МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук

Кафедра прикладной математики и информатики

Утверждено на заседании кафедры прикладной математики и информатики
21.01.2021, протокол № 6

Зав. кафедрой

_________________ В.И. Иванов

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических (семинарских) занятий
по дисциплине (модулю)
«Дискретная математика»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с профилем
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-21

Тула 2021 год

Разработчик методических указаний

Баранов В.П., профессор кафедры ПМиИ, д.т.н., доцент
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

Практическое занятие 1. **МНОЖЕСТВА** (2 часа)

I. ТЕОРИЯ: Основные понятия, способы задания, операции над множествами, теоретико-множественные тождества, представление множества в виде суммы конституент, прямое произведение множеств.

II. ЗАДАЧИ

1. Доказать:
1) $A \bigcap B \subseteq A \subseteq A \bigcup B$;
2) $A \bigcap B \subseteq B \subseteq A \bigcup B$;
3) $A \setminus B \subseteq A$.

2. Какие из указанных свойств верны? Привести обоснование:
1) $A \subseteq A \bigcup (B \bigcap A)$; 2) $A \subseteq (A \bigcap B) \bigcup B$;
3) $A \bigcup B \subseteq B$; 4) $B \subseteq (A \bigcap B) \bigcup (\bar{A} \bigcap \bar{B})$;
5) $A \subseteq A \bigcap B \bigcup \bar{A} \bigcap B$; 6) $(A \bigcap B) \bigcup (B \bigcap C) \subseteq A \bigcup C$;
7) $A \bigcup (A \bigcap B) \subseteq B$; 8) $(A \bigcap \bar{B}) \bigcup B \subseteq \bar{B} \bigcup A$.

3. Доказать тождества:
1) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$;
2) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$;
3) $(A \bigcap B) \bigcup (C \bigcap D) = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C) \bigcap (A \bigcup D) \bigcap (B \bigcup D)$.
4) $\overline{A \bigcap B} = \bar{A} \bigcup \bar{B}$;
5) $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$;
6) $A \setminus (A \setminus B) = A \bigcap B$;
7) $A \setminus B = A \setminus (A \bigcap B)$;
8) $A \bigcap (B \setminus C) = (A \bigcap B) \setminus (A \bigcap C) = (A \bigcap B) \setminus C$.
9) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
10) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \bigcup (A \bigcap C)$;
11) $A \bigcup B = A \oplus B \bigcup A \bigcap B$;
12) $A \setminus B = A \oplus (A \bigcap B)$.

4. Доказать:
1) $A \bigcup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$;
2) $A \subseteq B \bigcap C \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \subseteq C$;
3) $A \bigcap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \bigcup C$;
4) $A \subseteq B \bigcup C \Leftrightarrow A \bigcap \bar{B} \subseteq C$;
5) $(A \bigcap B) \bigcup C = A \bigcap (B \bigcup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;
6) $A \subseteq B \Leftrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$;
7) $(A \oplus B) \bigcap (A \oplus C) \subseteq A \oplus (B \bigcap C)$.

5. Упростить:
1) $A \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot C$;
2) $(A + B + C) \cdot (\bar{B} + C) \cdot (B + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + B)$.

6. Какое из отношений ($X \subset Y$, $X \supset Y$, $X = Y$, никакое из предыдущих) имеет место для множеств X и Y:

1) $X = A\bigcup B\setminus C,\ Y = (A\setminus C)\bigcup(B\setminus C);$

2) $X = A\setminus(B\bigcup C),\ Y = (A\setminus B)\bigcup(A\setminus C);$

3) $X = (A\setminus B)\setminus C,\ Y = A\setminus(B\setminus C);$

4) $X = A\setminus(B\bigcap C),\ Y = (A\setminus B)\bigcap(A\setminus C);$

5) $X = (A\bigcup B)\setminus C,\ Y = (A\setminus C)\bigcap(B\setminus C);$

6) $X = A\bigcup(B\bigcap C),\ Y = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C);$

7) $X = (A\setminus B)\bigcup(B\setminus C)\bigcup(C\setminus A),\ Y = (A\bigcup B\bigcup C)\setminus(A\bigcap B\bigcap C);$

8) $X = A\setminus(B\bigcup C),\ Y = (A\setminus B)\bigcap(A\setminus C);$

9) $X = A\setminus(B\bigcap C),\ Y = (A\setminus B)\bigcup(A\setminus C);$

10) $X = (A\setminus B)\bigcup(B\setminus C)\bigcup(C\setminus A),\ Y = (B\setminus A)\bigcup(C\setminus B)\bigcup(A\setminus C);$

11) $X = (A\setminus B)\bigcap C,\ Y = (A\setminus C)\bigcup B;$

12) $X = \overline{A\oplus B},\ Y = (A\bigcap B)\bigcup(\bar{A}\bigcap\bar{B});$

13) $X = (A\oplus B)\bigcap C,\ Y = (A\oplus C)\bigcap(B\oplus C);$

14) $X = \overline{A\bigcap B\bigcap C},\ Y = \bar{A}\bigcap\bar{B}\bigcap\bar{C};$

15) $X = (A\times B)\bigcap(C\times D),\ Y = (A\bigcup C)\times(B\bigcup D);$

16) $X = (A\times B)\bigcap(C\times D),\ Y = (A\bigcap C)\times(B\bigcap D).$

7. Решить системы соотношений относительно множества X и указать условия их совместности:

1) $\begin{cases} A\setminus X = B, \\ X\setminus A = C, \\ B\subseteq A,\ A\bigcap C = \varnothing; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} A\setminus X = B, \\ A\bigcup X = C, \\ B\subseteq A\subseteq C; \end{cases}$

3) $\begin{cases} B\Delta C = C\setminus X, \\ X\bigcup A = C, \\ A\subseteq B\subseteq C; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} C\setminus A = X\Delta B, \\ X\bigcap A = B\bigcap C, \\ A\bigcup B\subseteq C; \end{cases}$

5) $\begin{cases} X\bigcup(B\setminus A) = C, \\ C\setminus X = A\bigcap B, \\ A\bigcup B\subseteq C; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} C\setminus X = A\bigcap(X\setminus B), \\ A\bigcup X = B, \\ A\bigcup B\subseteq C. \end{cases}$

8. Решить системы уравнений относительно множества X и указать условия совместности системы или доказать ее несовместность:

1) $\begin{cases} A\bigcup X = B\bigcap X, \\ A\bigcap X = C\bigcup X; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} A\setminus X = X\setminus B, \\ X\setminus A = C\setminus X; \end{cases}$

3) $\begin{cases} A\bigcap X = B\setminus X, \\ C\bigcup X = X\setminus A; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} A\bigcup X = B\setminus X, \\ \underline{X}\setminus B = C\bigcup X, \\ \bar{A}\setminus C = X\setminus A; \end{cases}$

5) $\begin{cases} X\setminus C = A\setminus B, \\ A\setminus C = \overline{X\bigcap C}, \\ (B\setminus X)\setminus A = A\setminus C; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} B\setminus X = X\setminus C, \\ \underline{X}\setminus B = A\setminus X, \\ \bar{C}\bigcap\bar{X} = X\setminus B. \end{cases}$

9. Представить множество в виде суммы конституент:

1) $A\oplus(B\bigcap C)$; 2) $\overline{(A\setminus B)\setminus C}$;

3) $(B\bigcup\bar{C})\bigcap\overline{A\bigcap B}\bigcap(A\bigcup C)$; 4) $\overline{A\oplus(B\oplus C)}$.

10. Доказать:

1) $A\times(B\bigcup C) = (A\times B)\bigcup(A\times C)$;

2) $(A\bigcup B)\times(C\bigcup D) = (A\times C)\bigcup(B\times C)\bigcup(A\times D)\bigcup(B\times D)$;

3) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

4) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;

5) $(A \times B) \bigcup (C \times D) \subseteq (A \bigcup C) \times (B \bigcup D)$.

II. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. Докажем 2).

Из определения подмножества имеем:
если $A \subseteq B$, то $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$;
если $B \subseteq C$, то $\forall x : x \in B \Rightarrow x \in C$.
Тогда $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C$, т. е. $A \subseteq C$.

2. Докажем 1).

Используем принцип равнообъемности, согласно которому, если два множества состоят из одних и тех же элементов, то они равны.

Пусть $x \in A \bigcap (B \bigcup C)$. Тогда $x \in A$ и $x \in B \bigcup C$. Если $x \in B$, то $x \in A \bigcap B$ (т. к. $x \in A$), а значит, $x \in (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$. Если $x \in C$, то $x \in A \bigcap C$ (т. к. $x \in A$), а значит, $x \in (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$. Итак, $A \bigcap (B \bigcup C) \subseteq (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.

Пусть $x \in (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$. Если $x \in A \bigcap B$, то $x \in A$ и $x \in B$. Отсюда следует, что $x \in A$ и $x \in B \bigcup C$, т. е. $x \in A \bigcap (B \bigcup C)$. Если $x \in A \bigcap C$, то $x \in A$ и $x \in C$. Отсюда следует, что $x \in A$ и $x \in B \bigcup C$, т. е. $x \in A \bigcap (B \bigcup C)$. Итак, $(A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C) \subseteq A \bigcap (B \bigcup C)$.

3. Используем булевы тождества.

а) Верно, т. к. $A + B \cdot A = A \cdot (U + B) = A \cdot U = A$, а $A \subseteq A$.
б) Не верно.
в) Верно.
г) Верно, т. к. $A \cdot B + \overline{A} \cdot B = B \cdot (A + \overline{A}) = B \cdot U = B$, а $B \subset B$.
д) Не верно.
е) Верно.
ж) Не верно.
з) Не верно.

4. Для а):

$$A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot C = A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot (C + \overline{C}) + B \cdot \overline{C} \cdot (A + \overline{A}) + \overline{A} \cdot C \cdot (B + \overline{B}) =$$
$$= A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C} \cdot A + B \cdot \overline{C} \cdot \overline{A} + \overline{A} \cdot C \cdot B + \overline{A} \cdot C \cdot \overline{B} =$$
$$= A \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot C = C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + B \cdot \overline{C} = C + \overline{C} \cdot (A \cdot \overline{B} + B).$$

б) Ответ: $B \cdot C$.

5. Используем принцип равнообъемности. Для а):

$$\forall x \in \overline{A \oplus B} \Rightarrow \forall x \in \overline{(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)} \Rightarrow \forall x \in \overline{A \setminus B} \bigcap \overline{B \setminus A} \Rightarrow \forall x \in \overline{A \bigcap \bar{B}} \bigcap \overline{B \bigcap \bar{A}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall x \in (\bar{A} \bigcup B) \bigcap (\bar{B} \bigcup A) \Rightarrow \forall x \in \bar{A} \bigcap \bar{B} \bigcup A \bigcap B.$$

Таким образом, $\overline{A \oplus B} \subseteq A \bigcap B \bigcup \bar{A} \bigcap \bar{B}$.

$$\forall x \in A \bigcap B \bigcup \bar{A} \bigcap \bar{B} \Rightarrow \forall x \in A \bigcap B \bigcup \bar{A} \bigcap \bar{B} \bigcup A \bigcap \bar{A} \bigcup B \bigcap \bar{B} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall x \in \bar{A} \bigcap (\bar{B} \bigcup A) \bigcup B \bigcap (\bar{B} \bigcup A) \Rightarrow \forall x \in (\bar{A} \bigcup B) \bigcap (\bar{B} \bigcup A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall x \in (\bar{A} \bigcup \bar{\bar{B}}) \bigcap (\bar{B} \bigcup \bar{\bar{A}}) \Rightarrow \forall x \in \overline{A \bigcap \bar{B}} \bigcap \overline{B \bigcap \bar{A}} \Rightarrow \forall x \in \overline{A \setminus B} \bigcap \overline{B \setminus A} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall x \in \overline{(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)} \Rightarrow \forall x \in \overline{A \oplus B}.$$

Таким образом, $A \bigcap B \bigcup \bar{A} \bigcap \bar{B} \subseteq \overline{A \oplus B}$.

Имеет место отношение 3).

б) Ответ: отношение 4).

в) Ответ: отношение 1).

г) Ответ: отношение 2).

6. Решение для а):

$$A \oplus (B \bigcap C) = A \setminus (B \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C) \setminus A = A \bigcap \overline{B \bigcap C} \bigcup B \bigcap C \bigcap \bar{A} =$$
$$= A \bigcap (\bar{B} \bigcup \bar{C}) \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C = A \bigcap \bar{B} \bigcup A \bigcap \bar{C} \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C =$$
$$= A \bigcap \bar{B} \bigcap (C \bigcup \bar{C}) \bigcup A \bigcap \bar{C} \bigcap (B \bigcup \bar{B}) \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C =$$
$$= A \bigcap \bar{B} \bigcap C \bigcup A \bigcap \bar{B} \bigcap \bar{C} \bigcup A \bigcap B \bigcap \bar{C} \bigcup A \bigcap \bar{B} \bigcap \bar{C} \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C =$$
$$= A \bigcap \bar{B} \bigcap C \bigcup A \bigcap \bar{B} \bigcap \bar{C} \bigcup A \bigcap B \bigcap \bar{C} \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C.$$

б) Ответ:

$$A \bigcap B \bigcap C \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap \bar{C} \bigcup \bar{A} \bigcap \bar{B} \bigcap C \bigcup A \bigcap B \bigcap \bar{C} \bigcup A \bigcap \bar{B} \bigcap C \bigcup \bar{A} \bigcap \bar{B} \bigcap \bar{C}.$$

в) Ответ: $A \bigcap \bar{B} \bigcap \bar{C} \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C$.

г) Ответ: $A \bigcap B \bigcap C \bigcup \bar{A} \bigcap B \bigcap C \bigcup \bar{A} \bigcap \bar{B} \bigcap \bar{C}$.

7. Докажем а):

Пусть $x \in (A \bigcup B) \times C$. Тогда $x = (y, z)$, где $y \in A \bigcup B$, $z \in C$. Отсюда $y \in A$ или $y \in B$. Значит, $(y, z) \in A \times C$ или $(y, z) \in B \times C$. Итак, $(A \bigcup B) \times C \subseteq (A \times C) \bigcup (B \times C)$.

Пусть $x \in (A \times C) \bigcup (B \times C)$. Тогда $x \in A \times C$ или $x \in B \times C$. Это означает, что $x = (y, z)$ и в первом случае $y \in A, z \in C$, а во втором – $y \in B, z \in C$. Значит, $y \in A \bigcup B$, а $x = (y, z) \in (A \bigcup B) \times C$. Итак, $(A \times C) \bigcup (B \times C) \subseteq (A \bigcup B) \times C$.

8. а) Например, $\{(x, y) \mid x, y \in R, |x - y| \le 1\}$;

б) $\{(x, y) \mid x, y \in R, x \le y \le x^2\}$;

в) $\{(x, y) \mid x, y \in R, x \le y\}$;

г) $\{(x, y) \mid x, y \in R, x = y = 0\}$.

9. Обозначим для $\forall a \in A$ через $[a]$ класс всех элементов, эквивалентных a:

$$[a] = \{x \mid x\alpha a\}.$$

Из рефлексивности α следует, что $a \in [a]$. Далее, если $b \in [a]$ (то есть $b\alpha a$), то $\forall x \in [b] \Rightarrow x\alpha b$. Из транзитивности имеем, что $x\alpha a$, то есть $x \in [a]$. Таким образом, $[b] \subseteq [a]$. В силу симметричности отношения $b\alpha a \Rightarrow a\alpha b$, то есть $a \in [b]$. Повторяя рассуждения, получим, что $[a] \subseteq [b]$. Следовательно, $[a] = [b]$. Таким образом, каждый элемент $a \in [a]$ входит в некоторый класс ($[a]$) и различные классы не пересекаются, то есть классы образуют разбиение множества A, отвечающее отношению эквивалентности α.

Практическое занятие 2. **СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ, ОСНОВНЫЕ ТАВТОЛОГИИ** (2 часа)

ТЕОРИЯ: понятие булевой функции, табличный и аналитический способы задания булевой функции, элементарные функции, основные тавтологии алгебры логики.

ЗАДАЧИ.

1. Составить таблицы истинности для следующих функций:
   1) $x \to (y \vee z)$;
   2) $(x \downarrow y) \to (\bar{x} \to (x \vee \bar{y}))$;
   3) $(x \oplus (y \oplus z)) \to (x \to y)$.

2. С помощью таблиц истинности проверить, справедливы ли следующие равенства:
   1) $x \& (y \oplus z) = x \& y \oplus x \& z$;
   2) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to z$;
   3) $\overline{x \& y} = \bar{x} \vee \bar{y}$;
   4) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \& \bar{y}$.

3. Используя основные тавтологии, проверить, справедливы ли следующие соотношения:
   1) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
   2) $x \to (y \square z) = (x \to y) \square (x \to z)$;
   3) $x \& (y \square z) = (x \& y) \square (x \& z)$;
   4) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
   5) $x \to (y \& z) = (x \to y) \& (x \to z)$
   6) $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$;
   7) $(x_1 \& \bar{x}_3) \vee (x_1 \& \bar{x}_2) \vee (x_1 \& \bar{x}_3) = x_1 \& \overline{\bar{x}_2 \& x_3} \vee x_1 \& \bar{x}_2$;
   8) $(x_1 \to x_2) \to ((x_1 \& \bar{x}_2) \oplus (x_1 \square \bar{x}_2)) = \bar{x}_1 \square x_2$,;
   9) $x_1 \to (x_1 \& x_2 \to ((x_1 \to x_2) \to x_2) \& x_3) = x_2 \to (x_1 \to x_3)$.

4. Цифровой индикатор, применяемый в микрокалькуляторах, образует изображения цифр 0, 1, 2, …, 9 путем высвечивания некоторых из 7 черточек. Внутри калькулятора цифра представляется двоичным четырехразрядным кодом, по которому формируются сигналы для высвечивания каждой из черточек. Таким образом, с каждой черточкой связана булева функция от четырех аргументов, принимающая значение 1, если черточка светится, и значение 0 в противном случае. Составить таблицы истинности этих функций.

5. Выразить значения разрядов суммы двух n-разрядных двоичных чисел через значения разрядов слагаемых.

Практическое занятие 3. **ФОРМУЛЫ**. **ОПЕРАЦИЯ СУПЕРПОЗИЦИИ** (4 часа)

ТЕОРИЯ: индуктивное определение формулы, понятие суперпозиции.

ЗАДАЧИ.

1. Выяснить, какие из нижеперечисленных выражений являются формулами над множеством логических связок $S = \{\neg,\ \&,\ \vee,\ \rightarrow\}$:
   1) $x \rightarrow y$;
   2) $(x\&)\neg y$;
   3) $(x \leftarrow y)$;
   4) $(y \rightarrow (x))$;
   5) $(x \rightarrow (y \& (\neg x)))$;
   6) $(x \& y)\neg z$;
   7) $(\neg x \rightarrow z)$.

2. Выяснить, сколькими способами можно расставить скобки в выражении A, чтобы всякий раз получалась формула над множеством логических связок $S = \{\neg,\ \&,\ \vee,\ \rightarrow\}$, если:
   1) $A = \neg x \rightarrow y \& x$;
   2) $A = x \& y \neg\neg z \vee x$;
   3) $A = x \rightarrow \neg y \rightarrow z \& \neg x$.

3. Реализовать функцию f формулой над множеством связок S, если:
   а) $f = x_1 \rightarrow x_2$, $S = \{\neg,\ \vee\}$;
   б) $f = x_1 \vee x_2$, $S = \{\rightarrow\}$;
   в) $f = x_1 \square x_2$, $S = \{\&,\ \rightarrow\}$;
   г) $f = x_1 \mid x_2$, $S = \{\downarrow\}$.

4. Доказать, что функцию f нельзя реализовать формулой над множеством связок S, когда:
   1) $f = x \oplus y$, $S = \{\&\}$;
   2) $f = x \& y$, $S = \{\rightarrow\}$;
   3) $f = x \vee y$, $S = \{\square\}$.

5. Выразить с помощью суперпозиций:
   1) $\&$ и $\rightarrow$ через $\vee$ и $\neg$;
   2) $\vee$ и $\neg$ через $\&$ и $\neg$;
   3) $\&$ и $\vee$ через $\rightarrow$ и $\neg$;
   4) $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ через $|$;
   5) $\neg$ через $\rightarrow$ и 0;
   6) $\neg$ через + и 1;

7) $\vee$ через $\to$.

6. Доказать, что каждую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно представить в виде

$$f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i} (x_1^{\varepsilon_1}, \ldots, x_i^{\varepsilon_i}) \cdot f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$, $x_j^0 = \neg x_j$, $x_j^1 = x_j$.

Практическое занятие 4. **ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ. ФИКТИВНЫЕ И СУЩЕСТВЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ. ОТОЖДЕСТВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ У БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ** (2 часа)

ТЕОРИЯ

1. Принцип двойственности

Функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$, равная $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$, называется *двойственной функцией к функции* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Принцип двойственности. Если формула $U = C[f_1, ..., f_r]$ реализует функцию $f(x_1, ..., x_n)$, то формула $U^* = C[f_1^*, ..., f_r^*]$, т. е. формула, полученная из U заменой функций $f_1, ..., f_r$ соответственно на $f_1^*, ..., f_r^*$, реализует функцию $f^*(x_1, ..., x_n)$.

ЗАДАЧИ

1. Записать тождества, двойственные следующим:
   5) $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1 \& \overline{x}_2}$;
   6) $\overline{x}_1 \& (x_2 \vee x_3) = \overline{x}_1 \& x_2 \vee \overline{x}_1 \& x_3$.
2. Используя принцип двойственности, найти отрицание для функций:
   1) $f(x_1, x_2) = x_1 \& \overline{x}_2 \vee x_2 \& \overline{x_1 \vee \overline{x}_1 \& x_2}$;
   2) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x}_3) \& x_2 \vee x_2 \& x_3 \& \overline{\overline{x}_1 \vee x_1 \& x_2 \& x_3}$.

Практическое занятие 5. **РАЗЛОЖЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПО ПЕРЕМЕННЫМ. ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ** (2 часа)

ТЕОРИЯ

1. Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (совершенная д. н. ф.):

$$f(x_1,\ \ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\,\&\ldots\&\,x_n^{\sigma_n}\ .$$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (совершенная к. н. ф.):

$$f(x_1,\ \ldots,x_n)=\mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee\ldots\vee x_n^{\bar{\sigma}_n})\ .$$

ЗАДАЧИ

1. Представить в виде совершенной д. н. ф. и к. н. ф. следующие функции:
   1) $f(x_1,\ x_2)=x_1\oplus x_2$;
   2) $f(x_1,\ x_2)=x_1 \square\ x_2$;
   3) $f(x_1,\ x_2)=x_1\to x_2$;
   4) $f(x_1,\ x_2)=x_1\,|\,x_2$;
   5) $f(x_1,\ x_2)=x_1\downarrow x_2$;
   6) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1\oplus x_2)\to x_2\,\&\,x_3$;
   7) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=(01101100)$.

2. Перейти от заданной д. н. ф. к совершенной д. н. ф., если:
   1) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1\vee x_2\,\&\,x_3$;
   2) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1\,\&\,x_2\vee x_1\,\&\,x_3$;
   3) $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1\vee x_1\,\&\,x_2\vee x_2\,\&\,x_3$.

3. Преобразовать д. н. ф. из задачи 4 в к. н. ф.
4. Построить совершенную к. н. ф. для каждой из функций задачи 4.

Практическое занятие 6. **ПОЛИНОМ ЖЕГАЛКИНА И СПОСОБЫ ЕГО ПОСТРОЕНИЯ** (2 часа)

ТЕОРИЯ

1. Полином Жегалкина

$$f(x_1,\ x_2,\ ...,x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus ... \oplus a_n \cdot x_n \oplus a_{1,\ 2} \cdot x_1 \cdot x_2 \oplus ... \oplus a_{n-1,\ n} \cdot x_{n-1} \cdot x_n \oplus$$
$$\oplus a_{1,\ 2,\ 3} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \oplus ... \oplus a_{1,\ 2,\ ...,\ n} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n.$$

ЗАДАЧИ

3. Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для функций:
   1) $f(x_1,\ x_2) = (1001)$;
   2) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (011010000)$;
   3) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (11111000)$.
4. Построить полиномы Жегалкина для функций:
   1) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1 \mid x_2) \downarrow x_3$;
   2) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1 \to x_2) \& (x_2 \downarrow x_3)$;
   3) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = ((x_1 \to x_2) \vee x_3) \mid x_1$.

Практическое занятие 7. **ПОЛНОТА И ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ** (4 часа)

ТЕОРИЯ

1. Полнота и замкнутость

Система функций $\{f_1, f_2, ..., f_r\}$ из P_2 называется *функционально полной*, если любая функция из P_2 может быть представлена в виде формулы через функции этой системы.

Т е о р е м а . Пусть даны две системы функций из P_2:

$$B_1 = \{f_1, f_2, ..., f_r\},\ B_2 = \{g_1,\ g_2,\ ...,\ g_s\},$$

относительно которых известно, что система B_1 полна и каждая ее функция выражается в виде формулы через функции системы B_2. Тогда система B_2 является полной.

Пусть $M \subseteq P_2$ *Замыканием* $[M]$ множества M называется совокупность всех функций из P_2, являющихся суперпозициями функций из множества M.

Класс M называется *замкнутым*, если $[M] = M$.

В терминах замыкания и замкнутого класса можно дать другое определение полноты, эквивалентное исходному: M – полная система, если $[M] = P_2$.

2. Замкнутые классы

Классы функций, сохраняющие константы:

$$T_0 = \{f \in P_2 \mid f(0,\ ...,\ 0){=}0\},$$

$$T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1,\ ...,\ 1){=}1\}.$$

Класс самодвойственных функций:

$$S = \{f \in P_2 \mid f = f^*\}.$$

Класс монотонных функций:

$$M = \{f \in P_2 \mid \forall \tilde{\alpha},\ \tilde{\beta} : \tilde{\alpha} \le \tilde{\beta} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta})\}.$$

Класс линейных функций:

$$L = \{f(\tilde{x}^n) \in P_2 \mid f(\tilde{x}_n^n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus ... \oplus a_n \cdot x_n\}.$$

ЗАДАЧИ

1. Сведением к заведомо полным системам в P_2 показать, что множество P является полной системой, где

   1) $P = \{x \downarrow y\}$;

   2) $P = \{x \cdot y \oplus z,\ (x \square\ y) \oplus z\}$;

   3) $P = \{x \to y,\ \overline{x \oplus y \oplus z}\}$.

2. Выяснить, каким из множеств $T_0 \bigcup T_1$, $T_1 \setminus T_0$ принадлежат перечисленные ниже функции:

   1) $((x \vee y) \to (x \mid y \cdot z) \downarrow ((y \square\ z) \to x)$;

   2) $((x \cdot y \to z) |\!\to ((x \to y) \downarrow (z \oplus x \cdot y))$

   3) $(x \to y) \cdot (y \downarrow z) \vee (z \to y)$.

3. Проверить самодвойственность функции f:

1) $f = \overline{(x \to y) \to x \cdot z} \to (y \to z)$;
2) $f = (x \vee y \vee z) \cdot t \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$;
3) $f = (0001001001100111)$.

4. Из самодвойсвенной функции f с помощью подстановки на места переменных функций x и $\bar{x}$ получить константу.

1) $f = (00111001)$;
2) $f = (x \vee \bar{y} \vee z) \cdot t \vee \bar{x} \cdot y \cdot z$;
3) $f = (x \downarrow xy) \to (x \oplus z)$.

5. Какие из нижеперечисленных функций являются монотонными?

1) $x \to (x \to y)$;
2) $x \to (y \to x)$;
3) $x \cdot y \cdot (x \oplus y)$;
4) $x \cdot y \oplus y \cdot z \oplus z \cdot x \oplus z$;
5) $f(\tilde{x}^3) = (00110111)$.

6. Какие из нижеперечисленных функций являются линейными?

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) \oplus x_3$;
2) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 \oplus x_2)$;
3) $f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_4 \cdot x_1$;
4) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_1) \square x_3$.

Практическое занятие 8. **ФУНКЦИОНАЛЬНО ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ. ТЕОРЕМА ПОСТА** (4 часа)

ТЕОРИЯ

Система функций $A=\{f_1, f_2,..., f_r\}\in P_2$ называется *функционально полной*, если любая функция из P_2 может быть представлена в виде формулы через функции этой системы, т.е. A – полная система, если $[A]=P_2$.

Т е о р е м а П о с т а . *Система* $A\in P_2$ *полна в* P_2 *тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов* $T_0,\ T_1,\ S,\ M, L$.

ЗАДАЧИ

1. Выяснить, полна ли система A:
   1) $A=\{x\to y,\ x\to \bar{y}z\}$;
   2) $A=\{x\bar{y},\ x\sim yz\}$;
   3) $A=\{0,\ 1, x(y\sim z)\vee x(y\oplus z)\}$;
   4) $A=\{\bar{x},\ x(y\sim z)\sim(y\vee z),\ x\oplus y\oplus z\}$.

2. Выяснить, полна ли система A функций, заданных векторами своих значений:
   1) $A=\{(0110\ 1001),\ (1000\ 11101), (0001\ 1100)\}$;
   2) $A=\{(0010),\ (1010\ 1101\ 1111\ 0011)\}$.

3. Выяснить, полна ли система A:
   1) $A=(S\bigcap M)\bigcup(L\setminus M)$;
   2) $A=(L\bigcap T_1)\bigcup(S\setminus T_0)$;
   3) $A=(M\setminus T_0)\bigcup(L\setminus S)$;
   4) $A=(M\setminus S)\bigcup(L\bigcap S)$.

4. Из полной в P_2 системы A выделить всевозможные базисы:
   1) $A=\{xy,\ xy\vee z,\ x\oplus y,\ x\to y,\ \bar{x}\}$;
   2) $A=\{x\oplus y,\ x\sim y,\ x\oplus y\oplus z,\ xy,\ x\to y\}$.

5. Выяснить, полна ли система $A=\{f_1,\ f_2\}$:
   1) $f_1\in S\setminus M,\ f_2\notin L\bigcup S,\ f_1\to f_2\equiv 1$;
   2) $f_1\notin T_0\bigcup L,\ f_2\notin S,\ f_1\to f_2\equiv 1$.

Практическое занятие 9. **МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СОКРАЩЕННЫХ, ТУПИКОВЫХ, МИНИМАЛЬНЫХ И КРАТЧАЙШИХ ДНФ** (4 часа)

ТЕОРИЯ

Грань N_K, содержащаяся в N_f, называется *максимальной*, если не существует грани $N_{K'}$ такой, что:

1) $N_K \subseteq N_{K'} \subseteq N_f$;

2) размерность грани $N_{K'}$ больше размерности грани N_K.

Конъюнкция K, соответствующая максимальной грани N_K множества N_f, называется *простой импликантой функции* f.

Д. н. ф., являющаяся дизъюнкцией всех простых импликант, называется *сокращенной*.

Методы построения сокращенной д. н. ф.

1°. *Метод Блейка.* Состоит в применении для произвольной д. н. ф. слева направо правил обобщенного склеивания $\bar{x}\cdot K_1 \vee \bar{x}\cdot K_2 = \bar{x}\cdot K_1 \vee \bar{x}\cdot K_2 \vee K_1\cdot K_2$ и поглощения $K_1 \vee K_1\cdot K_2 = K_1$. На первом этапе производится операция обобщенного склеивания до тех пор, пока это возможно. На втором этапе производится операция поглощения.

2°. *Метод Нельсона.* Позволяет строить сокращенную д. н. ф. по произвольной к. н. ф. Сначала в заданной к. н. ф. раскрываются скобки с использованием закона дистрибутивности. На втором этапе вычеркиваются буквы и конъюнкции с использованием правил $x\cdot\bar{x}\cdot K = 0$, $x\cdot x\cdot K = x\cdot K$, $K_1 \vee K_1\cdot K_2 = K_1$.

3°. *Алгоритм Квайна*. Строит сокращенную д. н. ф. по совершенной д. н. ф. На первом этапе к совершенной д. н. ф. применяется операция неполного склеивания $\bar{x}\cdot K \vee x\cdot K = \bar{x}\cdot K \vee x\cdot K \vee K$. После того как такая операция применена к каждой паре конъюнкций из совершенной д. н. ф., к которой она применима, с помощью операции поглощения $K \vee x^{\sigma}\cdot K$ удаляются те конъюнкции ранга n, которые можно удалить таким образом. В результате получается некоторая д. н. ф. f_1. Если проведено $k \ge 1$ этапов, то на $(k+1)$-м этапе операции неполного склеивания и поглощения применяются к конъюнкциям ранга $n-k$ д. н. ф. f_k. В результате получается д. н. ф. f_{k+1}. Алгоритм заканчивается, если $f_{k+1} = f_k$.

ЗАДАЧИ

1. Из заданного множества A элементарных конъюнкций выделить простые импликанты функции f:

1) $A = \{x_1, \bar{x}_3, x_1\cdot x_2, x_2\cdot\bar{x}_3\}$, $f(\tilde{x}^3) = (00101111)$;

2) $A = \{x_1\cdot\bar{x}_2,\ x_2\cdot x_3,\ x_1\cdot x_2\cdot x_3\}$, $f(\tilde{x}^3) = (01111110)$;

3) $A = \{x_1, \bar{x}_4,\ x_2\cdot\bar{x}_3,\ \bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_4\}$, $f(\tilde{x}^4) = (1010111001011110)$.

2. По заданной д. н. ф. методом Блейка построить сокращенную д. н. ф.:

1) $f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1\cdot\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\cdot x_4 \vee x_2\cdot\bar{x}_3\cdot x_4$;

2) $f(\tilde{x}^4) = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_4 \vee \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot x_4$;

3) $f(\tilde{x}^4) = \overline{x}_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \vee x_3 \cdot x_4 \vee \overline{x}_1 \cdot x_3$.

3. По заданной к. н. ф. методом Нельсона построить сокращенную д. н. ф.:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$;

3) . $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee \overline{x}_2)(x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_3 \vee \overline{x}_4) \cdot (x_4 \vee x_1)$.

4. Для заданной функции f с помощью алгоритма Квайна построить сокращенную д. н. ф.:

1) $f(\tilde{x}^3) = (01110110)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (10111101)$;

3) $f(\tilde{x}^4) = (0001011111101111)$.

I. ТЕОРИЯ

1.1. Определение тупиковой д. н. ф.

Пусть R – произвольная д. н. ф., которую можно представить следующим образом:

$$R = R' \vee K,\ R = R' \vee x_i^{\sigma_i} \cdot K'.$$

Здесь K – элементарная конъюнкция из R, R' – д. н. ф., образованная из остальных конъюнкций, входящих в R; $x_i^{\sigma_i}$ – некоторый множитель из K; K' – произведение остальных множителей из K.

Рассмотрим два типа преобразования д. н. ф.

I. *Операция удаления элементарной конъюнкции.* Переход от д. н. ф. R к д. н. ф. R' – преобразование, осуществляемое путем удаления элементарной конъюнкция K. Данное преобразование определено тогда и только тогда, когда $R' = R$.

II. *Операция удаления множителя.* Переход от д. н. ф. R к д. н. ф. $R' \vee K'$ – преобразование, осуществляемое путем удаления множителя $x_i^{\sigma_i}$. Данное преобразование определено тогда и только тогда, когда $R' \vee K' = R$.

Определение. Д. н. ф. R, которую нельзя упростить при помощи преобразований I и II, называется *тупиковой д. н. ф.* (*т. д. н. ф.*).

Например, очевидно, что д. н. ф. $R = x_1 \vee \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$ будет тупиковой.

1.2. Построение тупиковых д. н. ф. на основе алгоритма упрощения

Рассмотрим алгоритм упрощения д. н. ф., приводящий к тупиковой д. н. ф. Отметим, что среди тупиковых д. н. ф. всегда содержатся и минимальные, но не все.

1°. Для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ выбирается в качестве исходной какая-нибудь д. н. ф. Таковой можно взять, например, совершенную д. н. ф., так как существует простой способ ее построения.

2°. Осуществляется упорядочивание в исходной д. н. ф. слагаемых и в каждом слагаемом – множителей. Это упорядочение можно задать записью д. н. ф.

3°. Производится просмотр записи д. н. ф. слева направо. Для очередного члена K_i $(i = 1, \ldots, s)$ сначала пробуют применить операцию удаления элементарной конъюнкции K_i. Если это невозможно, то просматривают члены $x_{i_\nu}^{\sigma_\nu}$ конъюнкции $K_i = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}^{\sigma_r}$ слева направо $(\nu = 1, \ldots, r)$ и применяют операцию удаления множителя $x_{i_\nu}^{\sigma_\nu}$ до тех пор, пока это удается.

Затем переходят к следующей элементарной конъюнкции. После обработки последней элементарной конъюнкции еще раз просматривают полученную д. н. ф. слева направо и пробуют применить операцию удаления элементарной конъюнкции. В результате получаем т. д. н. ф.

1.3. Построение тупиковых д. н. ф. на основе геометрических представлений

Определение. Покрытие множества N_f, состоящее из максимальных граней, называется *неприводимым*, если совокупность граней, получающаяся из исходной путем выбрасывания любой грани, не будет покрытием.

Определение. Д. н. ф., соответствующая неприводимому покрытию множества N_f, называется *тупиковой* в геометрическом смысле.

Алгоритм построения тупиковых д. н. ф. Будем исходить из покрытия множества N_f системой всех его максимальных граней

$$N_{K_1^0}, \ \ldots, N_{K_m^0}.$$

Пусть $N_f = \{P_1, \ \ldots, P_\lambda\}$. Составим таблицу 1, в которой

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } P_j \notin N_i^0, & (i = 1, \ \ldots, m); \\ 1, \text{ если } P_j \in N_i^0, & (i = 1, \ \ldots, m). \end{cases}$$

Таблица 1

	P_1	$\cdots$	P_j	$\cdots$	P_λ
$N_{K_1^0}$	σ_{11}	$\cdots$	σ_{1j}	$\cdots$	$\sigma_{1\lambda}$
…	…	…	…	…	
$N_{K_i^0}$	σ_{i1}	$\cdots$	σ_{ij}	$\cdots$	$\sigma_{i\lambda}$
…	…	…		…	
$N_{K_m^0}$	σ_{m1}	$\cdots$	σ_{mj}	$\cdots$	$\sigma_{m\lambda}$

Очевидно, что в каждом столбце содержится хотя бы одна единица. Для каждого j найдем множество E_j всех номеров строк, в которых столбец P_j содержит 1. Пусть

$$E_j = \{e_{j_1}, \ \ldots, e_{j_{\mu(j)}}\}.$$

Составим конъюнкцию, рассматривая номера строк как булевы переменные:

$$\mathop{\&}_{j=1}^{\lambda}(e_{j_1} \vee \ \ldots \ \vee e_{j_{\mu(j)}}).$$

Произведем преобразование $\& \vee \to \vee \&$ и далее ликвидируем поглощаемые или дублирующие члены. В результате получим выражение $\vee \&'$, являющееся частью выражения $\vee \&$. Каждое слагаемое в $\vee \&'$ будет определять неприводимое покрытие, соответствующее тупиковой д. н. ф.

1.4. Минимизация булевых функций методом карт Карно

При использовании этого метода производится покрытие функций алгебры логики (ФАЛ) с помощью правильных конфигураций, содержащих нули или единицы. Правильными конфигурациями на карте Карно для ФАЛ от n переменных являются все прямоугольники (горизонтальные, вертикальные, квадраты), имеющие площадь 2^{n-i} $(i = 0, 1, ..., n)$. При этом стремятся, чтобы число покрытий ФАЛ на карте было минимально, а площадь, покрываемая каждой конфигурацией – максимальна. Конфигурации могут перекрываться. Принцип минимизации заключается в объединении соседних полей карты в пределах правильной конфигурации.

При нахождении минимальной формы ФАЛ выписываются переменные, не изменяющие своего значения в пределах правильной конфигурации. При объединении полей, в которых записаны единицы, ФАЛ записывается в виде д. н. ф., а при объединении полей, содержащих нули, – в виде к. н. ф.

Каждой функции сопоставляется подмножество клеток, в которых эта функция равна единице. При этом элементарным конъюнкциям соответствуют некоторые правильно расположенные конфигурации клеток. Для функции n переменных конъюнкции ранга r соответствует 2^{n-r} клеток.

1.5. Минимизация булевых функций методом Квайна-Мак-Класски

Данный метод основывается на представлении элементарных конъюнкций, входящих в совершенную д. н. ф. данной функции, в виде двоичных чисел, называемых номерами соответствующих наборов. Кроме номера, каждой элементарной конъюнкции присваивается определенный индекс, равный числу единиц в двоичном представлении данного набора. Например:

элементарная конъюнкция (набор) $\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$; номер 010(2); *индекс* 1;

элементарная конъюнкция (набор) $x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$; номер 110(6); *индекс* 2.

В результате реализации данного метода функция разлагается на простые импликанты. Алгоритм Квайна-Мак-Класски формулируется следующим образом: для того, чтобы два числа m и n являлись номерами двух склеивающихся между собой наборов, необходимо и достаточно, чтобы индексы данных чисел отличались на единицу, сами числа отличались на степень числа 2 и число с большим индексом было больше числа с меньшим индексом.

Реализацию алгоритма рассмотрим на примере минимизации функции

$$f_2(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 .$$

На первом этапе минимизации определяем номера и индексы каждого набора, записывая функцию в виде

$$\begin{gathered} f_2(\tilde{x}^4) = 0001 \vee 0101 \vee 1001 \vee 0111 \vee 1011 \vee 0011 \\ 1(\mathrm{I}) \quad 5(\mathrm{II}) \quad 9(\mathrm{II}) \quad 7(\mathrm{III}) \quad 11(\mathrm{III}) \quad 3(\mathrm{II}) \end{gathered} .$$

На втором этапе группируем наборы, располагая их в порядке возрастания индексов (табл. 1).

Таблица 2. Минимизация ФАЛ методом Квайна-Мак-Класски

<table>
<tr><th>Индекс</th><th>Номер</th><th colspan="2">Результаты склеивания</th></tr>
<tr><td>I</td><td>0001(1)</td><td>00-1
0-01
-001</td><td rowspan="2">0--1
-0-1
0--1
-0-1</td></tr>
<tr><td>II</td><td>0011(3)
0101(5)
1001(9)</td><td>0-11
-011
01-1</td></tr>
</table>

III	0111(7) 1011(11)	10-1	

На третьем этапе производим склеивание различных наборов, руководствуясь приведенной выше формулировкой алгоритма. При склеивании не совпадающие в числах разряды отмечаются прочерками. Например, склеивание чисел 0001 и 0011 дает число 00-1. Результат склеивания записывается в следующий столбец таблицы 1, также разделяемый на строки с индексами, отличающимися на единицу. После склеивания всех групп первого столбца таблицы переходят ко второму, записывая результат склеивания в третий столбец. При объединении второго и последующих столбцов таблицы возможно склеивать только числа, содержащие прочерки в одноименных разрядах. Склеивание продолжается до тех пор, пока образование нового столбца станет невозможно.

На четвертом этапе после окончания склеивания приступают к построению импликантной таблицы (табл. 2), записывая в нее в качестве простых импликант наборы, содержащиеся в последнем столбце таблицы 1. В таблицу 2 также вписываются в качестве простых импликант наборы из других столбцов таблицы 1, не принимавшие участия в склеивании. Если импликанта, содержащаяся в i-ой строке таблицы, составляет часть конституенты j-го столбца, то на пересечении i-ой строки и j-го столбца ставится символ *. Для получения минимальной формы ФАЛ из таблицы 2 необходимо выбрать минимальное число строк, чтобы для каждого столбца среди выбранных строк нашлась хотя бы одна, содержащая в этом столбце символ *.

Таблица 3. Импликантная таблица минимизируемой функции

Импликаты	Наборы					
	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$	$\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$
$\bar{x}_1 \cdot x_4$	*	*		*		*
$\bar{x}_2 \cdot x_4$	*		*		*	*

В результате минимизации функция $f_2(\tilde{x}^4)$ представится в виде

$$f_2(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1 \cdot x_4 \vee \bar{x}_2 \cdot x_4 .$$

II. ЗАДАЧИ

1. Выяснить, является ли д. н. ф. R а) тупиковой, б) кратчайшей, в) минимальной:
   1) $R = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_2$;
   2) $R = x_1 \cdot x_2 \vee x_2$;
   3) $R = x_1 \vee \bar{x}_2$;
   4) $R = x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2$;
   5) $R = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$.
2. Применить алгоритм упрощения к д. н. ф.:
   1) $R = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_2$;
   2) $R = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2$;
   3) $R = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$;
   4) $R = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_2 \cdot \bar{x}_3$.

3. По заданной сокращенной д. н. ф. R построить д. н. ф. R_T, состоящую из конъюнкций, входящих хотя бы в одну тупиковую д. н. ф.:

1) $R = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \vee x_2 \cdot \bar{x}_3$;

2) $R = \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4$;

3) $R = \bar{x}_3 \cdot x_4 \vee \bar{x}_2 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_4 \vee x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$.

4. По заданной сокращенной д. н. ф. R построить д. н. ф. R_M, состоящую из конъюнкций, входящих хотя бы в одну минимальную д. н. ф.:

1) $R = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \vee x_2 \cdot x_3$;

2) $R = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$;

3) $R = \bar{x}_1 \cdot x_4 \vee \bar{x}_2 \cdot x_4 \vee x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_3$.

5. Для заданной функции f с помощью таблицы Квайна построить все тупиковые д. н. ф.:

1) $f(\tilde{x}^3) = (01111100)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (01111110)$;

3) $f(\tilde{x}^4) = (0001101111100111)$.

6. Для заданной функции f построить минимальную д. н. ф. а) методом карт Карно, б) методом Квайна-Мак-Класски:

1) $f(\tilde{x}^3) = (01111100)$;

2) $f(\tilde{x}^4) = (0001101111011111)$;

3) $R = \bar{x}_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee x_1 \cdot x_3 \cdot x_4$.

III. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ, ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. 1) Ответ: $R = x_1 \vee \bar{x}_2$. Решение. Применим правила обобщенного склеивания $\bar{x} \cdot K_1 \vee \bar{x} \cdot K_2 = \bar{x} \cdot K_1 \vee \bar{x} \cdot K_2 \vee K_1 \cdot K_2$ и поглощения $K_1 \vee K_1 \cdot K_2 = K_1$. Получим

$$R = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_2 = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_2 \vee x_1 = x_1 \vee \bar{x}_2.$$

Отсюда следует, что исходная д. н. ф. R будет а) не тупиковой, б) кратчайшей, в) не минимальной.

2) Ответ: а) нет, б) нет, в) нет. 3) Ответ: а) да, б) да, в) да.

4)

5)

2. 1) Ответ: $R = \bar{x}_1 \vee x_2$. 2) Ответ: $R = x_1$.

3) Ответ: $R = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_3$. Указание: применить правило обобщенного склеивания сначала для первой и второй конъюнкций (по переменной x_3), а затем – для второй и третьей (по переменной x_2), а затем выполнить поглощения.

4) Ответ: $R = x_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_3$. Указание: применить правило обобщенного склеивания для первой и второй конъюнкций (по переменной x_2), а затем выполнить поглощение.

3. 1) Ответ: $R = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \bar{x}_3$. Указание: для функции f, которую реализует д. н. ф. R, построить неприводимое покрытие множества N_f.

2) Ответ: . Указание: получить одним из способов тупиковую

Практическое занятие 10. **СХЕМЫ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. КОНТАКТНЫЕ СХЕМЫ** (2 часа)

ТЕОРИЯ

1.Понятие схемы из функциональных элементов

Пусть заданы алфавиты $X=\{x_1,\ ...,x_n\}$ и $Y=\{y_1,\ ...,y_p\}$. *Схемой из функциональных элементов* (СФЭ) называется логическая сеть с входами $x_{i_1},\ ...,x_{i_n}$ из алфавита X и выходами $y_{j_1},\ ...,y_{j_p}$ из алфавита Y, которая обозначается

$$\Sigma(x_{i_1},\ ...,x_{i_n};\ y_{j_1},\ ...,y_{j_p})\,. \tag{1}$$

СФЭ (1) можно сопоставить систему функций алгебры логики

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,\ ...,x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_p = f_p(x_1,\ ...,x_n), \end{cases} \tag{2}$$

называемую *проводимостью данной схемы*.

2. Задачи анализа и синтеза СФЭ

Задача анализа: для данной СФЭ (1) получить систему булевых уравнений (2).

Задача синтеза: для данного базиса F функциональных элементов (ФЭ) и произвольной системы булевых уравнений (2) построить схему (1) из заданных ФЭ, реализующую эту систему уравнений.

Сложностью СФЭ называется число входящих в нее ФЭ. СФЭ Σ называется *минимальной*, если она имеет наименьшую сложность среди всех СФЭ, реализующих функции, реализуемые схемой Σ. *Сложностью булевой функции* f (системы функций $A=\{f_1,\ ...,f_k\}$) в классе СФЭ в базисе σ называется сложность минимальной СФЭ в базисе σ, реализующей функцию f (систему функций A). Сложность схемы Σ (функции f, системы функций A) в базисе σ обозначается через $L_\sigma(\Sigma)$ ($L_\sigma(f),\ L_\sigma(A)$). Для стандартного базиса $\sigma=\{\vee,\ \&,\ \neg\}$ символ σ в обозначении сложности схемы или функции будем опускать. Везде в дальнейшем связки $\vee,\ \&,\ \oplus,\ |,\ \downarrow,\ \to,\ \square$ считаются двухместными.

Глубиной СФЭ в базисе σ называется максимальное число ФЭ в ориентированных цепях, соединяющих вход с выходом.

Метод синтеза схем, основанный на д. н. ф., состоит из двух этапов:

1) представление функции в д. н. ф.;
2) реализация д. н. ф. с помощью СФЭ.

ЗАДАЧИ

1. Для заданной функции $f(\tilde{x}^n)$ построить СФЭ в стандартном базисе сложности, не превосходящей m:

   1) $f(\tilde{x}^2)=\overline{x}_1\,\&\,\overline{x}_2,\ m=2;$
   2) $f(\tilde{x}^2)=x_1 \square x_2,\ m=4;$

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \& x_2 \vee x_2 \& x_3 \vee x_3 \& x_1,\ m = 4;$

4) $f(\tilde{x}^3) = (01111110),\ m = 6;$

5) $f(\tilde{x}^3) = (01101001),\ m = 8.$

2. Для заданной функции $f(\tilde{x}^n)$ построить формулу в базисе σ:

1) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \oplus x_2$: а) $\sigma=\{|, \neg\}$, $\sigma=\{\to, \neg\}$;

2) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \to x_2$: а) $\sigma=\{\downarrow, \neg\}$, $\sigma=\{\&, \neg\}$;

3) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \vee x_2$: а) $\sigma=\{|, \neg\}$, $\sigma=\{\square, \&\}$;

4) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$: а) $\sigma=\{|\downarrow, \neg\}$, $\sigma=\{\to, \neg\}$;

5) $f(\tilde{x}^2) = (1011)$: а) $\sigma=\{\vee, \neg\}$, $\sigma=\{|\}$;

6) $f(\tilde{x}^2) = (1001)$: а) $\sigma=\{\&, \to \neg\}$, $\sigma=\{\downarrow\}$;

7) $f(\tilde{x}^3) = (100000001)$: а) $\sigma=\{\neg, |\}$, $\sigma=\{\oplus, \&, 1\}$.

3. По схемам, изображенным на рис. 1, найти функции, реализуемые ими.

4. Построить СФЭ в базисе σ, реализующую систему функций A:

1) $A=\{f_1 = x_1 \& x_2 \vee x_2 \& x_3 \vee x_3 \& x_1,\ f_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$;

а) $\sigma = \{\vee, \&, \neg\}$, б) $\sigma = \{\&, \oplus\}$, в) $\sigma = \{\downarrow, |\}$;

2) $A=\{f_1 = \bar{x}_1,\ f_2 = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2,\ f_3 = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3,\ f_4 = 1\}$;

а) $\sigma = \{\&, \neg\}$, б) $\sigma = \{\neg, \downarrow\}$;

3) $A=\{f_1 = x_1 \oplus x_2,\ f_2 = \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3} \vee x_1 \& x_2 \& x_3,\ f_3 = x_1 \square x_2\}$;

а) $\sigma = \{\oplus, \&, \neg\}$, б) $\sigma = \{\downarrow\}$.

5. Реализовать функцию $f(\tilde{x}^n)$ СФЭ в стандартном базисе, предварительно упростив выражение для $f(\tilde{x}^n)$:

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \& x_2 \& x_3 \vee x_1 \& x_2 \& \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \& x_2 \& x_3 \vee \bar{x}_1 \& x_2 \& \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3;$

2) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \& x_2 \& \bar{x}_3 \vee x_1 \& \bar{x}_2 \& x_3 \vee \tilde{x}_1 \& x_2 \& x_3 \vee x_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \& x_2 \& \bar{x} \vee$
$\vee \bar{x}_1 \& \bar{x}_2 \& x_3;$

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \& \bar{x}_3 \vee x_2 \& \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \& x_2 \vee \bar{x}_1 \& x_3.$

6. Реализовать функцию f СФЭ по методу, основанному на д. н. ф.:

1) $f = (01000110)$;

2) $f = (01111110)$;

3) $f = 1 \oplus x \oplus z \& y$;

4) $f = x \oplus y \oplus z$.

7. Построить СФЭ глубины l для функции f:

1) $f = x_1 \& x_2 \& x_3 \& x_4,\ l = 2;$

2) $f = x_1 \& (x_3 \vee \& x_4) \& (x_5 \vee x_6) \vee x_2 \& (x_3 \& x_5 \vee x_4 \& x_5 \vee x_4 \& x_6 \vee x_3 \& x_6;\ l = 3;$

3) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3;\ l = 6.$

Практическое занятие 11. **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ** (2 часа)

ТЕОРИЯ

1. Понятие алгоритма

Рассмотрим основные требования к алгоритмам.

1°. Дискретность. Любой алгоритм состоит из отдельных шагов, на каждом из которых происходят определенные преобразования некоторой системы величин. В начале алгоритма эту систему образуют исходные данные, в конце – результаты работы алгоритма.

2°. Детерминированность. Система величин, получаемая на каждом шаге алгоритма, однозначно определяется величинами, полученными на предыдущих шагах.

3°. Элементарность шагов. Преобразования системы величин на каждом шаге алгоритма должны быть простыми и число шагов должно быть конечным.

4°. Результативность. Заключается в остановке алгоритма после конечного числа шагов с указанием того, что считать результатом.

5°. Массовость. Заключается в выборе для работы алгоритма исходных данных из потенциально бесконечного множества.

Со временем в математике накопился ряд проблем, для которых не удалось найти алгоритма их решения, и имелись серьезные основания предполагать, что такого алгоритма нет. В связи с этим возникла необходимость формального определения алгоритма как некоторого математического объекта таким образом, чтобы для одних задач такой объект можно было построить, а для других доказать, что такого объекта не существует.

Такие формальные определения алгоритма были сделаны в 30-х годах XX-го века в работах сразу нескольких математиков, которые оказались различными по форме, но эквивалентными по содержанию.

На основе анализа алгоритмов из самых различных областей человеческой деятельности можно постулировать следующее утверждение:

любой алгоритм представляет собой преобразование слов в некотором алфавите в слова в том же алфавите, то есть словарный оператор.

Таким образом, для определения алгоритма необходимо из множества словарных операторов выделить те, которые можно рассматривать как алгоритмы. Это можно сделать разными способами, из которых основными являются следующие:

1°. Рекурсивные функции.

2°. Машины Тьюринга.

3°. Нормальные алгорифмы А.А. Маркова.

2. Машины Тьюринга

Одно из формальных определений алгоритма связано с использованием математической модели вычислительного устройства, которое носит название *машины Тьюринга*.

Каждая машина Тьюринга имеет *ленту*, *управляющую головку* (читающую и записывающую) и работает с некоторым конечным *алфавитом* $A=\{a_0, a_1, ..., a_n\}$. Лента бесконечна в обе стороны и разбита на клетки. Машина работает в дискретные моменты времени. Среди букв алфавита A имеется «пустой» символ $a_0=\Lambda$. В каждый момент времени в каждой клетке записана одна из букв алфавита A.

Управляющая головка представляет собой конечный автомат с множеством внутренних состояний $Q=\{q_0,\ q_1,\ ...,\ q_r\}$. В каждый момент времени она находится в одном из этих состояний и обозревает одну из клеток ленты. В зависимости от своего состояния и буквы на ленте головка записывает новую букву (в частности, ту же самую букву), переходит к следующему моменту времени в новое состояние(в частности, то же самое) и сдвигается по ленте – либо на одну клетку влево (L), либо на одну клетку вправо (R), либо остается на месте (C). Среди внутренних состояний выделено одно, скажем q_0, которое называется *заключительным*. Если после некоторого очередного сдвига головка попадает в заключительное состояние, то машина прекращает свою работу (останавливается).

Чтобы полностью определить работу машины, достаточно указать для начального момента времени ее *конфигурацию*, в которую входят:

1) распределение букв по клеткам ленты;
2) клетка, обозреваемая головкой;
3) состояние головки.

Обычно рассматриваются конфигурации, в которых на ленте записано конечное число непустых символов. В качестве начального состояния будем считать q_1. Далее будем предполагать, что в начальной конфигурации головка обозревает крайнюю правую клетку ленты с непустым символом.

Если машина, работая в соответствие с указанными правилами, в некоторый момент времени придет в заключительное состояние, то она считается *применимой* к данной конфигурации (или к начальному слову, записанному на ленте). Результатом работы машины при этом считается слово, которое окажется записанным на ленте в заключительной конфигурации.

Если же при работе машины ни в какой момент времени ее головка не окажется в заключительном состоянии, то машина считается *неприменимой* к начальной конфигурации (и к начальному слову). Результат ее работы в этом случае не определен.

Поскольку каждая машина Тьюринга имеет конечный алфавит и конечное число состояний, то она полностью определяется *конечным числом команд* вида

$$qa \to q^{'}a^{'}S\ ,$$

где q – состояние головки; a – буква в обозреваемой головкой клетке; $q^{'}$ – состояние головки в следующий момент; $a^{'}$ – буква, записываемая вместо a в обозреваемую клетку; S – сдвиг к следующему моменту (L, R или C).

Пример 1. Машина “+1” имеет следующую систему команд:

$$q_1 0 \to q_0 1C$$

$$q_1 1 \to q_1 0L$$

$$q_1 \Lambda \to q_0 1C$$

Нетрудно убедиться, что если на ленте написать двоичное разложение числа n ($n=0,\ 1, 2, ...$), установить головку в состояние q_1 на младший разряд и последовательно применять систему команд, то после остановки машины на ленте будет написано число $n+1$.

Пример 2. Машина $"\to"$ задается системой команд

$$q_1 0 \to q_1 0R$$

$$q_1 1 \to q_1 1R$$

$$q_1 \Lambda \to q_0 \Lambda L$$

Эта машина, не изменяя написанного на ленте слова, устанавливает головку против крайнего правого символа слова.

Меняя R и L, получим машину "$\leftarrow$", выходящую на крайний левый символ слова.

Пример 3. Машина “–1” задается системой команд

$$q_1 0 \to q_1 1L$$
$$q_1 1 \to q_0 0C$$
$$q_1 \Lambda \to q_2 \Lambda R$$
$$q_2 1 \to q_2 \Lambda R$$
$$q_2 \Lambda \to q_{00} \Lambda C$$

Если в начальной конфигурации записано двоичное разложение положительного числа n, то машина преобразует его в двоичное разложение числа $n-1$, если в начальной конфигурации записано двоичное разложение нуля, то машина останавливается в заключительном состоянии q_{00}.

3. Композиции машин Тьюринга. Тезис Тьюринга

1°. Машина последовательной обработки. Пусть M_1 и M_2 – машины Тьюринга в одном алфавите. Построим третью машину Тьюринга, работа которой будет равносильна последовательной работе машин M_1 и M_2.

Пусть машина M_1 имеет множество состояний $\{q_{10}, q_{11}, ..., q_{1n}\}$, а M_2 – $\{q_{20}, q_{21}, ..., q_{2m}\}$. Назначим заключительное состояние q_{10} машины M_1 начальным состоянием q_{21} машины M_2. Определим машину M более точно. Пусть она имеет множество состояний $\{q_0, q_1, ..., q_{n+m}\}$, а ее команды получаются из команд машин M_1 и M_2 следующим образом:

– в командах машины M_1 всюду заменим q_{10} на q_{n+1};

– в командах машины M_2 всюду заменим q_i $(i \neq 0)$ на q_{n+i}.

Такую композицию машин M_1 и M_2 называют *машиной последовательной обработки* и обозначают $M_2(M_1)$, а также изображают блок-схемой СЛЕДОВАНИЕ (рис. 1).

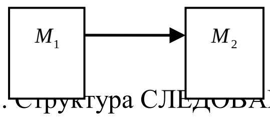


Рис. 1. Структура СЛЕДОВАНИЕ

Пример 4. Композиция машин “+1” и "$\to$" дает машину, которая после прибавления 1 возвращает головку на правый символ результата. Программа новой машины:

$$q_1 0 \to q_2 1C$$
$$q_1 1 \to q_1 0L$$
$$q_1 \Lambda \to q_2 1C$$
$$q_2 0 \to q_2 0R$$
$$q_2 1 \to q_2 1R$$

$$q_2\Lambda \to q_{20}\Lambda L$$

2°. Машина условного перехода. Пусть M, M_1 и M_2 – машины Тьюринга в одном алфавите. Машина M имеет множество внутренних состояний $\{q_{0(1)}, q_{0(2)}, q_1, ..., q_n\}$, среди которых два заключительных. Машина M_1 – $\{q_{10}, q_{11}, ..., q_{1m}\}$, машина M_2 – $\{q_{20}, q_{21}, ..., q_{2p}\}$.

Построим машину, которая работает следующим образом: сначала записанное на ленту слово обрабатывает машина M, которая в зависимости от процесса обработки может остановиться либо в состоянии $q_{0(1)}$, либо в состоянии $q_{0(2)}$. В первом случае образовавшееся на ленте слово обрабатывается машиной M_1, во втором – M_2.

Для построения такой машины надо выполнить действия:

1) переобозначить состояния машин M_1 и M_2:

$$q_{10} \to q_{n+1}, \ \ldots, \ q_{1m} \to q_{n+m};$$
$$q_{20} \to q_{n+m+1}, \ \ldots, \ q_{2p} \to q_{m+n+p};$$

2) заменить в программе машины M $q_{0(1)}$ на q_{n+1}, $q_{0(2)}$ на q_{n+m+1} и добавить к измененному таким образом тексту программы машины M программы машин M_1 и M_2 с переобозначенными состояниями.

Построенная композиция машин M, M_1 и M_2 называется *машиной условного перехода* и обозначатся блок-схемой РАЗВЕТВЛЕНИЕ (рис. 2).

Если в качестве одной из машин M_1 или M_2 взять машину M, то получим структуру ЦИКЛ (рис. 3).

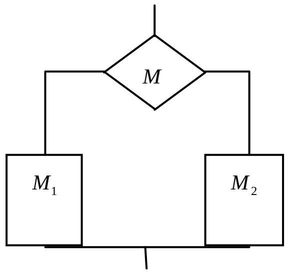


Рис. 2. Структура РАЗВЕТВЛЕНИЕ

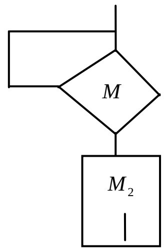


Рис. 3. Структура ЦИКЛ

4. Определение вычислимой функции

Пусть функция $f(x_1, ..., x_n)$ определена на подмножестве E_f множества всех наборов $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ чисел из расширенного натурального ряда E_0 и принимающая значения также из E_0. Такого рода функции называются *частичными функциями счетнозначной логики*. Обозначим через $P_0^ч$ множество всех частичных функций счетнозначной логики.

Функция $f(x_1, ..., x_n) \in P_0^ч$ называется *вычислимой*, если существует машина Тьюринга M такая, что:

1) при $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in E_f$ машина M, будучи применена к основному коду $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и находясь в начальном состоянии над его левой единицей, останавливается и в заключительном состоянии на ленте выдает код для $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$;

2) при $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \notin E_f$ машина M, будучи применена к основному коду $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и находясь в начальном состоянии над его левой единицей, либо не останавливается, либо останавливается, но при этом запись на ленте отлична от кода для $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Обозначим через $P_{выч}$ класс всех вычислимых функций. Очевидно, $P_{выч} \subseteq P_0^ч$.

Машина Тьюринга M реализует (вычисляет) функцию $f(x_1, ..., x_n) \in P_{выч}$ *правильным образом*, если:

1) при $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in E_f$ машина M, будучи применена к основному коду $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и находясь в начальном состоянии над его левой единицей, останавливается и в заключительном состоянии на ленте выдает код для $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$; при этом останов происходит над левой единицей кода для $f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$;

2) при $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \notin E_f$ машина M, будучи применена к основному коду $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и находясь в начальном состоянии над его левой единицей, либо не останавливается.

Лемма. Если $f(x_1, ..., x_n)$ – вычислимая функция, то существует машина Тьюринга, которая вычисляет ее правильным образом.

ЗАДАЧИ

1. Построить в алфавите {0, 1} машину Тьюринга, обладающую следующими свойствами:
   1) машина имеет одно состояние, одну команду и применима к любому слову в алфавите {0, 1};
   2) машина имеет две команды, не применима ни к какому слову в алфавите {0, 1} и зона работы на каждом слове бесконечная;
   3) машина имеет две команды, не применима ни к какому слову в алфавите {0, 1 и зона работы на любом слове ограничена одним и тем же числом ячеек, не зависящим от выбранного слова.
2. 1) Показать, что для всякой машины Тьюринга существует эквивалентная ей машина, в программе которой не содержится символ S.

   2)Показать, что во всякой машине Тьюринга можно построить эквивалентную ей машину, в программе которой не содержится значительных состояний.

3. Построить композицию машин Тьюринга по паре состояний и найти результат применения композиции к слову.

Практическое занятие 12. **ПРИЕМЫ ПОДСЧЕТА КОМБИНАТОРНЫХ ОБЪЕКТОВ** (4 часа)

ТЕОРИЯ: Общие правила комбинаторики: правила суммы, произведения и биекции. Основные формулы комбинаторики: формула включений и исключений, формулы для подсчета числа размещений (с повторениями и без повторений), перестановок (с повторениями и без повторений) и сочетаний (с повторениями и без повторений).

ЗАДАЧИ.

1. Подсчитать количество всевозможных 6-значных телефонных номеров.

Решение: 10^6 (алфавит из 6 букв, слова длины 6).

2. Подсчитать количество матриц размера $[3\times 3]$, составленных из нулей и единиц.

Решение: 2^9.

3. Автобусный билет имеет 7-значный десятичный номер. Каких билетов больше с цифрой 0 или без нее?

Решение: количество 7-значных номеров без цифры 0 равно $8\cdot 9^6$, а с цифрой 0 – 9^7. $8\cdot 9^6<9^7$.

4. Сколько символов можно закодировать в азбуке Морзе, используя не более пяти точек и тире?

Решение: $2+2^2+2^3+2^4+2^5=62$.

5. Сколькими способами можно выбрать три различных краски из имеющихся пяти?

Решение: так как порядок красок не играет роли, то $C_5^3=10$ способов.

6. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? Та же задача, если одна из полос должна быть красной?

Решение. Здесь порядок красок уже важен, поэтому имеем $A_5^3=60$ способов. Если одна полоса красная, то имеем $3\cdot A_4^2=36$ способов.

7. n $(n>2)$ человек садится за круглый стол. Два размещения по местам будем считать совпадающими, если каждый человек имеет одних и тех же соседей в обоих случаях. Сколько существует способов сесть за стол?

Решение. Общее число перестановок равно $n!$. Однако отношение соседства сохраняется при циклических перестановках и при симметрическом отражении. Поэтому всего способов $n!/(2\cdot n)$.

8. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

Решение. Выбрать места для мужчин и для женщин можно двумя способами. После этого мужчин можно посадить на выбранных местах $n!$ способами. На остальных местах $n!$ способами можно посадить женщин. Всего $2\cdot(n!)^2$ способов.

9. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули наугад 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется:

а) хотя бы один туз; б) ровно один туз; в) не менее двух тузов; г) ровно два туза?

Решение. а) Всего способов вынуть 10 карт C_{52}^{10}. В C_{48}^{10} случаях в выборке не окажется ни одного туза. Поэтому $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}$. б) $C_4^1\cdot C_{48}^9$. в) $C_{52}^{10}-C_{48}^{10}-4\cdot C_{48}^9$. г) $C_4^2\cdot C_{48}^8$.

10. Сколькими способами можно составить три пары из n шахматистов?

Решение. 6 шахматистов можно выбрать C_n^6 способами. Занумеруем их номерами от 1 до 6 и разобьем на пары: 1–2, 3–4, 5–6. Это можно сделать $6!$ способами. Так как порядок шахматистов внутри каждой пары и порядок пар несущественны, то 6 шахматистов можно разбить на пары $6!/(2^3\cdot 3!)$ способами. Всего существует $C_n^6\cdot 6!/(2^3\cdot 3!)$.

11. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные m элементов не стоят рядом в любом порядке?

Решение. Объединим данные m элементов в один. Учитывая, что эти m элементов можно переставлять между собой, получим $m!\cdot(n-m+1)!$ перестановок, в которых данные m элементов стоят рядом. Следовательно, число искомых перестановок $n!-m!\cdot(n-m+1)!$.

12. Сколькими способами можно выбрать 6 карт из колоды, содержащей 52 карты так, чтобы среди них были карты каждой масти?

Решение. В искомом способе выбора шести карт может оказаться:

1) три карты одной масти и по одной других мастей; таких выборок $C_4^1\cdot C_{13}^3\cdot(C_{13}^1)^3$;

2) две пары карт одинаковой масти и по одной двух других мастей. Таких выборок $C_4^2\cdot(C_{13}^2)^2\cdot(C_{13}^1)^2$.

Ответ: $C_4^1\cdot C_{13}^3\cdot(C_{13}^1)^3+C_4^2\cdot(C_{13}^2)^2\cdot(C_{13}^1)^2$.

13. Сколько существует n-значных натуральных чисел, у которых цифры расположены в неубывающем порядке?

Решение. $\bar{C}_9^n=C_{9+n-1}^n=C_{n+8}^n$.

14. Какова вероятность, купив один билет, угадать в спортлото (из 49):

а) k номеров ($k=1, 2, \dots, 6$);

б) хотя бы k номеров?

Решение. а) $C_6^k\cdot C_{43}^{6-k}/C_{49}^6$. б) $\sum\limits_{i=k}^{6}C_6^i\cdot C_{43}^{6-i}/C_{49}^6$.

15. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

Решение. $\bar{C}_{10}^{12}=C_{21}^{12}$.

16. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длина каждого ребра которых является целым числом от 1 до 10?

Решение. $\bar{C}_{10}^3=C_{12}^3=220$.

17. Задача Эратосфена. Сколько существует простых чисел среди натуральных от 1 до N? Подсчитать, сколько чисел среди натуральных от 1 до 100 не делится ни на одно из чисел 2, 3 и 5.

Решение. Обозначим через A_2, A_3, A_5, $A_{2,3}, A_{2,5}, A_{3,5}$, $A_{2,3,5}$ – множества натуральных чисел от 1 до 100, которые делятся соответственно на 2, 3, 5, 6, 10, 15 и 30 соответственно. По формуле включений и исключений найдем, сколько чисел делится на 2 или 3 или 5:

$$|A_2 + A_3 + A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_{2,3}| - |A_{2,5}| - |A_{3,5}| + |A_{2,3,5}| =$$
$$= E\left(\frac{100}{2}\right) + E\left(\frac{100}{3}\right) + E\left(\frac{100}{5}\right) - E\left(\frac{100}{2\cdot 3}\right) - E\left(\frac{100}{2\cdot 5}\right) - E\left(\frac{100}{3\cdot 5}\right) + E\left(\frac{100}{2\cdot 3\cdot 5}\right) =$$
$$= 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74.$$

Тогда количество чисел, не делящихся ни на одно из чисел 2, 3 и 5, будет равно

$$|\bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_5| = N - |A_2 + A_3 + A_5| = 100 - 74 = 26.$$

В это количество не вошли сами числа 2, 3 и 5, поэтому ответ: 26+3=29.

18. Задача. Пусть $M = \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$, где $n \in N$ – четное число. Подсчитать количество таких упорядоченных подмножеств X множества M, что в X и в $M \setminus X$ входят как четные, так и нечетные цифры.

Решение. Представим M в виде объединения четных и нечетных чисел:

$M = X \bigcup Y$, где $X = \{1,\ 3,\ ...,\ n-1\}$, $Y = M \setminus X = \{2,\ 4,\ ...,\ n\}$, $|X| = |Y| = n/2$.

Подсчитаем число упорядоченных подмножеств, в которые входят только нечетные числа:

$$A_{n/2}^{n/2} + A_{n/2}^{n/2-1} + \ldots + A_{n/2}^{1} = \sum_{i=1}^{n/2} A_{n/2}^{i}.$$

Столько же будет упорядоченных подмножеств, в которые входят только четные числа.

Общее число

Практическое занятие 13. **ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ** (2 часа)

ТЕОРИЯ: Рекуррентные соотношения.

1. Найти решение линейных рекуррентных соотношений:

1) $A_n = 3\cdot A_{n-1} + 4\cdot A_{n-2}$; $A_0 = 2,\ A_1 = 3$.

2) $A_n = 4\cdot(A_{n-1} - A_{n-2})$; $A_0 = 0,\ A_1 = 2$.

3) $A_n = 3\cdot A_{n-1} - 2\cdot A_{n-2}$; $A_0 = 0,\ A_1 = 1$.

Решение.

1) Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 = 3\cdot\lambda + 4$ и находим его корни: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$. Общее решение: $A_n = C_1\cdot(-1)^n + C_2\cdot 4^n$. Используя начальные условия, получим систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ -C_1 + 4\cdot C_2 = 3. \end{cases}$$

Решение системы: $C_1 = C_2 = 1$. Частное решение: $A_n = (-1)^n + 4^n$.

2) Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 = 4\cdot\lambda - 4$ и находим его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Общее решение: $A_n = C_1\cdot 2^n + C_2\cdot n\cdot 2^n$. Используя начальные условия, получим систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ 2\cdot C_1 + 2\cdot C_2 = 2. \end{cases}$$

Решение системы: $C_1 = 0,\ C_2 = 1$. Частное решение: $A_n = n\cdot 2^n$.

2) Аналогично 1).

3. Доказать тождества для биномиальных коэффициентов:

1) $\sum\limits_{i=0}^{k} C_n^i \cdot C_n^{k-i} = C_{2\cdot n}^k$ ($n \ge k$);

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k = 0$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k = n\cdot 2^{n-1}$;

4) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\cdot(k-1)\cdot C_n^k = n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\cdot C_n^k = n\cdot(n+1)\cdot 2^{n-2}$.

Решение.

1) Следует из формулы Вандермонда $\sum\limits_{i=0}^{k} C_m^i \cdot C_n^{k-i} = C_{m+n}^k$ при $m = n$.

2) Следует из формулы $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k = (x+1)^n$ при $x = -1$.

3) Продифференцировать $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k = (x+1)^n$ по x и положить $x = 1$.

4) Дважды продифференцировать $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k = (x+1)^n$ по x и положить $x=1$.

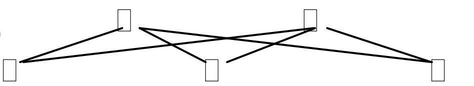
5) $$\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_n^k = \sum_{k=0}^{n} (k^2 - k + k) \cdot C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot (k-1) \cdot C_n^k + \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k =$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2} + n \cdot 2^{n-1} = n \cdot (n+1) \cdot 2^{n-2}.$$

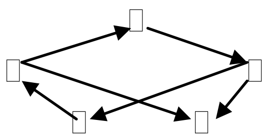
Практическое занятие 14. **СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ, СВЯЗНОСТЬ И МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАФОВ. ЗАДАЧИ О КРАТЧАЙШИХ ЦЕПЯХ** (2 часа)

ТЕОРИЯ: Определение графа, способы задания, связность, расстояние между вершинами, диаметр, радиус и центральные вершины графа. Волновой алгоритм поиска кратчайшей цепи в ненагруженном графе; алгоритм Дейкстры поиска кратчайшей цепи в нагруженном графе.

ЗАДАЧИ.

1. Задать следующие графы
а) на основе теоретико-множественного определения графа,
б) с помощью матриц смежности и инцидентности:

1)  ,

2)  .

2. Изобразить неориентированный граф, заданный матрицей смежности:

а) $\begin{pmatrix} 0&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0 \\ 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$.

3. Изобразить ориентированный граф, заданный матрицей инцидентности:

а) $\begin{pmatrix} 1&1&-1&-1&0&0 \\ -1&0&0&0&1&0 \\ 0&-1&0&0&-1&1 \\ 0&0&1&0&0&-1 \\ 0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0 \\ -1&0&0&1&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&-1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&-1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&-1&-1 \end{pmatrix}$.

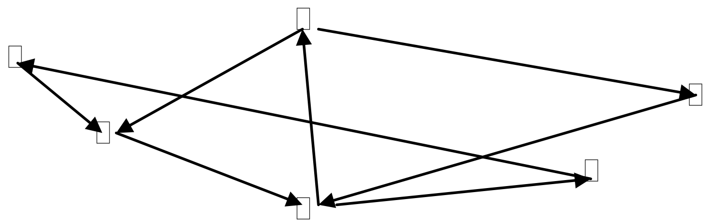
4. Выделить компоненты связности графа по его матрице смежности R. Определить степени вершин и на их основе число ребер в графе.

а) $R = \begin{pmatrix} 00100001 \\ 00000100 \\ 10000001 \\ 00000100 \\ 00000010 \\ 01010000 \\ 00001000 \\ 10100000 \end{pmatrix}$, б) $R = \begin{pmatrix} 00010100 \\ 00100001 \\ 01000001 \\ 10000100 \\ 00000010 \\ 10010000 \\ 00001000 \\ 01000000 \end{pmatrix}$.

5. Найти матрицы достижимостей и контрадостижимостей для графа G, приведенного на рис.:

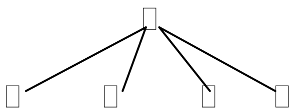
а) на основе достижимых и контрадостижимых множеств для вершин графа G;

б) с помощью транзитивного замыкания графа G.

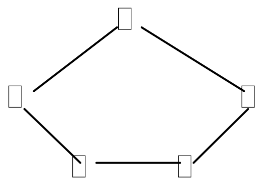


5. Найти диаметр, радиус и центры графа:

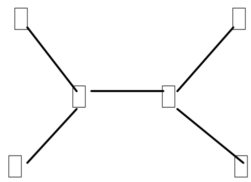
а)



б)



в)

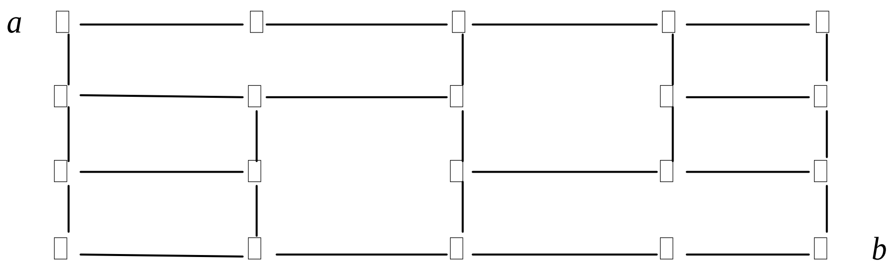


6. Перечислить все неизоморфные графы:

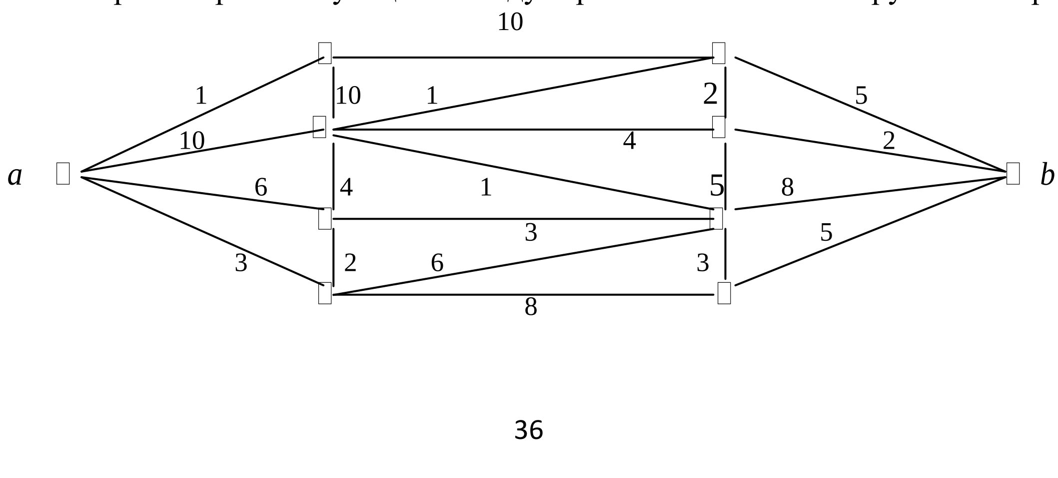
а) с тремя вершинами,

б) с четырьмя вершинами.

7. Построить кратчайшую цепь между вершинами a и b в ненагруженном графе:



8. Построить кратчайшую цепь между вершинами a и b в нагруженном графе:



Практическое занятие 15. **ДЕРЕВЬЯ. ЗАДАЧА ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ОСТОВА** (2 час)

ТЕОРИЯ: цикломатическое число; деревья и их свойства, остовные деревья; задача поиска кратчайшего остова.

ЗАДАЧИ.

1. Пусть G – граф с $n \geq 2$ вершинами. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

1°. G – связный граф с $n-1$ ребрами.

2°. G – связный граф, но после удаления любого ребра становится несвязным.

3°. Любая пара различных вершин графа G соединена единственной цепью.

4°. G – граф без циклов, но добавление ребра, соединяющего любые две вершины, приводит к появлению цикла.

Решение.

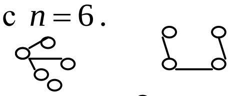
Покажем, что 2° следует из 1°. Действительно, из связности графа G следует, что число связных компонент $p=1$, а цикломатическое число $\lambda = m - n + p = n - 1 - n + 1 = 0$. После удаления любого ребра число ребер будет равно $m = n - 2$, а λ останется равным 0 (вследствие отсутствия циклов). Отсюда $p = 2$, то есть граф становится несвязным.

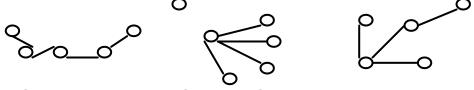
Покажем, что 3° следует из 1°. Предположим, что существует более одной цепи, связывающей любую пару различных вершин графа G. Тогда в графе имеется по крайней мере один цикл, проходящий через эту пару вершин, а, следовательно, цикломатическое число $\lambda > 0$, что противоречит утверждению 1°, из которого следует, что $\lambda = 0$.

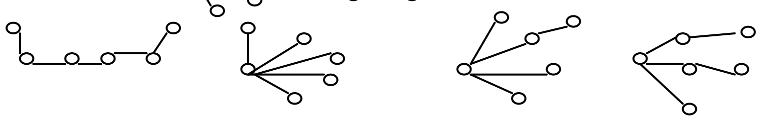
Покажем, что 4° следует из 1°, так как условие $\lambda = 0$ означает, что в графе циклов нет. Добавление ребра увеличивает λ на 1, что свидетельствует о наличии цикла в графе.

2. Перечислить все неизоморфные деревья:

а) с $n=4$; б) с $n=5$; в) с $n=6$.

Решение: а) 2 дерева: 

б) 3 дерева: 

в) 6 деревьев: 

3. Доказать, что в любом дереве

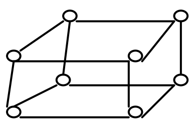
а) имеется висячая вершина;

б) найдутся по крайней мере две висячие вершины;

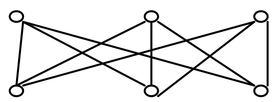
в) имеется либо одна, либо две центральные вершины.

4. Определить цикломатическое число графа и указать какое-либо остовное дерево:

а)

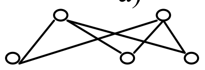


б)

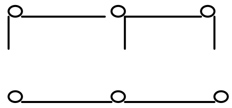


5. Определить число различных остовных деревьев для следующих графов:

а)



б)



6. Построить кратчайший остов для графа, заданного матрицей расстояний между его вершинами:

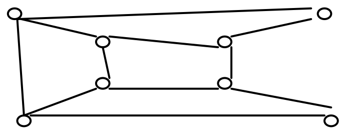
$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 14 & 3 & 9 & 4 & 14 & 16 \\ & 0 & 11 & 2 & 8 & 2 & 1 & 8 \\ & & 0 & 11 & 10 & 7 & 13 & 5 \\ & & & 0 & 1 & 7 & 6 & 10 \\ & & & & 0 & 5 & 4 & 12 \\ & & & & & 0 & 13 & 3 \\ & & & & & & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Практическое занятие 16. **СИСТЕМА БАЗИСНЫХ ЦИКЛОВ ГРАФА. МАТРИЦЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЦИКЛОВ И РАЗРЕЗОВ** (2 час)

ТЕОРИЯ: квазициклы, размерность и базис пространства циклов графа, матрицы фундаментальных циклов и разрезов.

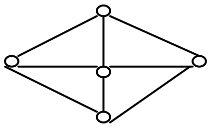
ЗАДАЧИ.

1. Для данного графа построить систему базисных циклов. Выразить некоторые циклы этого графа через базисные.

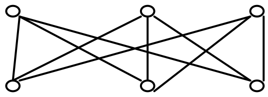


2. Для данных графов построить две системы базисных циклов. Выразить циклы одной системы через циклы другой, и наоборот.

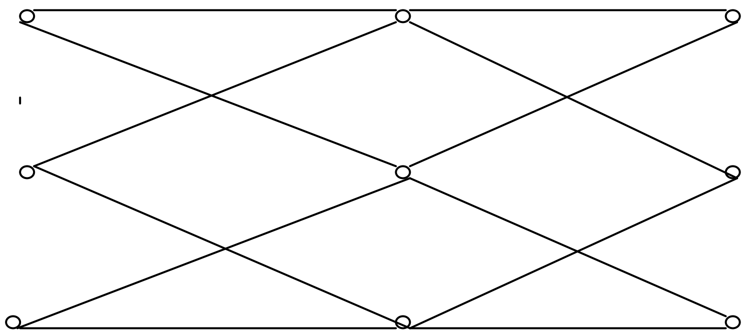
а)



б)



3. Построить матрицы фундаментальных циклов и разрезов для графа, изображенного на рис., и убедиться в том, что матрица фундаментальных циклов и транспонированная матрица фундаментальных разрезов ортогональны,



Практическое занятие 17**. ПОСТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА В ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ СЛОВАРНОГО РАНГА МАТРИЦЫ**

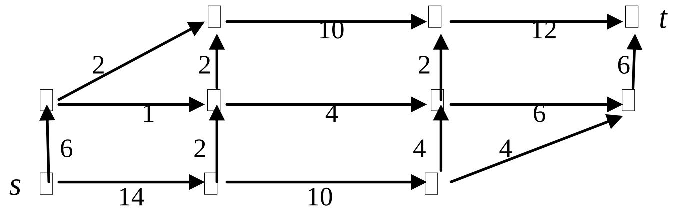
(2 часа)

ТЕОРИЯ: транспортная сеть, поток, разрез, алгоритм Форда-Фалкерсона построения максимального потока, теорема Кёнига-Эгервари, словарный ранг матрицы.

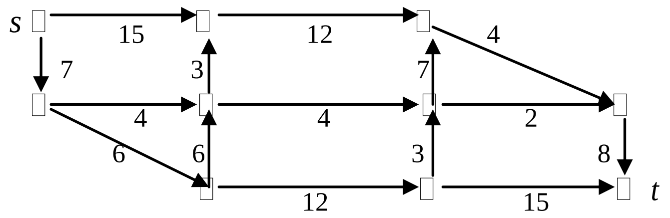
ЗАДАЧИ.

1. Построить максимальный поток в транспортной сети:

а)



б)



2. Определить словарный ранг матрицы:

$$
\text{а)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1&0\\1&1&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&1&0\\0&1&0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&0&1\end{pmatrix};\qquad
\text{б)}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&1&0\\0&1&0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0&1&0\\0&1&0&1&1&1&1\\1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0\\0&1&1&1&1&0&1\end{pmatrix}.
$$

Практическое занятие 18. **СЕТЕВЫЕ ГРАФИКИ. ПОСТРОЕНИЕ СЕТЕВОГО ГРАФИКА ПО ЗАДАННОЙ УПОРЯДОЧЕННОСТИ РАБОТ**

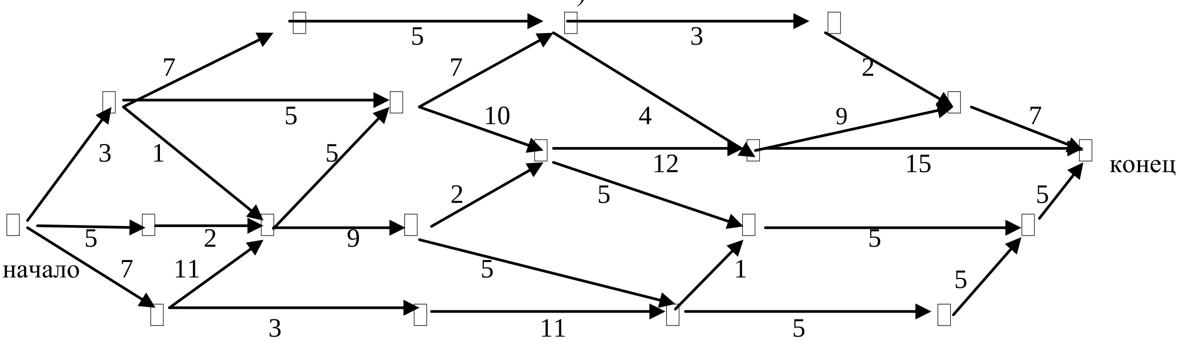
(1 час)

ТЕОРИЯ: сетевой график, алгоритм построения критического пути, резервы времени и коэффициенты напряженности, построение сетевого графика по заданной упорядоченности работ.

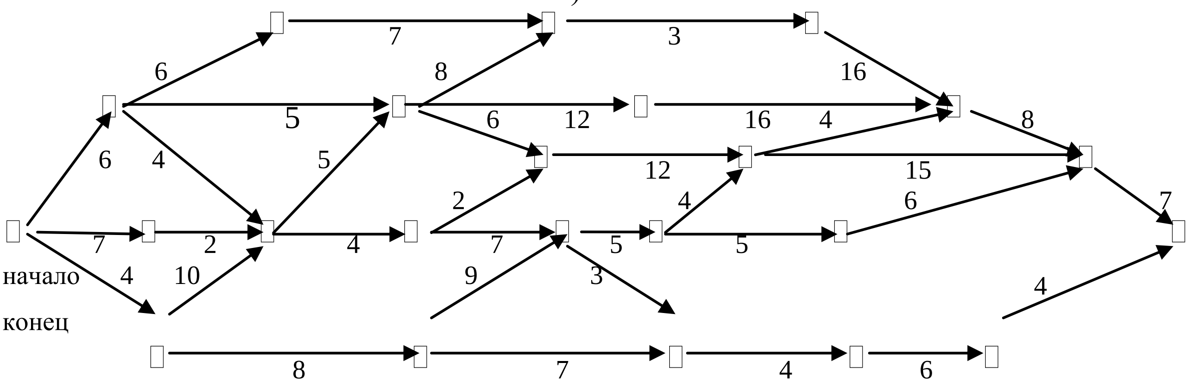
ЗАДАЧИ

1. В сетевом графике найти критический путь, ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени и коэффициенты напряженности работ:

а)



б)



2. Построить сетевой график по заданной упорядоченности работ и определить критическое время выполнения всей совокупности работ.

а)

Работа	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
Предшественники	*b*	–	*b*	*a*	*a*	*c*	*c*	*f*, *d*	*e*, *g*
Продолжительность	3	4	3	2	2	5	4	1	2

б)

Работа	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
Предшественники	–	–	*b*	*b*	*a*	*a*	*c*	*d*, e	*f*
Продолжительность	3	4	3	6	2	5	4	2	2

Практическое занятие 19. **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ. КОД ХЕММИНГА. ЛИНЕЙНЫЕ КОДЫ** (1 час)

ТЕОРИЯ: элементы теории кодирования. Код Хемминга. Линейные коды.

ЗАДАЧИ

1. Для данного множества $C=\{111100,\ 110011,\ 001111\}\subseteq B^n$ (B^n – n-мерный куб) найти кодовое расстояние:

1) 4; 2) 3; 3) 2, 4) 1.

2. Для кода $C=\{111100,\ 110011,\ 001111\}\subseteq B^n$ найти число обнаруживаемых им ошибок.

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 1.

3. Для кода $C=\{111100,\ 110011,\ 001111\}\subseteq B^n$ найти число ошибок, которые он исправляет.

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 1.

4. Построить по методу Хэмминга кодовое слово для сообщения $\tilde{\alpha}=1001$.

1) 100110; 2) 100010; 3) 101010; 4) 110011.

5. По матрице $H=\begin{bmatrix}11001\\10101\\01110\end{bmatrix}$ найти кодовое расстояние $d(C(H))$ кода $C(H)$, порожденного матрицей H.

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 1.

6. Для матрицы $H=\begin{bmatrix}01001\\11100\\10110\end{bmatrix}$ построить проверочную матрицу H^* для кода $C(H)$, порожденного матрицей H.

1) $H^*=\begin{bmatrix}10001\\11100\end{bmatrix}$; 2) $H^*=\begin{bmatrix}10100\\01000\end{bmatrix}$; 3) $H^*=\begin{bmatrix}11101\\10001\end{bmatrix}$.