3.3)$$

т. е. вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ равен коэффициенту при $\frac{1}{(z-a)}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = a$.

Ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n; \quad (3.4)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz. \quad (3.5)$$

В курсе «Компьютерное управление» нас будут интересовать функции $f(z)$ относительно полюсов.

Получим зависимость для расчета вычета функции $f(z)$ относительно полюса $z = a$ k -го порядка.

Известно, что разложение этой функции в ряд Лорана в окрестности точки $z = a$ имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Умножим обе части последнего равенства на $(z-a)^k$ и продифференцируем полученные выражения $k-1$ раз:

$$(z-a)^k f(z) = c_{-k} + \dots + c_{-1} (z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+k};$$

$$\frac{d^{k-1} \left[(z-a)^k f(z) \right]}{dz^{k-1}} = (k-1)! c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+k-1)! (z-a)^{n+k}.$$

Перейдя к пределу в обеих частях равенства при $z \rightarrow a$, будем иметь:

$$c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-a)^k f(z) \right]. \quad (3.6)$$

Формула (3.6) – основная формула для вычисления вычета функции в полюсе k -го порядка.

Если $k=1$ (полюс первого порядка), то

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z).$$

Если при этом функция $f(z)$ представляет собой отношение двух функций $P(z)$ и $Q(z)$, аналитических в окрестности точки $z = a$, т. е.

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

Причем $P(a) \neq 0$, и функция $Q(a)$ имеет в точке $z = a$ нуль первого порядка, то

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{P(z)(z-a)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{(z-a)}} = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

Итак, формулы для вычетов имеют следующий вид:

$$\operatorname{Res} \frac{f(z)}{(z-a)} \Big|_{z=a} = f(a); \quad (3.6a)$$

$$\operatorname{Res} \frac{f(z)}{(z-a)^n} \Big|_{z=a} = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}; \quad (3.6б)$$

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a} = \frac{P(a)}{Q'(a)}, \quad Q(a) = 0, Q'(a) \neq 0, P(a) \neq 0; \quad (3.6в)$$

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z); \quad (3.6г)$$

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=a} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a) f(z)]. \quad (3.6д)$$

Примеры

Пример 3.1. Определить вычет функции

$$f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Решение:

Функция имеет полюсы первого порядка:

$$z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots;$$

$$z_0 = \frac{\pi}{2}$$

Ищем вычет по формуле (3.6в):

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

$$\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z_0 = \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{-\sin \frac{\pi}{2}} = 1.$$

Пример 3.2. Определить вычет функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}.$$

Решение:

Функция имеет полюс первого порядка в точке $z_0 = j$.

Ищем вычет по формуле (3.6в):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(z^2 + 1) &= 2z \\ \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z_0=j} &= \frac{1}{2j} = \frac{-j}{2j(-j)} = -\frac{j}{2} \end{aligned}$$

Пример 3.3. Определить вычет функции

$$f(z) = \frac{z+3}{(z+4)(z-3)}.$$

Решение:

Функция имеет полюсы первого порядка в точках $z=-4$; $z=1$.

Ищем вычет по формуле (3.6а):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=-4} + \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=1} = \frac{z+3}{(z-1)} \Big|_{z=-4} + \frac{z+3}{(z+4)} \Big|_{z=1} \\ \operatorname{Res} f(z) &= \frac{-4+3}{(-4-1)} + \frac{1+3}{(1+4)} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1. \end{aligned}$$

Пример 3.4. Определить вычет функции $f(z) = \frac{z-0.1}{(z+2)(z-1)^2}$ в точке

$z=1$.

Решение:

$z=1$ – полюс 2-го порядка.

Ищем вычет по формуле (3.6б):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=1} &= \left(\frac{z-0.1}{(z-2)} \right)' \frac{1}{1!} \Big|_{z=1} = \frac{(z-0.1)'(z+2) - (z+2)'(z-0.1)}{(z+2)^2} \Big|_{z=1} \\ \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=1} &= \frac{(z+2) - (z-0.1)}{(z+2)^2} \Big|_{z=1} = \frac{2.1}{(z+2)^2} \Big|_{z=1} = \frac{2.1}{9} \end{aligned}$$

Пример 3.5. Определить вычет функции

$$f(z) = \frac{z^{2n}}{(z+1)^n}.$$

Решение:

Функция имеет полюсы n -го порядка в точке $z=-1$.

Ищем вычет по формуле (3.6d):

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=-1} &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)f(z)]. \\ \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=-1} &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z+1)^n \frac{z^{2n}}{(z+1)^n} \right] \\ \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=-1} &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [z^{2n}] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{(2n)!}{(n+1)!} z^{n+1} \\ \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=-1} &= \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Задания, рекомендованные для самостоятельной проработки по материалу параграфа 3

Определить вычет функции

- 1) $f(z) = \frac{\sin z}{z}.$
- 2) $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}.$
- 3) $f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z^3}.$
- 4) $f(z) = \operatorname{ctg}(2z)$
- 5) $f(z) = \frac{3z^2+2z}{z^6+1}.$
- 6) $f(z) = \frac{5}{z^2(0.2z+1)}.$

Дополнительные задания представлены на стр. 122

4. Математическое описание дискретных систем. Z-передаточные функции

4.1. Z-передаточные функции с простыми полюсами

Основные формулы:

1) Преобразование Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (4.1)$$

2) Обратное преобразование Лапласа:

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (4.2)$$

3) Дискретное преобразование Лапласа:

$$F^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] e^{-pkT}, \quad (4.3)$$

где $p = c + j\omega$ – комплексная переменная;

$$F^*(p) = D\{f[kT]\}. \quad (4.4)$$

4) \bar{D} – преобразование:

$$F^*(p) = \bar{D}\{F[p]\}; \quad (4.5)$$

$$F^*(p) = \sum_{i=1}^r \text{Res } F(s) \frac{1}{1 - e^{-T(p-s)}} \Big|_{S_i}; \quad (4.6)$$

$S_i, \quad i = \overline{1, r}$ – полюсы изображения $F(s)$.

5) Z - преобразование решетчатой функции:

$$z = e^{pt}$$

$$F(z) = Z\{f[kT]\} = \sum_{k=0}^{\infty} f[kT] z^{-k}. \quad (4.7)$$

6) Обратное Z - преобразование решетчатой функции:

$$f[kT] = Z^{-1}\{F(z)\} = \sum_{i=1, r} \text{Res } F(z) z^{k-1} \Big|_{z=z_i}. \quad (4.8)$$

7) \bar{D} – преобразование решетчатой функции:

$$F(z) = \bar{D}\{F[p]\} \Big|_{z=e^{pt}} = \sum_{i=1}^r \text{Res } F(s) \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{S_i}. \quad (4.9)$$

8) Экстраполятор нулевого порядка:

$$S(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}. \quad (4.10)$$

№ п/п	W(p)	W(z)
1	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
2	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-d}, \quad d = e^{-\alpha T}$
3	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$\frac{Tzd}{(z-d)^2}, \quad d = e^{-\alpha T}$
4	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
5	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z^2 - z \cos \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$

При определении z-передаточной функции линейной системы необходимо помнить разницу между формулами, позволяющими найти z-передаточную функцию при наличии и отсутствии экстраполятора нулевого порядка (наиболее часто встречающегося экстраполятора).

Без экстраполятора

$$W(z) = \sum \text{Res} W(p) \frac{z}{z - e^{Tp}} \quad (4.11)$$

При наличии ЭНП

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \sum \text{Res} \frac{W(p)}{p} \frac{z}{z - e^{Tp}} \quad (4.12)$$

Примеры

Пример 4.1. Вычислить z-преобразование функции

$$W(p) = \frac{10}{p(p+1)(p+2)}$$

при величине периода квантования $T = 1$ с.

Решение:

Полюсы: $S_1 = 0$, $S_2 = -1$, $S_3 = -2$ (простые некратные).

$$F(z) = \bar{D}\{F[p]\}_{|z=e^{pt}} = \sum_{i=1}^3 \text{Res} W(p) \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p_i}$$

$$W(z) = \sum_{i=1}^3 \text{Res} \frac{10}{p(p+1)(p+2)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p_i}$$

$$W(z) = \frac{10}{(p+1)(p+2)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=0} + \frac{10}{p(p+2)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-1} + \frac{10}{p(p+1)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-2}$$

$$W(z) = \frac{10}{(0+1)(0+2)} \frac{z}{z-e^0} + \frac{10}{-1(-1+2)} \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{10}{-2(-2+1)} \frac{z}{z-e^{-2T}}$$

$$W(z) = \frac{10}{2} \frac{z}{z-1} + \frac{10}{-1} \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{10}{2} \frac{z}{z-e^{-2T}}$$

$$W(z) = \frac{5z}{z-1} - \frac{10z}{z-e^{-T}} + \frac{5z}{z-e^{-2T}}$$

Подставляем величину периода квантования $T=1с$:

$$W(z) = \frac{5z}{z-1} - \frac{10z}{z-e^{-1}} + \frac{5z}{z-e^{-2}}$$

$$e^{-1} = 0.368$$

$$e^{-2} = 0.135$$

$$W(z) = \frac{5z}{z-1} - \frac{10z}{z-0.368} + \frac{5z}{z-0.135}$$

Пример 4.2. Найти z -передаточную функцию разомкнутой дискретной системы, состоящей из амплитудного импульсного элемента АИЭ с экстраполятором нулевого порядка и непрерывной части с передаточной функцией при периоде квантования T .

$$W_{нч}(p) = \frac{k}{T_1 p + 1}$$

Решение:

Приведенная непрерывная часть ПНЧ:

$$W_{нч}(p) = W_{энт}(p) W_{нч}(p)$$

$$W_{нч}(p) = \frac{1-e^{-pT}}{p} \frac{k}{T_1 p + 1}$$

Для определения z -передаточной функции воспользуемся вычетами:

$$\begin{aligned}
F(z) &= \bar{D}\{F[p]\}\Big|_{z=e^{pt}} = \sum_{i=1}^2 \text{Res} W(p) \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p_i} \\
\frac{1-e^{-pT}}{p} &= \frac{1-z^{-1}}{p} = \frac{z-1}{zp} \\
W(z) &= k \frac{z-1}{z} \sum_i \text{Res} \frac{1}{p(T_1 p + 1)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p_i} \\
W(z) &= k \frac{z-1}{z} \sum_i \text{Res} \left\{ \frac{1}{p(T_1 p + 1)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=0} + \frac{1/T_1}{p(p+1/T_1)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-\frac{1}{T_1}} \right\} \\
W(z) &= k \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1}{(T_1 p + 1)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=0} + \frac{1/T_1}{p} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-\frac{1}{T_1}} \right\} \\
W(z) &= k \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{z}{z-e^0} + \frac{z}{z-e^{-\frac{T}{T_1}}} \right\} \\
W(z) &= k \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{z}{z-e^0} + \frac{z}{z-e^{-\frac{T}{T_1}}} \right\} = k(z-1) \frac{z-e^{-\frac{T}{T_1}} - z + 1}{(z-1) \left(z-e^{-\frac{T}{T_1}} \right)} \\
W(z) &= k \frac{1-e^{-\frac{T}{T_1}}}{z-e^{-\frac{T}{T_1}}}
\end{aligned}$$

Пример 4.3. Найти z-преобразование функции

$$W(p) = \frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$$

при периоде квантования T.

Решение:

Определим полюсы заданной W(p), равные корням уравнения

$$(p+a)^2 + b^2 = p^2 + 2ap + (a^2 + b^2) = 0$$

$$D = 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = 4(a^2 - a^2 - b^2) = -4b^2$$

$$p_{1,2} = \frac{-2a \pm \sqrt{-4b^2}}{2} = \frac{-2a \pm 2b\sqrt{-1}}{2} = -a \pm jb$$

$$W(p) = \frac{b}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{b}{(p+a-jb)(p+a+jb)}$$

Полюсы простые, некрратные;

$$F(z) = \bar{D}\{F[p]\}\Big|_{z=e^{pt}} = \sum_{i=1}^2 \text{Res} W(p) \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p_i}$$

$$W(z) = k \frac{z-1}{z} \sum_i \text{Res} \frac{1}{p(T_1 p + 1)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p_i}$$

$$W(z) = \text{Res} \frac{b}{(p+a-jb)(p+a+jb)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-a-jb} +$$

$$+ \text{Res} \frac{b}{(p+a-jb)(p+a+jb)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-a+jb}$$

$$W(z) = \frac{b}{(p+a-jb)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-a-jb} + \frac{b}{(p+a+jb)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-a+jb}$$

$$W(z) = \frac{b}{(-a-jb+a-jb)} \frac{z}{z-e^{T(-a-jb)}} + \frac{b}{(-a+jb+a+jb)} \frac{z}{z-e^{T(-a+jb)}}$$

$$W(z) = \frac{b}{(-2jb)} \frac{z}{z-e^{T(-a-jb)}} + \frac{b}{(2jb)} \frac{z}{z-e^{T(-a+jb)}}$$

$$W(z) = \frac{1}{(-2j)} \frac{z}{z-e^{T(-a-jb)}} + \frac{1}{(2j)} \frac{z}{z-e^{T(-a+jb)}}$$

$$W(z) = \frac{1}{(2j)} \left(\frac{z}{z-e^{T(-a+jb)}} - \frac{z}{z-e^{T(-a-jb)}} \right)$$

$$W(z) = -\frac{j}{2} \left(\frac{z}{z-e^{T(-a+jb)}} - \frac{z}{z-e^{T(-a-jb)}} \right)$$

$$W(z) = -\frac{j}{2} \left(\frac{z(z-e^{T(-a-jb)}) - z(z-e^{T(-a+jb)})}{(z-e^{T(-a+jb)})(z-e^{T(-a-jb)})} \right)$$

$$W(z) = -\frac{j}{2} \left(\frac{z(z-e^{-aT}e^{-jbT}) - z(z-e^{-aT}e^{jbT})}{(z-e^{-aT}e^{jbT})(z-e^{-aT}e^{-jbT})} \right)$$

$$\begin{aligned}
W(z) &= -\frac{j}{2} \left(\frac{z(z - e^{-aT} e^{-jbT} - z + e^{-aT} e^{jbT})}{(z - e^{-aT} e^{jbT})(z - e^{-aT} e^{-jbT})} \right) \\
W(z) &= -\frac{j}{2} \left(\frac{z(-e^{-aT} e^{-jbT} + e^{-aT} e^{jbT})}{(z - e^{-aT} e^{jbT})(z - e^{-aT} e^{-jbT})} \right) \\
W(z) &= -\frac{j}{2} \left(\frac{ze^{-aT} (-e^{-jbT} + e^{jbT})}{(z^2 - ze^{-aT} e^{jbT} - ze^{-aT} e^{-jbT} + e^{-aT} e^{jbT} e^{-aT} e^{-jbT})} \right) \\
W(z) &= \frac{j}{2} \left(\frac{ze^{-aT} (-e^{-jbT} + e^{jbT})}{(z^2 - ze^{-aT} (e^{jbT} + e^{-jbT}) + e^{-2aT})} \right)
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

$$e^{jbT} = \cos bT + j \sin bT$$

$$e^{-jbT} = \cos bT - j \sin bT$$

$$W(z) = \frac{j}{2} \left(\frac{ze^{-aT} (\cos bT - j \sin bT - \cos bT - j \sin bT)}{(z^2 - ze^{-aT} (\cos bT - j \sin bT + \cos bT + j \sin bT) + e^{-2aT})} \right)$$

$$W(z) = \frac{j}{2} \left(\frac{ze^{-aT} (-j2 \sin bT)}{(z^2 - ze^{-aT} (2 \cos bT) + e^{-2aT})} \right)$$

$$W(z) = \frac{ze^{-aT} \sin bT}{z^2 - ze^{-aT} (2 \cos bT) + e^{-2aT}}$$

$$W(z) = \frac{z^{-1} e^{-aT} \sin bT}{1 - z^{-1} e^{-aT} (2 \cos bT) + z^{-2} e^{-2aT}}$$

4.2. Передаточные функции с кратными полюсами

Вычет для функции $f(x)$ в точке a , являющейся полюсом данной функции кратности m , определяется по формуле

$$Res f(x)|_{x=a} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{x \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left[(x-a)^k f(x) \right] \quad (4.13)$$

Пример 4.4. Вычислить z -преобразование передаточной функции $W(p)$:

$$W(p) = \frac{1}{p(p+1)^2}$$

при периоде квантования $T=1$ с.

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{b}{(p+a-jb)(p+a+jb)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-a-jb} + \\ &+ \frac{b}{(p+a-jb)(p+a+jb)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-a+jb} \\ W(z) &= \frac{b}{(p+a-jb)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-a-jb} + \frac{b}{(p+a+jb)} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-a+jb} \end{aligned}$$

Решение:

$p_1 = 0$ – простой некратный полюс;

$p_2 = -1$ – кратный полюс порядка $m=2$;

$$F(z) = \bar{D}\{F[p]\} \Big|_{z=e^{pt}} = \sum_{i=1}^2 \text{Res} W(p) \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p_i}$$

$$W(z) = \sum_i \text{Res} \frac{1}{p(p+1)^2} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p_i}$$

$$W(z) = \text{Res} \frac{1}{p(p+1)^2} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=0} + \text{Res} \frac{1}{p(p+1)^2} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-1}$$

$$W(z) = \text{Res} \frac{1}{p(p+1)^2} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=0} + \text{Res} \frac{1}{p(p+1)^2} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=-1}$$

$$W(z) = \frac{1}{(p+1)^2} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=0} - \frac{1}{1!} \frac{-z((z-e^{Tp})-pTe^{Tp})}{p^2(z-e^{Tp})^2} \Big|_{p=-1}$$

$$W(z) = \frac{1}{(p+1)^2} \frac{z}{z-e^{Tp}} \Big|_{p=0} - \frac{z^2 - ze^{Tp} - zpTe^{Tp}}{p^2(z-e^{Tp})^2} \Big|_{p=-1}$$

$$W(z) = \frac{z}{z - e^0} - \frac{z^2 - ze^{-1} + ze^{-1}}{(z - e^{-1})^2}$$

$$W(z) = \frac{z}{z - 1} - \frac{z^2}{(z - 0.368)^2}$$

4.3. Определение z-передаточной функции по заданной структурной схеме

Задана разомкнутая цифровая (дискретная) система управления (рис. 4.1):

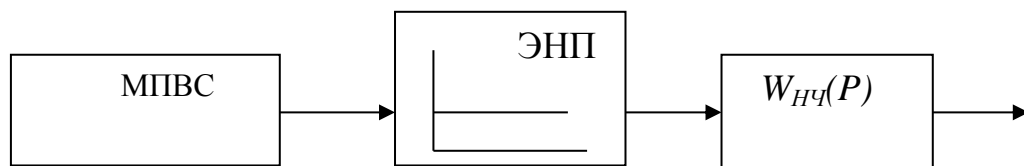


Рис. 4.1. Разомкнутая цифровая (дискретная) система управления

На рис. 4.1 приняты следующие обозначения: МПВС – микропроцессорная вычислительная система; ЭНП – экстраполятор нулевого порядка; $W_{нч}(p)$ – передаточная функция непрерывной части (объекта управления).

Необходимо научиться строить математические модели элементов цифровой системы и системы в целом. Алгоритм решения разбивается на этапы:

- 1) Определение алгоритм работы МПВС.
- 2) Определение передаточной функции объекта управления – $W_{нч}(p)$.
- 3) Определение передаточной функции приведенной непрерывной части системы: $W_{нч}(p)$.
- 4) Определение $W(z)$ передаточной функции приведенной непрерывной части системы.
- 5) Определение z-передаточной функции системы в целом.

Примеры

Пример 4.5. Получить разностное уравнение и определить z-передаточную функцию программы интегрирования, реализуемую на цифровой управляющей машине.

Рассмотреть решение задачи для случаев использования в качестве методов интегрирования:

- а) метода Эйлера;*
- б) метода трапеций.*

Решение:

Формулы численного интегрирования являются аппроксимациями разностных уравнений, которые получаются с помощью хорошо известного рода Тейлора:

а) При решении дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dt} = f(t) ;$$
$$y(0) = 0 ;$$

Воспользуемся первым членом разложения функции y в ряд Тейлора. Тогда

$$y[n+1] = y[n] + T \cdot f[n] ;$$

T – величина шага интегрирования ;

n – номер дискреты (шага) .

Разностное уравнение:

$$y[n+1] - y[n] = T \cdot f[n] .$$

Применяя z -преобразование, получим

$$z \cdot y(z) - y(z) = T \cdot f(z) ;$$

$$W_{\text{прогр}}(z) = \frac{y(z)}{f(z)} = T \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} ; \quad z = e^{pT} .$$

б) При интегрировании по методу трапеций воспользуемся двумя членами ряда Тейлора:

$$y[n+1] = y[n] + T \cdot f[n] + \frac{T^2}{2} \cdot f' [n] .$$

Аппроксимируем производную следующим образом:

$$f' [n] = \frac{f[n] - f[n-1]}{T} .$$

Тогда

$$y[n+1] = y[n] + T \cdot f[n] + \frac{T}{2} \cdot [f[n] - f[n-1]] ;$$

$$y[n+1] = y[n] + \frac{T}{2} \cdot (3 \cdot f[n] - f[n-1]) .$$

Выполняя z -преобразование:

$$z \cdot y(z) - y(z) = \frac{T}{2} \cdot (3 \cdot f(z) - z^{-1} \cdot f(z));$$

$$y(z) \cdot (z - 1) = \frac{T}{2} \cdot (3 - z^{-1}) \cdot f(z);$$

$$W(z) = \frac{y(z)}{f(z)} = \frac{T}{2} \cdot \frac{(3 - z^{-1}) \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} .$$

Пример 4.6. Вывести разностное уравнение и определить передаточную функцию программы дифференцирования, реализуемой МПВС методом первой прямой конечной разности.

Решение:

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = y(t)$$

должно быть реализовано МПВС.

Уравнение расчета производной и соответствующая ему z-передаточная функция алгоритма, имеют вид

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{T};$$

$$W(z) = \frac{1}{T} \cdot (1 - z^{-1}).$$

Для нахождения оригинала решетчатой функции по ее z-изображению возможно использование нескольких способов. В частности:

1. С использованием вычетов:

$$f[k] = \sum_i \text{Res } F(z) \cdot z^{k-1}.$$

2. На основе таблиц соответствия, устанавливающих связь между $f[k]$ и $F(z)$

3. Если $F(z)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, т. е. отношение двух многочленов:

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где степень многочлена $P(z) \leq Q(z)$, то можно разделить многочлен $P(z)$ на $Q(z)$ обычным способом.

4. С использованием свойств z-изображения (о смещении оригинала).

Примеры

Пример 4.7. Найти оригинал для функции

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Решение:

Способ 1.

$$f[k] = \text{Res } \left\{ F(z) \cdot z^{k-1} \right\} \Big|_{zi},$$

$z_i = 1$ – полюс второго порядка.

Тогда

$$\operatorname{Res} F(z) \Big|_{z_i} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z - z_i)^{m-1} \cdot f(z) \cdot z^{k-1} \right\};$$

$$\operatorname{Res} F(z) = \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{dz} \cdot z^k \Big|_{z=1} = k \cdot z^{k-1} = k;$$

$$f[k] = k.$$

Способ 2.

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z}{z^2 - 2 \cdot z + 1}.$$

Деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{r} z \quad \quad \quad | \quad z^2 - 2 \cdot z + 1 \\ - \quad \quad \quad z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 3 \cdot z^{-3} + \dots \\ \hline z - 2 + z^{-1} \\ \hline 2 - 4 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} \\ \hline 3 \cdot z^{-1} - 2 \cdot z^{-2} \end{array}$$

$$F(z) = z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} + 3 \cdot z^{-3} + \dots = \sum f[k] \cdot z^{-k}$$

$$f[0]=0 \quad , \quad f[1]=1 \quad , \quad f[2]=2 \quad , \quad f[3]=3.$$

Пример 4.8. Найти оригинал для функции

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

Решение:

Найдем полюсы:

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Полюсы первого порядка разные:

$$\begin{aligned} \sum_i \operatorname{Res} \frac{z^{k+1}}{z^2 - z - 1} \Big|_{z_i} &= \sum_{z_i} \operatorname{Res} \frac{z^{k+1}}{(z - z_1) \cdot (z - z_2)} \Big|_{z_i} = \\ &= \frac{z_1^{k+1}}{z_1 - z_2} + \frac{z_2^{k+1}}{z_2 - z_1} = \frac{z_1^{k+1} - z_2^{k+1}}{z_1 - z_2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Задания, рекомендованные для самостоятельной проработки по материалу параграфа 4

1) Найти оригинал решётчатой функции по изображению ($T = 0.1$)

$$F(z) = \frac{10}{z - 0.2}$$

$$F(z) = \frac{5z - 0.25}{(z - 0.1)(z - 0.75)}$$

$$F(z) = \frac{0.1z}{(z^2 - 0.025)^2}$$

2) Найти z -передаточную функцию разомкнутой дискретной системы с экстраполятором нулевого порядка и без него. ($T = 0.1$)

$$W(p) = \frac{10p}{p^2 + 0.025}$$

$$W(p) = \frac{10}{0.15p + 1}$$

$$W(p) = \frac{17}{(0.5p + 1)(0.2p + 1)}$$

Дополнительные задания представлены на стр. 123

5. Анализ выходных процессов линейных импульсных динамических систем

Постановка задачи

Пусть заданы:

а) входной сигнал, $k = 0, 1, \dots$;

б) одномерная линейная дискретная динамическая система (рис. 4.5), которая описывается разностным уравнением

$$\begin{aligned} b_n x[k+n] + b_{n-1} x[k+n-1] + \dots + b_0 x[k] = \\ = a_m g[k+m] + a_{m-1} g[k+m-1] + \dots + a_0 g[k], \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $k = 0, 1, \dots$; b_n, \dots, b_0 ; a_m, \dots, a_0 – заданные коэффициенты; $n \geq m$;

в) начальные условия

$$x[0] = x_0, x[1] = x_1, x[n-1] = x_{n-1}.$$

Требуется найти выходной сигнал $x[k]$

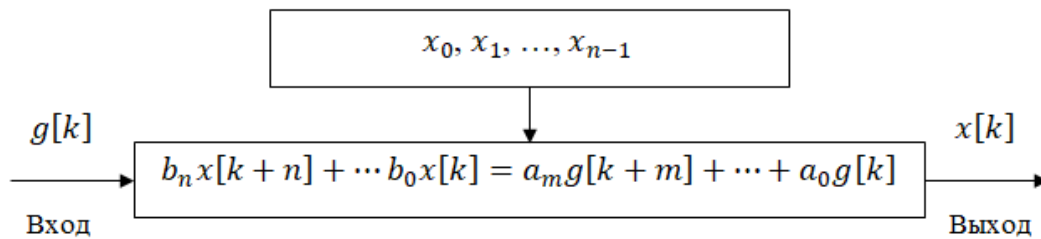


Рис. 5.1

Решение

Для решения поставленной задачи применим z -преобразование к левой и правой частям конечно-разностного уравнения с учетом свойств z -преобразования:

$$z \{ f[k+n] \} = z^m \left\{ F(z) - \sum_{r=0}^{m-1} f[r] z^{-r} \right\}$$

$$z \{ f[k+1] \} = z \cdot F(z) - z \cdot f[0]$$

.....

$$z \{ f[k] \} = z^n \cdot F(z) - z^n \cdot f[0] - z^{n-1} \cdot f[1] - \dots - z \cdot f[n-1].$$

Таким образом получим из уравнения (4.23)

$$(b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0) X(z) - (b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z) x_0 -$$

$$\begin{aligned}
& (b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_2 z) x_1 - \dots - b_n z x_{n-1} = \\
& = (a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0) G(z) - (a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z) g[0] - \\
& - (a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_2 z) g[1] - \dots - a_m z g[m-1]. \quad (5.2)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
& b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0 = D(z) \\
& a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0 = M(z) \\
& (b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z) x_0 + \\
& + (b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_2 z) x_1 + \dots + b_n z x_{n-1} = D_0(z) \\
& (a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z) g[0] + \\
& + (a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_2 z) g[1] + \dots + a_m z g[m-1] = D_g(z)
\end{aligned}$$

Из равенства (4.24)

$$\begin{aligned}
D(z) X(z) - D_0(z) &= M(z) G(z) - D_g(z); \\
D(z) X(z) &= M(z) G(z) + D_0(z) - D_g(z).
\end{aligned}$$

Находим изображение выходного сигнала:

$$X(z) = \frac{M(z)}{D(z)} G(z) + \frac{D_0(z)}{D(z)} - \frac{D_g(z)}{D(z)}.$$

где $\frac{M(z)}{D(z)} = W(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}$ является передаточной функцией.

Окончательно изображение выходного сигнала будем находить по формуле

$$X(z) = W(z) G(z) + \frac{D_0(z)}{D(z)} - \frac{D_g(z)}{D(z)}.$$

Искомый выходной сигнал $x[k]$ определяется с помощью обратного преобразования.

Примеры

Пример 5.1. Найти реакцию дискретной динамической системы, описываемой уравнением

$$x[k+1] - 2x[k] = 2g[k]$$

на входной сигнал $g[k] = k$ при $x[0] = x_0 = 0$.

Решение:

1. Найдем z -преобразование входного сигнала.

$$G(z) = z \{g[k]\}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Для определения z -преобразования возможно применение

\bar{D} -преобразование от изображения по Лапласу линейной нарастающей функции:

$$t \rightarrow \frac{1}{p^2} \rightarrow \text{Res} \left\{ \frac{1}{s^2} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right\} \Big|_{s=0} = \frac{Tze^{Ts}}{(z - e^{Ts})^2} \Big|_{s=0} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

2. Определим передаточную функции системы. Для этого сначала найдем z -преобразование разностного уравнения:

$$x[k+1] - 2x[k] = 2g[k]$$

$$zX(z) - zx[k] - 2X(z) = 2G(z)$$

$$zX(z) - 2X(z) = 2G(z)$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{G(z)} = \frac{2}{z-2}$$

3. Найдем z -преобразование выходного сигнала:

$$X(z) = W(z)G(z) + \frac{D_0(z)}{D(z)} - \frac{D_g(z)}{D(z)}.$$

Поскольку $x[0] = 0$, $m = 0$, $D_0(z) = 0$, $D_g(z) = 0$

$$X(z) = W(z)G(z)$$

$$X(z) = \frac{2}{z-2} \frac{z}{(z-1)^2}$$

4. Найдем реакцию дискретной динамической системы:

$$f[kT] = Z^{-1} \{F(z)\} = \sum_{i=1,r} \text{Res} F(z) z^{k-1} \Big|_{z=z_i}$$

$$x[kT] = Z^{-1} \{X(z)\} = \sum_{i=1,r} \text{Res} X(z) z^{k-1} \Big|_{z=z_i}$$

$$\begin{aligned}
x[kT] &= \sum_{i=1,r} \operatorname{Res} \frac{2}{z-2} \frac{z}{(z-1)^2} z^{k-1} \bigg|_{z=z_i} = \sum_{i=1,r} \operatorname{Res} \frac{2z^k}{(z-2)(z-1)^2} \bigg|_{z=z_i} \\
x[kT] &= \frac{2z^k}{(z-1)^2} \bigg|_{z=2} + \left(\frac{2z^k}{(z-2)} \right)^{(1)} \bigg|_{z=1} \\
x[kT] &= \frac{2^{k+1}}{(z-1)^2} + \frac{2kz^{k-1}(z-2) - 2z^k}{(z-2)^2} \bigg|_{z=1} \\
x[kT] &= 2^{k+1} + \frac{2k(1-2) - 2}{(1-2)^2} = 2^{k+1} - 2k - 2 = 2(2^k - k - 1)
\end{aligned}$$

Пример 4.18. Найти реакцию дискретной динамической системы, описываемой уравнением

$$x[k+2] - 2x[k+1] + x[k] = 2g[k]$$

на входной сигнал $g[k] = 2^k$ при $x[0] = x[1] = 0$.

Решение:

1. Найдем z -преобразование входного сигнала:

$$G(z) = z \{g[k]\}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k} = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2}$$

2. Определим передаточную функции системы. Для этого сначала найдем z -преобразование разностного уравнения:

$$x[k+2] - 2x[k+1] + x[k] = 2g[k]$$

$$z^2 X(z) - z^2 x[0] - zx[1] - 2(zX(z) - zx[0]) + 2X(z) = 2G(z)$$

$$z^2 X(z) - 2zX(z) + X(z) = 2G(z)$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{G(z)} = \frac{2}{z^2 - z - 1} = \frac{2}{(z-1)^2}$$

3. Найдем z -преобразование выходного сигнала:

$$X(z) = W(z)G(z) + \frac{D_0(z)}{D(z)} - \frac{D_g(z)}{D(z)}.$$

Поскольку $x[0] = x[1] = 0$, $m = 0$, $D_0(z) = 0$ и $D_g(z) = 0$

$$X(z) = W(z)G(z)$$

$$X(z) = \frac{2}{z-2} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{2z}{z^3 - 4z^2 + z - 2}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{array}{r}
 2z \quad \left| \begin{array}{l} z^3 - 4z^2 + 5z - 2 \\ 2z^{-2} + 8z^{-3} + 22z^{-4} + 52z^{-5} \end{array} \right. \\
 \hline
 2z - 8 + 10z^{-1} - 4z^{-2} \\
 \hline
 8 - 10z^{-1} + 4z^{-2} \\
 8 - 32z^{-1} + 40z^{-2} - 16z^{-3} \\
 \hline
 22z^{-1} - 36z^{-2} + 16z^{-3} \\
 22z^{-1} - 88z^{-2} + 110z^{-3} - 44z^{-4} \\
 \hline
 52z^{-2} \dots
 \end{array}$$

$$x[0] = x[1] = 0; x[2] = 2; x[3] = 8; [4] = 22; x[5] = 52.$$

Таким образом, реакция дискретной динамической системы на входной сигнал имеет вид

$$x[kT] = 2(2^k - k - 1)$$

Пример 4.19. Найти реакцию дискретной динамической системы, описываемой уравнением

$$x[k+2] - 5x[k+1] + 6x[k] = g[k]$$

на входной сигнал $g[k] = 1$ при $x[0] = 1; x[1] = 2$.

Решение:

1. Найдем z -преобразование входного сигнала:

$$G(z) = z \{g[k]\}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

2. Определим передаточную функции системы. Для этого сначала найдем z -преобразование разностного уравнения:

$$x[k+2] - 5x[k+1] + 6x[k] = g[k]$$

$$z^2 X(z) - z^2 x[0] - zx[1] - 5(zX(z) - zx[0]) + 6X(z) = G(z)$$

$$X(z)(z^2 - 5z + 6) - x[0](z^2 - 5z) - zx[1] = G(z)$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{G(z)} = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

3. Найдем –преобразование выходного сигнала:

$$X(z) = W(z)G(z) + \frac{D_0(z)}{D(z)} - \frac{D_g(z)}{D(z)}.$$

Поскольку $x[0] = x[1] = 0$, $m = 0$, $D_0(z) = (z^2 - 5z) + 2z = z^2 - 3z$

и $D_g(z) = 0$

$$X(z) = W(z)G(z)$$

$$X(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} \frac{z}{z-1} + \frac{z^2 - 3z}{(z-2)(z-3)}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)(z-1)} + \frac{z}{(z-2)}$$

Здесь $\frac{z}{(z-2)(z-3)(z-1)}$ – вынужденное движение;

$\frac{z}{(z-2)}$ – свободное движение.

$$X(z) = z \left(\frac{1}{(z-2)(z-3)(z-1)} + \frac{1}{(z-2)} \right)$$

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)(z-1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3} =$$

$$= \frac{Az^2 - 5Az + 6A + Bz^2 - 4Bz + 3B + Cz^2 - 3Cz + 2C}{(z-2)(z-3)(z-1)}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -5A - 4B - 3C = 0 \\ 6A + 3B + 2C = 1 \end{cases}$$

$$A = -B - C$$

$$5B + 5C - 4B - 3C = 0$$

$$B = -2C$$

$$A = 2C - C = C$$

$$6C - 6C + 2C = 1$$

$$\begin{cases} C = \frac{1}{2} \\ B = -1 \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)(z-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{z-3}$$

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-3} + \frac{z}{z-2}$$

Отсюда получаем

$$x[k] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} 3^k$$

Таким образом, реакция дискретной динамической системы на входной сигнал имеет вид

$$x[k] = \frac{1}{2} (1 + 3^k).$$

Пример 4.20. Найти реакцию дискретной динамической системы, описываемой уравнением

$$x[k+2] - 3x[k+1] + 2x[k] = g[k+1] - 2g[k]$$

на входной сигнал $g[k] = \begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k>0 \end{cases}$ при $x[0] = x[1] = 0$.

Решение:

1. Найдем z -преобразование входного сигнала:

$$G(z) = z \{g[k]\}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k] z^{-k} = 1$$

2. Определим передаточную функции системы. Для этого сначала найдем z -преобразование разностного уравнения:

$$x[k+2] - 3x[k+1] + 2x[k] = 2g[k+1] - 2g[k]$$

$$z^2 X(z) - z^2 x[0] - zx[1] - 3(zX(z) - zx[0]) + 2X(z) =$$

$$= 2(zG(z) - zg[0]) - 2G(z)$$

$$z^2 X(z) - 3zX(z) + 2X(z) = 2zG(z) - zg[0] - 2G(z)$$

$$X(z)(3z^2 - 3z + 2) = G(z)(2z - 2) - 2zg[0]$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{G(z)} = \frac{2z-2}{z^2-3z+2} = \frac{2(z-1)}{(z-2)(z-1)} = \frac{2}{(z-2)}$$

3. Найдем z -преобразование выходного сигнала:

$$X(z) = W(z)G(z) + \frac{D_0(z)}{D(z)} - \frac{D_g(z)}{D(z)}.$$

Поскольку $x[0] = x[1] = 0$, $m = 1$, $D_0(z) = 0$ и $D_g(z) = 2zg[0] = 2z$

$$D(z) = z^2 - 3z + 2$$

$$X(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{2z}{(z-1)(z-2)}$$

$$\frac{2}{(z-1)(z-2)} = \frac{-2}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

$$X(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{2z}{z-2} + \frac{2z}{z-1}$$

Отсюда получаем

$$x[k] = 4 - 2^{k+1}$$

Таким образом, реакция дискретной динамической системы на входной сигнал имеет вид

$$x[k] = 4 - 2^{k+1}$$

Пример 4.21. Найти реакцию дискретной динамической системы, описываемой уравнением

$$x[k+2] - 5x[k+1] + 6x[k] = g[k+1] - 3g[k]$$

на входной сигнал $g[k] = 1$ при $x[0] = 1$; $x[1] = 2$.

Решение:

1. Найдем z -преобразование входного сигнала:

$$G(z) = z \{g[k]\}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

2. Определим передаточную функции системы. Для этого сначала найдем z -преобразование разностного уравнения:

$$x[k+2] - 5x[k+1] + 6x[k] = g[k+1] - 3g[k]$$

$$\begin{aligned} z^2 X(z) - z^2 x[0] - zx[1] - 5(zX(z) - zx[0]) + 6X(z) &= \\ &= zG(z) - zg[0] - 3G(z) \end{aligned}$$

$$X(z)(z^2 - 5z + 6) - x[0](z^2 - 5z) - zx[1] = G(z)(z - 3) - zg[0]$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{G(z)} = \frac{z - 3}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z - 3}{(z - 2)(z - 3)} = \frac{1}{z - 2}$$

3. Найдем –преобразование выходного сигнала:

$$X(z) = W(z)G(z) + \frac{D_0(z)}{D(z)} - \frac{D_g(z)}{D(z)}.$$

Поскольку $x[0] = x[1] = 0$, $m = 1$, $D_g(z) = -zg[0] = -z$,

$$D_0(z) = (z^2 - 5z) + 2z = z^2 - 3z \text{ и}$$

$$D(z) = z^2 - 5z + 6$$

$$X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z^2 - 5z + 6} + \frac{z}{(z - 1)(z - 2)} + \frac{-z}{z^2 - 5z + 6}$$

Здесь $\frac{z}{(z - 2)(z - 1)} - \frac{z}{z^2 - 5z + 6}$ – вынужденное движение;

$\frac{z^2 - 3z}{z^2 - 5z + 6}$ – свободное движение.

$$X(z) = \frac{z(z - 3)}{(z - 3)(z - 2)} + \frac{z}{(z - 1)(z - 2)} - \frac{z}{(z - 3)(z - 2)}$$

$$X(z) = \frac{z}{(z - 2)} + \frac{z}{(z - 1)(z - 2)} - \frac{z}{(z - 3)(z - 2)}$$

$$X(z) = z \left(\frac{1}{(z - 2)} + \frac{1}{(z - 1)(z - 2)} - \frac{1}{(z - 2)(z - 3)} \right)$$

$$X(z) = z \left(\frac{1}{(z - 2)} + \frac{A}{(z - 1)} + \frac{B}{(z - 2)} + \frac{C}{(z - 2)} + \frac{D}{(z - 3)} \right)$$

$$\frac{1}{(z - 1)(z - 2)} = \frac{A}{(z - 1)} + \frac{B}{(z - 2)} = \frac{Az - 2A + Bz - B}{(z - 1)(z - 2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -B \\ 2B - B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}$$

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{C}{(z-2)} + \frac{D}{(z-3)} = \frac{Cz-3C+Bz-2D}{(z-2)(z-3)}$$

$$\begin{cases} C+D=0 \\ -3C-2D=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=-D \\ 3D-2D=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=-1 \\ D=1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}$$

$$X(z) = z \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-3} \right)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-3}$$

Отсюда получаем

$$x[k] = 2^k - 1 + 2^k + 2^k - 3^k = 3 \cdot 2^k - 3^k - 1$$

Таким образом, реакция дискретной динамической системы на входной сигнал имеет вид:

$$x[k] = 3 \cdot 2^k - 3^k - 1.$$

Задания, рекомендованные для самостоятельной проработки по материалу параграфа 5

- 1) Определить реакцию дискретной динамической системы на входной сигнал $g[k] = k$. Выделить свободное и вынужденное движение.

$$x[k+3] - 3x[k+2] + 3x[k+1] - x[k] = g[k]$$

При начальных условиях $x[0] = 1$; $x[1] = 4$; $x[2] = 9$.

- 2) Определить реакцию дискретной динамической системы на входной сигнал $g[k] = 2^k$. Выделить свободное и вынужденное движение.

$$4x[k+2] + 4x[k+1] - 3x[k] = g[k+1] + g[k]$$

При начальных условиях $x[0] = 8$; $x[1] = 1$; $g[0] = 2$.

Дополнительные задания представлены на стр. 124

6. Передаточные функции замкнутых импульсных систем

Для замкнутой дискретной системы с большим числом вложенных дискретно-непрерывных контуров Z-ПФ может определяться по следующей зависимости:

$$W(z) = \frac{W_{np}(z)}{1 + \sum_i W_i(z)}, \quad (6.1)$$

где $W_{np}(z)$ – Z-ПФ прямой цепи с учетом расположения ИИЭ.

$W_i(z)$ – Z-ПФ i -го разомкнутого дискретно-непрерывного контура. При этом контур размыкается в месте расположения ИИЭ. Входом контура является вход ИИЭ.

Примеры

Пример 6.1. В качестве примера рассмотрим дискретную систему, представленную на рис.6.1:

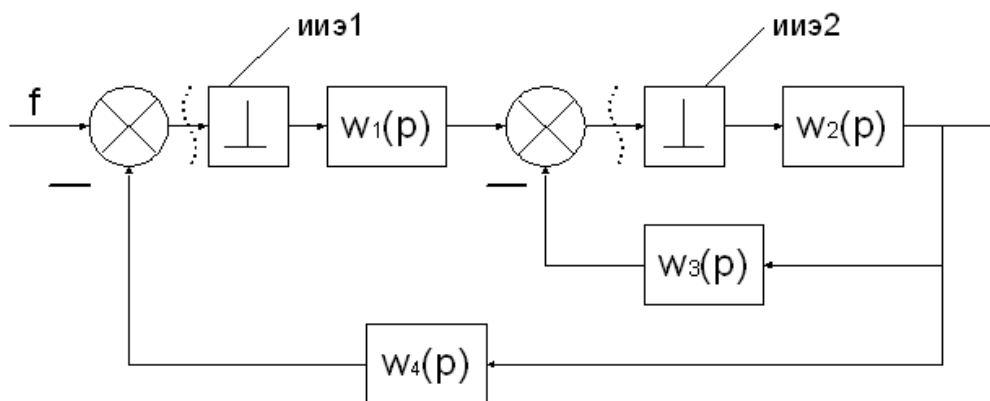


Рис.6.1 Структурная схема исходной системы.

В рассматриваемом случае

$$W_{np}(z) = W_1(z) \cdot W_2(z),$$

где

$$W_1 = D\{W_1(p)\}_{e^{pT}=z}; W_2 = \bar{D}\{W_2(p)\}_{e^{pT}=z}.$$

В системе можно выделить два дискретно-непрерывных контура.

В качестве первого рассмотрим контур, образованный ИИЭ2 и звеньями $W_2(p)$ и $W_3(p)$. Z-ПФ первого разомкнутого контура запишется в виде

$$W_{23}(z) = W_I(z) = \bar{D}\{W_2(p) \cdot W_3(p)\}_{e^{pT}=z}.$$

Второй контур состоит из ИИЭ1, звена $W_1(p)$ и звеньев $W_2(p)$ и $W_4(p)$, и его ПФ имеет вид

$$W_{24}(z) = \overline{D}\{W_2(p) \cdot W_4(p)\} \Big|_{e^{pT}=z};$$

$$W_{II}(z) = W_I(z) \cdot W_{24}(z).$$

Используя формулу (4.10) получим выражение для Z-ПФ схемы:

$$W(z) = \frac{W_I(z) \cdot W_2(z)}{1 + W_I(z) + W_{II}(z)}.$$

Если формулой (6.1) не удастся воспользоваться напрямую, необходимо выполнить следующие действия:

1. Обозначить сигналы на входах ИИЭ.
2. Связать введенные координаты с помощью Z-ПФ между собой.
3. Исключая промежуточные переменные, разрешить систему относительно входа и выхода и получить тем самым Z-ПФ системы.

Примеры

Пример 6.2. Применим описанный алгоритм для получения Z-ПФ системы, структурная схема которой представлена на рис.6.2:

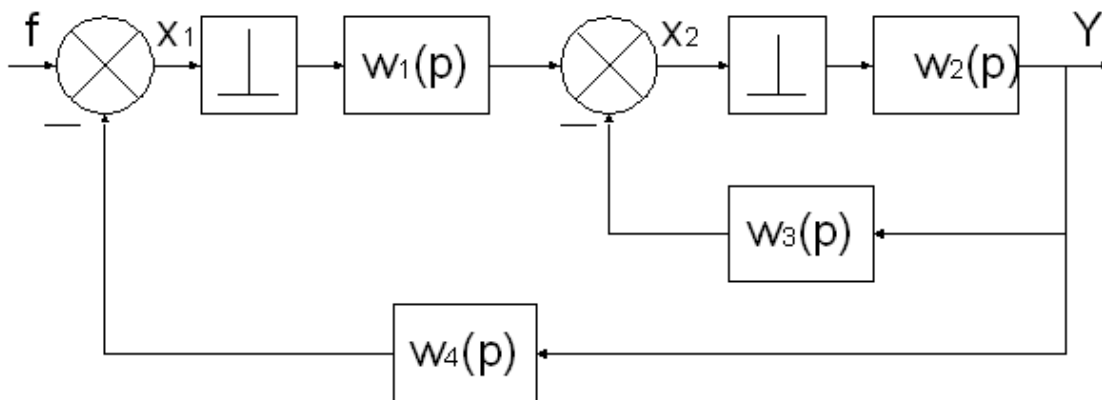


Рис. 6.2

$$x_1(p) = F(z) - x_2(z) \cdot W_{24}(z);$$

$$x_2(z) = x_1(z) \cdot W_1(z) - x_2(z) \cdot W_{23}(z);$$

$$y(z) = x_2 \cdot W_2(z);$$

$$x_2(z) = W_1 \cdot F(z) - x_2(z) \cdot W_1(z) \cdot W_{24}(z) - x_2(z) \cdot W_{23}(z);$$

$$x_2(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_1(z) \cdot W_{24}(z) + W_{23}(z)} F(z);$$

$$y(z) = \frac{W_1(z)W_2(z)}{1 + W_1(z) \cdot W_{24}(z) + W_{23}(z)} F(z).$$

Пример 6.3. В качестве примера рассмотрим дискретную систему, представленную на рис.6.3

Преобразование структурной схемы показано на рис. 6.4 – 6.6.

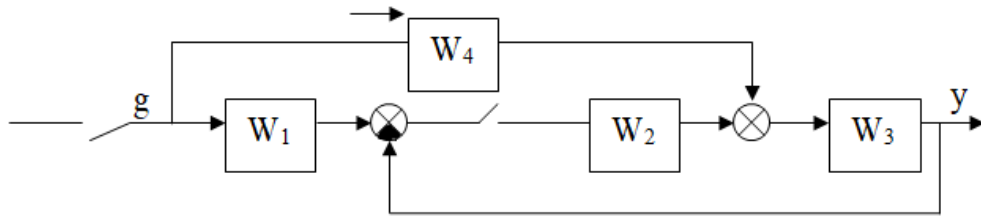


Рис. 6.3.

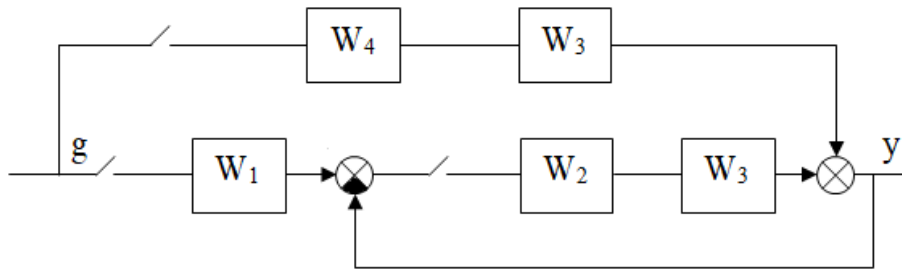


Рис. 6.4.

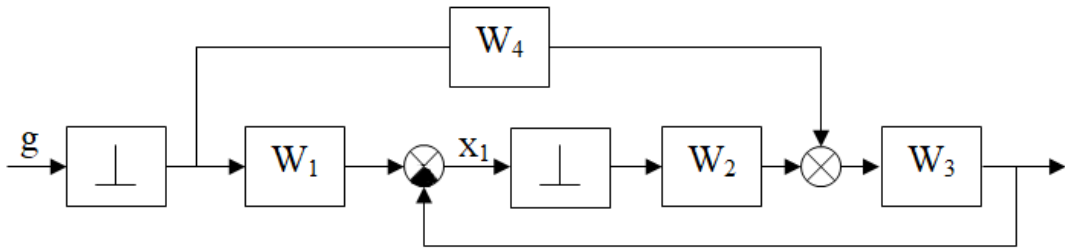


Рис. 6.5.

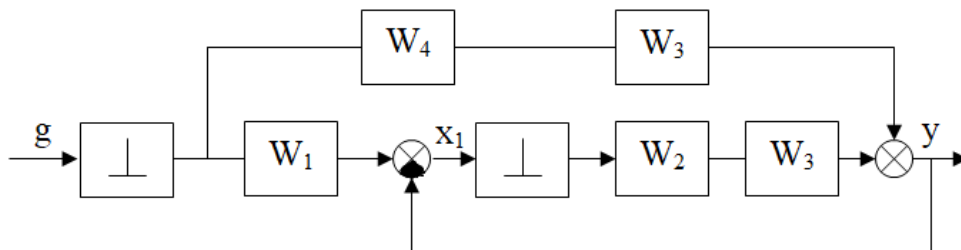


Рис. 6.6.

Передаточная функция замкнутой системы

$$\begin{aligned}
 Y &= X_1 W_{23} + g W_{34}; \\
 x_1 &= g W_1 - (x_1 \cdot W_{23} + g \cdot W_{34}); \\
 x_1 (1 + W_{23}) &= g (W_1 - W_{34}). \\
 x_1 &= g \frac{W_1 - W_{34}}{1 + W_{23}};
 \end{aligned}$$

$$Y = g \cdot \frac{W_1 - W_{34}}{1 + W_{23}} - g \cdot W_{34} = g \cdot \frac{W_1 - W_{34} - W_{34} - W_{23} \cdot W_{34}}{1 + W_{23}};$$

$$\Phi(z) = \frac{W_1 - W_{34} - W_{34} - W_{23} \cdot W_{34}}{1 + W_{23}}.$$

Пример 6.4. Для импульсной системы, структурная схема которой изображена на рис. 6.7, определить передаточную функцию $\Phi(z)$.

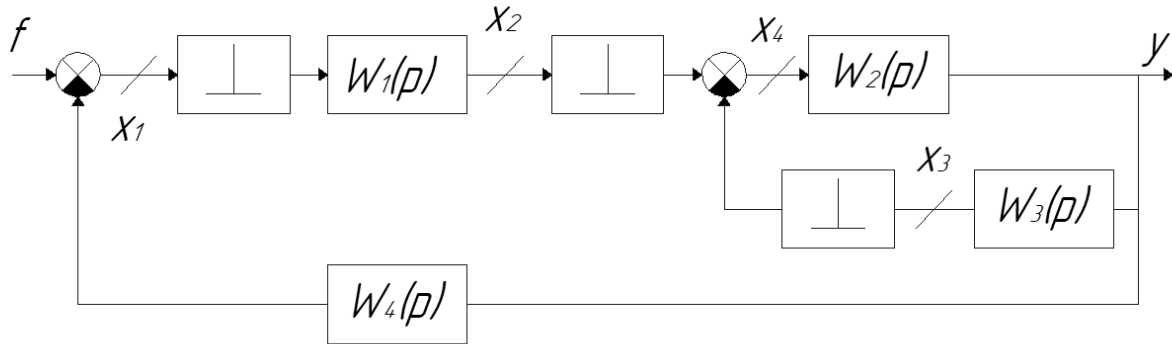


Рис 6.7

Решение:

1-й способ:

$$\Phi(z) = \frac{W_{np}(z)}{1 + \sum_i W_i(z)};$$

$$W_{np}(z) = W_1(z) \cdot W_2(z);$$

$$W_I(z) = W_2 W_3(z);$$

$$W_{II}(z) = W_1(z) \cdot W_2 W_4(z).$$

2-й способ:

$$y(z) = x_4(z) \cdot W_2(z);$$

$$x_4(z) = x_2(z) - x_3(z);$$

$$x_2(z) = x_1(z) \cdot W_1(z);$$

$$x_3(z) = x_4(z) \cdot W_2 W_3(z);$$

$$x_1(z) = f(z) - x_4(z) \cdot W_2 W_4(z);$$

$$x_4(z) = x_1(z) \cdot W_1(z) - x_4(z) \cdot W_2 W_3(z) = f(z) \cdot W_1(z) - x_4(z) \cdot W_1(z) \cdot W_2 W_4(z) - x_4(z) \cdot W_2 W_3(z);$$

$$x_4(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_1(z) \cdot W_2 W_4(z) + W_2 W_3(z)};$$

$$\Phi(z) = \frac{W_1(z) \cdot W_2(z)}{1 + W_1(z) \cdot W_2 W_4(z) + W_2 W_3(z)}.$$

Пример 6.5. Для импульсной САУ, структурная схема которой изображена на рис. 6.8, определить z -изображение выходного сигнала.

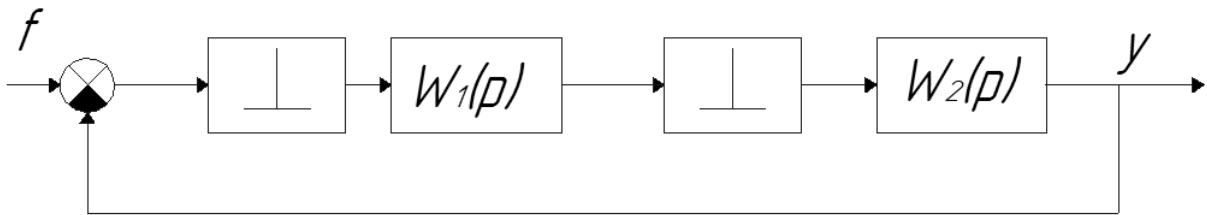


Рис. 6.8

1-й способ:

$$\Phi(z) = \frac{W_1(z) \cdot W_2(z)}{1 + W_1(z) \cdot W_2(z)}.$$

2-й способ:

$$Y(z) = \frac{W_1(z) \cdot W_2(z)}{1 + W_1(z) \cdot W_2(z)} \cdot f(z).$$

Пример 6.6. Для импульсной САУ, структурная схема которой изображена на рис. 6.9, определить z -изображение выходного сигнала.

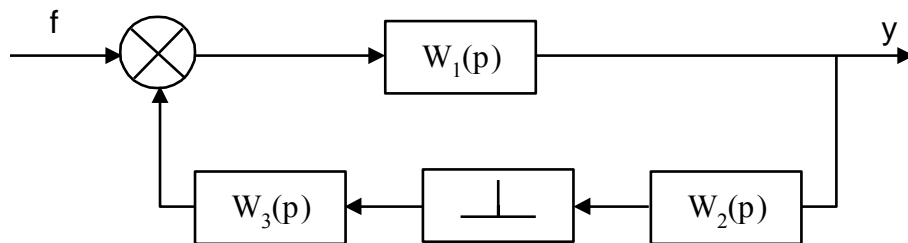


Рис 6.9

Решение: Для удобства решения преобразуем исходную схему к виду, показанному на рис. 6.10:

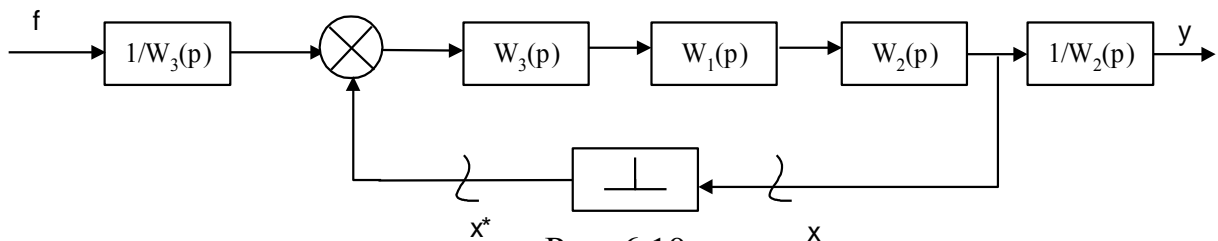


Рис. 6.10

Запишем уравнение для изображений по Лапласу:

$$y(p) = \left\{ F(p) \cdot \frac{1}{W_3(p)} - x^*(p) \right\} \cdot W_3(p) \cdot W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot \frac{1}{W_2(p)};$$

$$y(z) = \bar{D}\{F(p) \cdot W_1(p)\} - x(z) \cdot W_3(z) \cdot W_1(z);$$

$$x(z) = \bar{D}\{(F(p) \cdot W_3(p) - x^*(p)) \cdot W_3(p) \cdot W_1(p) \cdot W_2(p)\};$$

$$x(z) = \frac{F \cdot W_1 \cdot W_2(z)}{1 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_3(z)};$$

$$y(z) = F \cdot W_1(z) - \frac{F \cdot W_1 \cdot W_2(z) \cdot W_1 \cdot W_3(z)}{1 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_3(z)}.$$

Задания, рекомендованные для самостоятельной проработки по материалу параграфа 6.

- 1) Для импульсной САУ, структурная схема которой изображена на рис. 6.11, определить z -изображение выходного сигнала.

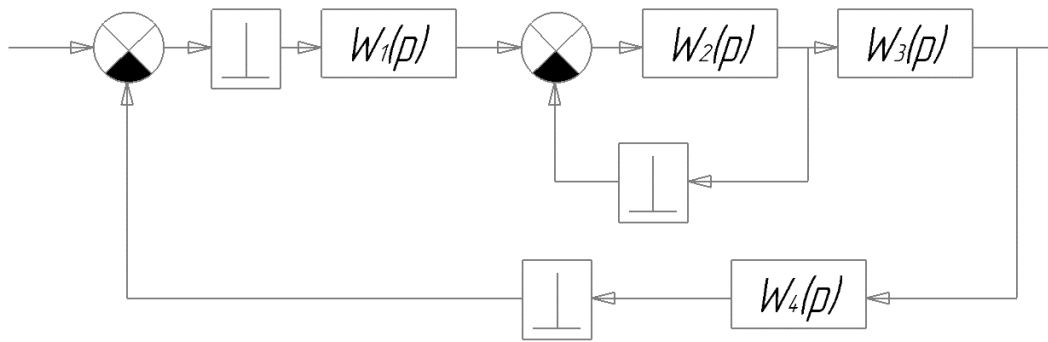


Рис. 6.11

- 2) Для импульсной САУ, структурная схема которой изображена на рис. 6.12, определить z -изображение выходного сигнала.

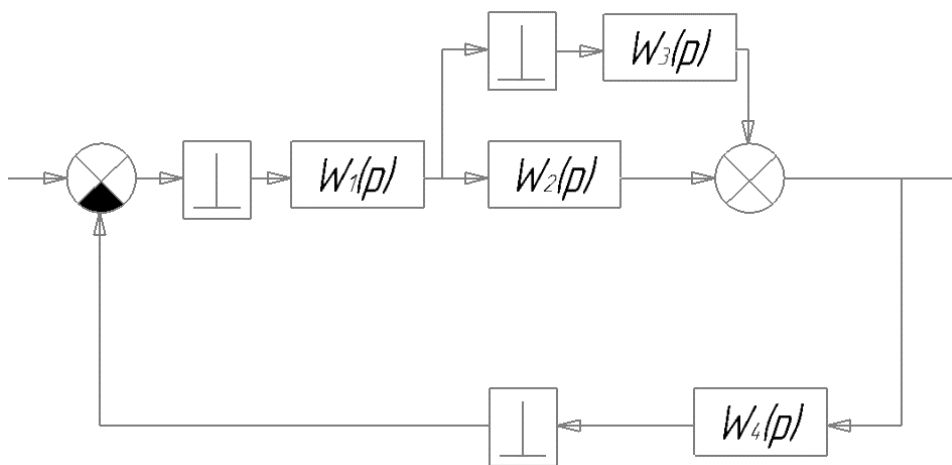


Рис. 6.12

7. Построение логарифмических амплитудно-фазовых псевдочастотных характеристик

Из-за своей простоты и удобства использования ЛАФЧХ получили широкое применение при исследовании непрерывных систем. Однако их непосредственное использование для решения задач анализа и синтеза цифровых систем управления невозможно. Это объясняется тем, что построение АФЧХ дискретных систем *значительно более громоздко*, и тем, что эти характеристики *не обладают свойством асимптотичности*, вследствие чего не могут быть приближенно представлены ломаными линиями.

Однако и для дискретных систем оказывается возможным введение характеристик, которые по методике построения и своим свойствам будут схожи с ЛАФЧХ непрерывных систем. Такие характеристики называются псевдочастотными.

Итак, еще раз вспомним, что ЛАФЧХ непрерывных систем определяются в частотном диапазоне от 0 до ∞ и имеют асимптотический характер.

Частотные характеристики дискретных систем полностью определяются своими значениями в диапазоне частот:

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

поэтому для получения аналога ЛАФЧХ непрерывных систем необходимо выполнить отображение указанного частотного диапазона на ось от 0 до ∞ . Указанное отображение выполняют путем введения так называемой псевдочастоты λ и, как следствие, рассматривают псевдочастотные характеристики.

Переход к псевдочастоте делается на основе билинейного преобразования (w -преобразования).

Введем комплексную величину w , связанную с комплексной величиной z билинейным преобразованием:

$$z = \frac{1+w}{1-w}; \quad w = \frac{z-1}{z+1} \quad (7.1)$$

Сделав подстановку $z = e^{j\omega T}$, получим из предыдущей формулы

$$w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{\cos \omega T + j \sin \omega T - 1}{\cos \omega T + j \sin \omega T + 1};$$
$$\cos \omega T = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}; \quad \sin \omega T = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}};$$

$$w = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2} + 2j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} - 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2} + 2j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} + 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2}} = \frac{-2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{2} + 2j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}}{2 \left(1 + j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \right)} =$$

$$= \frac{j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \left(j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} + 1 \right)}{1 + j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j \lambda_0,$$

где $\lambda_0 = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$, представляет собой так называемую *относительную псевдочастоту*.

При анализе импульсных систем удобно рассматривать *абсолютную псевдочастоту*:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{2}{T} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (7.2)$$

Тогда $w = j \frac{\lambda T}{2}$ и $\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$.

Чем же удобна абсолютная псевдочастота?

Она удобна тем, что на малых частотах $\lambda \approx \omega$. Поэтому при выполнении условия $\omega < \frac{2}{T}$, в расчетах можно заменить псевдочастоту действительной круговой частотой. Это свойство может быть использовано, например, при расчетах реакции импульсной системы на медленно меняющиеся гармонические сигналы на его входе.

Нетрудно видеть из зависимости

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2},$$

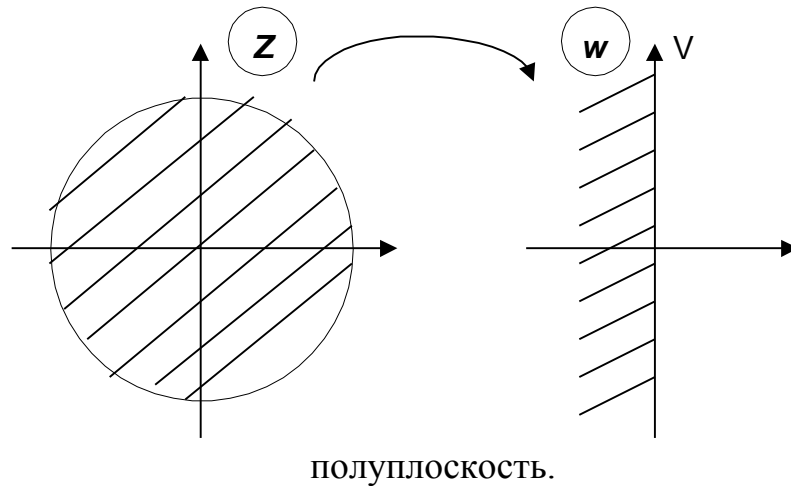
что при изменении частоты в пределах $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$, псевдочастота пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, а комплексная величина w движется по оси мнимых частот:

$$w = j \lambda_0 = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}, \text{ от } -j\infty \text{ до } +j\infty.$$

$$\lambda = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left\{ \left(\pm \frac{\pi}{T} \right) \cdot \frac{T}{2} \right\} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\} = \pm \infty.$$

Отметим также еще одно замечательное свойство билинейного преобразования. Оно заключается в том, что при таком преобразовании внутренняя часть круга единичного радиуса на плоскости z отображается на левую полу-плоскость плоскости w (рис.7.1).

Рис. 7.1 Отображение внутренней части круга единичного радиуса на левую



Действительно, пусть $w=u+jv$, тогда для комплексной переменной z имеем

$$|z| = \frac{|1+w|}{|1-w|} = \sqrt{\frac{(1+u)^2 + v^2}{(1-u)^2 + v^2}},$$

откуда следует, что при

$$\begin{aligned} u < 0 & \quad |z| < 1; \\ u = 0 & \quad |z| = 1; \\ u > 0 & \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

Это свойство оказывается чрезвычайно удобным, так как позволяет использовать традиционные критерии для оценки устойчивости импульсных систем.

Итак, для получения передаточной функции импульсной системы на основе псевдочастоты λ необходимо выполнить подстановку в $W(z)$:

$$z = \frac{1+w}{1-w},$$

а затем заменить $w = \frac{j\lambda T}{2}$

$$W^*(j\lambda) = W\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = W\left(\frac{1+j\lambda T/2}{1-j\lambda T/2}\right).$$

Частотная характеристика $W^*(j\lambda)$ в функции псевдочастоты λ называется псевдочастотной характеристикой (ПЧХ).

В ω -области передаточная функция дискретной системы есть *дробно-рациональная функции* $j\lambda$, причем при изменении ω в диапазоне от $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$, псевдочастота изменяется в пределах

$$0 \leq \lambda < \infty .$$

Таким образом, в области псевдочастот частотные характеристики дискретных систем имеют те же свойства, что и у непрерывных систем. Следовательно, псевдочастотные характеристики могут быть применены для решения задач анализа и синтеза импульсных систем известными методами, применяемыми для решения аналогичных задач в непрерывных системах.

АФЧХ дискретных систем строятся *либо по частотной характеристике*, приведенной непрерывной части, *либо по передаточной функции* $W(z)$.

Если непрерывная часть системы задана частотной характеристикой $W(j\omega)$, то АФЧХ разомкнутой дискретной системы может быть определена с использованием зависимости

$$W^*(j\omega) = W(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}m\right)\right). \quad (7.3)$$

При этом существует два способа решения задачи:

- 1) можно сначала найти действительную $P^*(\omega)$ и мнимую $Q^*(\omega)$ частотные характеристики и затем определить $A^*(\omega)$, $\varphi^*(\omega)$;
- 2) либо осуществить непосредственное векторное сложение слагаемых в правой части.

Рассмотрим первый способ. Перепишем (7.3):

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W\left[j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}m\right)\right] = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P\left(\omega + \frac{2\pi}{T}m\right) + j \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q\left(\omega + \frac{2\pi}{T}m\right).$$

При известных действительной $P(\omega)$ и мнимой $Q(\omega)$ частотных характеристиках получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W(e^{j\omega T}) &= P^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P\left(\omega + \frac{2\pi}{T}m\right); \\ \operatorname{Im} W(e^{j\omega T}) &= Q^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q\left(\omega + \frac{2\pi}{T}m\right). \end{aligned}$$

Обычно в записанных соотношениях удастся ограничиться конечным (достаточно небольшим) числом слагаемых, что сильно упрощает процесс вычислений.

По известным характеристикам $P^*(\omega)$ и $Q^*(\omega)$ можно построить АФЧХ дискретной системы:

$$A^*(\omega) = \sqrt{P^{*2}(\omega) + Q^{*2}(\omega)};$$

$$\varphi^*(\omega) = \arctg Q^*(\omega) / P^*(\omega).$$

Второй способ соответствует непосредственному векторному сложению слагаемых в правой части выражения (4.10), при этом удерживается конечное число членов и выполняется их графическое суммирование.

Пусть, например, учитываются слагаемые при $m = -M, -M+1 \dots 0 \dots M-1, M$. Тогда получим

$$W(e^{j\omega T}) \approx \frac{1}{T} \sum_{m=-M}^M W\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T} m\right)\right).$$

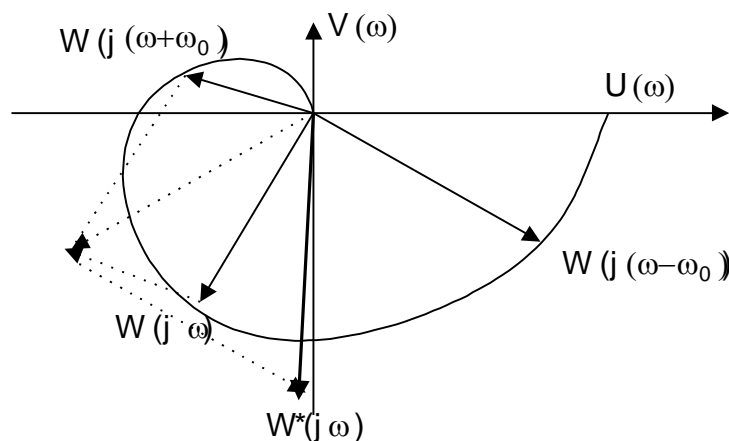
Проиллюстрируем этот подход, ограничившись в правой части полученного выражения тремя слагаемыми, т.е.

$$W(e^{j\omega T}) \cong \frac{1}{T} [W(j(\omega - \omega_0)) + W(j\omega) + W(j(\omega + \omega_0))],$$

здесь $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

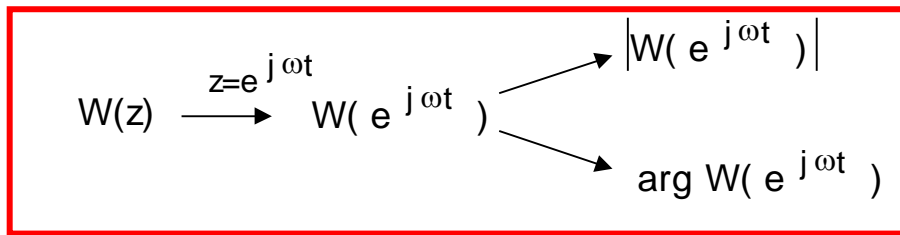
На плоскости годографа АФЧХ приведенной непрерывной части при ряде значений частоты ω производим графическое сложение векторов $W(j(\omega - \omega_0)), W(j\omega), W(j(\omega + \omega_0))$. И после масштабного преобразования $(1/T)$ получаем вектор $W^*(e^{j\omega T})$ (рис. 4.17).

Рис. 7.2 Графическое сложение векторов

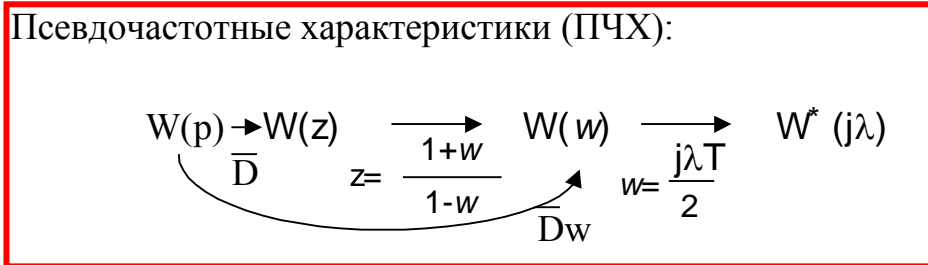


Соединяя концы векторов $W^*(e^{j\omega T})$, построим годограф АФЧХ дискретной системы. Процесс построения показан на рис. 4.17.

Основным способом построения АФЧХ дискретной системы является непосредственное использование ее z -ПФ $W(z)$:



Псевдочастотные характеристики (ПЧХ):



Логарифмические ПЧХ строятся по w -ПФ $W^*(w)$ совершенно аналогично ЛАФЧХ непрерывных систем с использованием тех же шаблонов типовых динамических звеньев.

При этом возможно использование таблиц \bar{D}_w -преобразования, представляющего собой результат последовательного применения к ПФ приведенной непрерывной части системы $W(p)$ \bar{D} -преобразование с подстановкой $e^{pT} = z$ и w -преобразование.

Пример

Пример 7.4. Рассмотрим пример построения логарифмических ПЧХ дискретной системы, структурная схема которой представлена на рис. 7.3:

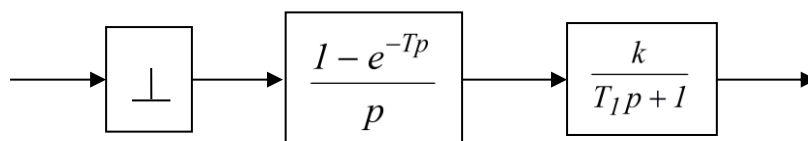


Рис. 7.3

Решение:

Z -ПФ системы была получена ранее. Она имеет вид

$$W(z) = \frac{k \left(1 - e^{\frac{-T}{T_I}} \right)}{z - e^{\frac{-T}{T_I}}}.$$

Введем обозначение: $d = e^{\frac{-T}{T_I}}$, тогда $W(z) = \frac{k(1-d)}{z-d}.$

Выполним подстановку: $z = \frac{1+w}{1-w}$;

$$w = j\lambda T/2;$$

$$\begin{aligned} W^*(j\lambda) &= \frac{k(1-d)}{\frac{1+j\lambda T/2}{1-j\lambda T/2} - d} = \frac{k(1-d)(1-j\lambda \frac{T}{2})}{1+j\lambda T/2 - d + j\lambda T \frac{d}{2}} = \\ &= \frac{k(1-d)\left(1 - \frac{T}{2} j\lambda\right)}{(1+d)j\lambda T/2 + 1 - d} = \frac{k\left(1 - \frac{T}{2} j\lambda\right)}{\frac{1+d}{1-d} \frac{T}{2} j\lambda + 1} = \frac{k\left(1 - \frac{T}{2} j\lambda\right)}{T_9 j\lambda + 1}, \end{aligned}$$

где $T_9 = \frac{T}{2} \frac{1+d}{1-d}$.

Отметим, что в числителе полученного выражения имеется неминимально-фазовое звено, что типично для дискретных систем.

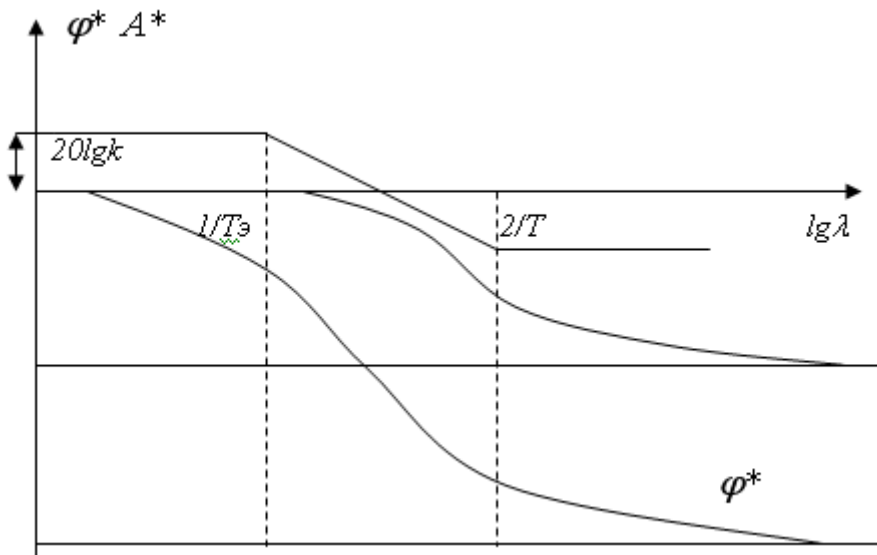


Рис. 7.4

$$\frac{1+d}{1-d} > 1, \text{ следовательно, } T_9 > T/2.$$

$$\text{Фаза числителя: } \operatorname{arctg}\left(-\lambda \frac{T}{2}\right); \quad 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}.$$

Логарифмические ПЧХ импульсной системы представлены на рис.7.4. Качественно эти характеристики совпадают с ЛАФЧХ непрерывных звеньев, что позволяет для исследования импульсных систем хорошо разработанный частотный аппарат непрерывных систем.

При необходимости определения ПЧХ замкнутой системы по АФПЧХ разомкнутой, и наоборот, возможно использование номограмм замыкания.

Таким образом, для дискретных систем введены понятия частотных характеристик и рассмотрены некоторые способы их построения. С формальной точки зрения АФПЧХ дискретных и непрерывных систем совпадают в том, что все они характеризуют прохождение гармонического сигнала через систему. Однако следует понимать, что при этом для дискретных систем мы рассматривали дискретный гармонический сигнал, не затрагивая вопрос о спектре его непрерывной огибающей.

При прохождении непрерывного гармонического сигнала частотные свойства импульсных систем будут существенно отличаться от свойств непрерывных систем. Рассмотрению особенностей частотных свойств импульсных систем будет посвящена следующая тема.

Задания, рекомендованные для самостоятельной проработки по материалу параграфа 7

1) Для непрерывной системы, представленной на рис. построить ЛАЧХ. Определить z - изображение данной системы, для которого построить ЛПЧХ дискретной системы, структурная схема которой представлена на рис. $T = 0.01$. Сравнить полученные логарифмические частотные характеристики.

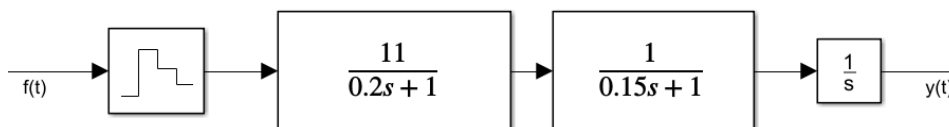


Рис. 7.5

2) Для непрерывной системы, представленной на рис. построить ЛАЧХ. Определить z - изображение данной системы, для которого построить ЛПЧХ дискретной системы, структурная схема которой представлена на рис. $T = 0.005$. Сравнить полученные логарифмические частотные характеристики.

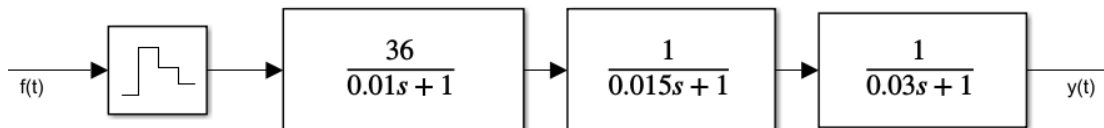


Рис. 7.6

Дополнительные задания представлены на стр. 127

8. Анализ устойчивости линейных импульсных систем

Устойчивость является важнейшей характеристикой САУ, в решающей степени определяющей возможность ее практического применения.

Проблема устойчивости особенно актуальна для замкнутых систем, так как стремление повысить точность системы за счет увеличения коэффициента передачи разомкнутой цепи приводит, как правило, к ее возбуждению и потере устойчивости.

Будем считать, что *линейная ИС устойчива тогда и только тогда, когда ее реакция на любое ограниченное воздействие ограничена.*

Соответственно, *если найдется хотя бы одно ограниченное внешнее воздействие, реакция системы на которое не будет ограничена, то такая ИС называется неустойчивой.*

Определим условия устойчивости линейной ИС во временной области.

Рассмотрим полученное ранее уравнение движения ИС во временной области:

$$y[nT] = \sum_{k=0}^n f[kT] \cdot w[(n-k)T]$$

и приведем его к эквивалентному виду:

$$y[nT] = \sum_{k=0}^n w[kT] \cdot f[(n-k)T]. \quad (8.1)$$

Предположим, что внешнее воздействие ограничено, т.е.

$$|f[kT]| \leq M, \text{ для всех } k \geq 0, \quad (8.2)$$

проведем оценку выходного сигнала (4.28):

$$|y[nT]| \leq \sum_{k=0}^n |w[kT]| \cdot |f[(n-k)T]| \leq M \sum_{k=0}^n |w[kT]|. \quad (8.3)$$

Поднимая в последнем неравенстве (4.31) верхний предел суммирования до ∞ (это может только усилить неравенство), получим

$$|y[nT]| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} |w[kT]|, n = 0, 1, \dots \quad (8.4)$$

Очевидно, что ИС будет устойчива, если ряд в правой части (8.4) сходится, т. е. если

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w[kT]| < \infty. \quad (8.5)$$

Таким образом, *ИС устойчива, если ряд дискрет весовой функции ПНЧ абсолютно сходится.*

В приведенной формулировке условие (8.5) является достаточным. Покажем необходимость этого условия на конкретном примере. Предположим, что условие (8.5) не выполняется, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w[kT]| = \infty. \quad (8.6)$$

Тогда можно найти ограниченное входное воздействие, при котором реакция системы будет неограниченно возрастать.

Пусть при фиксированном n :

$$f[(n-k)T] = M \operatorname{sign} w[kT].$$

Тогда

$$y[nT] = \sum_{k=0}^n M \operatorname{sign} w[kT] \cdot w[kT] = M \sum_{k=0}^n |w[kT]|.$$

Согласно условию (4.33) для любого наперед заданного числа N всегда можно подобрать такое n , когда:

$$y[nT] > N,$$

т. е. $y[nT]$ неограниченно возрастает с ростом n , что свидетельствует о неустойчивости системы.

Таким образом, *абсолютная сходимость ряда дискрет весовой характеристики ПНЧ (8.5) является необходимым и достаточным условием устойчивости ИС.*

9. Определение точностных характеристик линейных импульсных систем

Ошибка системы определяется передаточной функцией по ошибке $\Phi_{\varepsilon}^*(s)$, или $\Phi_{\varepsilon}(z)$, формой входного сигнала и его производными, значения которых известны в тактовые моменты времени $t=kT$.

Предлагая, что известна огибающая входного сигнала (образующая $g(t)$), ошибку можно представить в виде ряда:

$$\varepsilon(kT) = c_0 g(kT) + \frac{c_1}{1!} \dot{g}(kT) + \frac{c_2}{2!} \ddot{g}(kT) + \dots,$$

где c_0, c_1, c_2 - коэффициенты ошибок.

Применяя к данному выражению прямое преобразование Лапласа, получим:

$$E^*(p) = (c_0 + \frac{c_1}{1!} p + \frac{c_2}{2!} p^2 + \dots) G^*(p),$$

где ряд, стоящий в скобках, представляет собой разложение ПФ $\Phi_{\varepsilon}^*(p)$ в ряд по степеням p .

Тогда, учитывая последнее замечание, можно записать

$$c_i = \left(\frac{d^i \Phi_{\varepsilon}^*(p)}{dp^i} \right) \Big|_{p=0} = \Phi_{\varepsilon}^{*(i)}(0),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

При определении характеристик точности дискретных и дискретно-непрерывных систем вместо функции $\Phi_{\varepsilon}^*(p)$ будем пользоваться ПФ замкнутых систем, записанный в Z - форме как $\Phi_{\varepsilon}(z)$. Тогда коэффициенты ошибок при произвольном T вычисляются по формулам

$$c_0 = \Phi_{\varepsilon}^*(p) \Big|_{p=0} = \Phi_{\varepsilon}^*(z) \Big|_{z=e^{pT}=1};$$

$$c_1 = \frac{d}{dp} \Phi_{\varepsilon}^*(p) = \frac{d}{dz} \Phi_{\varepsilon}(z) \frac{dz}{dp} = \frac{dy}{dx} e^{pT} \frac{d\Phi_{\varepsilon}(z)}{dz} = Tz \frac{d\Phi_{\varepsilon}^*(z)}{dz} \Big|_{z=e^{pT}=1}; \quad (9.1)$$

$$c_2 = \frac{d}{dz} \left(Tz \frac{d\Phi_{\varepsilon}(z)}{dp} \right) \frac{dz}{dp} = Tz \left(T \frac{d\Phi_{\varepsilon}(z)}{dz} + Tz \frac{d^2 \Phi_{\varepsilon}(z)}{dp^2} \right) = T^2 z \left(z \frac{d^2 \Phi_{\varepsilon}(z)}{dp^2} + \frac{d\Phi_{\varepsilon}(z)}{dz} \right).$$

Если на вход САУ поступают дискретные значения сигналов, огибающая которых неизвестна, воспользоваться записанной выше формулой нельзя.

Для расчета ошибки в этом случае необходимо выполнить разложение сигнала ошибки $\varepsilon[kT]$ в ряд, но по разностям входного сигнала, т.е. воспользоваться дискретным аналогом этого выражения:

$$\varepsilon[kT] = \bar{c}_0 g[kT] + \frac{\bar{c}_1}{1!} \Delta g[kT] + \frac{\bar{c}_2}{2!} \Delta^2 g[kT] + \frac{\bar{c}_3}{3!} \Delta^3 g[kT] \dots$$

Применяя прямое z-преобразование к указанному ряду, с учетом

$$\Delta^n g[kT] = \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} g[k+n-i]$$

$$z\{g[kT]\} = Q(z);$$

$$z\{\Delta g[kT]\} = z\{g[(k+1)T - g[kT]]\} = zG(z) - G(z) = (z-1)G(z);$$

$$\varepsilon(z) = [\bar{c}_0 + \frac{\bar{c}_1}{1!}(z-1) + \frac{\bar{c}_2}{2!}(z-1)^2 + \frac{\bar{c}_3}{3!}(z-1)^3]G(z).$$

Ряд, стоящий в квадратных скобках, является разложением функции $\Phi_\varepsilon(z)$ по степеням $(z-1)$. Коэффициенты ряда будут вычисляться по формуле

$$\bar{c}_i = \left(\frac{d^{(i)} \Phi_\varepsilon(z)}{dz^i} \right) \Big|_{z=1} = \Phi_\varepsilon^{(i)}(1), \quad (9.2)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Как отмечалось в лекциях, удобно коэффициенты ряда \bar{c}_i находить путем деления полинома числителя на полином знаменателя, предварительно перейдя к новой переменной $\alpha = z - 1$.

Одним из путей определения характеристик точных, дискретных и дискретно-непрерывных систем является расчет коэффициентов по логарифмическим псевдочастотным характеристикам.

Для этого необходимо воспользоваться билинейным преобразованием:

$$z = \frac{1+w}{1-w};$$

$$w = j \frac{\lambda T}{2}.$$

Записывая ряд разложения передаточной функции $\Phi_\varepsilon(w)$ по степеням w , получим

$$E[w] = [\tilde{c}_0 + \frac{\tilde{c}_1}{1!} w + \frac{\tilde{c}_2}{2!} w^2 + \dots] G(w).$$

Здесь

$$\tilde{c}_i = \left(\frac{d^{(i)} \Phi_\varepsilon(w)}{dw^i} \right) \Big|_{w=0} = \Phi_\varepsilon^{(i)}(0). \quad (9.3)$$

Связь коэффициентов c_i с коэффициентами добротности:

$$\tilde{c}_0 = \frac{1}{(1 + \kappa^*)};$$

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{D_w^*};$$

$$\tilde{c}_2 = \frac{2}{D_\varepsilon^*};$$

$$\tilde{c}_3 = \frac{6}{D_\varepsilon^*} \dots$$

Коэффициенты статизма и добротностей можно определить по таблицам, или графическим путем по логарифмическим амплитудным характеристикам:

$$D_w = w_K = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \bar{w}_K;$$

$$D_\varepsilon = w_E = \frac{2}{T} \operatorname{arctg} \bar{w}_E.$$

Переходя к оригиналам, можно записать

$$\varepsilon^*(t) = \frac{g(t)}{D} + \frac{\dot{g}^*(t)}{D_w} + \frac{\ddot{g}^*(t)}{D_\varepsilon} \dots$$

или

$$\varepsilon[kT] = \frac{g[kT]}{D} + \frac{\Delta g[kT]}{D_w} + \frac{\Delta^2 g[kT]}{D_\varepsilon} \dots$$

Примеры

Пример 9.1. Определить ошибку в системе, Z- передаточная функция разомкнутого контура которой имеет вид

$$W(z) = \frac{(z - 0,4)(z + 0,2)}{(z - 1)(z + 0,1)}$$

на входной, линейно нарастающий сигнал.

Решение:

$$\Phi_\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + \frac{(z - 0,4)(z + 0,2)}{(z - 1)(z + 0,1)}} = \frac{(z - 1)(z + 0,1)}{(z - 1)(z + 0,1) - (z - 0,4)(z + 0,2)};$$

$$\alpha = z - 1;$$

$$z = \alpha + 1;$$

$$\text{числитель: } \alpha^2 + 1,1\alpha;$$

$$\text{знаменатель: } 0,72 + 2,9\alpha + 2\alpha^2$$

$$1,1\alpha + \alpha^2 \left| \frac{0,72 + 2,9\alpha + 2\alpha^2}{\dots\dots\dots 1,52\alpha} \right|$$

$$c_0 = 0;$$

$$c_1 = 1,52\dots$$

Таким образом, установившаяся ошибка:

$$\varepsilon[kT] = \bar{c}_0 g[kT] + \frac{c_1}{1!} \Delta g[kT] = 1,52 T.$$

Определим установившуюся ошибку с использованием теоремы о предельном значении решетчатой функции:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon[kT] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\varepsilon(z);$$

$$g(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2};$$

$$\frac{Tz}{(z-1)^2} * \frac{(z-1)^2(z+0,1)}{0 - (z-0,4)(z+0,2)} = \frac{T(z+0,1)}{(z-0,4)(z+0,2)} = \frac{T \cdot 1,1}{0,6 \cdot 1,2} \approx 1,52T.$$

Пример 9.2. Задана z -передаточная функция разомкнутого контура системы с единичной отрицательной обратной связью:

$$W(z) = \frac{k}{z^2 - 0,37 \cdot z + 0,02};$$

входной сигнал:

$$F(z) = \frac{6 \cdot z}{z-1}.$$

Определить, при какой величине k , установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} \leq 1$. Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном k .

Решение:

$$\Phi_\varepsilon = \frac{1}{1+W(z)} = \frac{z^2 - 0,37z + 0,02}{z^2 - 0,37z + 0,02 + k}$$

$$\varepsilon[kT] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{6z}{z-1} \cdot \frac{z^2 - 0,37z + 0,02}{z^2 - 0,37z + 0,02 + k} = \frac{6(1-0,37+0,02)}{1-0,37+0,02+k} < 1;$$

$$\frac{3,9}{0,65+k} < 1;$$

$$3,9 < 0,65+k;$$

$$k > 3,25;$$

$$z^2 - 0,37z + 3,2 = 0$$

$$|z_{1,2}| = \left| \frac{0.37 \pm \sqrt{0.37^2 - 13.07}}{2} \right| > 1;$$

$$1.808 > 1$$

Система неустойчива.

Пример 9.3. Структурная схема системы имеет вид:

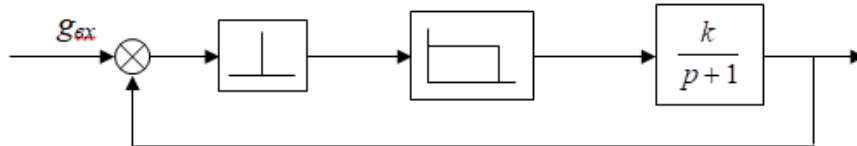


Рис. 9.1

Найти такое k , при котором $e_{уст} \leq 0,5$ при $g_{вх} = 2$.

При полученном k найти передаточную функцию замкнутой системы и оценить её устойчивость. $T = 1$.

Решение:

$$W(z) = k \cdot \frac{1-d}{z-d} \quad ; \quad d = e^{-1} = 0.27 \quad ;$$

$$W(z) = k \cdot \frac{0.73}{z-0.27} \quad ;$$

$$\Phi_\varepsilon(z) = \frac{1}{1+W(z)} = \frac{z-0.27}{z-0.27+k \cdot 0.73} \quad ;$$

$$\varepsilon_{уст}[kT] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{2 \cdot z}{z-1} \cdot \frac{z-0.27}{z-0.27+k \cdot 0.73} = \frac{2 \cdot 0.73}{0.73 \cdot (1+k)} < 0.5;$$

$$1+k > 4;$$

$$k > 3.$$

$$z = -1.92$$

Система неустойчива.

Пример 9.4. Построить характеристики точности ЦСАУ, структурная схема которой изображена на рис. 9.2 на входное воздействие: $g(t) = 1$.

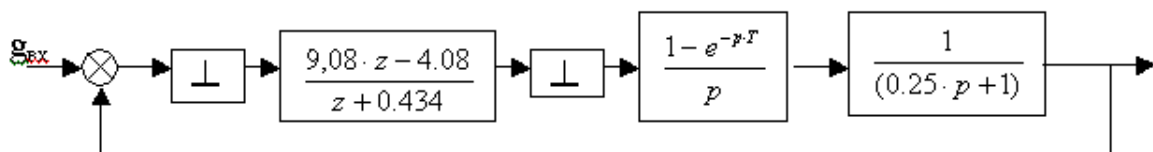


Рис. 9.2

Решение:

1) Необходимо найти $W(z)$ - разомкнутого контура. С этой целью определяют:

$$W_{\text{ПНЧ}}(z) = z \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} \cdot \frac{1}{(0.25 \cdot p + 1)} \right\};$$

$$W(z) = W_{\text{ЦВМ}}(z) \cdot W_{\text{ПНЧ}}(z).$$

Далее как и в предыдущих задачах.

Пример 9.5. Определить коэффициенты ошибок по скорости, ускорению и производной ускорения для ЦСАУ, имеющей передаточную функцию в разомкнутом состоянии в виде

$$W(z) = \frac{0.39 \cdot z \cdot (z - 0.84) \cdot (z - 0.486)}{(z - 1) \cdot (z - 0.905) \cdot (z - 0.135)}$$

при $T = 0,05$ с.

Решение:

Найдём передаточную функцию системы в замкнутом состоянии относительно ошибки:

$$\Phi_{\varepsilon}(z) = \frac{1}{1 + W(z)};$$

$$\Phi_{\varepsilon}(z) = \frac{z^3 - 2.04z^2 + 1.162z - 0.1221}{1.39z^3 - 2.56z^2 + 1.321z - 0.1221}.$$

По формулам (9.1) определим:

$$c_0 = 0;$$

$$c_1 = 0,05 \cdot 2,56 = 0,128 \cdot c;$$

$$c_2 = (0,05)^2 \cdot 2,177 = 0,005 \cdot c^2;$$

$$c_3 = (0,05)^3 \cdot (-570) = -0,071 \cdot c^3.$$

Пример 9.6. Построить характеристики точности цифровой системы автоматического управления, имеющей передаточную функцию в разомкнутом состоянии:

$$W(z) = \frac{0.39 \cdot z \cdot (z - 0.84)}{(z - 1) \cdot (z - 0.905)},$$

если $g(t) = 2 \cdot t^2$, $T = 0,05$.

Решение:

$$\Phi_{\varepsilon}(z) = \frac{1}{1 + W(z)};$$

$$\Phi_{\varepsilon}(z) = \frac{z^2 - 1.905z + 0.905}{z^2 - 1.905z + 0.905 + 0.39z^2 - 0.3276z} = \frac{z^2 - 1.905z + 0.905}{1.39z^2 - 2.232z + 0.905};$$

$$c_0 = 0;$$

$$c_1 = 0.05 \frac{(2z - 1.905) \cdot (1.39z^2 - 2.2326z + 0.905) - (z^2 - 1.905z + 0.905) \cdot (2.75z - 2.326)}{(1.39z^2 - 2.232z + 0.905)} =$$

$$= 0.05 \frac{0.00593}{0.00389} = 0.076;$$

$$c_2 = T^2 \cdot z \left[\frac{d^2 \Phi_\varepsilon(z)}{dz^2} z + \frac{d\Phi_\varepsilon(z)}{dz} \right] \Big|_{z=1};$$

$$\frac{d^2 \Phi_\varepsilon(z)}{dz^2} = \frac{(0.415z - 0.706) \cdot (1.39z^2 - 2.233z + 0.905)^2}{(1.39z^2 - 2.232z + 0.905)^4} -$$

$$- \frac{(4z^3 - 3 \cdot 6.207z^2 + 2 \cdot 7.5z - 4.04) \cdot (0.415z^2 - 0.705z + 0.296)}{(1.39z^2 - 2.232z + 0.905)^4};$$

$$c_2 = 0.05^2 (5.34 + 1.52) = 0.017;$$

$$\varepsilon^*(t) = \dot{g}(t) \cdot c_1 + \ddot{g}(t) \frac{c_2}{2};$$

Пример 9.7. Выполнить предыдущее задание, но с помощью псевдо-частотных характеристик.

Решение:

Подставляя в передаточную функцию $W(z)$ соотношение

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \text{ получим}$$

$$W(w) = \frac{0.39 \cdot \frac{1+w}{1-w} \cdot \left(\frac{1+w}{1-w} - 0.84 \right)}{\left(\frac{1+w}{1-w} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1+w}{1-w} - 0.905 \right)} = \frac{0.39 \cdot (1+w) \cdot (1+w - 0.84 + 0.84 \cdot w)}{2 \cdot w \cdot (1+w - 0.905 + 0.905 \cdot w)} =$$

$$= \frac{0.39 \cdot (1+w) \cdot (1.84 \cdot w + 0.16)}{2 \cdot w \cdot (1.905 \cdot w + 0.095)} = \frac{0.39 \cdot (1+w) \cdot (11.5 \cdot w + 1)}{2 \cdot w \cdot (20.05 \cdot w + 1)} =$$

$$= 0.328 \cdot \frac{(1+w) \cdot (11.5 \cdot w + 1)}{w \cdot (20.05 \cdot w + 1)} \cdot 17;$$

$$W(w) = \frac{5.7 \cdot (1+w) \cdot (11.5 \cdot w + 1)}{w \cdot (20.2 \cdot w + 1)}.$$

Переходя к псевдочастоте $w = j \cdot \lambda$, строим логарифмическую псевдо-частотную характеристику.

Продолжая низкочастотную часть характеристики с наклоном -20 дБ/дек и -40 дБ/дек до пересечения с осью псевдочастот, получим соответственно в точках пересечения значения добротностей системы по скоро-

сти и ускорению $\lambda_k = 0,72$, $\lambda_e = 0,2$. Пересчитаем полученные значения по формулам:

$$D_w = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{arctg} \lambda_k = 24 \text{ } 1/c;$$

$$D_e = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{arctg} \lambda_e = 64 \text{ } 1/c^2 \quad .$$

Ошибка системы

$$\varepsilon[kT] = \frac{4 \cdot kT}{24} + \frac{4}{64} = 0.0625 + 0.17 \cdot kT \text{ .}$$

Задания, рекомендованные для самостоятельной проработки по материалу параграфа 9

1) Задана z -передаточная функция разомкнутого контура системы с единичной отрицательной обратной связью:

$$W(z) = \frac{k}{0,1z^2 - 0,16 \cdot z + 0,01} \text{ ;}$$

входной сигнал:

$$F(z) = \frac{2 \cdot z}{z - 1} \text{ .}$$

Определить, при какой величине k , установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} \leq 0.5$. Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном k .

2) Определить коэффициенты ошибок по скорости, ускорению и производной ускорения для ЦСАУ, имеющей передаточную функцию в разомкнутом состоянии в виде

$$W(z) = \frac{0.55 \cdot z \cdot (z - 0.3)}{(z - 1) \cdot (z - 0.025) \cdot (z - 0.825)}$$

при $T = 0,01$ с.

Дополнительные задания представлены на стр.133.

10. Методы программирования

Рассмотрим выбор переменных состояния синхронных импульсных систем, заданных своими z - передаточными функциями.

Практически удобным приемом выбора переменных состояния является построение схем моделирования дискретной системы, которые включают в себя элементы задержки на такт и сумматоры. При этом за переменные состояния обычно принимают сигналы на выходах элементов задержки на такт.

Существуют три варианта перехода от z - ПФ дискретной системы к системе конечно-разностных уравнений. Это способы прямого, параллельного и последовательного программирования.

Рассмотрим все эти способы на примере звена второго порядка:

$$W_{ucx}(z) = \frac{a_0^{ucx} z^2 + a_1^{ucx} z + a_2^{ucx}}{b_0^{ucx} z^2 + b_1^{ucx} z + b_2^{ucx}} = \frac{Y(z)}{e(z)}$$

10.1. Способ прямого программирования.

Приведем рассматриваемую передаточную функцию к нормализованному виду. С этой целью вынесем в числителе и знаменателе коэффициенты при слагаемых с наибольшими степенями и далее разделим числитель и знаменатель $W(z)$ на z^2 , получим:

$$W_{ucx}(z) = \frac{a_0^{ucx}}{b_0^{ucx}} \cdot \frac{z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 + b_1 z + b_2} = \frac{a_0^{ucx}}{b_0^{ucx}} \cdot \frac{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{a_0^{ucx}}{b_0^{ucx}} W(z);$$
$$W(z) = \frac{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (10.1)$$

По определению ПФ:

$$y(z) = e(z) \frac{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = e(z) \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}).$$

Введем новую переменную $\xi(z)$:

$$\xi(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} e(z); \quad (10.2)$$

$$\xi(z) = e(z) - b_1 z^{-1} \xi(z) - b_2 z^{-2} \xi(z).$$

Соответственно, выходная переменная будет равна:

$$y(z) = \xi(z) + a_1 z^{-1} \xi(z) + a_2 z^{-2} \xi(z);$$

Для звена (10.2) второго порядка введем, соответственно, две фазовые переменные первого порядка:

$$x_1(z) = z^{-1}\xi(z);$$

$$x_2(z) = z^{-2}\xi(z) = z^{-1}x_1(z);$$

Тогда уравнения для промежуточной переменной и выходной переменной будут иметь вид:

$$\xi(z) = e(z) - b_1 z^{-1}\xi(z) - b_2 z^{-2}\xi(z);$$

$$y(z) = \xi(z) + a_1 z^{-1}\xi(z) + a_2 z^{-2}\xi(z).$$

Учитывая теорему о смещении аргумента решетчатой функции, вспомним, что умножение изображения на z^{-1} соответствует смещению (задержке) оригинала на 1 такт, а на z^{-2} - на 2 такта.

Тогда) схему моделирования можно представить в следующем виде (рис.10.1).

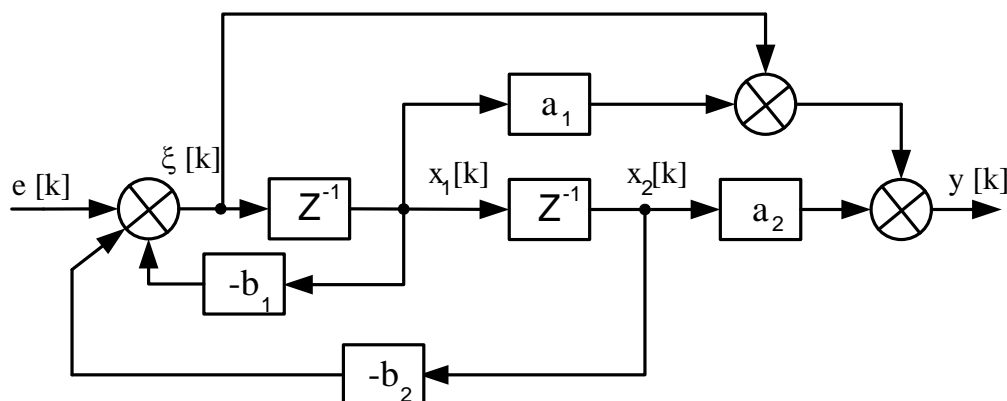


Рис.10.1.

В соответствии с правилом, за переменные состояния выбраны выходы задержки на 1 такт.

Уравнения состояния системы получим, переходя от изображений к решетчатым функциям.

$$z \cdot x_1(z) = \xi(z);$$

$$z \cdot x_2(z) = z^{-1}x_1(z).$$

В итоге имеем:

$$\begin{cases} x_1[k+1] = -b_1x_1[k] - b_2x_2[k] + e[k] \\ x_2[k+1] = x_1[k] \end{cases} \quad (10.3)$$

где $x_1[k+1]$ – значения фазовых переменных в последующий такт времени.

Так как:

$$y(z) = \xi(z) + a_1z^{-1}\xi(z) + a_2z^{-2}\xi(z).$$

и при этом, учитывая ранее введенные переменные:

$$\begin{aligned} y(z) &= e(z) + (a_1 - b_1)x_1(z) + (a_2 - b_2)x_2(z); \\ Y[k] &= (a_1 - b_1)x_1[k] + (a_2 - b_2)x_2[k] + e[k]. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Таким образом, уравнения состояния принимают вид (10.3), (10.4), а матрицы A, B, C, D определяются выражениями:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ C &= (a_1 - b_1 \quad a_2 - b_2); \quad D = (1). \end{aligned}$$

Напомним, что матрицы A, B, C, D определяют систему разностных уравнений, эквивалентных ПФ (10.1):

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Be[k]; \\ y[k] &= Cx[k] + De[k]. \end{aligned}$$

При этом, также необходимо помнить, что сигнал $e(z)$ поступающий на вход системы приходит с усилением, равным отношению коэффициентов $a_0^{исх}/b_0^{исх}$ при старших степенях z , которые были вынесены при первом преобразовании. Если учитывать эти коэффициенты в уравнениях состояния, то матрицы A, B, C, D будут иметь вид.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{a_0^{исх}}{b_0^{исх}} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ C &= (a_1 - b_1 \quad a_2 - b_2); \quad D = \left(\frac{a_0^{исх}}{b_0^{исх}} \right). \end{aligned}$$

10.2. Способ параллельного программирования.

Способ параллельного программирования предполагает представление исходной передаточной функции суммой передаточных функций более низкого порядка с последующим их представлением схемами моделирования:

$$W(z) = W_1(z) + W_2(z).$$

Рассмотрим применение способа параллельного программирования на примере передаточной функции второго порядка:

$$W(z) = \frac{z^2 + a_1 z + a_2}{z^2 + b_1 z + b_2}.$$

Предположим, что характеристическое уравнение имеет два действительных различных корня (β_1, β_2). В этом случае исходная передаточная функция может быть представлена суммой составляющих:

$$W(z) = 1 + \frac{c_1}{z - \beta_1} + \frac{c_2}{z - \beta_2},$$

где коэффициенты C_1, C_2 рассчитываются по следующим зависимостям:

$$c_1 = (a_2 - b + (a_1 - b_2)\beta_1) / (\beta_1 - \beta_2);$$

$$c_2 = -(a_2 - b + (a_1 - b_2)\beta_2) / (\beta_1 - \beta_2).$$

Далее, аналогично первому способу:

$$W(z) = 1 + \frac{c_1 z^{-1}}{1 - \beta_1 z^{-1}} + \frac{c_2 z^{-1}}{1 - \beta_2 z^{-1}},$$

и вводят новые переменные:

$$\xi_1(z) = \frac{c_1 z^{-1}}{1 - \beta_1 z^{-1}} e(z); \quad \xi_2(z) = \frac{c_2 z^{-1}}{1 - \beta_2 z^{-1}} e(z).$$

Переменные состояния определяются выражением:

$$x_1(z) = z^{-1} \cdot \xi_1(z);$$

$$x_2(z) = z^{-1} \xi_2(z).$$

Соответствующая схема моделирования представлена на рис.10.2.:

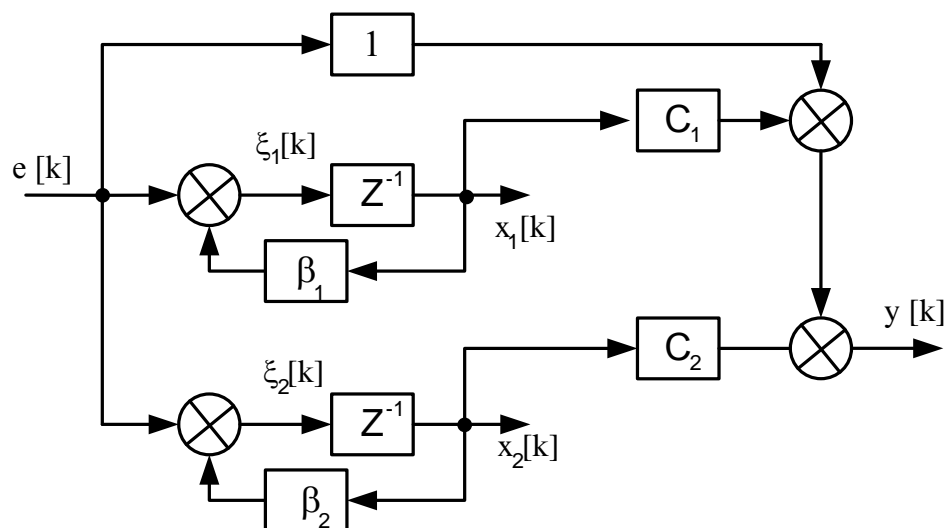


Рис.10.2.

Разностные уравнения системы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= \beta_1 x_1[k] + e[k]; \\ x_2[k+1] &= \beta_2 x_2[k] + e[k]; \\ Y[k] &= c_1 x_1[k] + c_2 x_2[k] + e[k]. \end{aligned} \quad (10.5)$$

При этом матрицы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ C &= (C_1 \quad C_2); \quad D = (1). \end{aligned}$$

Достоинство этого способа состоит в том, что матрица A получается диагональной, но при этом числа β_1, β_2 могут оказаться комплексными.

10.3. Способ последовательного программирования

Общая его идея заключается в следующем:

уравнению системы в операторной форме записи придается вид:

$$y(z) = \left(\frac{1 - \gamma_1 z^{-1}}{1 - \beta_1 z^{-1}} \cdot e(z) \right) \cdot \frac{1 - \gamma_2 z^{-1}}{1 - \beta_2 z^{-1}}$$

и схема моделирования составляется как последовательность однотипных каскадов (рис.10.3).

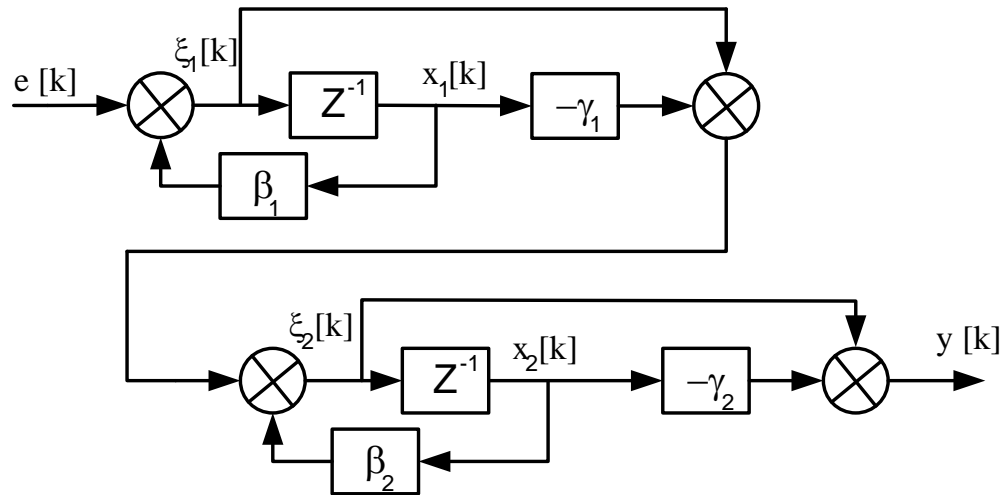


Рис.10.3.

Уравнения состояния системы при этом будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= \beta_1 x_1[k] + e[k]; \\ x_1[k+1] &= (\beta_1 - \gamma_1) x_1[k] + \beta_2 x_2[k] + e[k]; \\ Y[k] &= (\beta_1 - \gamma_1) x_1[k] + (\beta_2 - \gamma_2) x_2[k] + e[k]. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Матрицы A,B,C,D будут определяться следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ \beta_1 - \gamma_1 & \beta_2 \end{pmatrix}; & B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ C &= (\beta_1 - \gamma_1 \quad \beta_2 - \gamma_2); & D &= (1). \end{aligned}$$

Матрица A при этом является треугольной.

Составление блок-схемы моделирования дискретных систем является важным этапом их исследования. С помощью блок – схемы можно рационально выбрать переменные состояния системы, а также перейти к описанию динамики системы в рамках аппарата дискретного преобразования Лапласа или Z – преобразования.

10.4 Методы программирования для передаточных функций высокого порядка

Выше были рассмотрены методы программирования для передаточной функции (ПФ) второго порядка и при условии, если корни характеристического уравнения различные и действительные. В общем случае ПФ имеет произволь-

ный порядок и корни характеристического уравнения, как действительные, так и комплексные.

Допустим ПФ в общем случае имеет вид:

$$W(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}.$$

Прямое программирование

В случае прямого программирования ПФ преобразуется к виду:

$$W(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}.$$

Далее алгоритм полностью соответствует рассмотренному выше.

Последовательное программирование

При последовательном программировании ПФ разбивается на элементарные сомножители первого и второго порядков:

$$W(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \prod_{i=1}^{n_1} \frac{z - \gamma_i}{z - \beta_i} \prod_{j=1}^{n_2} \frac{z^2 + \gamma_{1j} z + \gamma_{2j}}{z^2 + \beta_{1j} z + \beta_{2j}}.$$

Далее преобразуем к отрицательным степеням z :

$$W(z) = \frac{a_0}{b_0} \prod_{i=1}^{n_1} \frac{1 - \gamma_i z^{-1}}{1 - \beta_i z^{-1}} \prod_{j=1}^{n_2} \frac{1 + \gamma_{1j} z^{-1} + \gamma_{2j} z^{-2}}{1 + \beta_{1j} z^{-1} + \beta_{2j} z^{-2}};$$

$$n = n_1 + 2n_2.$$

При этом предполагаем, что все коэффициенты — действительные числа.

Далее реализуется выше рассмотренный алгоритм для последовательного программирования.

Требования к точности реализации коэффициентов $\alpha_i, \beta_i, \alpha_{1j}, \beta_{1j}, \alpha_{2j}, \beta_{2j}$, оказываются здесь такими же, как и в методе прямого программирования.

Параллельное программирование

При параллельном программировании ПФ разбивается на элементарные слагаемые первого и второго порядков:

$$W(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i}{z - \beta_i} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{c_{1j} z + c_{2j}}{z^2 + \beta_{1j} z + \beta_{2j}} \right\}.$$

Далее аналогично преобразуем к отрицательным степеням z :

$$W(z) = \frac{a_0}{b_0} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{c_i z^{-1}}{1 - \beta_i z^{-1}} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{c_{1j} z^{-1} + c_{2j} z^{-1}}{1 + \beta_{2j} z^{-1} + \beta_{2j} z^{-1}} \right\};$$

$$n = n_1 + 2n_2.$$

При этом предполагаем, что все коэффициенты – действительные числа.

Структурная схема цифрового фильтра в соответствии с приведенной зависимостью может быть представлена в виде параллельного соединения элементарных цифровых фильтров (порядок не выше второго).

Как и при последовательном программировании, требования к точности воспроизведения отдельных коэффициентов здесь оказываются менее жесткими по сравнению с реализацией методом прямого программирования.

Выбор того или иного метода программирования обусловлен как правило удобством реализации в цифровой части системы и определяется в каждом конкретном случае индивидуально (как правило в результате сравнения качества решения). Под качеством здесь понимается и общее количество отличных от нуля коэффициентов (а это значит и общее количество операций), и чувствительность характеристик фильтра к округлению коэффициентов.

Задания, рекомендованные для самостоятельной проработки по материалу параграфа 10

1. Способами параллельного, последовательного и прямого программирования получить уравнения состояния ИС, заданной своей Z -передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{0.5z^2 - 0.1z}{0.2z^2 + 0.51z + 0.16}.$$

2. Способами параллельного, последовательного и прямого программирования получить уравнения состояния ИС, заданной своей Z - передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{z^2}{0.5z^2 + 0.16}.$$

Дополнительные задания представлены на стр. 131

11. Преобразование конечно-разностных уравнений к каноническим формам

Постановка задачи

Конечно-разностные уравнение состояния динамического объекта:

$$\left. \begin{aligned} x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k] \end{aligned} \right\}$$

были получены на основе физических законов или расчётных данных с использованием математических моделей, полученных также на основе законов физики. При этом используемые переменные состояния представляют собой фактические переменные объекта, так что описание объекта в пространстве состояний было объективно связано с физической реальностью. Введённые таким способом переменные состояния не меняют своего физического смысла и в дискретном варианте описания.

В некоторых случаях, однако, полезно ввести переменные состояния, которые формально определяются как линейная комбинация различных физических переменных состояния. Такое преобразование выполняется с целью получения уравнений состояния в определённой канонической форме, что в ряде случаев позволяет существенно уменьшить число параметров, необходимых для их описания, или облегчает обнаружение некоторых свойств объекта и системы.

Допустим n -мерный вектор $x \in X$ – является допустимым вектором состояния некоторой системы, имеющей собственную матрицу A размерности $(n \times n)$. Тогда с помощью невырожденной матрицы T можно определить новый вектор

$$\eta = T \cdot x$$

который также можно рассматривать, как вектор состояния системы в новом базисе $\eta \in \theta$. Иногда, наряду с матрицей T удобно с вычислительной точки зрения использовать обратную матрицу $Q = T^{-1}$.

Рассмотрим преобразование системы уравнений из одного пространства X в другое θ на примере дискретной системы, определяющейся постоянными параметрами:

$$\left. \begin{aligned} x[k+1] &= A \cdot x[k] + B \cdot u[k] \\ y[k] &= C \cdot x[k] + D \cdot u[k] \end{aligned} \right\}$$

Подставим вместо $x[k]$ вектор: $x = T^{-1} \cdot \eta$, получим:

$$\left. \begin{aligned} T^{-1} \cdot \eta[k+1] &= A \cdot T^{-1} \cdot \eta[k] + B \cdot u[k] \\ y[k] &= C \cdot T^{-1} \cdot \eta[k] + D \cdot u[k] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \eta[k+1] &= T \cdot A \cdot T^{-1} \cdot \eta[k] + T \cdot B \cdot u[k] \\ y[k] &= C \cdot T^{-1} \cdot \eta[k] + D \cdot u[k] \end{aligned} \right\}$$

Введём обозначения:

$$A_k = T \cdot A \cdot T^{-1};$$

$$B_k = T \cdot B;$$

$$C_k = C \cdot T^{-1};$$

$$D_k = D.$$

Уравнение системы в преобразованном базисе:

$$\left. \begin{aligned} \eta[k+1] &= A_k \cdot \eta[k] + B_k \cdot u[k] \\ y[k] &= C_k \cdot \eta[k] + D_k \cdot u[k] \end{aligned} \right\}$$

Определение :

Квадратные матрицы A_k и A подобны, если существует такая невырожденная матрица T , что

$$A_k = T \cdot A \cdot T^{-1}.$$

Замечание:

Элементы матриц A_k , A , T в общем случае могут быть действительными или комплексными числами.

У двух подобных матриц A_k и A характеристические полиномы равны и, следовательно, равны их собственные числа.

Последнее утверждение можно доказать:

$$\begin{aligned} \det(zE - A_k) &= \det(zE - T \cdot A \cdot T^{-1}) = \det(T \cdot (zE - A) \cdot T^{-1}) = \\ &= \det T \cdot \det(zE - A) \cdot \det T^{-1} = \det(zE - A). \end{aligned}$$

Таким образом, характеристическое уравнение матрицы и, следовательно, её собственные значения не зависят от базиса пространства состояния. У двух подобных матриц равны и следы и определители, поскольку они определяются коэффициентами характеристического уравнения.

На практике применяют различные канонические формы записи уравнений состояния. Рассмотрим три варианта:

– каноническая форма Жордана;

- каноническая форма управляемости;
- каноническая форма восстанавливаемости.

Каноническая форма Жордана.

Допустим, все собственные значения переходной матрицы динамической системы A взаимно различны. В этом случае уравнения, описывающие поведение системы могут быть приведены к *канонической форме Жордана*:

$$\left. \begin{aligned} x_J[k+1] &= A_J \cdot x_J[k] + B_J \cdot u[k] \\ y[k] &= C_J \cdot x_J[k] + D_J \cdot u[k] \end{aligned} \right\}$$

$$A_J = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & z_2 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & z_n \end{bmatrix} \text{ — так называемая матрица Жордана.}$$

z_i — корни характеристического уравнения.

Характеристический полином матрицы может быть представлен в виде:

$$\det(zE - A) = \det(zE - A_J) = \prod_{i=1}^n (z - z_i);$$

$$\det(zE - A) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n = 0.$$

Основное достоинство канонической формы Жордана: минимальное количество элементов (ненулевых) в матрице A_J .

Недостатки:

1) Для определения матрицы в канонической форме Жордана необходимо вначале найти корни характеристического уравнения, или собственные числа матрицы A .

2) Собственные числа матрицы Жордана могут быть комплексно-сопряженными. В этом случае все последующие матричные расчёты становятся более сложными, поскольку также будут содержать комплексно-сопряженные числа.

Вычисления можно, однако, упростить представлением матрицы Жордана или её части, включающей комплексно сопряженные собственные числа, в виде квадратных блоков. В этом случае также получают соотношения, которые будут включать только действительные числа.

Например, если матрица Жордана содержит только отдельные комплексно сопряженные пары собственных значений, например:

$$J = \begin{pmatrix} & & k & k+1 & & & \\ z_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & z_2 & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \alpha + j\beta & 0 & \dots & 0 & k \\ \dots & \dots & 0 & \alpha - j\beta & \dots & 0 & k+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z_n & \end{pmatrix}$$

то эта матрица может быть преобразована к виду:

$$J = \begin{pmatrix} & & k & k+1 & & & \\ z_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & z_2 & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \alpha & \beta & \dots & 0 & k \\ \dots & \dots & -\beta & \alpha & \dots & 0 & k+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z_n & \end{pmatrix}$$

Таким образом, каждая пара комплексно-сопряженных корней может быть представлена блоками 2*2 на главной диагонали, называемыми клетками Жордана.

Любую систему конечно-разностных уравнений с различными собственными значениями можно преобразовать к канонической форме Жордана:

$$X_J = T \cdot X \quad \text{или} \quad X = T^{-1} \cdot X_J = Q \cdot X_J, \quad \text{где} \quad Q = T^{-1}.$$

$$A_j = T \cdot A \cdot T^{-1}; \quad A_j = Q^{-1} \cdot A \cdot Q;$$

$$B_j = T \cdot B;$$

$$C_j = C \cdot T^{-1};$$

$$D_j = D.$$

Представляя матрицу Q вектор-столбцами, мы получим:

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_n],$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \dots \\ q_{n1} \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ \dots \\ q_{n2} \end{bmatrix}, \dots, q_n = \begin{bmatrix} q_{1n} \\ q_{2n} \\ \dots \\ q_{nn} \end{bmatrix}.$$

где

Тогда уравнение преобразования матриц $A_j = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ можно представить в виде:

$$A \cdot Q = Q \cdot A_j, \text{ или:}$$

$$A \cdot [q_1, q_2, \dots, q_n] = [q_1, q_2, \dots, q_n] \cdot A_j;$$

$$A \cdot [q_1, q_2, \dots, q_n] = [q_1, q_2, \dots, q_n] \cdot \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & z_n \end{bmatrix};$$

$$A \cdot [q_1, q_2, \dots, q_n] = [q_1 z_1, q_2 z_2, \dots, q_n z_n].$$

Из последнего соотношения можно сформировать уравнения для расчета элементов столбцов q_i :

$$A \cdot q_i = q_i z_i, \quad i=1, \dots, n.$$

В данном матричном уравнении столбец $q_i \neq 0$ называется собственным вектором матрицы A, который соответствует собственному значению z_i .

Из приведенного выражения следует, что

$$(z_i E - A) \cdot q_i = 0.$$

Так как определитель последнего уравнения $\det(z_i E - A) = 0$, то данное уравнение определяет только направление векторов q_i . Их величину можно

выбирать произвольно из дополнительных условий, например, так, чтобы отдельные элементы B_j и C_j были равны единице или нулю.

Рассмотрим пример.

Определить уравнения состояния в канонической форме Жордана:

1) с единичными элементами матрицы C_J ;

2) с единичными элементами матрицы B_J

для системы, которая задана следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x[k+1] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x[k] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot u[k] \\ y[k] &= (1, 0, 0) \cdot x[k], \quad D = [0] \end{aligned} \right\}$$

Решение:

Первый этап

Определение корней характеристического уравнения системы:

$$\det(zE - A) = 0.$$

$$\det \begin{pmatrix} z-1 & 0 & -1 \\ 2 & z-1 & 0 \\ 0 & -1 & z-2 \end{pmatrix} = (z-1) \begin{pmatrix} z-1 & 0 \\ -1 & z-2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & z-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (z-1)^2(z-2) + 2 = (z^2 - 2z + 1)(z-2) + 2 = z^3 - 2z^2 + z - 2z^2 + 4z - 2 + 2 = z^3 - 4z^2 + 5z = 0.$$

Находим корни уравнения:

$$z_1 = 0;$$

$$z_{2,3} \text{ находим из уравнения } z^2 - 4z + 5 = 0. \quad z_{2,3} = 2 \pm \sqrt{-1} = 2 \pm j;$$

$$z_2 = 2 + j; \quad z_3 = 2 - j.$$

Второй этап

Определение собственных векторов, соответствующих корням характеристического уравнения z_1, z_2, z_3 .

На основании преобразования подобия:

$$A_j = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$$

$$A \cdot Q = Q \cdot A_j$$

Представляя матрицу Q – вектор-столбцами, получим:

$$A \cdot (q_1, q_2, q_3) = (q_1, q_2, q_3) \cdot A_j;$$

$$(A \cdot q_1, A \cdot q_2, A \cdot q_3) = (q_1 z_1, q_2 z_2, q_3 z_3)$$

Формула для расчета матрицы Q по столбцам:

$$A \cdot q_i = q_i z_i, \quad i=1, \dots, 3.$$

$$(z_i E - A) \cdot q_i = 0$$

Собственный вектор, соответствующий корню $z_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{cases} q_{11} + q_{31} = 0 \\ -2q_{11} + q_{12} = 0 \\ q_{12} + 2q_{31} = 0 \end{cases}$$

Примем $q_{11}=1$, тогда $q_{31}=-1$, $q_{21}=2$, и, соответственно:

$$q_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.2. Собственный вектор для $z_2 = 2 + j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{pmatrix} (2 + j)$$

$$\begin{cases} q_{12} + q_{32} = q_{12} (2 + j) \\ -2q_{12} + q_{22} = q_{22} (2 + j) \\ q_{22} + 2q_{32} = q_{32} (2 + j) \end{cases}$$

Аналогично: $q_{12} = 1$, тогда $q_{32} = 2 + j - 1 = 1 + j$; $q_{22} = q_{32} (j) = -1 + j$, т.е.

$$q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + j \\ 1 + j \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - j \\ 1 - j \end{pmatrix}$$

Аналогично

Таким образом, нормированная матрица преобразований Q равна:

$$Q = (q_1 \ q_2 \ q_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1+j & -1-j \\ -1 & 1+j & 1-j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{l1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{l2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{l3} \end{pmatrix},$$

где q_{l1} , q_{l2} , q_{l3} - произвольные длины векторов q_1 , q_2 , q_3 .

Для определения длин q_{l1} , q_{l2} , q_{l3} используем дополнительные условия.

Третий этап.

Масштабирование матрицы преобразования.

3.1. Дополнительные условия: $C_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$C_J = C \cdot Q, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{l1} & q_{l2} & q_{l3} \\ 2q_{l1} & (-1+j)q_{l2} & (-1-j)q_{l3} \\ -q_{l1} & (1+j)q_{l2} & (1-j)q_{l3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (q_{l1} \ q_{l2} \ q_{l3})$$

$$q_{l1} = 1, \ q_{l2} = 1, \ q_{l3} = 1$$

3.2. Дополнительные условия: $B_J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B_J = Q^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{l1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{l2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & q_{l3}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} + \frac{1}{10}j & -\frac{1}{10} - \frac{1}{5}j & \frac{1}{10} - \frac{3}{10}j \\ \frac{3}{10} - \frac{1}{10}j & -\frac{1}{10} + \frac{1}{5}j & \frac{1}{10} + \frac{3}{10}j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2q_{l1}^{-1} \\ (1-3j)q_{l2}^{-1} \\ (1+3j)q_{l3}^{-1} \end{pmatrix}$$

Отсюда можно определить: $q_{l1} = -2$; $q_{l2} = (1-3j)$; $q_{l3} = (1+3j)$.

Искомые уравнения в канонической форме Жордана для случая 3.2.:

$$\begin{cases} x[k+1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+j & 0 \\ 0 & 0 & 2-j \end{pmatrix} x[k] + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u[k] \\ y[k] = [-2 \quad (1-3j) \quad (1+3j)] x[k] \end{cases}$$

Преобразование комплекта матриц, описывающих динамическую систему в дискретном времени, A, B, C, D к канонической форме Жордана может быть выполнено с помощью стандартных команд Matlab:

$$\begin{cases} sysI &= ss(A, B, C, D) \\ [JsysI, T] &= canon(sysI, 'modal') \\ [AJ, BJ, CJ, DJ] &= ssdata(JsysI) \end{cases}$$

В канонической форме “*modal*” матрица A_J имеет диагональный вид, причем на главной диагонали расположены действительные корни характеристического уравнения, а каждая пара комплексных корней образует блок 2x2 на главной диагонали. Если, например система 4-го порядка имеет корни $\alpha, \gamma + j\omega, \gamma - j\omega, \beta$, то:

$$A_J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \omega & 0 \\ 0 & -\omega & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Каноническая форма управляемости (скалярное управление)

Канонической формой управляемости является запись уравнений состояния дискретной системы в виде:

$$X_R[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} X_R[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U[k] = A_R X_R[k] + B_R U[k]$$

$$Y[k] = C_R X_R[k] + D_R U[k],$$

где: a_0, a_1, \dots, a_{n-1} - коэффициенты характеристического уравнения:

$$\det(zE - A) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n = 0.$$

Основные свойства этой формы записи заключаются в следующем:

1) Матрица A_R невырождена, последняя строка матрицы определяется коэффициентами характеристического полинома системы. Все остальные элементы равны нулю за исключением 1 на диагонали справа от главной диагонали.

2) Матрица B_R имеет все элементы равные нулю за исключением последнего элемента, который равен "1".

3) Матрица преобразования $Q = T^{-1}$, которая позволяет нам преобразовать систему, определяемую набором (A, B, C, D) , в каноническую форму управляемости, может быть вычислена рекуррентно по столбцам:

$$X = Q \cdot X_R = [q_1, \dots, q_n] X_R$$

$$Q^{-1} A \cdot Q = A_R$$

$$A \cdot Q = Q \cdot A_R;$$

$$A[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$[Aq_1 \ Aq_2 \ \dots \ Aq_n] = [-q_n a_0 \ q_1 - q_n a_1 \ \dots \ q_{n-1} - q_n a_{n-1}]$$

Так как вектор B_R известен: $B_R = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, то мы можем сначала вычислить:

$$B = Q \cdot B_R = \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = q_n \text{ и далее продолжить по отдельным столбцам:}$$

$$q_n = B$$

$$q_{n-1} = Aq_n + a_{n-1}q_n$$

.....

$$q_1 = Aq_2 + a_1q_n$$

$$0 = Aq_1 + a_0q_n$$

Последняя строка служит для контроля.

Определение матрицы Q предполагает известным значение коэффициентов характеристического полинома.

Каноническая форма восстанавливаемости

Каноническая форма восстанавливаемости дуальна к канонической форме управляемости. Если мы пометим индексами К матрицы и вектор этой формы, то $A_K = A_R^T$; $B_K = C_R^T$; $C_K = B_R^T$; $D_K = D_R$.

Канонической формой восстанавливаемости является запись уравнений состояния в виде:

$$X_K[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} X_K[k] + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} U[k] = A_K X_K[k] + B_K U[k]$$

$$Y[k] = C_K X_K[k] + D_K U[k]$$

$$C_K^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Основные свойства этой формы следующие:

1) Матрица наблюдаемости невырождена, если система наблюдаема. Расположение элементов в матрице A_K соответствует транспонированной матрице A_R .

2) Если система задана набором матриц (A, B, C, D), то с помощью подстановки $QX_K = X$ $Q = T^{-1}$ она может быть преобразована в каноническую форму восстанавливаемости, где матрица преобразования Q может быть вычислена рекуррентно по строкам:

$$X_K = T \cdot X$$

$$X = T^{-1} X_K$$

Тогда, поскольку мы знаем матрицу C_K , то можем записать:

$$A_K = T \cdot A \cdot T^{-1}$$

$$C_K = C \cdot T^{-1}$$

$$C_K \cdot T = C$$

Матрицы C_K и C – матрицы строки. Тогда записывая матрицу T по строкам:

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{bmatrix} = t_n = C$$

Таким образом строка t_n определяется элементами матрицы C: $t_n = C$.

Следующая строка матрицы преобразования определяется соотношением: $T \cdot A = A_K T$.

Откуда следует, что:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t_1 A \\ t_2 A \\ \dots \\ t_n A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_0 t_n \\ t_1 - a_1 t_n \\ \dots \\ t_{n-1} - a_{n-1} t_n \end{bmatrix}.$$

Приравнивая последовательно справа налево элементы матриц в последнем уравнении, получим:

$$t_n = C;$$

$$t_{n-1} = t_n A + a_{n-1} t_n$$

$$t_{n-2} = t_{n-1} A + a_{n-2} t_n$$

.....

$$t_1 = t_2 A + a_1 t_n$$

$$0 = t_1 A + a_0 t_n$$

Последняя строка служит для контроля точности выражений.

Элементы a_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$ матрицы A можно определить с помощью характеристического полинома $\det(zE - A)$ или с помощью алгоритма Фаддеева. Элементы матрицы B_K вычисляются согласно выражению:

$$B_K = T \cdot B$$

К канонической форме восстанавливаемости система k – разностных уравнений, представленных в матричной форме, может быть преобразована с помощью стандартной команды Matlab: `canon` с параметром “companion” – сопутствующая форма:

$$\left\{ \begin{array}{ll} sys1 & = ss(A, B, C, D) \\ [Ksys1, T] & = canon(sys1, 'companion') \\ [A_k, B_k, C_k, D_k] & = ssdata(Ksys1) \end{array} \right.$$

$$[k_{sys}, T] = canon(sys1, 'companion')$$

$$[A_K, B_K, C_K, D_K] = ssdata(k_{sys1})$$

12. Синтез алгоритмов наблюдения

При решении практических задач управления методами пространства состояния часто встречаются случаи, когда не все переменные состояния оказываются измеряемыми. Это обычно имеет место в объектах с распределенными параметрами, в сложных объектах управления и так далее.

Для того чтобы воспользоваться теорией пространства состояния для управления этими объектами, необходимо рассчитывать неизмеряемые переменные состояния объекта по его измеряемым входам и выходам.

Задачи, в которых мы не знаем или не можем непосредственно измерить все компоненты вектора состояния, относятся к категории задач управления при неполной информации. Различают при этом детерминированные и статистические методы оценивания вектора состояния.

Рассмотрим синтез детерминированного наблюдателя состояния системы полного порядка, который по измерениям входных и выходных переменных объекта восстанавливают вектор состояния объекта (полностью все n компонент).

Допустим, объект управления описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] = Cx[k] \end{cases} \quad (12.1)$$

У объекта $p \leq n$ выходов, n – порядок объекта.

Предполагается, что выходные переменные объекта линейно независимы, так что ранг матрицы C равен p .

Наблюдатель Луенбергера полного порядка

Идея синтеза наблюдающего устройства, предложенного Луенбергером, основывается на предположении, что матрицы A , B и C известны, так что объект, модель которого является частью наблюдателя, может быть промоделирован. На модели объекта мы измеряем оценку вектора состояния $\bar{x}[k]$ и находим вектор:

$$u[k] = -K \cdot \bar{x}[k],$$

где K – матрица регулятора, с помощью которого мы воздействуем как на реальный объект, так и на модель.

Наблюдатель описывается уравнением

$$\bar{x}[k+1] = A_n \cdot \bar{x}[k] + B_n \cdot u[k] + H_n \cdot y[k]. \quad (12.2)$$

Задача заключается в нахождении таких матриц A_n, B_n, H_n , при которых $\bar{x}[k]$ асимптотически стремится к $x[k]$.

Вычитая уравнение (12.2) из уравнения (12.1), мы получим вектор ошибки оценивания состояния:

$$\Delta x[k] = x[k] - \bar{x}[k];$$

$$\begin{aligned} \Delta x[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] - A_n \cdot \bar{x}[k] - B_n \cdot u[k] - H_n \cdot y[k] = \\ &= Ax[k] + Bu[k] - A_n \cdot \bar{x}[k] - B_n \cdot u[k] - H_n \cdot Cx[k] = \\ &= A_n \cdot x[k] - A_n \cdot x[k] - A_n \cdot \bar{x}[k] + (B - B_n) \cdot u[k] + Ax[k] - H_n \cdot Cx[k]; \end{aligned}$$

$$\Delta x[k+1] = A_n \cdot \Delta x[k] - (A - A_n - H_n \cdot C) \cdot x[k] + (B - B_n) \cdot u[k].$$

(12.3)

Для того чтобы вектор ошибки $\Delta x[k]$ оценки $\bar{x}[k]$ асимптотически стремился к нулю, должны выполняться следующие три условия:

$$A_n = A - H_n \cdot C;$$

$$B_n = B;$$

$$\Delta x[k+1] = (A - H_n \cdot C) \cdot \Delta x[k].$$

(12.4)

Система, описываемая последним уравнением, должна быть устойчивой системой. Следует отметить, что при выполнении условия $B_n = B$ вектор ошибки $\Delta x[k]$ неуправляем, то есть управляющие воздействия не могут влиять на его величину.

Матрица B_n системы выбирается так, чтобы корни характеристического уравнения удовлетворяли условию:

$$\det(zE - A + H_n \cdot C) = \prod_{i=1}^n (z - z_i), \quad |z_i| < 1,$$

при этом система является устойчивой, и вектор ошибки $\Delta x[k]$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

После подстановки выражений (12.4) в уравнение (12.2) получим уравнение наблюдателя:

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+1] &= (A - H_n \cdot C) \cdot \bar{x}[k] + Bu[k] + H_n \cdot Cx[k] = \\ &= A\bar{x}[k] + Bu[k] + H_n \cdot C\Delta x[k]. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Можно заметить, что наблюдатель представляет собой модель объекта, на которую воздействует вектор ошибки $\Delta x[k]$. Соответствующая блок-схема приведена на рис.12.1.

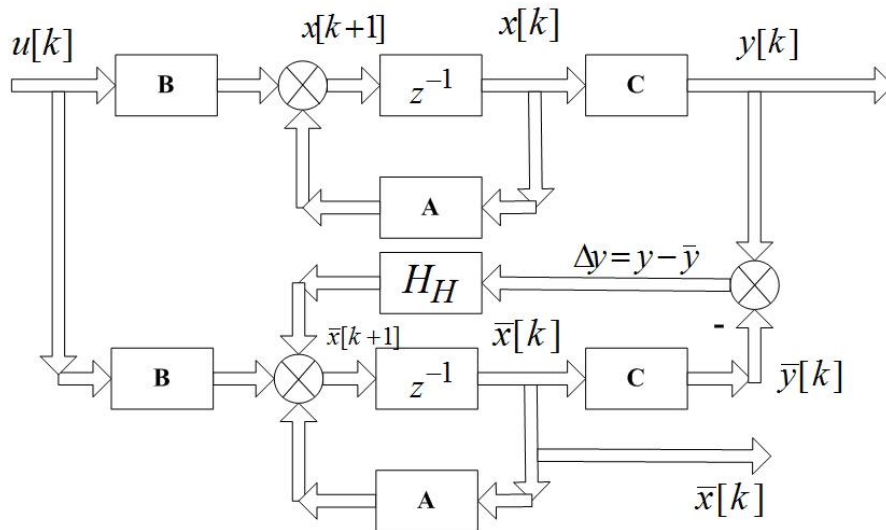


Рис.12.1. Блок-схема объекта управления и наблюдателя состояния.

Получим основные соотношения для расчета параметров наблюдателя полного порядка. Итак, в случае выбора параметров наблюдателя в соответствии с рассмотренной выше методикой:

$$A_n = A - H_n \cdot C;$$

$$B_n = B.$$

Характеристический полином наблюдателя будет иметь вид:

$$Q(z) = \det(zE - A + H_n \cdot C) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot z^i,$$

$$\lambda_n = 1 \tag{12.6}$$

Блок-схема системы, реализующая алгоритм управления на основе восстановленного вектора состояния, представлена на рис.12.2.

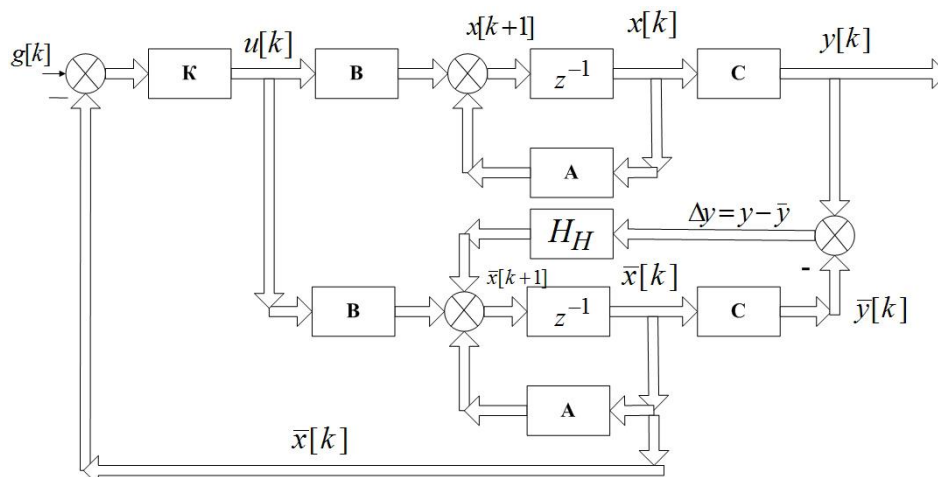


Рис.12.2. Блок-схема системы, реализующая алгоритм управления на основе восстановленного вектора состояния.

ПРИМЕР. Рассмотрим простой с вычислительной точки зрения пример расчета параметров наблюдателя состояния для системы второго порядка.

Пусть объект управления описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] = Cx[k] \end{cases},$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = (2 \ 0)$.

Необходимо спроектировать цифровой наблюдатель, который восстанавливает переменные состояния $x_1[k], x_2[k]$ по выходной переменной $y[k]$.

Цифровой наблюдатель состояния имеет рассмотренную ранее структурную схему. Его уравнение состояния запишется в виде:

$$\bar{x}[k+1] = A \cdot \bar{x}[k] + B \cdot u[k] + H_H \cdot C(x[k] - \bar{x}[k]).$$

Характеристическое уравнение наблюдателя имеет вид:

$$\det(zE - A + H_H \cdot C) = 0.$$

Так как

$$A - H_H \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_{n1} \\ h_{n2} \end{pmatrix} \cdot (2 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2h_{n1} & 0 \\ 2h_{n2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h_{n1} & 1 \\ -1-2h_{n2} & 1 \end{pmatrix}$$

то

$$\det(zE - A + H_H \cdot C) = \det \begin{pmatrix} z + 2h_{n1} & -1 \\ 1 + 2h_{n2} & z - 1 \end{pmatrix} = (z + 2h_{n1}) \cdot (z - 1) + 1 + 2h_{n2}.$$

$$z^2 + (2 \cdot h_{n1} - 1) \cdot z + 1 + 2 \cdot h_{n2} - 2 \cdot h_{n1} = 0.$$

Спроектируем наблюдатель, имеющий апериодическую реакцию, при которой $\bar{x}[k]$ достигает значения $x[k]$ за n интервалов квантования, где n – порядок объекта управления (в рассматриваемом случае $n=2$). Для этого необходимо, чтобы характеристическое уравнение наблюдателя имело вид:

$$z^2 = 0,$$

что достигается при $h_{n1} = 0.5$ и $h_{n2} = 0$. Таким образом, матрица коэффициентов замкнутого наблюдателя имеет вид:

$$A - H_H \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнения состояния наблюдателя при $u[k] = 0$:

$$\bar{x}[k+1] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \bar{x}[k] + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x[k].$$

Зададим произвольные начальные условия для объекта управления и наблюдателя:

$$x[0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}[0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем векторы состояния объекта управления и наблюдателя:

$$x[1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}[1] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x[2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}[2] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x[3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}[3] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Как видно из проведенных расчетов, переменные состояния объекта управления и наблюдателя начинают совпадать через два такта квантования.

Алгоритм расчета матрицы обратных связей наблюдателя Луенбергера с помощью сопряженной канонической формы переменных состояния

Для определения параметров наблюдателя поступим аналогично синтезу регулятора, то есть сначала преобразуем уравнение наблюдателя к канонической форме восстанавливаемости:

$$\bar{x}[k] = Q \cdot \bar{x}_B[k]; \tag{12.7}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+1] &= Ax[k] + Bu[k] + H_H \cdot C[x[k] - \bar{x}[k]] = \\ &= Ax[k] + Bu[k] + H_H \cdot y[k] - H_H \cdot C \cdot \bar{x}[k] \end{aligned} \tag{12.8}$$

Преобразование к канонической форме восстанавливаемости:

$$\begin{aligned} \bar{x}_B[k+1] &= Q^{-1} \cdot A Q \cdot \bar{x}_B[k] + Q^{-1} \cdot Bu[k] + Q^{-1} \cdot H_H \cdot y[k] \\ &\quad - Q^{-1} H_H \cdot C \cdot Q \cdot \bar{x}_B[k] \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
H_{HB} &= Q^{-1} \cdot H_H; \\
C_B &= CQ; \\
Q^{-1} \cdot B &= B_B;
\end{aligned} \tag{12.9}$$

$$A_B = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{12.10}$$

Каноническая форма записи матрицы C имеет вид

$$\begin{aligned}
C_B &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1], \\
y[k] &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \cdot x_B[k].
\end{aligned}$$

Таким образом, получим уравнение для наблюдателя в канонической форме восстанавливаемости:

$$x_B[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 - h_{HB1} \\ 1 & \dots & 0 & -a_1 - h_{HB2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - h_{HBn} \end{bmatrix} \cdot \bar{x}_B[k] + B_B \cdot u[k] + \begin{bmatrix} h_{HB1} \\ h_{HB2} \\ \dots \\ h_{HBn} \end{bmatrix} \cdot y[k] \tag{12.11}$$

Характеристическое уравнение наблюдателя:

$$(a_0 + h_{HB1}) + (a_1 + h_{HB2})z + \dots + (a_{n-1} + h_{HBn})z^{n-1} + z^n = 0.$$

Сравнивая коэффициенты этого уравнения с коэффициентами желаемого характеристического уравнения (6), определяем параметры наблюдателя:

$$h_{HBi} = \beta_{i-1} - a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Матрица обратной связи наблюдателя в естественном базисе (исходном):

$$H_H = Q H_{HB},$$

где Q – матрица преобразования исходной системы уравнений к канонической форме восстанавливаемости.

Алгоритмы преобразования матрицы к каноническим формам подробно изложены в книгах по матричному счислению, а также по микропроцессорным системам и хорошо реализуются на ЭВМ.

ПРИМЕР. Рассмотрим уже приведенный ранее пример расчета параметров наблюдателя состояния для системы второго порядка.

Пусть объект управления описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]; \\ y[k] = Cx[k]. \end{cases}$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = (2 \ 0)$.

Необходимо спроектировать цифровой наблюдатель, который восстанавливает переменные состояния $x_1[k], x_2[k]$ по выходной переменной $y[k]$, с использованием сопряженной канонической формы переменных состояния.

Запишем характеристическое уравнение объекта управления:

$$\det(zE - A) = \det \begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & z-1 \end{pmatrix} = z^2 - z + 1$$

Таким образом, $a_0 = 1$ и $a_1 = -1$. Матрица A может быть приведена к сопряженной канонической форме:

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для замкнутого наблюдателя:

$$A_B - H_{HB} \cdot C_B = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 - h_{HB1} \\ 1 & -a_1 - h_{HB2} \end{pmatrix}$$

Для случая аperiodической реакции найдем:

$$-a_0 - h_{HB1} = 0 \Rightarrow h_{HB1} = -a_0 = -1$$

$$-a_1 - h_{HB2} = 0 \Rightarrow h_{HB2} = -a_1 = 1$$

Таким образом:

$$H_{HB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица преобразования Q в данном примере равна:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Тогда окончательно получим:

$$H_H = QH_{HB} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Синтез наблюдателя состояния пониженного порядка

Ранее была рассмотрена методика синтеза наблюдателя полного порядка, когда порядки наблюдателя и системы совпадали. В общем случае, так как r выходных переменных являются линейными комбинациями переменных состояния, необходимо восстанавливать не более $n - r$ состояний. Эта идея реализуется в наблюдателе пониженного порядка. Следует, однако, отметить, что при определении r переменных состояния непосредственно по наблюдаемым

выходам имеется меньше возможностей в обеспечении требуемой динамики наблюдателя.

Рассмотрим функциональную схему системы с наблюдателем пониженного порядка.

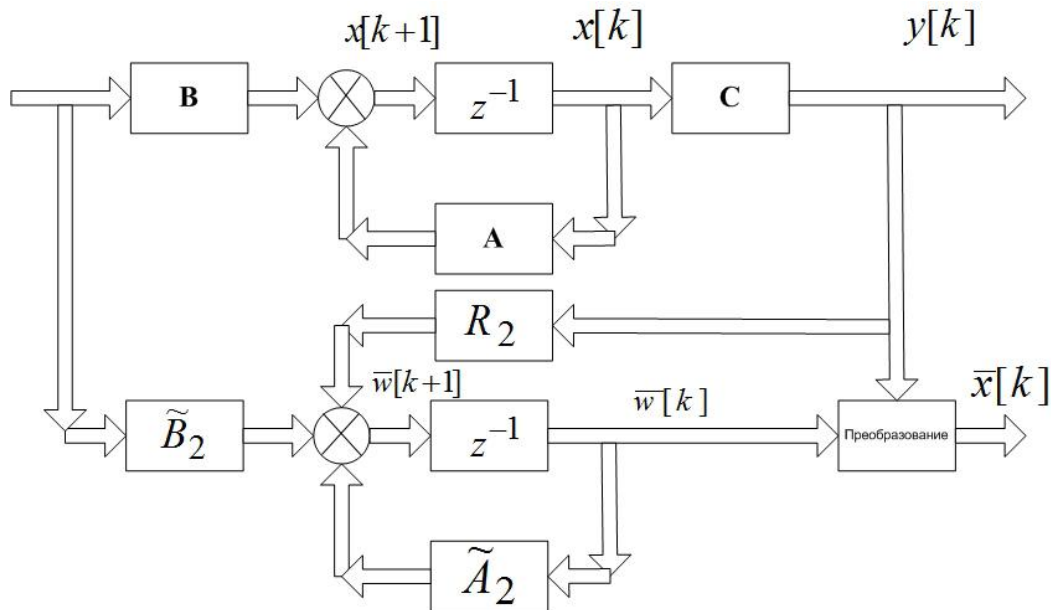


Рис.12.3. Блок-схема объекта управления и наблюдателя состояния пониженного порядка.

Наблюдатель имеет порядок $n-r$. Компоненты n -мерного вектора $\bar{x}[k]$ образуются из $n-r$ восстанавливаемых состояний в виде вектора $\bar{w}[k]$ и r -мерного вектора $y[k]$.

Наблюдатель пониженного порядка может быть спроектирован с использованием принципа преобразования к сопряженной канонической форме переменных состояния. Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом.

$$\begin{cases} x[k+1] = A \cdot x[k] + B \cdot u[k]; \\ y[k] = Cx[k]. \end{cases}$$

$$y[k] = Cx[k].$$

Пусть система является управляемой и наблюдаемой. С помощью преобразования

$$h[k] = Px[k]$$

система преобразуется к сопряженной канонической форме переменных состояния

$$h[k+1] = A_1 h[k] + B_1 u[k],$$

где матрица $A_1 = PAP^{-1}$ имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Уравнение выхода преобразуется к виду

$$y[k] = C_1 x[k],$$

где $C_1 = CP^{-1} = (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1)$ – $(1 \times n)$ – матрица.

Наблюдатель полного порядка для исходной системы описывается уравнением

$$\bar{x}[k+1] = (A - QC)\bar{x}[k] + Bu[k] + Qy[k],$$

где $Q - (n \times 1)$ – мерная матрица. Наблюдатель полного порядка для системы, представленной в сопряженной канонической форме, описывается уравнением

$$\bar{h}[k+1] = (A_1 - K_1 C)\bar{h}[k] + B_1 u[k] + K_1 y[k],$$

где $Q_1 - (n \times 1)$ – мерная матрица обратной связи наблюдателя. Так как $C_1 = (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1)$, то это означает, что

$$y[k] = h_n[k].$$

так что необходимость в восстановлении $h_n[k]$ отпадает. Чтобы восстановить оставшиеся $(n-1)$ переменные состояния и иметь возможность произвольно формировать собственные значения матрицы замкнутого наблюдателя, положим

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это проверяется непосредственным вычислением произведения MM^{-1} .

Преобразуем теперь систему с переменными состояниями $h(k)$ к следующей системе

$$\begin{aligned} w[k+1] &= A_2 w[k] + B_2 u[k] \\ y[k] &= C_2 w[k] \end{aligned},$$

где $w[k] = M h[k]$.

Таким образом:

$$A_2 = M A_1 M^{-1}; \quad B_2 = M B_1; \quad C_2 = C_1 M^{-1}.$$

$$\begin{aligned} A_2 = M A_1 M^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -\beta_1 & -a_0 + a_{n-1}\beta_1 \\ 1 & 0 & \dots & -\beta_2 & -a_1 + a_{n-1}\beta_2 \\ 0 & 1 & \dots & -\beta_3 & -a_2 + a_{n-1}\beta_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -\beta_1 & -\beta_1\beta_n - a_0 + a_{n-1}\beta_1 \\ 1 & 0 & \dots & -\beta_2 & \beta_1 - \beta_{n-1}\beta_2 - a_1 + a_{n-1}\beta_2 \\ 0 & 1 & \dots & -\beta_3 & \beta_2 - \beta_{n-1}\beta_3 - a_2 + a_{n-1}\beta_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_{n-1} & \beta_{n-1} - \beta_{n-1}^2 - a_{n-2} + a_{n-1}\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Матрица C_2 имеет вид:

$$C_2 = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1).$$

Уравнение наблюдателя в новом базисе имеет вид:

$$\bar{w}[k+1] = A_2 \cdot \bar{w}[k] + B_2 \cdot u[k] + L \cdot C_2 \cdot (w[k] - \bar{w}[k])$$

Так как $y[k] = w_n[k]$, $\bar{w}_n[k] = w_n[k]$, то:

$$L \cdot C_2 \cdot (w[k] - \bar{w}[k]) = 0,$$

следовательно:

$$\bar{w}[k+1] = A_2 \cdot \bar{w}[k] + B_2 \cdot u[k].$$

Представим полученное уравнение в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \bar{w}^1[k+1] \\ \bar{w}_n[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_2 & R_2 \\ 0 & \beta_{n-1} - a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{w}^1[k] \\ \bar{w}_n[k] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot u[k],$$

где:

$$\bar{w}^1 = \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \dots \\ \bar{w}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом:

$$\bar{w}^1[k+1] = \tilde{A}_2 \cdot \bar{w}^1[k] + R_2 \cdot \bar{w}_n[k] + \tilde{B}_2 \cdot u[k]$$

или

$$\bar{w}^1[k+1] = \tilde{A}_2 \cdot \bar{w}^1[k] + R_2 \cdot y[k] + \tilde{B}_2 \cdot u[k].$$

Характеристическое уравнение матрицы \tilde{A}_2 :

$$\det(zE - \tilde{A}_2) = z^{n-1} + \beta_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + \beta_2 z + \beta_1 = 0$$

Вектор состояния, рассчитанный наблюдателем:

$$\bar{x}[k] = (MP)^{-1} \cdot \bar{w}[k].$$

ПРИМЕР. Рассмотрим уже приведенный ранее пример расчета параметров наблюдателя состояния для системы второго порядка.

Пусть объект управления описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]; \\ y[k] = Cx[k]. \end{cases}$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (2 \quad 0).$$

Необходимо спроектировать цифровой наблюдатель пониженного порядка, который восстанавливает переменную состояния $x_2[k]$ по выходной переменной $y[k]$.

Матрица P , преобразующая матрицу A в сопряженную каноническую форму, имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем вид матрицы A_2 для системы второго порядка:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\beta_1 & -\beta_1^2 - a_0 + a_1 \cdot \beta_1 \\ 1 & \beta_1 - a_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь a_0, a_1 – коэффициенты характеристического уравнения матрицы A .

$$\det(zE - A) = \begin{vmatrix} z & -1 \\ 1 & z-1 \end{vmatrix} = z^2 - z + 1$$

Таким образом, $a_0 = 1$ и $a_1 = -1$. Параметр β_1 определяется из характеристического уравнения матрицы \tilde{A}_2 :

$$z + \beta_1 = 0.$$

Для получения апериодического процесса положим $\beta_1 = 0$.

Преобразованный наблюдатель первого порядка описывается уравнением:

$$\bar{w}^1[k+1] = \tilde{A}_2 \cdot \bar{w}^1[k] + R_2 \cdot y[k] + \tilde{B}_2 \cdot u[k],$$

где

$$\tilde{A}_2 = -\beta_1 = 0;$$

$$R_2 = -\beta_1^2 - a_0 + a_1 \cdot \beta_1 = -1;$$

$$B_2 = MPB = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{B}_2 = 2$$

Тогда:

$$\bar{w}^1[k+1] = -y[k] + 2 \cdot u[k].$$

Пусть $u[k] \equiv 0$. Зададим произвольные начальные условия для объекта управления и наблюдателя:

$$x[0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{w}^1[0] = 0.5.$$

Тогда:

$$x[1] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad x[2] = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$y[0] = 2; \quad y[1] = 0; \quad y[2] = -2;$$

$$\bar{w}^1[1] = -2; \quad \bar{w}^1[2] = 0;$$

$$\bar{w}[0] = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \bar{w}[1] = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{w}[2] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

После проведения обратного преобразования получим:

$$\bar{x}[k] = (MP)^{-1} \cdot \bar{w}[k];$$

$$(MP)^{-1} = P^{-1} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix};$$

$$\bar{x}[0] = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.25 \end{pmatrix};$$

$$\bar{x}[1] = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\bar{x}[2] = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Как видно из результатов, достигнутая оценка совпадает с вектором состояния объекта управления через 1 период квантования.

13. Задания для самостоятельной работы

13.1. Определение вычетов

1. Определить вычет функции:

$$F(s) = \frac{s}{\cos(s)}.$$

2. Определить вычет функции:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2}.$$

3. Определить вычет функции:

$$F(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2(s+2)}.$$

4. Определить вычет функции:

$$F(s) = \frac{2s^2 + s}{s(5s+1)}.$$

5. Определить вычет функции:

$$F(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{s^2(s+0.5)}.$$

6. Определить вторую прямую разность от решетчатой функции:

$$f[kT] = a_0 + a_1 * kT + a_2 * (kT)^2.$$

7. Определить вторую прямую разность от решетчатой функции:

$$f[kT] = 2 * kT + 0,4 * (kT)^2.$$

8. Определить первую прямую разность от решетчатой функции:

$$f[kT] = a_0 + a_1 * kT + a_2 * (kT)^2.$$

9. Определить первую прямую разность от решетчатой функции:

$$f[kT] = 2 * kT + 0,4 * (kT)^2.$$

10. Определить первую прямую разность от решетчатой функции:

$$f[kT] = a_0 - 2 * kT - 1,4 * (kT)^2.$$

11. Найти оригинал для функции:

$$F(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

12. Найти оригинал для функции:

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

13. Найти оригинал для функции:

$$F(z) = \frac{z^2}{(z^2 - 2z + 1)}.$$

14. По заданному изображению сигнала:

$$F(z) = \frac{z^2}{(z^2 - 2z + 1)}$$

получить делением числителя на знаменатель первые пять точек процесса $f[kT]$.

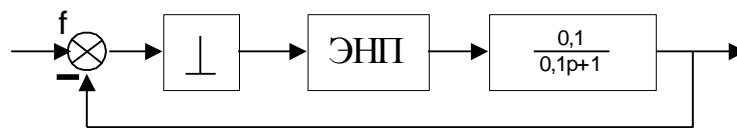
15. По заданному изображению сигнала

$$F(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3},$$

получить делением числителя на знаменатель первые пять точек процесса $f[kT]$.

13.2. Определение Z- передаточной функции

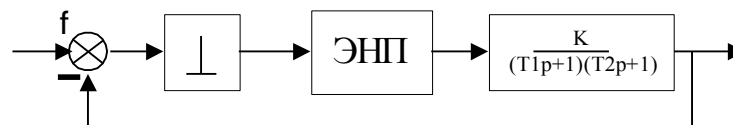
1. Задана структурная схема системы:



(ЭНП- экстраполятор нулевого порядка, $T=0,2c$).

Получить Z- передаточную функцию замкнутой системы по управляющему воздействию.

2. Задана структурная схема системы:



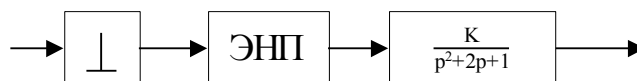
Получить Z- передаточную функцию замкнутой системы по ошибке.

3. Задана структурная схема системы:



Определить Z- передаточную функцию системы.

4. Задана структурная схема системы:



Определить Z- передаточную функцию системы.

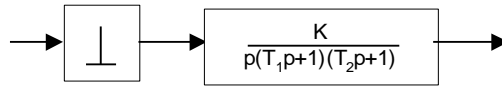
5. Получить Z- передаточную функцию системы с экстраполятором нулевого порядка, непрерывная часть которой имеет передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+10)}.$$

6. Найти Z- передаточную функцию дискретной системы:



7. Найти Z- передаточную функцию дискретной системы:



13.3. Расчет переходных процессов в импульсных системах

1. Рассчитать переходный процесс в системе, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{5z - 0,5}{z^2 + 1,2z + 0,32}.$$

Входной сигнал $g[kT]=2^k$, начальные условия нулевые.

2. Рассчитать значения первых пяти точек переходного процесса в ИС, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{z - 0,7}{z^2 + 0,6z + 0,08}.$$

На входной сигнал, Z- изображение которого имеет вид:

$$G(z) = \frac{z}{z - 0,1}, \text{ при нулевых начальных условиях.}$$

3. Получить аналитическое выражение для расчета переходного процесса в системе, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{5}{z^2 - 1,2z + 0,36}.$$

Входной сигнал $g[kT]=2^k$, начальные условия нулевые.

4. Получить аналитическое выражение для расчета переходного процесса в системе, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{5z - 0,5}{z^2 + 1,2z + 0,32}.$$

Входной сигнал $g[kT]=1+k$, начальные условия нулевые.

5. Рассчитать путем деления полинома числителя на полином знаменателя значения первых пяти точек переходного процесса в ИС, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{5z - 0,5}{z^2 + 1,2z + 0,32}.$$

Входной сигнал $g[kT]=1+k$, начальные условия нулевые.

13.4. Расчет свободного и вынужденного движений в системе

1. Найти свободное движение динамической системы, описываемой уравнением

$$x[k+2]-2x[k+1]+x[k] = 2g[k],$$
$$g[k] = 2^k$$

при начальных условиях

$$x[0] = 1; x[1] = 2.$$

2. Найти вынужденное движение динамической системы, описываемой уравнением

$$x[k+2]-2x[k+1]+x[k] = 2g[k],$$

возникающее под действием входного сигнала

$$g[k] = 2^k,$$

при начальных условиях

$$x[0] = 1; x[1] = 2.$$

3. Найти реакцию дискретной динамической системы, описываемой уравнением

$$x[k+2]-5x[k+1]+6x[k] = g[k],$$

на входной сигнал

$$g[k] = 1 + k$$

при следующих начальных условиях:

$$x[0] = 1; x[1] = 2.$$

4. Рассчитать свободную составляющую динамического процесса, возникающего в ИС, поведение которой описывается конечно-разностным уравнением:

$$x[k+2]-5x[k+1]+6x[k] = g[k+1] - 3g[k],$$

на входной сигнал

$$g[k] = k$$

при следующих начальных условиях:

$$x[0] = 1; x[1] = 1.$$

5. Рассчитать вынужденную составляющую динамического процесса, возникающего в ИС, поведение которой описывается конечно-разностным уравнением

$$x[k+2]-5x[k+1]+6x[k] = g[k+1] - 3g[k],$$

на входной сигнал

$$g[k] = 1$$

при следующих начальных условиях:

$$x[0] = 1; x[1] = 2.$$

6. Найти аналитическое выражение для решения конечно-разностного уравнения

$$5x[k+2]-6x[k+1]+x[k]=0$$

при следующих начальных условиях:

$$x[0] = 1; x[1] = -1.$$

7. Найти аналитическое выражение для решения конечно-разностного уравнения

$$x[k+2]-4x[k+1]+4x[k]=k$$

при следующих начальных условиях:

$$x[0] = 1; x[1] = 0.$$

8. Найти аналитическое выражение для решения конечно-разностного уравнения

$$x[k+2]-4x[k]=2^k$$

при следующих начальных условиях:

$$x[0] = 0; x[1] = 1.$$

9. Найти аналитическое выражение для решения конечно-разностного уравнения

$$x[k+2]-9x[k]=k-1$$

при следующих начальных условиях:

$$x[0] = 1; x[1] = 2.$$

13.5. Построение псевдочастотных характеристик дискретной системы

1. Построить логарифмические псевдочастотные характеристики импульсной системы, заданной своей Z-передаточной функцией

$$W(z) = \frac{z-0,2}{(z+0,1)(z-0,4)}.$$

2. Построить логарифмические псевдочастотные характеристики ИС, заданной своей Z-передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{z-0,1}{(z-0,2)(z-0,1)}.$$

3. Построить логарифмические псевдочастотные характеристики ИС, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{(z-1)z}{z^2+2z+1}.$$

4. Построить логарифмические псевдочастотные характеристики ИС, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{2z + 1}{z^2 - 2z + 1}.$$

5. Построить логарифмические псевдочастотные характеристики ИС, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{(1-d)(z-1)}{z^2 - d}.$$

13.6. Анализ точности линейных импульсных систем

1. Задана z-ПФ разомкнутого контура системы с единичной отрицательной обратной связью

$$W(z) = \frac{K}{z^2 - 0,02}.$$

Входной сигнал

$$F(z) = \frac{4z}{z-1}.$$

При какой величине K , установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} < 0,2$? Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном K .

2. Задана z-ПФ разомкнутого контура системы с единичной отрицательной обратной связью

$$W(z) = \frac{K}{(z-1)(z-0,8)}.$$

Входной сигнал

$$F(z) = \frac{2z}{(z-1)^2}.$$

При какой величине K установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} < 0,1$? Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном K .

3. Задана z-ПФ разомкнутого контура системы с единичной отрицательной обратной связью

$$W(z) = \frac{K}{z^2 - 0,3z + 0,02}.$$

Входной сигнал

$$F(z) = \frac{6z}{z-1}.$$

При какой величине K установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} < 1$? Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном K .

4. Задана z -ПФ разомкнутого контура системы с единичной отрицательной обратной связью

$$W(z) = \frac{K}{(z-1)(z+0,2)}.$$

Входной сигнал

$$F(z) = \frac{6z}{(z-1)^2}.$$

При какой величине K установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} < 0,5$? Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном K .

5. Задана z -ПФ разомкнутого контура системы с единичной отрицательной обратной связью

$$W(z) = \frac{K}{z^2 - 0,6z + 0,12}.$$

Входной сигнал

$$f(t) = 5, \quad T=1.$$

При какой величине K , установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} < 1$. Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном K .

6. Задана z -ПФ разомкнутого контура системы с единичной отрицательной обратной связью

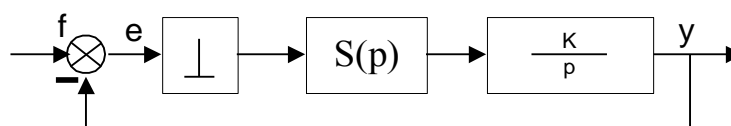
$$W(z) = \frac{K}{(z-1)(z-0,6)}.$$

Входной сигнал

$$f(t) = 2t, \quad T=1.$$

При какой величине K , установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} < 0,8$? Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном K .

7. Задана ИС:



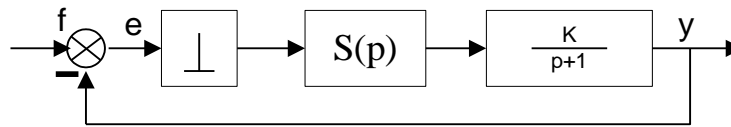
Параметры системы:

$T=1$; $e_{уст}=0,1$; $S(p)$ - передаточная функция экстраполятора нулевого порядка;

$$f(t) = 4t.$$

Найти K , оценить устойчивость системы.

8. Задана ИС:

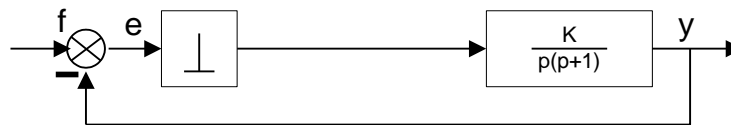


Параметры системы:

$T=0,1$; $e_{уст}=0,2$; $S(p)$ - передаточная функция экстраполятора нулевого порядка; $f(t) = 2$.

Найти K , оценить устойчивость системы.

9. Задана ИС:



Параметры системы:

$T=1$; $e_{уст}=0,1$; $S(p)$ - передаточная функция экстраполятора нулевого порядка;

$f(t) = 4t$.

Найти K , оценить устойчивость системы.

а. Задана ИС:



Параметры системы:

$T=0,1$; $e_{уст}=0,2$; $S(p)$ - передаточная функция экстраполятора нулевого порядка;

$f(t) = 2$.

Найти K , оценить устойчивость системы.

13.7. Переход от Z-передаточной функции к системе разностных уравнений (методы программирования)

1. Способом прямого программирования определить уравнения состояния ИС, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{5z - 0,4z^2}{0,32z^2 + 1,2z + 1,0}.$$

2. Способом прямого программирования определить уравнения состояния ИС, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{z - 0,4z^2}{0,2z^2 + 1,0}.$$

3. Способом параллельного программирования получить уравнения состояния ИС, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{-0,4z + 1,0}{z^2 + z + 0,16}.$$

4. Способом параллельного программирования получить уравнения состояния ИС, заданной своей Z- передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{-0,4z + 1,0}{z^2 + z + 0,16}.$$

5. Задана Z-передаточная функция объекта:

$$W(z) = \frac{z + 1}{(z - 1)^2}.$$

Записать методом последовательного программирования уравнения состояния объекта.

6. Задана Z-передаточная функция объекта:

$$W(z) = \frac{z + 1}{(z - 1)(z + 0,4)}.$$

Записать методом последовательного программирования уравнения состояния объекта.

7. Задана Z-передаточная функция объекта:

$$W(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z - 1)(z + 0,4)}.$$

Записать методом параллельного программирования уравнения состояния объекта.

8. Задана Z-передаточная функция объекта:

$$W(z) = \frac{z^2 + 1}{(z + 1)(z - 0,4)}.$$

Записать методом параллельного программирования уравнения состояния объекта.

9. Задана Z-передаточная функция объекта:

$$W(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z - 1)(z + 0,4)}.$$

Записать методом прямого программирования уравнения состояния объекта.

10. Задана Z-передаточная функция объекта:

$$W(z) = \frac{(z-1)z}{z^2 + 2z + 1}.$$

Записать методом прямого программирования уравнения состояния объекта.

11. Задана Z-передаточная функция объекта:

$$W(z) = \frac{2z + 1}{z^2 - 2z + 1}.$$

Записать методом параллельного программирования уравнения состояния объекта.

12. Задана Z-передаточная функция объекта:

$$W(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Записать методом последовательного программирования уравнения состояния объекта.

13. Задана Z-передаточная функция объекта:

$$W(z) = \frac{z-1}{(z-2)^2}.$$

Записать методом последовательного программирования уравнения состояния объекта.

14. Задана Z-передаточная функция объекта:

$$W(z) = \frac{z-1}{(z+1)^2}.$$

Записать методом прямого программирования уравнения состояния объекта.

13.8. Анализ точности линейных импульсных систем

1. Задана Z-передаточная функция разомкнутого контура системы с отрицательной обратной связью (коэффициент обратной связи равен 1):

$$W(z) = \frac{(z+0.1)(z-0.5)}{(z-1)(z-0.1)}.$$

Рассчитать значение установившейся ошибки, возникающей в системе при прохождении сигнала $g[kT] = 2kT$. Метод расчета: коэффициенты ошибок, рассчитываемых делением полинома числителя на полином знаменателя.

2. Задана Z-передаточная функция разомкнутого контура системы с отрицательной обратной связью (коэффициент обратной связи равен 1):

$$W(z) = \frac{(z+0.1)(z-0.5)}{(z-0.2)(z-0.1)}.$$

Рассчитать значение установившейся ошибки, возникающей в системе при прохождении сигнала $g[kT] = 2T$. Метод расчета: коэффициенты ошибок, рассчитываемых делением полинома числителя на полином знаменателя.

3. Задана Z-передаточная функция разомкнутого контура системы с отрицательной обратной связью (коэффициент обратной связи равен 1):

$$W(z) = \frac{(z+0.1)(z-0.5)}{z^2 - 0.9z - 0.1}.$$

Рассчитать значение установившейся ошибки, возникающей в системе при прохождении сигнала $g[kT] = 3kT$. Метод расчета: коэффициенты ошибок, рассчитываемых делением полинома числителя на полином знаменателя.

4. Задана Z-передаточная функция разомкнутого контура системы с отрицательной обратной связью (коэффициент обратной связи равен 1):

$$W(z) = \frac{(z+0.1)(z-0.5)}{(z-1)(z-0.1)}.$$

Рассчитать значение установившейся ошибки, возникающей в системе при прохождении сигнала $g[kT] = 2kT$. Метод расчета: теорема о предельном значении решетчатой функции.

5. Задана Z-передаточная функция разомкнутого контура системы с отрицательной обратной связью (коэффициент обратной связи равен 1):

$$W(z) = \frac{(z+0.1)(z-0.5)}{(z-0.2)(z-0.1)}.$$

Рассчитать значение установившейся ошибки, возникающей в системе при прохождении сигнала $g[kT] = 2T$. Метод расчета: теорема о предельном значении решетчатой функции.

6. Задана Z-передаточная функция разомкнутого контура системы с отрицательной обратной связью (коэффициент обратной связи равен 1):

$$W(z) = \frac{(z+0.1)(z-0.5)}{z^2 - 0.9z - 0.1}.$$

Рассчитать значение установившейся ошибки, возникающей в системе при прохождении сигнала $g[kT] = 3kT$. Метод расчета: теорема о предельном значении решетчатой функции.

7. Задана Z-передаточная функция разомкнутого контура системы с отрицательной обратной связью (коэффициент обратной связи равен 1):

$$W(z) = \frac{K_{oy}(z+0.1)}{z^2 - 0.9z - 0.1}.$$

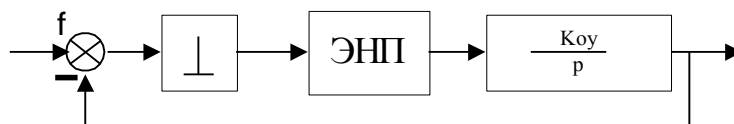
Входной сигнал постоянный, равный 1. Определить, при какой величине K_{oy} установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} < 1$. Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном K_{oy} .

8. Задана Z -передаточная функция разомкнутого контура системы с отрицательной обратной связью (коэффициент обратной связи равен 1):

$$W(z) = \frac{K_{ou}}{(z - 0.2)(z - 0.1)}.$$

Входной сигнал постоянный, равный 10. Определить, при какой величине K_{ou} установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} < 1$. Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном K_{ou} .

9. Задана структурная схема ИС:



Требуется найти такое K_{ou} , при котором установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} < 1$. Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном K_{ou} . При расчетах принять $T=1c$, $f=2t$.

10. Задана структурная схема ИС:



Требуется найти такое K_{ou} , при котором, установившаяся ошибка в замкнутой системе будет удовлетворять неравенству $e_{уст} < 1$. Оценить устойчивость замкнутой системы при полученном K_{ou} . При расчетах принять $T=1c$, $f=2t$.

13.9. Анализ устойчивости линейных импульсных систем

1. Динамические процессы в системе описываются конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= 0.2x_1[k] + 3.5x_2[k] - u[k]; \\x_2[k+1] &= 8.0x_1[k] + 0.5x_2[k].\end{aligned}$$

Требуется оценить устойчивость системы и рассчитать значения вектора состояния системы в первые три такта квантования.

Начальные условия: $x_1[0]=0, x_2[0]=0$.

Управляющее воздействие: $u[k]=0,2k$.

2. Динамические процессы в системе описываются конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= 1.2x_1[k] + 3.5x_2[k] - u[k] \\x_2[k+1] &= 0.5x_1[k] + u[k]\end{aligned}$$

Требуется оценить устойчивость системы и рассчитать значения вектора состояния системы в первые три такта квантования. Начальные условия: $x_1[0]=1, x_2[0]=0$.

Управляющее воздействие: $u[k]=0,2$.

3. Динамические процессы в системе описываются конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= 1.2x_1[k] + 3.5x_2[k] - u[k]; \\x_2[k+1] &= 0.5x_1[k] - 1.8x_2[k] + u[k].\end{aligned}$$

Требуется оценить устойчивость системы и рассчитать значения вектора состояния системы в первые три такта квантования.

Начальные условия: $x_1[0]=0, x_2[0]=10$.

Управляющее воздействие: $u[k]=0,2+0,1k$.

4. Динамические процессы в системе описываются конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= 3.5x_2[k]; \\x_2[k+1] &= 0.5x_1[k] - 1.0x_2[k] + u[k].\end{aligned}$$

Требуется оценить устойчивость системы и рассчитать значения вектора состояния системы в первые три такта квантования. Начальные условия: $x_1[0]=1, x_2[0]=1$.

Управляющее воздействие: $u[k]=1$.

5. Динамические процессы в системе описываются конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= -1.2x_1[k] + 0.5x_2[k] - u[k]; \\x_2[k+1] &= 0.8x_1[k] - 0.1x_2[k] + u[k].\end{aligned}$$

Требуется оценить устойчивость системы и рассчитать значения вектора состояния системы в первые три такта квантования.

Начальные условия: $x_1[0]=0, x_2[0]=0$.

Управляющее воздействие: $u[k]=0,2+0,1k$.

6. Динамические процессы в системе описываются конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= x_2[k]; \\x_2[k+1] &= x_2[k] + u[k].\end{aligned}$$

Требуется оценить устойчивость системы и рассчитать значения вектора состояния системы в первые три такта квантования.

Начальные условия: $x_1[0]=0, x_2[0]=0$.

Управляющее воздействие: $u[k]=0,1k$.

7. Динамические процессы в системе описываются конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= 3,5x_2[k] - u[k]; \\x_2[k+1] &= 0,5x_1[k] - 1,8x_2[k] + u[k].\end{aligned}$$

Требуется оценить устойчивость системы и рассчитать значения вектора состояния системы в первые три такта квантования. Начальные условия: $x_1[0]=0, x_2[0]=0$.

Управляющее воздействие: $u[k] = 1,0 - 3,5x_1[k]$.

8. Динамические процессы в системе описываются конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= 3,5x_2[k] - u[k] \\x_2[k+1] &= u[k]\end{aligned}$$

Требуется оценить устойчивость системы и рассчитать значения вектора состояния системы в первые три такта квантования.

Начальные условия: $x_1[0]=0, x_2[0]=0$.

Управляющее воздействие: $u[k] = 1,0 - x_1[k]$.

9. Динамические процессы в системе описываются конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned}x_1[k+1] &= 1,2x_1[k] + 3,5x_2[k] - u[k]; \\x_2[k+1] &= 1,8x_2[k] + u[k].\end{aligned}$$

Требуется оценить устойчивость системы и рассчитать значения вектора состояния системы в первые три такта квантования.

Начальные условия: $x_1[0]=0, x_2[0]=10$.

Управляющее воздействие: $u[k]=0,2+x_1[k]$.

10. Динамические процессы в системе описываются конечно-разностными уравнениями

$$x_1[k+1] = 3,5x_2[k] - u[k];$$

$$x_2[k+1] = u[k].$$

Требуется оценить устойчивость системы и рассчитать значения вектора состояния системы в первые три такта квантования.

Начальные условия: $x_1[0]=0, x_2[0]=0$.

Управляющее воздействие: $u[k] = 1.0 - x_1[k] - x_2[k]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены примеры решения элементарных практических задач, связанных с анализом линейных дискретных систем (систем с компьютерным управлением), которые могут служить базой для дальнейшего изучения этого весьма интенсивно развивающегося направления систем управления. Актуальность данного пособия возрастает в связи с переходом на новые ФГОС и развитием компетентного подхода к построению учебного процесса. В пособии представлены задания для самостоятельной работы, которые также могут быть использованы и для формирования тестовых заданий для текущего и итогового контроля знаний студентов по соответствующим разделам курса «Компьютерное управление мехатронными системами».

Современный спектр приложений компьютерных систем управления весьма широк, поэтому практическая работа является необходимым условием глубокого изучения методов анализа и синтеза систем управления и подготовки специалистов соответствующих профилей.

В дальнейшем планируется выпуск соответствующих пособий (вторая и третья части), ориентированных на решение задач анализа и синтеза дискретных систем управления (систем с компьютерным управлением) во временной области.

Список литературы

Основная литература

1. Рабинович Л.В. Динамика систем приводов: Уч.пособие - М.:БИБЛИО-ГЛОБУС, 2016. 266с.:ил.
2. Горячев О.В. Компьютерное управление мехатронными системами. Практикум. Часть 1: учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ., 2012. 123с.
3. Горячев О.В. Компьютерное управление мехатронными системами. Практикум. Часть 2: учеб. пособие. Тула:Изд-во ТулГУ., 2014. 152с.
4. Горячев О.В. Компьютерное управление мехатронными системами. Сборник методических указаний к лабораторным работам по курсу: учеб.пособие. Тула:Изд-во ТулГУ., 2018. 125с.
5. Макаров Н.Н. Анализ и синтез систем автоматического управления с использованием системы MatLab/Н.Н.Макаров, С.В.Феофилов. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. – 68с.
6. Макаров Н.Н., Семашкин В.Е. Численные методы в анализе и синтезе систем автоматического управления: учеб. Пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. – 121с.

Дополнительная литература

1. Математические основы теории автоматического регулирования: учеб. пособие для вузов / В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко. – М.: Высшая школа, 1977. Т. 1 / под ред. Б. К. Чемоданова. – 1977. – 366 с. Т. 2 / под ред. Б. К. Чемоданова. – 1977. – 454 с.
2. Стрейц, В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем автоматического управления / В. Стрейц; пер. с англ. Э.Д. Аведьяна; под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука: Гл. ред. физматлит, 1985. – 296 с.
3. Основы расчета и проектирования мехатронных модулей систем наведения и стабилизации/ О.В. Горячев, В.И. Жемеров, А.П. Панков, В.С. Фимушкин. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2010.233с.
4. Пупков К.А. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т.5, Методы современной теории автоматического управления/К.А.Пупков [и др.]; под ред.К.А.Пупкова, Н.Д. Егупова : учебник для вузов:в 5 т. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : МГТУ им. Баумана, 2004 .— 784с.
5. Пупков К.А. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления : учебник для вузов / К.А. Пупков [и др.];под ред. Н.Д. Егупова .— 2-е изд., стер. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002 .— 744с. : ил.