

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук

Кафедра прикладной математики и информатики

Утверждено на заседании кафедры  
прикладной математики и информатики  
21.01.2021, протокол № 6

Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ В.И. Иванов

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
**по проведению практических (семинарских) занятий**  
**по дисциплине (модулю)**  
**«Комплексный анализ»**

**основной профессиональной образовательной программы**  
**высшего образования – программы бакалавриата**

по направлению подготовки  
**01.03.02 Прикладная математика и информатика**

с профилем  
**Прикладная математика и информатика**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-21

Тула 2021 год

## **Разработчик методических указаний**

Баранов В.П., профессор кафедры ПМиИ, д.т.н., доцент

---

*(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)*

---

*(подпись)*

## СОДЕРЖАНИЕ

Практическое занятие 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ....	4
Практическое занятие 2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.....	8
Практическое занятие 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ АРГУМЕНТА И МОДУЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ.....	10
Практическое занятие 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ.....	14
Практическое занятие 5. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ.....	18
Практическое занятие 6. НУЛИ ФУНКЦИИ. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ.....	24
Практическое занятие 7. ВЫЧЕТЫ ФУНКЦИЙ. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ.....	27
Практическое занятие 8. ТЕОРЕМА КОШИ О ВЫЧЕТАХ. ВЫЧЕТ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ.....	29
Практическое занятие 9. ПРИЛОЖЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.....	32
Практическое занятие 10. ЛОГАРИФИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА. ТЕОРЕМА РУШЕ.....	36
Практическое занятие 11–12. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ.....	40
Практическое занятие 13–14. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. НАХОЖДЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ОРИГИНАЛОВ.....	52
Практическое занятие 15. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ.....	64
Практическое занятие 16. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ.....	67

# Практическое занятие 1.

## КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

### I. ТЕОРИЯ

Рассмотрим множество  $C$  упорядоченных пар действительных чисел  $z = (x, y)$  или, что то же самое, точек плоскости  $xOy$  или свободных плоских векторов:

$$C \equiv R^2 = R \times R = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}.$$

На множестве  $C$  введем операции сложения и умножения на действительное число (скаляр)  $\lambda$  (так же, как в векторном исчислении), превращающие  $C$  в поле. После этого можно представить каждый элемент  $z \in C$  в *алгебраической форме*:

$$z = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy, \quad (1)$$

где через  $1$  и  $i$  обозначены единичные векторы (орты) соответственно осей  $x$  и  $y$  (обозначение первого орта опускается). Тогда множество  $C$  называется *полем комплексных чисел*, а его элементы  $z = x + iy$  — *комплексными числами*. Числа  $x$  и  $y$  соответственно называются *действительной* и *мнимой* частью числа  $z$  и обозначаются символами

$$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z.$$

Числа  $z = iy$  называются *мнимыми*. Комплексные числа  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$  называются *сопряженными*. По определению полагают  $i \cdot i = i^2 = -1$ .

Рассмотрим операции над комплексными числами в алгебраической форме.

1. Сложение:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

2. Вычитание (определяется через операцию сложения):

$$\forall z \in C, z = x + iy, \exists! z_1 : z + z_1 = 0, z_1 = -z = -x + i(-y),$$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

3. Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

4. Деление (определяется через операцию умножения):

$$\forall z = x + iy \neq 0 \exists! z_1 : z \cdot z_1 = 1,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Если обозначить  $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ , то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Для выполнения операций умножения, деления, а также возведения в степень и извлечения корня удобнее перейти к полярной системе координат  $(r, \varphi)$ . Полярный радиус  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  и полярный угол  $\varphi$ , то есть угол между положительным направлением оси  $x$  и вектором  $z$ , называются его *модулем* и *аргументом* и обозначаются

$$r = |z|, \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Модуль определяется однозначно, а аргумент — с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ . Обозначим через  $\arg z$  значение аргумента, заключенного в пределах  $\varphi_0 < \arg z \leq \varphi_0 + 2\pi$ , где  $\varphi_0$  — произвольное фиксированное число. Для определенности положим  $\varphi_0 = -\pi$ . Тогда  $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), причем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Так как  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , то

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z). \quad (2)$$

Представление  $z$  в виде (2) называется его *тригонометрической формой*. Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (3)$$

получим *показательную форму* комплексного числа

$$z = r e^{i\varphi}. \quad (4)$$

Операции умножения и деления, а также возведения в степень и извлечения корня в тригонометрической и показательной формах выполняются следующим образом.

1. Умножение:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

2. Деление:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

3. Возведение в степень:

$$z^n = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Отсюда получаем формулу Муавра:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

4. Извлечение корня. Корень  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$  имеет  $n$  различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

где  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Точки, соответствующие значениям  $\sqrt[n]{z}$ , являются вершинами правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt[n]{|z|}$  с центром в начале координат.

## II. ЗАДАЧИ

**1. Доказать следующие соотношения:**

а)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$  ;

б)  $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$  ;

в)  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$  ;

г)  $\overline{\overline{z_1 \pm z_2}} = z_1 \pm z_2$  .

**2. Решить уравнение  $\bar{z} = z^2$  .**

**3. Найти модуль и главное значение аргумента комплексных чисел:**

а)  $z = 4 + 3i$  ;

б)  $z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$  .

**4. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах:**

а)  $-2$ ;

б)  $2i$  ;

в)  $z = -1 - i\sqrt{3}$  .

**5. Вычислить:**

а)  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$  ;

б)  $(2-2i)^7$  ;

в)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$  .

**6. Найти все значения корня:**

а)  $\sqrt[4]{1}$  ;

б)  $\sqrt[4]{-1}$  ;

в)  $\sqrt[3]{i}$  ;

г)  $\sqrt[3]{-1+i}$  .

д)  $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$  .

**7. Найти множества точек на плоскости комплексного переменного  $z$  , которые определяются заданными условиями:**

а)  $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 2, z \neq 0$  ;

б)  $|z-1-i| \leq 4$  ;

в)  $\sqrt[3]{-1+i}$

**8. Указать, какие линии определяются следующими уравнениями:**

а)  $z^2 + \bar{z}^2 = 1$  ;

б)  $|z| - 3\operatorname{Im} z = 6$  ;

в)  $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$ .

**9.** В какой вектор перейдет вектор  $-\sqrt{3}-i$  после поворота на угол  $120^\circ$ ?

**10.** Найти угол, на который надо повернуть вектор  $4-3i$ , чтобы получить вектор  $-5+i$ .

## Практическое занятие 2.

### ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

#### I. ТЕОРИЯ

Говорят, что на множестве  $M \subset \mathbb{C}$  задана *функция*  $f$ , если задан закон, по которому каждой точке  $z \in M$  ставится в соответствие комплексное число  $w$ :

$$f: M \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \text{ или } w = f(z). \quad (1)$$

Согласно этому определению всякая функция *однозначна*. *Многозначные* функции, для которых каждой точке  $z \in M$  ставится в соответствие несколько комплексных чисел, рассмотрим позже. Функция  $f: M \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  называется *взаимно однозначной* или *однолистной*, если она преобразует различные точки  $z_1, z_2 \in M$  в различные:

$$\forall z_1, z_2 \in M: f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2.$$

Задание  $f$  равносильно заданию двух действительных функций  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ :  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Функция  $u(x, y)$  называется *действительной*, а  $v(x, y)$  – *мнимой* частью функции  $w = f(z)$ :  $u = \operatorname{Re} w$ ,  $v = \operatorname{Im} w$ .

Пусть функция  $f$  определена в проколотой окрестности точки  $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ ; говорят, что число  $w_0 \in \bar{\mathbb{C}}$  является ее *пределом* при  $z \rightarrow z_0$ , если для любой окрестности  $U_{w_0}$  найдется такая проколотая окрестность  $U'_{z_0}$ , что для всех  $z \in U'_{z_0}$   $f(z) \in U_{w_0}$ :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0. \quad (2)$$

Эквивалентное определение:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 < \rho(z, z_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(z), w_0) < \varepsilon. \quad (3)$$

Для  $w_0 \neq \infty$  положим  $w_0 = w_1 + iw_2$ . Тогда равенство (2) равносильно двум действительным равенствам

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = w_1, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = w_2. \quad (4)$$

Запишем равенство (2) в полярных координатах

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \arg f(z) = \arg w_0.$$

В комплексный анализ автоматически переносятся элементарные теоремы о пределах функции в точке.

Функция  $f$ , определенная в некоторой окрестности точки  $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ , называется *непрерывной в точке*  $z_0$ , если существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (5)$$

В комплексный анализ автоматически переносятся элементарные теоремы о функциях, непрерывных в точке.

Функция  $f$  называется *непрерывной в области*  $D$ , если она непрерывна в каждой точке этой области.

#### II. ЗАДАЧИ

1. Для следующих функций найти действительную и мнимую части:

а)  $w = \frac{iz + 1}{1 + \bar{z}}$ ;



б)  $w = \frac{\bar{z}}{z}$ ;

в)  $w = e^{\bar{z}^2}$ ;

г)  $w = \sin z$ .

**2.** Найти значение модуля и главное значение аргумента данных функций в указанных точках:

а)  $w = ze^z$ ,  $z_0 = \pi i$ ;

б)  $w = \operatorname{sh} z$ ,  $z_0 = 1 + i \frac{\pi}{2}$ ;

в)  $w = \cos z$ ,  $z_0 = \frac{\pi}{2} + i \ln 2$ .

**3.** Записать в алгебраической форме следующие комплексные числа:

а)  $w = \ln(1-i)$ ;

б)  $w = \sin \pi i$ ;

в)  $w = tg \frac{\pi}{2} i$ ;

г)  $w = \arcsin i$ ;

д)  $w = \operatorname{Arctg} \frac{1}{3}$ .

**4.** Найти:

а)  $i^i$ ;

б)  $(-1)^{\sqrt{2}}$ ;

в)  $\left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{2i}$ .

**5.** Решить следующие уравнения:

а)  $e^z + i = 0$ ;

б)  $4 \cos z + 5 = 0$ ;

в)  $w = \ln(z+i) = 0$ .

Практическое занятие 3.  
**ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО.  
 УСЛОВИЯ КОШИ-РИМАНА. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ АРГУМЕНТА И  
 МОДУЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ**

I. ТЕОРИЯ

Пусть функция  $f = u + iv$  определена и конечна в некоторой окрестности точки  $z_0 = x_0 + iy_0 \in C$ . Будем говорить, что  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$  в смысле действительного анализа (в смысле Функция  $f$ ), если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$ . Дифференциалом  $f$  в точке  $z_0$  называется выражение

$$df = du + idv, \quad (1)$$

которое можно переписать в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad (2)$$

Здесь  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$ . Рассмотрим сопряженные переменные  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$ . Отсюда  $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$ ,  $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$ . Подставляя в (2), после перегруппировки членов получим

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \quad (3)$$

где введены обозначения

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (5)$$

Функция  $f$  называется дифференцируемой в точке  $z_0$  в смысле комплексного анализа (в смысле  $C$ ), если она дифференцируема в смысле  $R^2$  и ее дифференциал пропорционален  $dz$ , то есть в точке  $z_0$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (6)$$

Условие (6) называется условием комплексной дифференцируемости. Формулы (4) и (5) позволяют переписать это условие в виде двух действительных равенств, которые называются условиями Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7)$$

Перейдем теперь к рассмотрению производной функции комплексного переменного. Если  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$  в смысле  $R^2$ , то ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f = f(z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z), \quad (8)$$

где  $\Delta z = z - z_0$ ,  $\Delta \bar{z} = \bar{z} - \bar{z}_0$ ,  $o(\Delta z)$  – малая высшего порядка относительно  $\Delta z$ . Полагая  $\Delta z = |\Delta z|e^{i\varphi}$ , получаем  $\Delta \bar{z} = |\Delta z|e^{-i\varphi}$  и из (13) находим

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} e^{-2i\varphi} + \eta(\Delta z), \quad (9)$$

где  $\eta(\Delta z) = \frac{o(\Delta z)}{\Delta z}$ ,  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \eta(\Delta z) = 0$ .

Для существования  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$  необходимо, чтобы существовал  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \theta$ . Тогда из формулы (14) получаем производную по направлению

$$\frac{\partial f}{\partial z_\theta} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} e^{-2i\theta}. \quad (10)$$

Геометрическим местом (логографом) производных по направлению  $\frac{\partial f}{\partial z_\theta}$  в данной точке является окружность с центром  $\frac{\partial f}{\partial z}$  и радиусом  $\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|$ . Если же  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$  в смысле  $C$ , то есть  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ , то эта окружность вырождается в точку  $\frac{\partial f}{\partial z}$  и производные по всем направлениям совпадают. Таким образом, *производной* функции  $f$  в точке  $z_0$  называется

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z), \quad (11)$$

если он существует.

Из сказанного выше следует, что дифференцируемость в смысле  $C$  равносильна существованию производной. Так как  $f'(z)$  не зависит от направления, то ее можно вычислять, например, в направлении оси  $x$ . Тогда

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Элементарные правила дифференцирования из действительного анализа без всяких изменений переносятся в комплексный анализ.

Функция  $f$  называется *аналитической (голоморфной)* в точке  $z_0 \in C$ , если она дифференцируема в смысле  $C$  в точке  $z_0$  и некоторой окрестности этой точки. Функция  $f$  называется аналитической в области  $D$ , если она аналитична в каждой точке этой области. Под *голоморфностью функции  $f$  в бесконечно удаленной точке* понимается голоморфность функции  $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  в точке  $z = 0$ . Это определение позволяет рассматривать функции, голоморфные в замкнутой плоскости  $\bar{C}$ .

Если функция  $f$  дифференцируема в смысле  $R^2$  в точке  $z_0 \in C$ , то в окрестности этой точки отображение  $w = f(z)$  можно приблизить с точностью до малых высшего порядка относительно  $z - z_0$  аффинным отображением

$$\begin{aligned}
u - u_0 &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_0} (x - x_0) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y_0} (y - y_0), \\
v - v_0 &= \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x_0} (x - x_0) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y_0} (y - y_0).
\end{aligned} \tag{12}$$

Сложим первое уравнение со вторым, умноженным на  $i$ , и положим  $x - x_0 = \frac{1}{2}[(z - z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0)]$ ,  $y - y_0 = \frac{1}{2i}[(z - z_0) - (\bar{z} - \bar{z}_0)]$ . Тогда (12) можно записать в комплексной форме

$$w - w_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z_0} (z - z_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)_{z_0} (\bar{z} - \bar{z}_0). \tag{13}$$

Это отображение называется *касательным* к отображению  $f$  в точке  $z_0$ .

Якобиан отображения  $f$  в рассматриваемой точке выражается через комплексные производные:

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2. \tag{14}$$

Если  $J \neq 0$ , то касательное отображение (14) не вырождено. Это отображение преобразует параллельные прямые в параллельные, но, вообще говоря, не сохраняет углы, так что квадраты переходят в параллелограммы, окружности – в эллипсы.

Пусть теперь функция  $f$  в точке  $z_0$  дифференцируема в смысле  $\square$ . Тогда в этой точке  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ , существует производная  $f'(z_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z_0}$  и касательное отображение (13) примет вид

$$w - w_0 = f'(z_0)(z - z_0). \tag{15}$$

Если  $f'(z_0) \neq 0$ , то это отображение сводится к растяжению вектора  $z - z_0$  в  $|f'(z_0)|$  раз и повороту его на угол  $\arg f'(z_0)$ . Оно сохраняет ориентацию и обладает *свойством сохранения углов*.

Отображение  $f$  называется *конформным* в точке  $z_0$ , если оно дифференцируемо в смысле  $R^2$  и касательное к  $f$  отображение в этой точке сохраняет ориентацию и обладает свойством сохранения углов.

Таким образом, *комплексная дифференцируемость функции  $f$  в точке  $z_0$  вместе с условием  $f'(z_0) \neq 0$  геометрически означает конформность отображения  $f$  в этой точке*.

*Геометрически  $|f'(z_0)|$  означает коэффициент растяжения длин в точке  $z_0$  при отображении  $f$ . Этот коэффициент не зависит от выбора кривой с началом в точке  $z_0$ . Другими словами все кривые с началом в точке  $z_0$  растягиваются в этой точке одинаково, то есть бесконечно малая окружность с центром в  $z_0$  переходит в кривую, отличающуюся от окружности с центром в  $w_0 = f(z_0)$  на малые высших порядков (круговое свойство).*

*Геометрически  $\arg f'(z_0)$  означает угол поворота кривой в точке  $z_0$  при отображении  $f$ . Этот угол не зависит от выбора кривой с началом в точке  $z_0$ , все кривые с началом в точке  $z_0$  поворачиваются на одинаковый угол, то есть угол между двумя любыми кривыми с началом в  $z_0$  сохраняется при отображении (свойство сохранения углов).*

## II. ЗАДАЧИ

1. Являются ли следующие функции аналитическими хотя бы в одной точке?

а)  $w = ze^{\bar{z}}$ ;

б)  $w = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$ ;

в)  $w = \sin 3z - i$ ;

г)  $w = |z| \operatorname{Im} z$ .

2. Восстановить аналитическую в окрестности точки  $z_0$  функцию  $f(z)$  по известной действительной  $u(x, y)$  или мнимой  $v(x, y)$  части и значению  $f(z_0)$ :

а)  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, f(\pi) = \frac{1}{\pi}$ ;

б)  $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \ (x > 0), f(1) = 0$ ;

в)  $v = 2(\operatorname{sh} x \sin y + xy), f(0) = 3$ .

3. Найти коэффициент растяжения  $r$  и угол поворота  $\varphi$  при заданных отображениях  $w = f(z)$  в заданных точках:

а)  $w = e^z, z_1 = \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$  и  $z_2 = -1 - i\frac{\pi}{2}$ ;

б)  $w = \sin z, z_1 = 0$  и  $z_2 = 1 + i$ ;

в)  $w = z^3, z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i\frac{\pi}{2}$ .

4. Пусть  $z$  описывает область, определяемую условиями

$$1 \leq |z| \leq 2, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}.$$

Найти площадь области, полученной при отображении  $w = z^2$ .

# Практическое занятие 4.

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

### I. ТЕОРИЯ

#### 1. Определение и свойства интеграла от функции комплексного переменного

Пусть на плоскости  $C$  задана кусочно-гладкая кривая  $\gamma$ . Используя параметрическое представление кривой  $\gamma$ , зададим текущие координаты ее точек уравнениями  $\xi = \xi(t)$ ,  $\eta = \eta(t)$ , где действительный параметр  $t \in [\alpha, \beta]$ . Такое задание координат точек кривой  $\gamma$  эквивалентно заданию комплексной функции  $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$  действительного переменного  $t$ .

Пусть в каждой точке  $\zeta$  кривой  $\gamma$  определено значение функции  $f(\zeta)$ . Введем понятие интеграла от функции  $f(\zeta)$  по кривой  $\gamma$ . Для этого разобьем кривую  $\gamma$  на  $n$  частичных дуг точками деления  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ , соответственно возрастающим значениям параметра  $t$ . Обозначим  $\Delta\zeta_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}$ . Интегралом от функции  $f(\zeta)$  по кривой  $\gamma$  называют

$$\lim_{\max \Delta\zeta_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i^*) \Delta\zeta_i = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta, \quad (1)$$

где  $\zeta_i^*$  – произвольная точка  $i$ -ой частичной дуги. Этот предел не зависит ни от способа разбиения кривой  $\gamma$ , ни от выбора точек  $\zeta_i^*$ .

Вопрос существования интеграла (1) сводится к вопросу о существовании криволинейных интегралов второго рода от действительной и мнимой частей функции  $f(\zeta)$ . Подставим в интегральную сумму выражения (1)  $f(\zeta_i^*) = u(P_i^*) + iv(P_i^*)$ ,  $\Delta\zeta_i = \Delta\xi_i + i\Delta\eta_i$ , где  $P_i^*(\xi_i^*, \eta_i^*)$  – точка кривой  $\gamma$  на плоскости  $x, y$ . Тогда

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} u d\xi - v d\eta + i \int_{\gamma} u d\eta + v d\xi. \quad (2)$$

Заметим, что интеграл (1) существует и в случае неаналитической функции  $f(\zeta)$ , если эта функция является кусочно-непрерывной.

Приведем основные свойства интеграла от комплексных функций.

1°. **Линейность.** Если функции  $f$  и  $g$  непрерывны на кривой, то для любых комплексных постоянных  $a$  и  $b$

$$\int_{\gamma} (af + bg) d\zeta = a \int_{\gamma} f d\zeta + b \int_{\gamma} g d\zeta. \quad (3)$$

2°. **Аддитивность:**

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma_2} f(\zeta) d\zeta. \quad (4)$$

3°. **Ориентированность:**

$$\int_{\gamma^-} f(\zeta) d\zeta = - \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta. \quad (5)$$

4°. **Замена переменной интегрирования:**

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f[\varphi(\zeta)] \varphi'(\zeta) d\zeta, \quad (6)$$

где  $z = \varphi(\zeta)$  – аналитическая функция  $\zeta$ , устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между кривыми  $\gamma$  и  $\gamma_1$ . В частности,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] z'(t) dt, \quad (7)$$

где  $z = z(t)$  – параметрическое задание кривой  $\gamma$ ,  $z(\alpha)$  и  $z(\beta)$  – ее начальная и конечная точки.

5°. Оценка интеграла по модулю:

$$\left| \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{\gamma} |f(\zeta)| |d\zeta|, \quad (8)$$

где  $|d\zeta| = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$  – дифференциал длины кривой  $\gamma$ , а интеграл, стоящий справа, является криволинейным интегралом первого рода.

Если  $\max_{\zeta \in \gamma} |f(\zeta)| = M$  и  $l$  – длина кривой  $\gamma$ , то

$$\left| \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta \right| \leq Ml. \quad (9)$$

В дальнейшем будем рассматривать интегралы от функций, аналитических в некоторой области, причем в основном будет интересоваться тот случай, когда границей области является кусочно-гладкая кривая, не имеющая самопересечений. Если такая кривая замкнута, то интеграл (1) по замкнутому контуру называется *контурным* интегралом.

## 2. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей

В общем случае  $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$  зависит как от подынтегральной функции  $f(z)$ , так и от кривой  $\gamma$ . Установим условия, при которых интеграл не зависит от пути интегрирования, а определяется только положениями концов  $\gamma$ . Имеет место следующая основная в интегральном исчислении теорема.

**Теорема 1 (теорема Коши).** *Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ , то для всех кривых  $\gamma$ , лежащих в этой области и имеющих общие концы, интеграл  $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$  имеет одно и то же значение.*

Эту теорему можно сформулировать в другой форме.

**Теорема 2.** *Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$ , то ее интеграл вдоль любого замкнутого контура  $\gamma$ , лежащего в  $D$ , равен нулю:*

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0. \quad (14)$$

Сформулированные теоремы справедливы для любого замкнутого контура, целиком лежащего в односвязной области ее аналитичности. При дополнительном условии непрерывности функции в замкнутой области данное утверждение справедливо и для замкнутого контура, являющегося границей области аналитичности. Последнее утверждение фактически является несколько видоизмененной формулировкой теоремы Коши, но ввиду его важности для практических приложений выделим это утверждение в отдельную теорему.

**Теорема 3.** *Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $D$  и непрерывна в замкнутой области  $\bar{D}$ , то интеграл от функции  $f(z)$  по границе  $\gamma$  области  $D$  равен нулю.*

Обобщим теорему Коши на случай многосвязной области. В этом случае полная граница области состоит из нескольких замкнутых контуров: внешнего  $\gamma_0$  и внутренних  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Положительным направлением обхода полной границы многосвязной области будем называть такое направление движения, при котором область все время остается слева. При этом внешний контур обходится в положительном, а внутренние – в отрицательном направлении.

**Теорема 4.** Пусть  $f(z)$  является аналитической функцией в многосвязной области  $D$ , ограниченной извне контуром  $\gamma_0$ , а изнутри контурами  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  и пусть  $f(z)$  непрерывна в замкнутой области  $\bar{D}$ . Тогда  $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$ , где  $\gamma$  – полная граница области  $D$ , состоящая из контуров  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ , причем обход границы  $\gamma$  происходит в положительном направлении.

### 3. Интегральная формула Коши

Формула Коши позволяет получить представление аналитической функции во внутренних точках области при помощи интеграла по границе этой области. Пусть  $f(z)$  является аналитической функцией в односвязной области  $D$ , ограниченной контуром  $\gamma$ . Тогда справедлива интегральная формула Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (15)$$

Формула (15) выражает значение аналитической функции  $f(z)$  в некоторой точке  $z$  через ее значения на любом контуре  $\gamma$ , лежащем в области аналитичности функции  $f(z)$  и содержащем точку  $z$  внутри. Эта формула позволяет вычислять некоторые интегралы.

## II. ЗАДАЧИ

### 1. Вычислить следующие интегралы:

1.1.  $\int_{\gamma} z \bar{z} dz$ ,  $\gamma: |z| = 1$ . Обход против часовой стрелки.

1.2.  $\int_1^i z \sin z dz$ .

1.3.  $\int_{-i}^i z e^{z^2} dz$ .

1.4.  $\int_1^i (3z^4 - 2z^3) dz$ .

1.5.  $\int_{\gamma} z \operatorname{Im}(z^2) dz$ ,  $\gamma: |\operatorname{Im} z| \leq 1, \operatorname{Re} z = 1$ .

2. С помощью интегральной формулы Коши вычислить следующие интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):



$$2.1. \int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz.$$

$$2.2. \int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}.$$

$$2.3. \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz.$$

$$2.4. \int_{|z-3|=6} \frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}.$$

$$2.5. \int_{|z|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2} dz.$$

## Практическое занятие 5. РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

### I. ТЕОРИЯ

**Числовые ряды с комплексными членами.** Ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (1)$$

называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  имеет конечный предел  $s$ ; этот предел называется *суммой ряда*.

Необходимым и достаточным условием сходимости ряда (5.1) является *критерий Коши*: ряд (5.1) сходится тогда и только тогда, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такой номер  $N$ , что  $\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$  при  $n \geq N$  и любом натуральном  $p$ .

Необходимое условие сходимости ряда (5.1):  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , которое следует из критерия Коши.

Если сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|, \quad (2)$$

состоящий из модулей, то, очевидно, сходится и ряд (5.1), который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд (5.1) сходится, а ряд (5.2) расходится, то ряд (5.1) называется *условно сходящимся*.

Достаточными признаками сходимости рядов с положительными членами являются *признаки Даламбера и Коши*.

Согласно признаку Даламбера ряд (5.2) сходится, если  $\forall n \geq N: \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq l < 1$ . В противном случае он расходится, т. к. не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

Согласно признаку Коши ряд (5.2) сходится, если  $\forall n \geq N: \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ . В противном случае ряд (2) расходится.

**Функциональные ряды. Равномерная сходимость.** *Функциональным рядом* называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z), \quad (3)$$

где  $\{u_n(z)\}$  – последовательность однозначных функций комплексного переменного в области  $D$ . При фиксированном значении  $z_0 \in D$  ряд (5.3) превращается в числовой ряд вида (5.1).

Ряд (3) называется *сходящимся* в области  $D$ , если для любого  $z \in D$  соответствующий ему числовой ряд сходится. В этом случае  $\forall z \in D, \forall \varepsilon > 0 \exists N: \left| f(z) - \sum_{k=0}^n u_k(z) \right| < \varepsilon$  при  $n \geq N(\varepsilon, z)$ , где  $f(z)$  называется *суммой ряда* в области  $D$ .

Ряд (3) называется *равномерно сходящимся* в области  $D$ , если  $\forall z \in D, \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \left| f(z) - \sum_{k=0}^n u_k(z) \right| < \varepsilon$  при  $n \geq N(\varepsilon)$ .

Если обозначить остаток ряда  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)$ , то условие равномерной сходимости ряда (5.3) можно записать в виде  $|r_n| < \varepsilon$  при  $n \geq N(\varepsilon)$ .

**Признак Вейерштрасса.** Если всюду в области  $D$  члены ряда (5.3) могут быть мажорированы членами абсолютно сходящегося числового ряда, то ряд (5.3) сходится равномерно в области  $D$ .

Признак Вейерштрасса является достаточным признаком равномерной сходимости. Имеет место следующий необходимый и достаточный признак равномерной сходимости.

**Критерий Коши.** Для того чтобы ряд (5.3) сходился равномерно в области  $D$ , необходимо и достаточно чтобы  $\forall z \in D, \forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N} \exists N(\varepsilon): |s_{n+m}(z) - s_n(z)| < \varepsilon$  при  $n \geq N$ .

Некоторые общие свойства равномерно сходящихся рядов.

1. Если функции  $u_n(z)$  непрерывны в области  $D$ , а ряд (5.3) сходится в этой области равномерно к функции  $f(z)$ , то  $f(z)$  также непрерывна в области  $D$ .

2. Если ряд (3) непрерывных функций  $u_n(z)$  сходится равномерно в области  $D$  к функции  $f(z)$ , то интеграл от этой функции по любой кусочно-гладкой кривой  $\gamma$ , целиком лежащей в области  $D$ , можно вычислить путем почленного интегрирования ряда (3), т. е.

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} u_n(\zeta) d\zeta.$$

3. **Первая теорема Вейерштрасса.** Пусть функции  $u_n(z)$  являются аналитическими в области  $D$ , а ряд (3) сходится равномерно в любой замкнутой подобласти  $\overline{D}$  области  $D$  к функции  $f(z)$ . Тогда:

1)  $f(z)$  является аналитической функцией в области  $D$ ;

2)  $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ ;

3) ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$  сходится равномерно в любой замкнутой подобласти  $\overline{D}$  области  $D$ .

4. **Вторая теорема Вейерштрасса.** Пусть функции  $u_n(z)$  являются аналитическими в области  $D$ , непрерывными в  $\overline{D}$  и ряд (3) сходится равномерно на границе  $\gamma_D$  этой области. Тогда ряд (3) сходится равномерно в  $\overline{D}$ .

**Степенные ряды. Теорема Абеля.** Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (4)$$

где  $c_n$  — некоторые комплексные числа (коэффициенты ряда), а  $z_0$  — фиксированная точка комплексной плоскости.

Область сходимости степенного ряда определяет следующая теорема.

**Теорема 1 (Абеля).** Если степенной ряд (5.4) сходится в точке  $z_1 \neq z_0$ , то он сходится в любой точке  $z$ , удовлетворяющей условию  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ , причем в любом круге  $|z - z_0| \leq k|z_1 - z_0|$ , где  $0 < k < 1$ , сходимость ряда равномерна.

**Следствие 1.** Если ряд (5.4) расходится в некоторой точке  $z_1$ , то он расходится и во всех точках  $z$ , удовлетворяющих неравенству  $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ .

**Следствие 2.** Областью сходимости ряда (4) является открытый круг с центром в точке  $z_0$ , радиус которого  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда ( $0 \leq R < \infty$ ).

Для определения радиуса сходимости можно использовать *формулу Коши-Адамара*:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad (5)$$

где  $\overline{\lim}$  означает верхний предел.

**Следствие 3.** Внутри круга сходимости степенной ряд сходится к аналитической функции.

**Следствие 4.** Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз, причем радиус сходимости полученных рядов равен радиусу сходимости исходного ряда.

**Ряд Тейлора. Разложение функции в ряд Тейлора.** Степенной ряд внутри круга сходимости определяет некоторую аналитическую функцию. Возникает вопрос о том, при каких условиях функция, аналитическая внутри некоторого круга, представима в виде степенного ряда, сходящегося в этом круге к данной функции. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема 2 (Тейлора).** Функция, аналитическая внутри круга  $|z - z_0| < R$ , однозначно представима в этом круге сходящимся степенным рядом (4).

Разложение функции, аналитической в круге  $|z - z_0| < R$ , в сходящийся степенной ряд (10) называется *разложением Тейлора*, а сам ряд (10) – *рядом Тейлора*.

Приведем тейлоровские разложения некоторых элементарных функций, способы получения которых такие же, как и в обычном анализе:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (R = \infty), \quad (6)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (R = \infty), \quad (7)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (R = \infty), \quad (8)$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (R = \infty), \quad (9)$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (R = \infty), \quad (10)$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (R=1), \quad (11)$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+n-1)}{n!} z^n + \dots \quad (R=1). \quad (12)$$

В частности, при  $\alpha = -1$  из последней формулы получим

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots \quad (R=1). \quad (13)$$

**Ряд Лорана.** Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad (14)$$

который является обобщением ряда Тейлора (4), называется *рядом Лорана*. Для установления области сходимости этого ряда представим выражение (20) в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}. \quad (15)$$

Областью сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$  является круг  $|z-z_0| = R_1$ , внутри которого этот ряд сходится к некоторой аналитической функции  $f_1(z)$ .

Для определения области сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}$  сделаем замену переменной, положив  $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$ . Получим степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$ , сходящийся внутри круга

$|\zeta| = 1/R_2$  к некоторой аналитической функции  $\varphi(\zeta)$ , где через  $1/R_2$  обозначен радиус сходимости. Возвращаясь к старой переменной и полагая  $\varphi(\zeta(z)) = f_2(z)$ , для функции  $f_2(z)$  получим область сходимости  $|z-z_0| > R_2$ .

Если  $R_2 < R_1$ , то существует общая область сходимости рассмотренных рядов – *круговое кольцо*  $R_2 < |z-z_0| < R_1$ , в котором ряд (5.21) сходится к функции  $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ , которая обладает всеми свойствами суммы степенного ряда. Это означает, что *ряд Лорана (5.21) сходится внутри своего кольца сходимости к некоторой функции  $f(z)$ , аналитической в этом кольце*.

Возможность представления аналитической в некотором круговом кольце функции в виде ряда Лорана определяется следующей теоремой.

**Теорема 4.** *Функция  $f(z)$ , аналитическая в кольце  $R_2 < |z-z_0| < R_1$ , однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана.*

## II. ЗАДАЧИ

**1.** Исследовать на сходимость ряды:

1.1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}.$

1.2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}.$

1.3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\operatorname{sh} n}.$

**2.** Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов:

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n.$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{in} \right)^n.$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi i}{n} z^n.$$

**3.** Разложить в ряд Тейлора, используя готовые разложения, и найти радиусы сходимости рядов :

$$3.1. f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3} \text{ по степеням } z.$$

$$3.2. \sin(2z+1) \text{ по степеням } z+1.$$

$$3.3. e^z \text{ по степеням } 2z-1.$$

$$3.4. \ln(2-z) \text{ по степеням } z.$$

**4.** Определить область сходимости следующих рядов:

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-n)^n z^n}.$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in}.$$

$$4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (z+1)^n}.$$

$$4.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{(z+2i)^n}.$$

**5.** Разложить в ряд Лорана в окрестности точки  $z=0$  следующие функции:

$$5.1. \frac{\sin z}{z^2}.$$

$$5.2. \frac{\sin^2 z}{z}.$$

$$5.3. \frac{e^z}{z^3}.$$

$$5.4. z^3 e^{\frac{1}{z}}.$$

$$5.5. \frac{1}{z} \sin^2 \frac{2}{z}.$$

$$5.6. \frac{1 - e^{-z}}{z^3}.$$

**6.** Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах:

$$6.1. \frac{1}{z^3 + z}, \text{ а) } 0 < |z| < 1; \text{ б) } 4 < |z| < \infty.$$

$$6.2. \frac{2z+3}{z^2+3z+2}, \text{ } 1 < |z| < 2.$$

$$6.3. \frac{2}{z^2-1}, \text{ } 1 < |z+2| < 3.$$

$$6.4. \frac{1}{z^2+1}, 0 < |z-i| < 2.$$

$$6.4. \frac{z^5}{(z^2-4)^2}, 2 < |z| < \infty.$$

Практическое занятие 6.  
**НУЛИ ФУНКЦИИ. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ**

**I. ТЕОРИЯ**

**Нули функции.** Пусть  $f(z)$  является аналитической функцией в области  $D$ . Точка  $z_0 \in D$  называется *нулем*  $f(z)$ , если  $f(z_0) = 0$ . В данном случае коэффициент  $c_0 = 0$ . Если не только  $c_0 = 0$ , но и коэффициенты  $c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = 0$ , а  $c_k \neq 0$ , то  $z_0$  называется *нулем  $k$ -го порядка* функции  $f(z)$ . В нуле  $k$ -го порядка не только  $f(z_0) = 0$ , но и  $f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ , а  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ . В окрестности нуля  $k$ -го порядка разложение функции  $f(z)$  в степенной ряд имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \varphi(z). \quad (1)$$

где  $\varphi(z)$  – аналитическая функция в окрестности точки  $z_0$ , причем  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

**Классификация изолированных особых точек однозначной аналитической функции.** Аппарат разложений Лорана позволяет изучить поведение аналитических функций в окрестности точек, в которых нарушается аналитичность этих функций – так называемых изолированных особых точек. Точка  $z_0$  называется *изолированной особой точкой* функции  $f(z)$ , если существует окрестность  $0 < |z - z_0| < R$  этой точки, в которой  $f(z)$  аналитична.

Различают три типа особых точек в зависимости от поведения функции  $f(z)$  в их окрестности:

1°. Точка  $z_0$  называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

2°. Точка  $z_0$  называется *полюсом*, если существует  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ ;

3°. Точка  $z_0$  называется *существенно особой точкой*, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не существует.

**1°. Теорема 1.** Для того чтобы  $a$  была *устранимой особой точкой* функции  $f(z)$  необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  не содержало главной части.

**2°. Теорема 2.** Для того чтобы точка  $z_0$  была *полюсом* функции  $f(z)$  необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения  $f(z)$  в окрестности точки  $a$  содержала лишь конечное число членов:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (2)$$

При этом номер старшего отрицательного члена разложения совпадает с порядком полюса.

**Теорема 3.** Точка  $z_0$  тогда и только тогда является *существенно особой* для функции  $f(z)$ , когда главная часть ее лорановского разложения в окрестности точки  $z_0$  содержит бесконечно много членов.

Поведение функции в окрестности существенно особой точки выясняет следующая



**Теорема 4** (Ю. В. Сохоцкий, 1868 г.). Если  $z_0$  – существенно особая точка функции  $f(z)$ , то для любого комплексного числа  $A$  существует последовательность точек  $z_k \rightarrow z_0$  такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = A$ .

По характеру особых точек выделяют следующие два простейших класса однозначных аналитических функций.

1) **Целые функции.** Функция  $f(z)$  называется *целой* (или *голоморфной*), если она не имеет особых точек. Всякая целая функция представляется сходящимся во всей плоскости степенным рядом  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ . Примерами целых функций являются все многочлены, показательная функция,  $\sin z$ ,  $\cos z$  и др. Сумма, разность и произведение целых функций снова являются целыми функциями.

2) **Дробные функции.** Функция  $f(z)$  называется *дробной* (или *мероморфной*), если она не имеет других особенностей, кроме полюсов. В любой ограниченной области мероморфная функция может иметь лишь конечное число полюсов. Во всей плоскости полюсов может быть и бесконечно много. Примерами мероморфных функций являются все целые функции, дробно-рациональные функции, тригонометрические функции и др. Сумма, разность, произведение и частное двух мероморфных функций и вообще любая дробно-рациональная функция  $R(f_1, \dots, f_n)$  от мероморфных функций снова является мероморфной функцией.

## II. ЗАДАЧИ

**1.** Найти нули и определить их порядки для следующих функций:

1.1.  $f(z) = z^4 + 4z^2$ .

1.2.  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ .

1.3.  $f(z) = z^2 \sin z$ .

1.4.  $f(z) = \cos z^3$ .

1.5.  $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$ .

**2.** Найти порядок нуля для следующих функций:

2.1.  $f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$ .

2.2.  $f(z) = \frac{z^3}{1 + z - e^z}$ .

2.3.  $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$ .

**3.** Определить характер особой точки  $z_0 = 0$  для следующих функций:

3.1.  $\frac{1}{z - \sin z}$ .

3.2.  $\frac{1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}$ .

3.3.  $\frac{1}{e^{-z} + z - 1}$ .

3.4.  $\frac{\sin z}{e^{-z} + z - 1}$ .

**4.** Найти особые точки и определить их характер у следующих функций:

4.1. а)  $\frac{1}{1-\sin z}$ ; б)  $\frac{1-\cos z}{z^2}$ .

4.2. а)  $e^{\frac{1}{z+2}}$ ; б)  $\cos \frac{1}{z}$ .

4.3. а)  $e^{\frac{-1}{z^2}}$ ; б)  $\sin \frac{\pi}{z+1}$ .

4.4. а)  $\frac{z^2}{\cos z - 1}$ ; б)  $\frac{1-\sin z}{\cos z}$ .

**5.** Определить характер указанных особых точек:

5.1.  $\frac{1+\cos z}{z-\pi}$ ,  $z_0 = 0$ .

5.2.  $\frac{\sin z}{z^2}$ .

5.3.  $\cos \frac{1}{z+\pi}$ ,  $z_0 = -\pi$ .

5.4.  $\frac{\sin^2 z}{z}$ ,  $z_0 = 0$ .

## Практическое занятие 7. ВЫЧЕТЫ ФУНКЦИЙ. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

### I. ТЕОРИЯ

Вычетом функции  $f(z)$  в изолированной особой точке  $z_0$  называется число

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – достаточно малая окружность  $|z - z_0| = \rho$ , проходимая в положительном направлении. Для достаточно малых  $\rho$  величина вычета не зависит от  $\rho$ . Для обозначения вычета используем выражение  $\operatorname{res} [f(z), z_0]$ .

Вычет функции  $f(z)$  в особой точке  $z_0$  равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении  $f(z)$  в окрестности  $z_0$ :

$$\operatorname{res} [f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = c_{-1}. \quad (2)$$

В устранимой особой точке вычет равен нулю. В ряде случаев может быть использован более простой по сравнению с формулой (2) способ вычисления вычета, сводящийся к дифференцированию функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$ .

1°. Пусть  $z_0$  – полюс первого порядка функции  $f(z)$ . Тогда функция  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  может быть представлена в виде отношения двух аналитических функций

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad (3)$$

причем  $\varphi(z_0) \neq 0$ , а точка  $z_0$  является нулем первого порядка функции  $\psi(z)$ .

В этом случае имеем следующую формулу вычисления вычета в полюсе первого порядка:

$$\operatorname{res} [f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (4)$$

2°. Пусть  $z_0$  – полюс порядка  $m$  функции  $f(z)$ . Формула вычисления вычета в полюсе порядка  $m$  имеет вид:

$$\operatorname{res} [f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (5)$$

### II. ЗАДАЧИ

Найти вычеты в особых точках следующих функций:

1.  $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4} z}.$

2.  $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}.$

$$3. f(z) = \frac{e^z}{\frac{1}{4} - \sin^2 z}.$$

$$4. f(z) = \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}.$$

$$5. f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1+z^4}.$$

$$6. f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}.$$

$$7. f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z-i}.$$

$$8. f(z) = \operatorname{ctg}^2 z.$$

$$9. f(z) = \sin z \cos \frac{1}{z}.$$

$$10. f(z) = e^z \sin \frac{1}{z}.$$

## Практическое занятие 8.

### ТЕОРЕМА КОШИ О ВЫЧЕТАХ. ВЫЧЕТ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

#### I. ТЕОРИЯ

Применение теории вычетов основывается главным образом на следующей *теореме о вычетах*:

**Теорема 1** (О. Коши, 1825 г.). Пусть функция  $f(z)$  является аналитической всюду в замкнутой области  $G$ , за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$  ( $k=1, \dots, N$ ), лежащих внутри области  $G$ . Тогда

$$\int_{\Gamma^+} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{res} [f(z), z_k]. \quad (1)$$

где  $\Gamma^+$  – полная граница области  $G$ , проходимая в положительном направлении.

Принципиальная важность теоремы о вычетах заключается в том, что во многих случаях оказывается гораздо проще вычислять вычеты функции  $f(z)$  в особых точках, лежащих в области интегрирования, чем непосредственно вычислять интеграл, стоящий в левой части (1).

Введем понятие вычета в бесконечно удаленной точке. Пусть точка  $z = \infty$  – изолированная особая точка аналитической функции  $f(z)$ .

*Вычетом аналитической функции  $f(z)$  в точке  $z = \infty$*  называется комплексное число, равное значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(\zeta) d\zeta,$$

где  $\gamma$  – произвольный замкнутый контур, вне которого функция  $f(z)$  является аналитической и не имеет особых точек, отличных от  $\infty$ .

Имеет место формула

$$\operatorname{res} [f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(\zeta) d\zeta = -c_{-1}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что если точка  $z = \infty$  является устранимой особой точкой функции  $f(z)$ , то  $\operatorname{res} [f(z), \infty]$  может оказаться отличным от нуля, в то время как вычет в конечной устранимой точке всегда равен нулю.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(z)$  является аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа особых точек  $z_k$  ( $k=1, \dots, N$ ), включая и  $z = \infty$  ( $z_N = \infty$ ). Тогда

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{res} [f(z), z_k] = 0. \quad (3)$$

Теорема 2 иногда позволяет упростить вычисление интеграла от функции  $f(z)$ , однозначной и аналитической на полной комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек, по замкнутому контуру  $\gamma$ . Если внутри  $\gamma$  много особых точек, то применение формулы (1) может быть сопряжено с весьма трудоемкими вычислениями. При этом может оказаться, что вне  $\gamma$  функция  $f(z)$  имеет лишь

несколько особых точек  $z_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ), значение вычетов которых, а также вычет в бесконечно удаленной точке определяются достаточно просто. Тогда

$$\int_{\gamma^+} f(\zeta) d\zeta = -2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} [f(z), z_k] - 2\pi i \operatorname{res} [f(z), \infty]. \quad (4)$$

## II. ЗАДАЧИ

### 1. Вычислить интегралы:

$$1.1. \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}.$$

$$1.2. \int_{|z|=1/2} z^2 \sin \frac{1}{z} dz.$$

$$1.3. \int_{|z+1|=4} \frac{z dz}{e^z + 3}.$$

$$1.4. \int_{|z|=4} \frac{e^{iz} dz}{z^3(z-\pi)^3}.$$

$$1.5. \int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{z^3-1} dz, \quad \gamma: x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

$$1.6. \int_{\gamma} \frac{z \sin z}{(z-1)^5} dz, \quad \gamma: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

### 2. Определить характер бесконечно удаленной точки для следующих функций:

$$2.1. f(z) = \frac{z^3 - z^2 + z + 6}{z^2}.$$

$$2.2. f(z) = \frac{z+1}{z^4}.$$

$$2.3. f(z) = \frac{e^z}{z^2}.$$

$$2.4. f(z) = \cos \frac{1}{z}.$$

$$2.5. f(z) = e^{1/z^2}.$$

$$2.6. f(z) = z^3 e^{1/z}.$$

### 3. Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислить следующие интегралы:

$$3.1. \int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z^3} dz.$$

$$3.2. \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^{12}}.$$

$$3.3. \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-1} dz.$$

$$3.4. \int_{|z|=3} z^2 \sin \frac{1}{z} dz .$$

$$3.5. \int_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz .$$

# Практическое занятие 9.

## ПРИЛОЖЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

### I. ТЕОРИЯ

Теория вычетов находит многочисленные применения не только при вычислении интегралов от функций комплексной переменной, но и при вычислении различных определенных интегралов от функций действительной переменной, причем часто удается достаточно просто получить ответ и в тех случаях, когда применение других методов анализа оказывается затруднительным. Рассмотрим ряд типичных случаев.

1°. Интегралы вида  $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ . Здесь  $R$  – рациональная функция своих

аргументов. Интегралы такого типа сводятся к интегралам от аналитической функции комплексной переменной по замкнутому контуру. Обозначим интеграл через  $I$  и сделаем замену переменной:  $z = e^{i\varphi}$ . Очевидно,  $d\varphi = \frac{1}{i} \frac{dz}{z}$ ,  $\cos \varphi = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ ,  $\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)$ .

Тогда

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R\left(z + \frac{1}{z}, z - \frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (1)$$

Подынтегральная функция в (1) представляет рациональную функцию

$$\tilde{R}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}, \quad (2)$$

которая аналитична внутри круга  $|z|=1$  всюду, за исключением конечного  $N \leq m$  числа особых точек  $z_k$ , являющиеся нулями знаменателя (17). Тогда

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^N \frac{1}{(\alpha_k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{\alpha_k - 1}}{dz^{\alpha_k - 1}} [(z - z_k)^{\alpha_k} \tilde{R}(z)]. \quad (3)$$

где  $z_k$  – полюсы функции  $\tilde{R}(z)$ . Пусть  $\alpha_k$  – порядок полюса  $z_k$ .

2°. Интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ . Рассмотрим применение теории вычетов к вычислению несобственных интегралов первого рода указанного вида. Для этого используем некоторые вспомогательные положения.

**Лемма 1.** Пусть функция  $f(z)$  является аналитической в верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  всюду за исключением конечного числа изолированных особых точек и существуют такие положительные числа  $R_0$ ,  $M$  и  $\delta$ , что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию  $|z| > R_0$  имеет место оценка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad |z| > R_0. \quad (4)$$

Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (5)$$

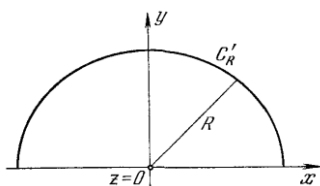




Рис. 1

где контур интегрирования  $C_R'$  представляет собой полуокружность  $|z|=R$ ,  $\text{Im } z > 0$  в верхней полуплоскости (рис. 1).

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z \geq 0$ , причем ее аналитическое продолжение, функция  $f(z)$ , удовлетворяет условиям леммы 6.1 и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res} [f(z), z_k], \quad (6)$$

где  $z_k$  – особые точки  $f(z)$  в верхней полуплоскости.

3°. Интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$ . Вычисление этого класса несобственных интегралов с помощью теории вычетов основано на применении следующей леммы.

**Лемма 2 (лемма Жордана).** Пусть функция  $f(z)$  является аналитической в верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$  всюду за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно относительно  $\arg z$  ( $0 \leq \arg z \leq \pi$ ) стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ . Тогда при  $a > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R'} e^{ia\zeta} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (7)$$

где  $C_R'$  – дуга полуокружности  $|z|=R$ ,  $\text{Im } z > 0$ .

**Замечание.** Если  $a < 0$ , а функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям леммы Жордана в нижней полуплоскости, то формула (24) имеет место, если  $C_R'$  – дуга полуокружности  $|z|=R$ ,  $\text{Im } z \leq 0$ . Аналогичные утверждения имеют место и для  $a = \pm i\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) при интегрировании соответственно в правой ( $\text{Re } z \geq 0$ ) или левой ( $\text{Re } z \leq 0$ ) полуплоскости.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z \geq 0$ , причем ее аналитическое продолжение, функция  $f(z)$ , удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res} [f(z), z_k], \quad (8)$$

где  $z_k$  – особые точки  $f(z)$  в верхней полуплоскости.

4°. Интегрирование многозначных функций. Если аналитическое продолжение функции  $f(x)$  с действительной оси в область, ограниченную контуром интегрирования, является многозначной функцией  $F(z)$  на полной комплексной плоскости, то выбирают такой контур интегрирования, чтобы внутри него не содержалось точек разветвления  $F(z)$ , и далее рассматривают лишь однозначную ветвь  $f(z)$  этой функции. Рассмотрим несколько типичных случаев.

4.1°. Интегралы вида  $I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Пусть функция  $f(x)$  может быть

аналитически продолжена на всю комплексную плоскость с помощью функции  $f(z)$ , которая является однозначной аналитической функцией за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$  ( $k=1, \dots, N$ ), не лежащих на положительной части действительной оси. Кроме того, пусть  $z = \infty$  является нулем не ниже первого порядка функции  $f(z)$ , а точка  $z = 0$  – устранимая особая точка. Тогда функция

$$\varphi(z) = z^{\alpha-1} f(z) \quad (9)$$

в области  $G$  [ $0 < \arg z < 2\pi$ ], представляющей собой плоскость  $z$  с разрезом по положительной части действительной оси, является аналитическим продолжением

подынтегральной функции, совпадающей с ней на верхнем берегу разреза ( $\arg z = 0$ ). Функция  $\varphi(z)$  является однозначной аналитической функцией в области  $G$ , и ее особые точки совпадают с особыми точками  $z_k$  функции  $f(z)$ . Рассмотрим в области  $G$  замкнутый контур  $\gamma$ , представленный на рис. 2. По основной теореме теории вычетов

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{k=1}^N \text{res} [z^{\alpha-1} f(z), z_k]. \quad (10)$$

4.2°. Интегралы вида  $I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} f(x) dx$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Пусть функция  $f(x)$ , заданная

на отрезке действительной оси  $(0, 1)$ , может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость с помощью функции  $f(z)$ , которая является однозначной аналитической функцией за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$

( $k=1, \dots, N$ ), не лежащих на отрезке  $[0, 1]$ , а точка  $z = \infty$  – устранимая особая точка.

Тогда искомый интеграл может быть вычислен методами, рассмотренными выше. Аналитическое продолжение подынтегральной функции

$$\Phi(z) = z^{\alpha-1} (1-z)^{-\alpha} f(z)$$

имеет две точки разветвления:  $z = 0$  и  $z = 1$ . Рассмотрим область  $G$ , представляющую полную плоскость  $z$  с разрезом по отрезку действительной оси  $[0, 1]$ . Ветвь функции  $\Phi(z)$ , совпадающая на верхнем берегу разреза с подынтегральной функцией  $I$ , является однозначной аналитической функцией в  $G$ .

Рассмотрим в области  $G$  замкнутый контур  $\gamma$ , представленный на рис. 3. По основной теореме теории вычетов

$$I = \frac{\pi a_0}{\sin \pi \alpha} + \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{k=1}^N \text{res} [z^{\alpha-1} (1-z)^{-\alpha} f(z), z_k]. \quad (11)$$

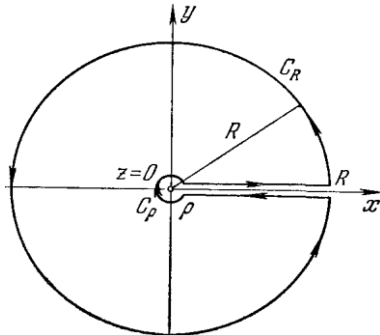


Рис. 2

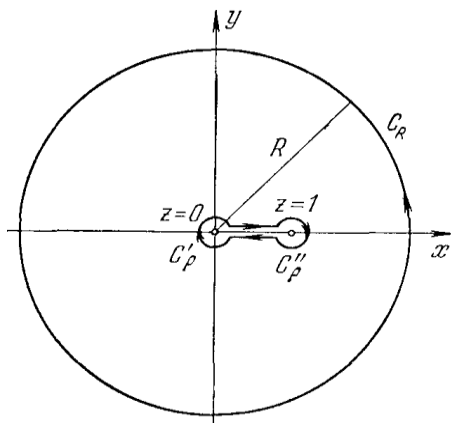


Рис. 3

## II. ЗАДАЧИ

Вычислить следующие интегралы:

$$1.1. \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

$$1.2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx.$$

$$1.3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

$$1.4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6}.$$

$$2.1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

$$2.2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^4} dx \quad (\alpha > 0).$$

$$2.3. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \sin \alpha x}{(1 + x^2)^2} dx \quad (\alpha > 0).$$

$$3.1. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$3.2. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx.$$

$$4.1. \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bxdx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$4.2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 + e^x} dx \quad (0 < a < 1, 0 < b < 1).$$

$$5.1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} \quad (a > 1).$$

$$5.2. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a + b \cos x} dx \quad (a > b > 0).$$

Практическое занятие 10.  
ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА. ТЕОРЕМА РУШЕ

I. ТЕОРИЯ

Пусть в области  $G$  задана однозначная мероморфная функция  $f(z)$ , аналитическая всюду в  $G$ , за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$  ( $k=1, \dots, p$ ). Предположим, что на границе  $\gamma$  области  $G$  нет нулей и особых точек  $f(z)$ , и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad (1)$$

которую называют *логарифмической производной* функции  $f(z)$ , а вычеты функции  $\varphi(z)$  в ее особых точках  $z_m$  ( $k=1, \dots, M$ ) – *логарифмическими вычетами* функции  $f(z)$ . Особыми точками функции  $\varphi(z)$  являются нули  $\tilde{z}_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) и полюсы  $z_k$  ( $k=1, \dots, p$ ) функции  $f(z)$ . Пусть точка  $\tilde{z}_k$  является нулем порядка  $n_k$  функции  $f(z)$ . Тогда логарифмический вычет  $f(z)$  в нуле порядка  $n_k$  равен  $n_k$ , т. е. порядку нуля:

$$\operatorname{res} \left[ \frac{f'(z)}{f(z)}, \tilde{z}_k \right] = n_k, \quad (2)$$

а в простом полюсе порядка  $p_k$  логарифмический вычет равен порядку полюса, взятому со знаком минус:

$$\operatorname{res} \left[ \frac{f'(z)}{f(z)}, z_k \right] = -p_k. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) позволяют подсчитать число нулей аналитической функции.

**Теорема 1.** Пусть в области  $G$  задана однозначная мероморфная функция  $f(z)$ , аналитическая всюду в  $G$ , за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$ , и пусть  $f(z)$  не обращается в нуль ни в одной точке границы  $\gamma$  области  $G$ . Тогда разность между полным числом нулей и полным числом полюсов определяется выражением

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta. \quad (4)$$

Геометрический смысл этой теоремы называется *принципом аргумента*:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} d \ln f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} d [\ln |f(\zeta)| + i \arg f(\zeta)] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} d \ln |f(\zeta)| + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma^+} d \arg f(\zeta). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю, т. к. вариация (изменение) действительной однозначной функции  $\ln |f(\zeta)|$  при обходе точкой  $\zeta$  замкнутого контура  $\gamma$  равна нулю. Второе слагаемое представляет полную вариацию аргумента функции  $f(\zeta)$  при обходе точкой  $\zeta$  замкнутого контура  $\gamma$ , деленную на  $2\pi$ . Таким образом, принцип аргумента определяется равенством

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \text{Var}[\arg f(z)]_{\gamma^+}. \quad (5)$$

При полном обходе точкой  $z$  контура  $\gamma$  на плоскости  $z$  соответствующая ей точка  $w = f(z)$  описывает некоторый замкнутый контур  $C$  на плоскости  $w$ . При этом точка  $w = 0$  может оказаться как вне, так и внутри области, ограниченной контуром  $C$ . В первом случае  $\text{Var}[\arg w]_C = 0$ . Во втором случае  $\text{Var}[\arg w]_C$  определяется числом полных обходов вокруг точки  $w = 0$ , которые совершает точка  $w$  при своем движении по контуру  $C$ . При этом точка  $w$  может обходить точку  $w = 0$  как в положительном, так и в отрицательном направлении. Число оборотов соответственно может быть положительным или отрицательным.

В частном случае, когда функция  $w = f(z)$  является аналитической в области  $G$  и на ее границе  $C$ , формула (4) позволяет подсчитать число нулей этой функции при

$$P = 0. \text{ Это имеет место, например, для многочлена } Q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

**Пример 1.** Найти число корней в правой полуплоскости  $\text{Re } z > 0$  уравнения

$$Q_5(z) \equiv z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1 = 0.$$

**Решение.** В силу принципа аргумента число нулей внутри контура  $C$  равно

$$N = \frac{1}{2\pi} \text{Var}[\arg Q_5]_C,$$

где контур  $C$  состоит из полуокружности  $C_R: |z| = R, \text{Re } z > 0$  и ее диаметра на мнимой оси. Имеем

$$Q_5(z) = z^5 \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z^3} - \frac{8}{z^2} - \frac{1}{z^5} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \arg Q_5(\arg \left[ z^5 \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z^3} - \frac{8}{z^2} - \frac{1}{z^5} \right) \right] z) &= \\ &= \arg z^5 + \arg \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z^3} - \frac{8}{z^2} - \frac{1}{z^5} \right) = \\ &= 5 \arg z + \arg \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z^3} - \frac{8}{z^2} - \frac{1}{z^5} \right). \end{aligned}$$

Приращение  $\arg Q_5(z)$  при обходе в положительном направлении полуокружности  $C_R$  при  $R \rightarrow \infty$  равно

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Var} \arg Q_5(z) &= 5 \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Var} \arg z + \\ &+ \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Var} \arg \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 2\frac{1}{z^3} - \frac{8}{z^2} - \frac{1}{z^5} \right) = 5\pi. \end{aligned}$$

Пусть теперь точка  $z$  движется по мнимой оси от  $z = iR$  до  $z = -iR$ . Положим  $z = it, -R \leq t \leq R$ . Тогда

$$Q_5(it) = u(t) + iv(t) = t^4 - 1 + i(t^5 - 2t^3 - 8t),$$

откуда получаем параметрические уравнения линии, которую описывает точка  $w = Q_5(z)$  в плоскости  $(u, v)$ , когда точка  $z$  пробегает мнимую ось сверху вниз:

$$\begin{cases} u = t^4 - 1, \\ v = t^5 - 2t^3 - 8t. \end{cases}$$

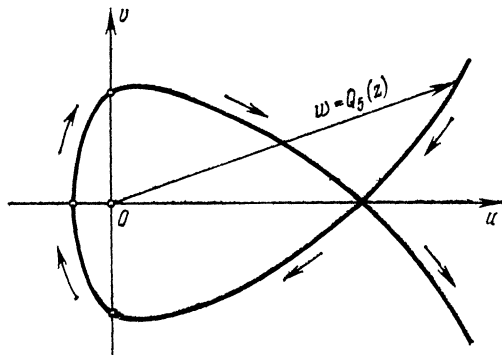


Рис. 1

Во многих случаях нахождение числа нулей аналитической функции значительно облегчается следующей теорема.

**Теорема 6 (теорема Руше).** Пусть функции  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  являются аналитическими в замкнутой области  $\bar{G}$ , причем на границе  $\gamma$  области  $G$  имеет место неравенство

$$|f(z)|_{\gamma} > |\varphi(z)|_{\gamma}. \quad (6)$$

Тогда полное число нулей в области  $G$  функции  $F(z) = f(z) + \varphi(z)$  равно полному числу нулей функции  $f(z)$ .

Рис. 7

**Пример 2.** Найти полное число нулей функции  $F(z) = z^8 - 5z^5 - 2z + 1$  внутри круга  $|z| < 1$ .

**Решение.** Представим  $F(z)$  в виде  $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ , где  $f(z) = -5z^5 + 1$ ,  $\varphi(z) = z^8 - 2z$ . Тогда

$$|f(z)|_{|z|=1} \geq |-5z^5|_{|z|=1} - 1 = 4, \quad |\varphi(z)|_{|z|=1} \leq |z^8|_{|z|=1} + |2z|_{|z|=1} = 3,$$

откуда  $|f(z)|_{|z|=1} > |\varphi(z)|_{|z|=1} > 0$ . Следовательно, полное число нулей функции  $F(z)$  равно полному числу нулей функции  $f(z)$ , которая имеет ровно пять нулей:

$$z_k = \frac{1}{\sqrt[5]{5}} e^{i \frac{2\pi k}{5}} \quad (k = 0, 1, \dots, 4).$$

## II. ЗАДАЧИ

**1.** Найти вычеты логарифмических производных данных функций относительно их нулей и полюсов:

1.1.  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ .

1.2.  $f(z) = \cos^3 z$ .

1.3.  $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ .

1.4.  $f(z) = \sin z$ .

**2.** Найти логарифмические вычеты данных функций относительно указанных контуров:

2.1.  $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ ,  $\gamma: |z| = 2$ .

2.2.  $f(z) = \cos z + \sin z$ ,  $\gamma: |z| = 4$ .

2.3.  $f(z) = (e^z - 2)^2$ .

**3.** Определить число корней в верхней полуплоскости для следующих уравнений:

3.1.  $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0$ .

3.2.  $z^{12} - z + 1 = 0$ .

**4.** Пользуясь теоремой Руше, найти число корней данных уравнений в указанных областях:

4.1.  $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ ,  $|z| < 2$ .

4.2.  $z^8 - 6z^6 - z^3 + 2 = 0$ ,  $|z| < 1$ .

**5.** Определить количество корней данных уравнений в указанных кольцах:

5.1.  $4z^4 - 29z^2 + 25 = 0$ ,  $2 < |z| < 3$ .

5.2.  $z^6 - 8z + 10 = 0$ ,  $1 < |z| < 3$ .

**6.** Определить число корней данных уравнений в указанных областях:

6.1.  $z^2 - \cos z = 0$ ,  $|z| < 2$ .

6.2.  $2^z = 4z$ .

## Практическое занятие 11–12. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

### I. ТЕОРИЯ

#### 1. Понятие конформного отображения

Отображение окрестности точки  $z_0$  на окрестность точки, осуществляемое функцией  $w = f(z)$ , называется конформным, если в точке  $z_0$  оно обладает свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений.

Критерием конформности отображения  $f$  в точке  $z_0$  является комплексная дифференцируемость функции  $f$  в этой точке  $z_0$  вместе с условием  $f'(z_0) \neq 0$ .

Геометрически  $|f'(z_0)|$  означает коэффициент растяжения длин в точке  $z_0$  при отображении  $f$ . Этот коэффициент не зависит от выбора кривой с началом в точке  $z_0$ . Другими словами все кривые с началом в точке  $z_0$  растягиваются в этой точке одинаково, то есть бесконечно малая окружность с центром в  $z_0$  переходит в кривую, отличающуюся от окружности с центром в  $w_0 = f(z_0)$  на малые высших порядков (круговое свойство) (рис. 1).

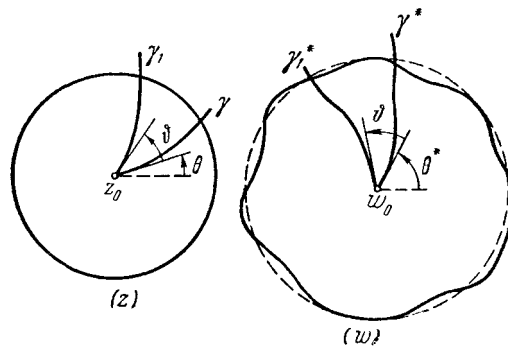


Рис. 1

Геометрически  $\arg f'(z_0)$  означает угол поворота кривой в точке  $z_0$  при отображении  $f$ . Этот угол не зависит от выбора кривой с началом в точке  $z_0$ , все кривые с началом в точке  $z_0$  поворачиваются на одинаковый угол, то есть угол между двумя любыми кривыми с началом в  $z_0$  сохраняется при отображении (свойство сохранения углов).

#### 2. Конформные отображения, осуществляемые основными элементарными функциями

##### 2.1. Дробно-линейные функции:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (1)$$

где  $a, b, c, d$  – комплексные числа,  $z$  – комплексная переменная.

При  $c = 0$  и  $d \neq 0$  функция (1) обращается в линейную функцию:



$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B, A \neq 0. \quad (2)$$

Отображение (2) будет конформным и однолиственным во всей комплексной плоскости  $\bar{C}$ . Рассмотрим три частных случая.

а)  $w = z + B$ . При таком отображении точка  $z$  переносится в точку  $w$  в направлении вектора  $B$  на расстояние, равное его длине. Полагая  $w = u + iv$ ,  $z = x + iy$ ,  $B = b_1 + b_2$ , запишем преобразование (2) в виде двух формул:  $u = x + b_1$ ,  $v = y + b_2$ . Последние представляют собой известные формулы *параллельного переноса* осей координат.

б)  $w = Az$ . Пусть  $A = e^{i\alpha}$ . Тогда  $|w| = |z|$ ,  $\arg w = \arg z + \alpha$ , т. е. точка  $z$  переходит в точку  $w$  при помощи поворота вектора  $z$  около нулевой точки на угол  $\alpha$ . Таким образом, отображение б) есть *вращение* около начала координат на угол  $\alpha$ . Кроме того можно написать:  $w = u + iv = (x + iy)(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ , откуда находим:  $u = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ ,  $v = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ . Последние равенства являются известными формулами поворота осей координат.

в)  $w = rz$ , где  $r$  – действительное постоянное положительное число. В данном случае имеем:  $|w| = r|z|$ ,  $\arg w = \arg z$ , т. е. отображение в) есть *преобразование подобия* с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия  $r$ .

Общее линейное преобразование  $w = Az + B$  путем трех простейших рассмотренных отображений.

При  $a = b = d = 0$  и  $c = 1$  из (1) получим функцию  $w = 1/z$ , которая осуществляет преобразование подобия и *инверсию* относительно окружности радиуса единица. Действительно, полагая  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = \rho e^{i\psi}$ , получим  $\rho = 1/r$ ,  $\psi = -\varphi$ .

Для общего отображения (1) справедливы следующие утверждения.

1°. Дробно-линейная функция (1) осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение  $\bar{C}$  на  $\bar{C}$ .

2°. Дробно-линейное отображение (1) конформно во всех точках  $\bar{C}$ .

Приведем два геометрических свойства дробно-линейных отображений. Будем называть *окружностью* на  $\bar{C}$  любую окружность или прямую на комплексной плоскости.

3°. Произвольное дробно-линейное отображение преобразует любую окружность на  $\bar{C}$  тоже в окружность на  $\bar{C}$  (круговое свойство дробно-линейных отображений).

Для формулировки второго геометрического свойства введем определение. Точки  $z$  и  $z^*$  будем называть *симметричными* относительно окружности  $\Gamma$  на  $\bar{C}$ , если они

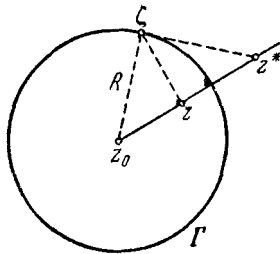


Рис. 2

лежат на одном луче с вершиной в центре  $\Gamma$  так, что произведение их расстояний до центра равно квадрату радиуса  $\Gamma$  (рис. 2).

4°. Произвольное дробно-линейное отображение преобразует любые точки  $z$  и  $z^*$ , симметричные относительно окружности  $\Gamma$  на  $\bar{C}$ , в точки  $w$  и  $w^*$ , симметричные относительно образа этой окружности (свойство сохранения симметричных точек).

## 2.2. Функции $w = z^n$ и $w = \sqrt[n]{z}$ . Степенная функция

$$w = z^n, \quad (3)$$

где  $n$  – натуральное число, голоморфна во всей плоскости  $C$ . Ее производная  $\frac{dw}{dz} = nz^{n-1} \neq 0$  всюду при  $z \neq 0$ , следовательно, отображение (3) конформно в каждой точке  $z \in C \setminus \{0\}$ . В полярных координатах  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = \rho e^{i\psi}$ . Тогда

$$\rho = r^n, \quad \psi = n\varphi, \quad (4)$$

то есть отображение (3) увеличивает углы с вершиной в точке  $z = 0$  и поэтому при  $n > 1$  не конформно в этой точке.

Из (4) следует, что две точки  $z_1$  и  $z_2$ , для которых

$$|z_1| = |z_2|, \quad \arg z_1 = \arg z_2 + k \frac{2\pi}{n}, \quad (5)$$

переходят в одну точку  $w$ . Следовательно, при  $n > 1$  отображение (3) многолистно в  $C$ .

Условию (5) удовлетворяют, например, секторы

$$k \frac{2\pi}{n} < \varphi < (k+1) \frac{2\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (6)$$

каждый из которых преобразуется в область  $\{0 < \arg w < 2\pi\}$ , то есть в плоскость  $w$  с выброшенной положительной полуосью. На рис. 3 показан пример такого отображения (соответствие сеток полярных координат) при  $n = 5$ .

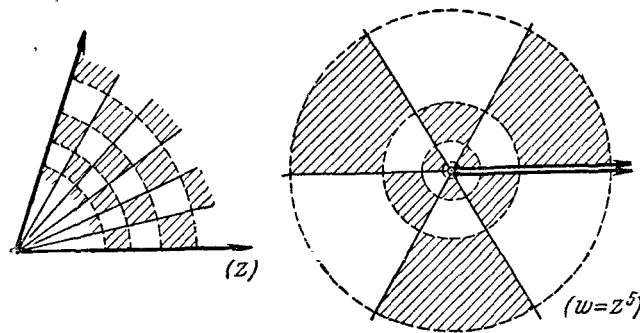


Рис. 3

Функция

$$w = \sqrt[n]{z}, \quad (7)$$

обратная к функции  $w = z^n$ ,  $n$ -значна при  $z \neq 0$ .

В любой области  $D$ , которая не содержит ни одной замкнутой кривой, обходящей точку  $z = 0$ , можно выделить  $n$  непрерывных и однозначных функций, принимающих каждая одно из значений  $\sqrt[n]{z}$ . Эти  $n$  функций называются *ветвями* многозначной функции  $w = \sqrt[n]{z}$ ; их значения в каждой фиксированной точке отличаются друг от друга множителем  $\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ . Каждая такая ветвь осуществляет однолистное отображение области  $D$ , поэтому существует производная обратной функции:

$$\left( \sqrt[n]{z} \right)' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{z}}{z} = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}. \quad (8)$$

Если же область  $D$  содержит хотя бы одну замкнутую кривую, обходящую точку  $z = 0$ , то в такой области ветви функции  $\sqrt[n]{z}$  нельзя отделить друг от друга (рис. 4, пунктирные линии).

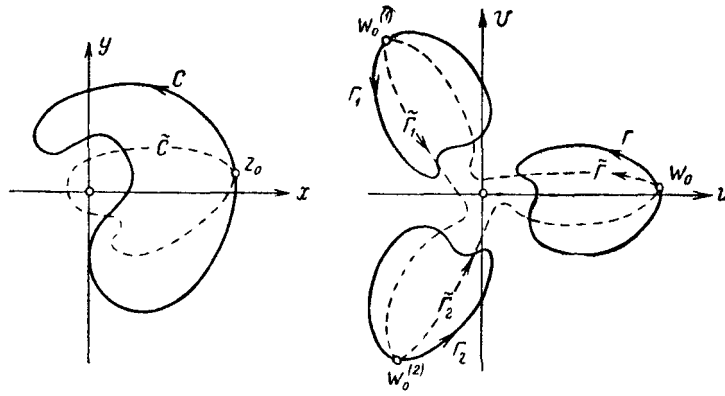


Рис. 4

Точка  $z=0$ , в любой окрестности которой нельзя отделить  $n$  отдельных ветвей функции  $\sqrt[n]{z}$ , называется точкой *ветвления* этой функции.

2.3. Функция Жуковского. Функцией Жуковского называют рациональную функцию

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad (9)$$

голоморфную в области  $C \setminus \{0\}$ . Ее производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right)$$

отлична от нуля всюду в этой области, кроме точек  $z = \pm 1$ . Точке  $z=0$  соответствует  $w = \infty$ , и конформность в этой точке следует из того, что производная

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{w} \right) = 2 \frac{1 - z^2}{(1 + z^2)^2}$$

отлична от нуля при  $z=0$ . Конформность отображения  $w = f(z)$  в точке  $z = \infty$  сводится к конформности отображения  $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$  в точке  $z=0$ . В случае функции Жуковского

$f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ , поэтому отображение (3.9) конформно в точке  $z = \infty$ . Таким образом, отображение (3.9) не конформно только в точках  $z = \pm 1$ .

Установим условия однолиственности функции (3.9) в какой-либо области  $D$ . Пусть  $z_1$  и  $z_2$  она переводит в одну точку, тогда

$$z_1 + \frac{1}{z_1} - \left( z_2 + \frac{1}{z_2} \right) = (z_1 - z_2) \left( 1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right),$$

и при  $z_1 \neq z_2$  получим условие однолиственности функции Жуковского в какой-либо области  $D$ :  $z_1 z_2 \neq 1$ .

Примером области, удовлетворяющей условию однолиственности, является внешность единичного круга  $D = \{z \in \bar{C} : |z| > 1\}$ . Чтобы наглядно представить отображение (9), положим  $z = re^{i\varphi}$ ,  $w = u + iv$ , где

$$u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \quad (10)$$

Из этих соотношений следует, что окружности  $\{|z| = r_0, r_0 > 1\}$  функция Жуковского преобразует в эллипсы с полуосями  $a_{r_0} = \frac{1}{2} \left( r_0 + \frac{1}{r_0} \right)$  и  $b_{r_0} = \frac{1}{2} \left( r_0 - \frac{1}{r_0} \right)$  и фокусами в точках  $\pm 1$ , т. к.  $\forall r_0: a_{r_0} - b_{r_0} = 1$ . При  $r_0 \rightarrow 1$   $b_{r_0} \rightarrow 0$  и эллипсы стягиваются к отрезку  $[-1, 1] \in R$ ; при больших  $r_0$  разность  $a_{r_0} - b_{r_0} = \frac{1}{r_0}$  мала и эллипсы мало отличаются от окружностей. Лучи  $\{\varphi_0, 1 < r < \infty\}$  преобразуются в части гипербол  $\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1$  с теми же фокусами  $\pm 1$ . Семейство гипербол ортогонально семейству эллипсов.

Таким образом, функция Жуковского осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение внешности единичного круга (включая бесконечную точку) на внешность отрезка  $[-1, 1]$  действительной оси.

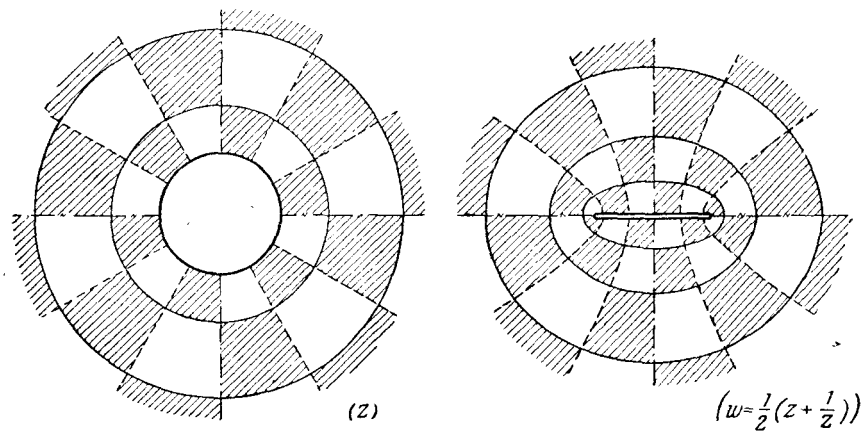


Рис. 5

В точках  $z = \pm 1$  отображение (9) не конформно. В этом можно убедиться, если представить функцию Жуковского в виде

$$\frac{w-1}{w+1} = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2. \quad (11)$$

Из (11) следует, что отображение (9) представляет собой композицию отображений

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1}, \quad w = \zeta^2, \quad w = \frac{1+w}{1-w}. \quad (12)$$

Первое и третье из отображений (12) дробно-линейны и, следовательно, конформны всюду в  $\bar{C}$ . Отображение  $w = \zeta^2$  удваивает углы в точках  $\zeta = 0$  и  $\zeta = \infty$ , которым соответствуют точки  $z = \pm 1$ .

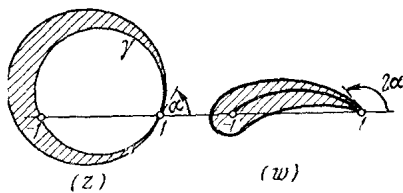


Рис. 6

Можно также убедиться в том, что окружности, касающиеся  $\gamma$  извне в одной из точек  $\pm 1$ , при этом отображении переходят в замкнутые кривые с характерным острием,

Используя разложение (12), можно убедиться, что функция Жуковского осуществляет однолистное и конформное отображение внешности окружности  $\gamma$ , изображенной на рис. 6, на внешность дуги окружности с концами в точках  $\pm 1$ , составляющей в точке  $w=1$  угол  $2\alpha$  с действительной осью.

напоминающим профиль крыла самолета. Такого рода профили впервые были предложены русскими учеными С.А. Чаплыгиным и Н.Е. Жуковским, поэтому они называются *профилями Жуковского-Чаплыгина*. Меняя угол  $\alpha$  наклона касательной к окружности в точке 1 и радиус меньшей окружности, можно получать различные профили. Профили Жуковского-Чаплыгина являются основными профилями во всех аэродинамических исследованиях по теории крыла самолета.

2.4. Показательная и логарифмическая функции. Определим функцию  $e^z$  соотношением, которым она определяется в действительном анализе:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n. \quad (13)$$

Основные свойства показательной функции.

1°. Функция голоморфна во всей плоскости  $C$ , т. к. выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y.$$

2°. Для функции  $e^z$  сохраняется обычная формула дифференцирования:

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + i e^x \sin y) = e^z. \quad (14)$$

Отображение  $w = e^z$  конформно в каждой точке  $C$ , т. к.  $|e^z| = e^x > 0$  и  $(e^z)' \neq 0$ .

3°. Для функции  $e^z$  сохраняется обычная теорема сложения:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}. \quad (15)$$

4°. Функция  $e^z$  периодическая с основным периодом  $2\pi i$ . Так как по формуле Эйлера  $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ , то по теореме сложения  $\forall z \in C: e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$ .

Для однолиственности отображения  $w = e^z$  в какой-либо области  $D$  необходимо и достаточно, чтобы эта область не содержала ни одной пары точек, связанных соотношением

$$z_1 - z_2 = 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Примером области, удовлетворяющей этому условию, является полоса  $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ . Полагая  $z = x + iy$  и  $w = \rho e^{i\psi}$ , получим

$$\rho = e^x, \quad \psi = y. \quad (16)$$

Это отображение преобразует прямые  $\{y = y_0\}$  в лучи  $\{\psi = y_0\}$ , а отрезки  $\{x = x_0, 0 < y < 2\pi\}$  – в окружности с выколотой точкой  $\{\rho = e^{x_0}, 0 < \psi < 2\pi\}$  (рис. 7). Полоса  $\{0 < y < 2\pi\}$  преобразуется в плоскость  $w$  с выброшенной положительной полуосью. Соответственно полоса  $\{0 < y < \pi\}$  преобразуется в верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ .

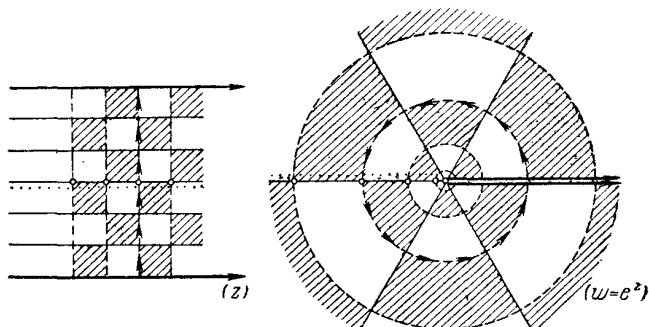


Рис. 7

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной:

$$w = \ln z. \quad (17)$$

Из определения следует основное свойство логарифмов: если  $w_1 = \ln z_1$  и  $w_2 = \ln z_2$ , то

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln(z_1 z_2). \quad (18)$$

В частности

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (19)$$

Обозначим многозначную функцию специальным символом:

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi). \quad (20)$$

Символом  $\ln z$  будем обозначать одно из значений  $\operatorname{Ln} z$ . Если область  $D$  не содержит замкнутых кривых, обходящих точку  $z = 0$ , то можно выделить бесчисленное множество непрерывных и однозначных ветвей многозначной функции  $w = \ln z$ , значения которых в каждой фиксированной точке отличаются друг от друга слагаемыми  $2k\pi i$ . Все такие ветви  $\operatorname{Ln} z$  будут аналитическими функциями.

Если же область  $D$  содержит хотя бы одну замкнутую кривую, охватывающую точку  $z = 0$ , то в такой области ветви  $\operatorname{Ln} z$  нельзя отделить друг от друга. Точка  $z = 0$ , в которой как бы соединяются все ветви  $\operatorname{Ln} z$ , называется *точкой разветвления* этой функции.

**2.5. Тригонометрические и гиперболические функции.** В рамках теории однозначных голоморфных функций под *аналитическим продолжением* функции  $f$ , заданной на некотором множестве  $M \subset C$ , будем понимать доопределение ее до функции  $f_0$ , заданной в некоторой области  $D \supset M$ , такое, что  $f_0$  голоморфна в  $D$ , а ее сужение на множество  $M$  совпадает с  $f$ :  $f_0|_M = f$ .

Задача аналитического продолжения не всегда разрешима. Если функция  $f$  голоморфна в некоторой области  $D$  и не продолжается аналитически ни в какую область, строго содержащую  $D$ , то будем называть  $D$  *областью голоморфности функции  $f$* .

Из формулы Эйлера для действительного переменного  $x$  имеем  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ,  $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ , откуда

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Эти формулы можно использовать для аналитического продолжения косинуса и синуса в комплексную плоскость  $C$ :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (21)$$

Рассмотрим отображение, осуществляемое функцией  $\sin z$ . Полагая

$$iz = z_1, \quad e^{z_1} = z_2, \quad z_3 = -iz_2 = \frac{e^{iz}}{i}, \quad (22)$$

получим:

$$w = \frac{1}{2} \left( z_3 + \frac{1}{z_3} \right) = \sin z. \quad (23)$$

Отображение (23) есть суперпозиция рассмотренных ранее отображений. Найдем сначала условия его однолистности. Пусть область  $D$  переходит при отображениях (23) последовательно в  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ . Первое и третье отображения однолистные всюду; для однолистности второго необходимо и достаточно, чтобы  $D_1$  не содержала ни одной пары точек  $z_1'$  и  $z_1''$ , для которых  $z_1' - z_1'' = 2k\pi i$ , где  $k \neq 0$ . Для однолистности третьего отображения необходимо и достаточно, чтобы  $D_3$  не содержала ни одной пары точек  $z_3'$  и  $z_3''$ , для которых  $z_3' z_3'' = 1$  (см. функцию Жуковского). Переходя с помощью формул (3.23) к плоскости  $z$ , получим, что для однолистности отображения  $w = \sin z$  в области  $D$  необходимо и достаточно, чтобы  $D$  не содержала ни одной пары точек  $z'$  и  $z''$ , для которых, с одной стороны,

$$z' - z'' = 2n\pi, \quad (24)$$

и, с другой,  $e^{i(z' + z'')} = -1$ , или

$$z' + z'' = (2n+1)\pi. \quad (25)$$

Этим условиям удовлетворяет, например, полуполоса  $D = \left\{ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0 \right\}$ , которая отображается функцией  $w = \sin z$  на верхнюю полуплоскость (рис. 8).

Лучам  $\{x = x_0, y > 0\}$  соответствует семейство гипербол с фокусами  $\pm 1$ , а отрезкам  $\left\{ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y = y_0 \right\}$  — части эллипсов с теми же фокусами. Вдвое более широкая полоса  $D = \{-\pi < x < \pi, y > 0\}$  преобразуется в нижнюю полуплоскость.

В комплексной области  $\sin z$  не ограничен. Например, на лучах  $x = \pm \frac{\pi}{2}, y > 0$  он принимает действительные значения, по модулю большие 1.

Отображение, реализуемое функцией  $\cos z$ , в силу соотношения  $\cos z = \sin \left( z + \frac{\pi}{2} \right)$  отличается от рассмотренного выше только сдвигом.

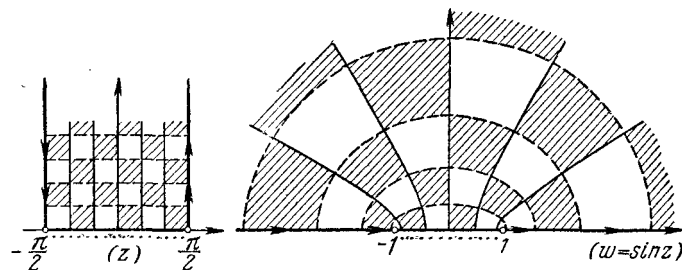


Рис. 8

Тангенс и котангенс для комплексных значений определяются формулами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad (26)$$

и рационально выражаются через показательную функцию:

$$\operatorname{tg} z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}. \quad (27)$$

Эти функции голоморфны всюду в  $\mathbb{C}$ , за исключением тех точек, где знаменатели дробей в формулах (28) обращаются в нуль. В этих точках  $\sin z = 0$ , т. е.  $z = n\pi$  ( $e^{iz} = e^{-iz}$ ,  $iz = -iz + 2n\pi i$ ,  $z = n\pi$ ).

Тангенс и котангенс в комплексной плоскости остаются периодическими с действительным периодом  $\pi$ , для них сохраняются обычные формулы дифференцирования и тригонометрические соотношения.

Отображения, осуществляемые функциями  $w = \operatorname{tg} z$  и  $w = \operatorname{ctg} z$  представляют собой композицию уже известных отображений. Например,  $w = \operatorname{tg} z$  сводится к таким отображениям:

$$z_1 = 2iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad w = -i \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}. \quad (28)$$

Полосу  $\left\{-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right\}$  эта функция однолистно и конформно отображает на внутренность единичного круга (рис.9). Прямые  $\{x = x_0\}$  преобразуются в дуги окружностей, проходящих через точки  $\pm i$ , а отрезки  $\left\{-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, y = y_0\right\}$  — в дуги окружностей, для которых эти точки симметричны.

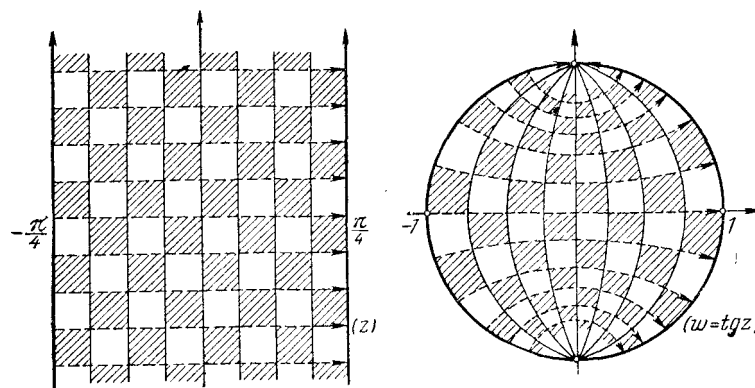


Рис. 9

Гиперболические функции имеют вид

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$



Справедливы соотношения

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \operatorname{sh} z = -i \sin iz, \cos z = \operatorname{ch} iz, \sin z = -i \operatorname{sh} iz.$$

Обратные тригонометрические функции можно выразить через логарифмы. Получим такое выражение, например, для  $w = \arccos z$ . По определению

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2},$$

откуда  $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$ ; решая квадратное уравнение, находим  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ . Знаки  $\pm$  в формуле решения квадратного уравнения можно опустить, если понимать корень как двужначную функцию. Тогда

$$w = \arccos z = -i \ln \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

В силу соотношения  $\left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \left( z - \sqrt{z^2 - 1} \right) = 1$  изменение знака перед корнем сводится к изменению знака перед логарифмом, поэтому знак «-» в последней формуле можно не писать:

$$w = \arccos z = i \ln \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right). \quad (29)$$

Аналогичные формулы можно получить для других функций:

$$\left. \begin{aligned} \arcsin z &= \frac{\pi}{2} - \arccos z = \frac{\pi}{2} - i \ln \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \\ \operatorname{arctg} z &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}, \\ \operatorname{arsh} z &= \ln \left( z + \sqrt{z^2 + 1} \right), \operatorname{arch} z = \ln \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right), \\ \operatorname{arth} z &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}, \operatorname{arcch} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Все эти функции многозначны. Способы выделения их однозначных ветвей аналогичны рассмотренным выше. Все такие ветви будут аналитическими функциями.

**Пример.** Отобразить на верхнюю полуплоскость единичный круг с разрезом, идущим от центра по действительной оси.

**Решение.** 1) С помощью функции  $\omega_1 = \sqrt{z}$  отобразим единичный круг на верхний полукруг. При этом верхний берег разреза  $OA$ , т.е. отрезок  $[-1, 0]$ , остаётся на месте, а нижний берег  $OA'$  перейдёт в отрезок  $[-1, 0]$  на плоскости  $W_1$ .

2) С помощью функции  $\omega_2 = \frac{\omega_1 + 1}{\omega_1 - 1}$  отобразим полученную в 1) полуокружность в первый квадрант плоскости  $W_2$ . При этом точка  $\omega_1 = 1$  перейдёт в точку  $\omega_2 = \infty$ , а точка  $\omega_1 = -1$  перейдёт в точку  $\omega_2 = 0$ .

3) Наконец, с помощью функции  $\omega = \omega_2^2$  отобразим первый квадрат на верхнюю полуплоскость.

$$\text{Окончательно получаем } \omega = \omega_2^2 = \left( \frac{\omega_1 + 1}{\omega_1 - 1} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{z} + 1}{\sqrt{z} - 1} \right)^2.$$

## II. ЗАДАЧИ

1. Указать геометрический смысл (сдвиг, растяжение, поворот) следующих преобразований:

1.1.  $w = z + 3i$ .

1.2.  $w = z + 5$ .

1.3.  $w = iz$ .

1.4.  $w = e^{i\frac{\pi}{6}} z$ .

1.5.  $w = 3z$ .

1.6.  $w = \frac{1-i}{\sqrt{2}} z$ .

2. Найти общий вид линейных функций, осуществляющих преобразования:

2.1. верхней полуплоскости на себя.

2.2. верхней полуплоскости на нижнюю полуплоскость.

2.3. верхней полуплоскости на правую полуплоскость.

3. Найти образы следующих множеств при отображении  $w = \frac{1}{z}$ :

а)  $\arg z = \frac{\pi}{3}$ ;

б)  $|z| = 1, \frac{\pi}{4} < \arg z < \pi$ ;

в)  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ .

4. Найти образы следующих областей при заданных дробно-линейных отображениях:

4.1. Кольцо  $1 < |z| < 2$  при  $w = \frac{z+1}{z+2}$ .

4.2. Внешность круга  $|z| > 1$  при  $w = \frac{z+i}{z-i}$ .

4.3. Круг  $|z| < 1$  при  $w = \frac{z-i}{z+i}$ .

5. Найти точки, симметричные с точкой  $z = 1 + i$  относительно линий:

5.1.  $|z| = \sqrt{2}$ ;

5.2.  $|z - 1 - i| = 2$ .

6. Найти функцию  $w = f(z)$ , отображающую круг  $|z| < 1$  на нижнюю полуплоскость так, чтобы точки  $1, i, -i$  перешли в точки  $1, 0, -1$ .

7. Отобразить сектор  $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$  на единичный круг  $|w| < 1$  так, чтобы точка  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$  перешла в центр  $w_1 = 0$ , а точка  $z_2 = 0$  — в точку  $w_2 = 1$ .

8. Найти функцию, отображающую горизонтальную полосу  $\{0 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq \pi\}$  на верхний полукруг  $|z| < 1$ .

**9.** Отобразить на верхнюю полуплоскость единичный круг с разрезом, идущим от центра по действительной оси.

Решение. 1) С помощью функции  $\omega_1 = \sqrt{z}$  отобразим единичный круг на верхний полукруг. При этом верхний берег разреза  $OA$ , т.е. отрезок  $[-1,0]$ , остаётся на месте, а нижний берег  $OA'$  перейдёт в отрезок  $[-1,0]$  на плоскости  $W_1$ .

2) С помощью функции  $\omega_2 = \frac{\omega_1 + 1}{\omega_1 - 1}$  отобразим полученную в 1) полуокружность в первый квадрант плоскости  $W_2$ . При этом точка  $\omega_1 = 1$  перейдёт в точку  $\omega_2 = \infty$ , а точка  $\omega_1 = -1$  перейдёт в точку  $\omega_2 = 0$ .

3) Наконец, с помощью функции  $\omega = \omega_2^2$  отобразим первый квадрат на верхнюю полуплоскость.

$$\text{Окончательно получаем } \omega = \omega_2^2 = \left( \frac{\omega_1 + 1}{\omega_1 - 1} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{z} + 1}{\sqrt{z} - 1} \right)^2.$$

Практическое занятие 13–14.  
**ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. НАХОЖДЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ И  
ОРИГИНАЛОВ**

**I. ТЕОРИЯ**

Основу методов операционного исчисления составляет идея интегральных преобразований, связанная с сопоставлением функции  $f(t)$  действительной переменной некоторой функции  $F(p)$  комплексной переменной с целью облегчения техники вычислений. Пусть, например, требуется найти функцию  $f(t)$  из некоторого уравнения, содержащего эту функцию под знаками производных и интегралов. Операционный метод решения задачи сводится к следующим этапам:

- 1) от искомой функции-оригинала  $f(t)$  переходят к ее изображению  $F(p)$ ;
- 2) над изображением  $F(p)$  производят операции, соответствующие заданным операциям над  $f(t)$ , в результате получают операторное уравнение относительно  $F(p)$ . При этом операции над изображением оказываются значительно более простыми, например: дифференцированию соответствует умножение на переменную  $p$ , интегрированию – деление на  $p$  и т. д.;
- 3) полученное операторное уравнение решают относительно  $F(p)$ , что обычно сводится к простым алгебраическим операциям;
- 4) от найденного изображения  $F(p)$  переходят к оригиналу  $f(t)$ , который и является искомой функцией.

Рассмотрим далее преобразование Лапласа, которое играет основную роль в операционном исчислении и его приложениях.

**2. Определение преобразования Лапласа**

Определим класс функций  $f(t)$ , для которых преобразование Лапласа заведомо реализуемо. *Функцией-оригиналом* называется функция  $f(t)$  действительного аргумента  $t$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1°. Функция  $f(t)$  удовлетворяет условию Гельдера всюду на оси  $t$ , кроме отдельных точек, где она имеет разрывы первого рода, причем на каждом конечном интервале таких точек конечное число. Это означает, что для каждого  $t$ , кроме точек разрыва, существуют положительные постоянные  $A$ ,  $\alpha \leq 1$  и  $h_0$  такие, что

$$|f(t+h) - f(t)| \leq A|h|^\alpha \quad (1)$$

для всех  $h$ ,  $|h| \leq h_0$ .

2°.  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ .

3°.  $f(t)$  возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные  $M > 0$ ,  $a_0 \geq 0$ , что для всех  $t$

$$|f(t)| < Me^{a_0 t}. \quad (2)$$

Число  $a_0$  называется *показателем роста*  $f(t)$ ; для ограниченных оригиналов можно принять  $a_0 = 0$ .

С точки зрения физических приложений условия 1° и 3° выполняются для большинства функций, описывающих физические процессы, в которых  $t$  интерпретируется

как время. Относительно условия 2° следует иметь в виду, что операционный метод приспособлен к задачам, приводящим к решению дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. В таких задачах вся информация о ходе процесса до момента начала наблюдения, за который можно принять момент  $t = 0$ , содержится в начальных условиях. Таким образом, условие 2° также физически обосновано.

Простейшей функцией-оригиналом является *единичная функция Хевисайда*

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Умножение функции  $\varphi(t)$  на  $\sigma_0(t)$  «гасит» эту функцию для  $t < 0$  и оставляет без изменения для  $t > 0$ . Если  $\varphi(t)$  удовлетворяет условиям 1° и 3° и не удовлетворяет условию 2°, то произведение

$$f(t) = \sigma_0(t)\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

будет удовлетворять и условию 2°, т. е. будет оригиналом (например,  $\sigma_0(t)\sin wt$ ,  $\sigma_0(t)e^{at}$ ,  $\sigma_0(t)t^n$  и т. д.). Для простоты записи будем, как правило, опускать множитель  $\sigma_0(t)$ , предполагая, что все рассматриваемые функции удовлетворяют условию 2°.

*Изображением функции  $f(t)$  по Лапласу* называют функцию комплексного переменного  $p = x + iy$ , определяемую соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (4)$$

Символически связь между оригиналом  $f(t)$  и изображением  $F(p)$  будем записывать в виде (в литературе встречаются и другие символические обозначения)

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p) \text{ или } F(p) \xrightarrow{L} f(t).$$

*Преобразование Хевисайда*, которое часто используется в практических приложениях, отличается от преобразования Лапласа дополнительным множителем  $p$ :

$$F^*(p) = p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (5)$$

Наличие дополнительного множителя вносит неоправданные усложнения в некоторые выкладки. Кроме того, преобразование Лапласа более естественно связывается с интегралом Фурье, который также широко применяется в математической физике. Поэтому далее рассматривается только преобразование Лапласа.

**Теорема 1.** *Для всякого оригинала  $f(t)$  изображение  $F(p)$  определено в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > a_0$ , где  $a_0$  – показатель роста  $f(t)$ , и является в этой полуплоскости аналитической функцией.*

### 3. Изображение элементарных функций

Пользуясь определением (4), найдем изображение ряда элементарных функций действительной переменной.

1°. *Единичная функция Хевисайда.* Из (3) и (4) получим

$$\sigma_0(t) \xrightarrow{L} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p},$$

(8)

где  $F(p)$  определена в области  $\operatorname{Re} p > 0$ .

2°. Показательная функция  $f(t) = e^{\alpha t}$ . Вычисляя интеграл (4), найдем

$$e^{\alpha t} \xrightarrow{L} F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \frac{1}{p - \alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha.$$

(9)

3°. Степенная функция  $f(t) = t^\nu$ ,  $\nu > -1$ . В этом случае интеграл (4) имеет вид

$$t^\nu \xrightarrow{L} F(p) = \int_0^{\infty} t^\nu e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

(10)

Для вычисления (10) примем сначала  $p = x > 0$  и сделаем замену переменной интегрирования  $xt = s$ . Тогда

$$F(x) = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int_0^{\infty} s^\nu e^{-s} ds = \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}.$$

(11)

где  $\Gamma(\nu+1)$  – гамма-функция Эйлера. Так как функция  $F(p)$ , определяемая формулой (10) аналитична при  $\operatorname{Re} p > 0$ , то в силу единственности аналитического продолжения получим выражение

$$t^\nu \xrightarrow{L} F(p) = \int_0^{\infty} t^\nu e^{-pt} dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}.$$

(12)

При этом в случае дробных  $\nu$  следует выбирать ту ветвь многозначной функции  $\frac{1}{p^{\nu+1}}$ , которая является непосредственным аналитическим продолжением функции  $\frac{1}{x^{\nu+1}}$ .

Для целых  $\nu = n$  из формулы (12), получим

$$t^n \xrightarrow{L} \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

(13)

Для нахождения изображений других функций удобнее пользоваться общими свойствами преобразования Лапласа по сравнению с непосредственным использованием формулы (4).

#### 4. Свойства преобразования Лапласа

Приведем ряд простых соотношений, составляющих аппарат операционного исчисления.

Далее всюду будем обозначать через  $f(t)$ ,  $g(t)$ , ... оригиналы, а через  $F(p)$ ,  $G(p)$ , ... – их изображения.

1°. Свойство линейности. Непосредственно из свойств интегралов следует, что для любых постоянных  $\alpha$  и  $\beta$

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \xrightarrow{L} \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Данное свойство позволяет по найденным изображениям (8), (9) и (13) найти изображения многочлена, тригонометрических и гиперболических функций. Например,

$$\sin \omega t \xleftrightarrow{L} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (6)$$

Аналогично,

$$\cos \omega t \xleftrightarrow{L} \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad (7)$$

$$\operatorname{sh} \omega t \xleftrightarrow{L} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{ch} \omega t \xleftrightarrow{L} \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \quad (8)$$

2°. Теорема подобия. Для любого числа  $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (9)$$

Действительно, полагая  $\alpha t = \tau$ , найдем

$$f(\alpha t) \xleftrightarrow{L} \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha} \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3°. Дифференцирование оригинала. Если функция  $f(t)$  непрерывна при  $t > 0$  и  $f'(t)$  является оригиналом, то

$$f'(t) \xleftrightarrow{L} pF(p) - f(0). \quad (10)$$

Действительно, интегрируя по частям, получим

$$f'(t) \xleftrightarrow{L} \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0).$$

Последовательно используя формулу (18)  $n-1$  раз, можно доказать

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{L} F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (19)$$

В частности, если  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ , то

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{L} p^n F(p), \quad (11)$$

то есть при нулевых начальных значениях оригинала и его производных до  $n-1$ -го порядка  $n$ -кратное дифференцирование оригинала сводится к умножению на  $p^n$  его изображения.

Пример 1. Найти изображение функции  $f(t) = \sin^2 t$ .

Решение. Применим формулу (17):

$$f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \xleftrightarrow{L} \frac{2}{p^2 - 4}, \quad f(0) = 0, \\ \frac{2}{p^2 - 4} = pF(p), \quad F(p) = \frac{2}{p(p^2 - 4)}.$$

Двойственным к свойству 3° является свойство

4°. Дифференцирование изображения:

$$F'(p) \xleftrightarrow{L} -tf(t), \quad (12)$$

то есть дифференцирование изображения сводится к умножению на  $-t$  оригинала.

Действительно, производную аналитической функции  $F(p)$  в области ее определения  $\operatorname{Re} p > a_0$  можно вычислять, дифференцируя подынтегральную функцию в несобственном интеграле (7.4) по параметру. Тогда

$$F'(p) = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt \xleftrightarrow{L} -t f(t).$$

Дифференцируя  $n$  раз, получим

$$F^{(n)}(p) \xleftrightarrow{L} (-1)^n t^n f(t). \quad (13)$$

Пример 2. Найти изображение функции  $f(t) = t^2 e^t$ .

Решение. Имеем  $e^t \xleftrightarrow{L} \frac{1}{p-1}$ . По формуле (7.21)  $\left(\frac{1}{p-1}\right)' \xleftrightarrow{L} -te^t$ , откуда

$$te^t \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(p-1)^2}. \text{ Далее}$$

$$\left[\frac{1}{(p-1)^2}\right]' \xleftrightarrow{L} -t(te^t) \text{ или } t^2 e^t \xleftrightarrow{L} \frac{2}{(p-1)^3}.$$

5°. Интегрирование оригинала:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{F(p)}{p}, \quad (14)$$

то есть интегрирование оригинала сводится к делению изображения на  $p$ .

Легко проверить, что функция  $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  является оригиналом, то есть удовлетворяет свойствам 1°, 2° и 3° п. 1. Тогда в силу формулы (17) с учетом, что  $g(0) = 0$ , получим  $f(t) = g'(t) \xleftrightarrow{L} pG(p)$ , откуда  $G(p) = \frac{F(p)}{p}$ , что и требуется.

Двойственным к свойству 5° является свойство

6°. Интегрирование изображения. Если интеграл  $\int_p^{\infty} f(q) dq$  сходится, то

$$\frac{f(t)}{t} \xleftrightarrow{L} \int_p^{\infty} f(q) dq, \quad (15)$$

то есть интегрирование изображения равносильно делению оригинала на  $t$ .

Пример 3. Найти изображение функции  $f(t) = \frac{\sin \omega t}{t}$ .

Решение. Так как  $\sin \omega t \xleftrightarrow{L} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ , то по формуле (24)

$$\frac{\sin \omega t}{t} \xleftrightarrow{L} \int_p^{\infty} \frac{\omega}{q^2 + \omega^2} dq = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Применяя свойство 5°, получим изображение интегрального синуса:

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}.$$

8°. Теорема запаздывания:

$$\forall \tau > 0: f(t - \tau) \xleftrightarrow{L} e^{-p\tau} F(p). \quad (16)$$



Данную теорему удобно применять при отыскании изображений функций, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями.

**Пример 4.** Найти изображение ступенчатой функции, график которой представлен на рис. 1. **Решение.** Представим  $f(t)$  в виде

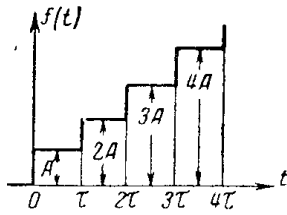


Рис.1

$$f(t) = A[\sigma_0(t) + \sigma_0(t - \tau) + \sigma_0(t - 2\tau) + \dots].$$

По теореме запаздывания

$$f(t) \xleftrightarrow{L} A \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-p\tau} + \frac{1}{p} e^{-2p\tau} + \dots \right].$$

Справа имеем сходящуюся геометрическую прогрессию, так как  $|e^{-p\tau}| = e^{-x\tau} < 1$ , поэтому

$$f(t) \xleftrightarrow{L} \frac{A}{p} \frac{1}{1 - e^{-p\tau}} = \frac{A}{2p} \left( 1 + \operatorname{cth} \frac{p\tau}{2} \right).$$

Двойственной к теореме запаздывания является

8°. Теорема сдвига:

$$\forall p_0 : e^{p_0 t} f(t) \xleftrightarrow{L} F(p - p_0), \quad (17)$$

то есть «сдвиг» изображения на  $p_0$  равносильно умножению оригинала на  $e^{p_0 t}$ .

Теорема позволяет по известным изображениям функций находить изображения тех же функций, умноженных на экспоненту, например:

$$e^{-\lambda t} \sin \omega t \xleftrightarrow{L} \frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}, \quad e^{-\lambda t} \cos \omega t \xleftrightarrow{L} \frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}, \quad e^{-\lambda t} t^n \xleftrightarrow{L} \frac{n!}{(p + \lambda)^{n+1}}.$$

Особое место в операционном исчислении занимают соотношения, выражающие связь между оригиналами и изображениями произведения функций.

9°. Теорема умножения (теорема о свертке). Умножение изображений равносильно свертыванию оригиналов:

$$(f * g) \xleftrightarrow{L} F(p)G(p), \quad (18)$$

где  $(f * g) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$  – свертка функций  $f(t)$  и  $g(t)$ .

В приложениях формула (26) часто используется для определения оригинала по заданному изображению, которое удастся разбить на сомножители, оригиналы которых известны.

**Пример 5.** Найти оригинал функции

$$F(p) = \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

**Решение.** Используя формулы (14) и (15), найдем

$$F(p) \xleftrightarrow{L} \int_0^t \sin \omega \tau \cdot \cos \omega(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \sin \omega t.$$

**Следствие.** Пользуясь правилом дифференцирования оригинала (17) и теоремой умножения, получаем так называемый *интеграл Дюамеля*:

$$pF(p)G(p) = f(0)G(p) + [pF(p) - f(0)]G(p) \xleftrightarrow{L} f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (19)$$

10°. Обобщенная теорема умножения (теорема Эфроса). Пусть  $F(p) \xleftrightarrow{L} f(t)$  и

$$G(p)e^{-\tau q(p)} \xleftrightarrow{L} g(t, \tau), \quad (20)$$

где  $G(p)$ ,  $q(p)$  – аналитические функции. Тогда

$$F[q(p)]G(p) \xleftrightarrow{L} \int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau)d\tau. \quad (21)$$

При  $q(p) = p$  по теореме запаздывания (25), как частный случай, из (30) имеем теорему умножения (27).

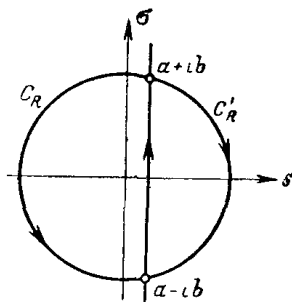
## 5. Отыскание оригинала по изображению

Прежде всего отметим, что имеются различные таблицы изображений наиболее часто встречающихся в приложениях функций, которыми часто удается воспользоваться при решении конкретных задач. Достаточно подробные таблицы приводятся в книге [Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1975. – 408 с.], в которой также приводится подробный список справочной литературы по операционному исчислению. Кроме того, приведенные в п. 4 свойства  $1^\circ - 10^\circ$  во многих случаях позволяют решить задачу построения оригинала по заданному изображению.

Однако все эти методы являются, по существу, методами подбора. Поэтому далее рассмотрим общий метод построения оригинала по изображению.

### 5.1. Формула Меллина. Рассмотрим интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp, \quad (22)$$



взятый вдоль прямой  $\operatorname{Re} p = a > 0$ , проходимой снизу вверх.

Обозначим через  $C_R$  и  $C'_R$  части окружности  $|p| = R$ , лежащие соответственно слева и справа от прямой  $\operatorname{Re} p = a$ , а через  $a - ib$  и  $a + ib$  – концы  $C_R$  и  $C'_R$  (рис. 2).

Пусть  $t > 0$ ; так как  $\frac{1}{p} \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$  равномерно отно-

сительно  $\arg p$ , то по лемме Жордана  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0$ .

Рис.2

Следовательно, из теоремы Коши о вычетах, согласно которой

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 2\pi i \operatorname{res} \left[ \frac{e^{pt}}{p}, 0 \right] = 2\pi i,$$

в пределе при  $R \rightarrow \infty$  получим

$$f(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = 1.$$

Если  $t < 0$ , то по той же лемме Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0,$$

а по теореме Коши

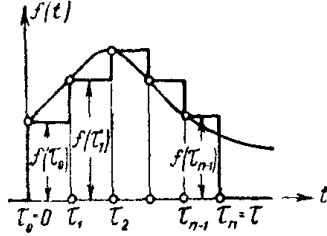
$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{\tilde{C}_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0,$$

откуда в пределе при  $R \rightarrow \infty$  получим

$$f(t) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0.$$

Таким образом, интеграл (31) представляет единичную функцию  $\sigma_0(t)$ .

Если заменить в (31)  $t$  на  $t - \tau$ , где  $\tau$  – фиксированное число, то получим функцию



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{p(t-\tau)}}{p} dp = \begin{cases} 1, & t > \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \quad (32)$$

Подставляя в (7.31)  $\tau = \tau_1$ , а затем  $\tau = \tau_2 > \tau_1$  и вычитая второй интеграл из первого, получим представление ступенчатой функции

Рис. 3

функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}}{p} dp = \begin{cases} 0, & t < \tau_1, \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2, \\ 0, & t > \tau_2. \end{cases}$$

Таким же образом можно представить интегралом ступенчатую функцию, график которой представлен на рис. 3:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \frac{e^{-p\tau_k} - e^{-p\tau_{k+1}}}{p} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) e^{-p\tau_k} \Delta'_{\tau_k} \right\} dp, \quad (23)$$

где

$$\Delta'_{\tau_k} = \frac{1 - e^{-p\Delta\tau_k}}{p} = \Delta\tau_k - \frac{(\Delta\tau_k)^2}{2!} p + \frac{(\Delta\tau_k)^3}{3!} p^2 - \dots, \quad \Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k.$$

Перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , чтобы  $\max \Delta\tau_k \rightarrow 0$ . Тогда  $\Delta'_{\tau_k} \sim \Delta\tau_k$  и сумма в фигурных скобках в формуле (33) будет интегральной. В пределе получим интегральное представление функции  $f(t)$  на интервале  $(0, \tau)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left\{ \int_0^\tau f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \right\} dp,$$

откуда при  $\tau \rightarrow \infty$  будем иметь искомое выражение оригинала через его изображение (формулу Меллина)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (24)$$

Формулы (4) и (33) называются *формулами обращения*.

В качестве примера применения формулы Меллина приведем теорему, двойственную теореме умножения (27).

**Теорема 7.2.** Пусть  $f(t) \xleftarrow{L} F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a_1$  и  $g(t) \xleftarrow{L} G(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a_2$ . Тогда

$$f(t)g(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq,$$

(35)

где  $\operatorname{Re} p > a_1 + a_2$ ,  $a > \max\{a_1, a_2\}$ .

Пример 6. Найти изображение функции  $f(t) = t \cos \omega t$ .

Решение. Так как  $\cos \omega t \xleftrightarrow{L} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ ,  $t \xleftrightarrow{L} \frac{1}{p^2}$ , то

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{q dq}{(q^2 + \omega^2)(p-q)^2},$$

где  $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$ . Рассмотрим на плоскости  $q$  замкнутый контур  $\gamma$ , состоящий из отрезка  $[a-iR, a+iR]$  и замыкающей его в правой полуплоскости дуги окружности  $|q-a|=R$ . Внутри данного контура подынтегральная функция всюду аналитична, за исключением точки  $q=p$ , которая является полюсом второго порядка этой функции. Учитывая, что обход контура  $\gamma$  совершается в отрицательном направлении, найдем

$$F(p) = -\frac{d}{dq} \left( \frac{q}{q^2 + \omega^2} \right) \Big|_{q=p} = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

**5.2. Теоремы разложения.** Теорема 3 (первая теорема разложения). Если  $F(p)$  правильна в бесконечно удаленной точке и имеет в ее окрестности лорановское разложение

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}, \quad (25)$$

то оригиналом  $F(p)$  служит целая функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}. \quad (26)$$

Пример 7. Найти оригинал для функции  $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$ .

Решение. Функция  $F(p)$  имеет две особые точки  $p_{1,2} = \pm i$  и является однозначной аналитической функцией в окрестности точки  $p = \infty$ . Построим лорановское разложение в круговом кольце  $1 < |z| < \infty$  для ветви функции  $F(p)$ , являющейся непосредственным продолжением действительной функции  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . Для этого, положив  $\zeta = \frac{1}{p}$ ,

отобразим кольцо  $1 < |p| < \infty$  на круг единичного радиуса на плоскости  $\zeta$  и разложим функцию  $\varphi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\zeta^2}}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}}$  в ряд Тейлора в окрестности ее правильной точки

$\zeta = 0$ . Заметим, что  $\varphi(\zeta) = \psi'(\zeta) = \sqrt{1 + \zeta^2}$ . Чтобы разложить функцию  $\psi(\zeta)$  в ряд Тейлора, положим  $w = \zeta^2$  и рассмотрим функцию  $\chi(w) = \sqrt{1 + w}$ . Вычисляя производные

$$\chi^{(n)}(w) \Big|_{w=0} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - n + 1 \right) \Big|_{w=0} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} (n-1)!}.$$

получим разложение функции  $\chi(w)$  в круге  $|w| < 1$ :

$$\chi(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)! w^n}{2^{2n-1} (n-1)! n!}.$$

Отсюда для функции  $\varphi(\zeta)$  при  $|\zeta| < 1$  имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) = \psi'(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)! 2n}{2^{2n-1} (n-1)! n!} \zeta^{2n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)! 2n}{2^{2n-2} [(n-1)!]^2} \zeta^{2n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \zeta^{2k+1}. \end{aligned}$$

Наконец, для выбранной ветви функция  $F(p)$  в кольце  $1 < |p| < \infty$  получаем разложение в ряд Лорана

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{1}{p^{2k+1}}. \quad (27)$$

По формуле (35) найдем

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \xrightarrow{L} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = J_0(t), \quad (28)$$

где  $J_0(t)$  – функция Бесселя нулевого порядка.

Заметим, что представив

$$\frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$$

на основании теореме о свертке получим

$$\int_0^t J_0(\tau) J_0(t - \tau) d\tau = \sin t.$$

**Теорема 4** (вторая теорема разложения). Пусть функция  $F(p)$ : 1) мероморфна и правильна в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > a_0$ ; существует система окружностей  $C_n$ :  $|p| = R_n$ ,  $R_1 < R_2 < \dots < R_n \rightarrow \infty$ , на которой  $F(p) \rightarrow 0$  равномерно относительно  $\arg p$ ;

3) для любого  $a > a_0$  абсолютно сходится интеграл  $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$ . Тогда оригиналом  $F(p)$  служит функция

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \operatorname{res} [F(p), p_k] e^{pt}, \quad (29)$$

где сумма вычетов берется по всем точкам  $p_k$  функции  $F(p)$  в порядке неубывания их модулей.

**Следствие.** Если функция  $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$  дробно-рациональна, причем степень многочлена  $A(p)$  меньше степени многочлена  $B(p)$ , то оригиналом ее служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{ F(p) (p - p_k)^{n_k} e^{pt} \}, \quad (30)$$

где  $p_k$  – полюсы  $F(p)$  кратности  $n_k$ .

В частности, если все полюсы  $F(p)$  простые, то формула (7.41) упрощается:

$$\frac{A(p)}{B(p)} \xleftrightarrow{L} \sum_{k=1}^l \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (31)$$

**Пример 8.** Найти оригинал для функции  $F(p) = \frac{p}{(p^2 - 1)^2}$ .

**Решение.** Функция  $F(p)$  имеет полюсы  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = -1$  кратности  $n_1 = n_2 = 2$ . По формуле (42)

$$f(t) = \lim_{p \rightarrow 1} \left[ \frac{pe^{pt}}{(p+1)^2} \right]'_p + \lim_{p \rightarrow -1} \left[ \frac{pe^{pt}}{(p-1)^2} \right]'_p = \frac{1}{2} t \operatorname{sh} t.$$

## II. Задачи

**1.** Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций:

- а)  $f(t) = e^{\alpha t}$ ;
- б)  $f(t) = \sin 4t$ ;
- в)  $f(t) = \cos \omega t$ ;
- г)  $f(t) = \operatorname{sh} 3t$ .

**2.** Пользуясь теоремой подобия, найти изображения следующих функций:

- а)  $f(t) = \sin^2 t$ ;
- б)  $f(t) = \sin mt \cos nt$ ;
- в)  $f(t) = \cos^3 t$ ;
- г)  $f(t) = \sin^4 t$ .

**3.** Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображения следующих функций:

- а)  $f(t) = \cos^2 t$ ;
- б)  $f(t) = t \sin \omega t$ ;
- в)  $f(t) = \sin^3 t$ ;
- г)  $f(t) = \cos^4 t$ .

**4.** Пользуясь теоремой о дифференцировании изображения, найти изображения следующих функций:

- а)  $f(t) = t^2 \cos t$ ;
- б)  $f(t) = (t+1) \sin 2t$ .

**5.** Пользуясь теоремой об интегрировании оригинала, найти изображения следующих функций:

- а)  $f(t) = \int_0^t \sin \tau d\tau$ ;
- б)  $f(t) = \int_0^t \cos^2 \omega \tau d\tau$ ;
- в)  $f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$ ;
- г)  $f(t) = \int_0^t (\tau+1) \cos \omega \tau d\tau$ .

**6.** Пользуясь теоремой об интегрировании изображения, найти изображения следующих функций:

а)  $f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ ;

б)  $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$ ;

в)  $f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$ .

**7.** Пользуясь теоремой смещения, найти изображения следующих функций:

а)  $f(t) = e^{2t} \sin t$ ;

б)  $f(t) = e^{-t} t^3$ ;

в)  $f(t) = t e^t \cos t$ .

**8.** Пользуясь теоремой запаздывания, найти изображения следующих функций:

а)  $f(t) = (t-1)^2 \eta(t-1)$ ;

б)  $f(t) = \sin(t-b) \eta(t-b)$ ;

в)  $f(t) = e^{t-2} \eta(t-2)$ .

**9.** Пользуясь теоремой о свертке, найти изображения следующих функций:

а)  $f(t) = \int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau$ ;

б)  $f(t) = \int_0^t e^{2(\tau-t)} \tau^2 d\tau$ .

**10.** Для данных изображений найти оригиналы:

а)  $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}$ ;

б)  $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}$ ;

в)  $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$ ;

г)  $F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$ .

**11.** Используя теорему Эфроса, найти оригиналы следующих функций ( $a$  – вещественное число):

а)  $F(p) = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}$ ;

б)  $F(p) = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p^2}$ .

Практическое занятие 15.  
РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ  
ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

### I. ТЕОРИЯ

Операционный метод сводит задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений к простейшей алгебраической задаче для изображения. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$L[x] = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0', \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \quad (2)$$

Будем считать  $a_0 \neq 0$ . Обозначим  $X(p) \xleftarrow{L} x(t)$ ,  $F(p) \xleftarrow{L} f(t)$ .

По правилу дифференцирования и свойству линейности вместо задачи Коши (1), (2) получим *операторное уравнение*

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)X(p) = F(p) + x_0(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + \\ + x_1(a_1 p^{n-2} + a_2 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) + \dots + x_{n-1}a_0,$$

или

$$A(p)X(p) = F(p) + B(p), \quad (3)$$

где  $A(p)$ ,  $B(p)$  – известные многочлены. Решая это уравнение, найдем *операторное решение*:

$$X(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}. \quad (4)$$

Таким образом, решение задачи Коши сводится к нахождению оригинала для функции (4).

**Пример 1.** Решить задачу Коши

$$x'' + x = 2 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

**Решение.**

$$x(t) \xleftarrow{L} X(p), \quad x'(t) \xleftarrow{L} pX(p) - x(0) = pX(p), \\ x''(t) \xleftarrow{L} p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) + 1, \quad \cos t \xleftarrow{L} \frac{p}{p^2 + 1},$$

так что операторное уравнение имеет вид

$$p^2 X(p) + X(p) + 1 = \frac{2p}{p^2 + 1};$$

отсюда

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Для нахождения оригинала для функции  $\frac{2p}{(p^2 + 1)^2}$  воспользуемся теоремой о дифференцировании изображения (21):

$$\frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = - \left( \frac{1}{p^2 + 1} \right)' \xleftarrow{L} t \sin t.$$

Так как  $\frac{1}{p^2 + 1} \xleftarrow{L} \sin t$ , то решение задачи имеет вид



$$x(t) = (t-1) \sin t.$$

Пример 2. Решить задачу Коши

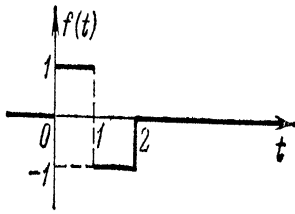


Рис. 7.4

$$x'' + x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

если функция  $f(t)$  задана графически (рис. 4).

Решение. Представим  $f(t)$  аналитически:

$$f(t) = \sigma_0(t) - 2\sigma_0(t-1) + \sigma_0(t-2).$$

Применяя формулу (7.24) получим

$$f(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{p} - 2 \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p}.$$

Операторное уравнение

$$(p^2 + 1)X(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p},$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} - \frac{2e^{-p}}{p(p^2 + 1)} + \frac{e^{-2p}}{p(p^2 + 1)}$$

Так как

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \xrightarrow{L} (1 - \cos t) \sigma_0(t),$$

то

$$\frac{e^{-2p}}{p(p^2 + 1)} \xrightarrow{L} [(1 - \cos(t-2)) \sigma_0(t-2)] \quad \frac{e^{-p}}{p(p^2 + 1)} \xrightarrow{L} [(1 - \cos(t-1)) \sigma_0(t-1)].$$

Окончательно

$$x(t) = 2 \left[ \sin^2 \frac{t}{2} \sigma_0(t) - 2 \sin^2 \frac{t-1}{2} \sigma_0(t-1) + \sin^2 \frac{t-2}{2} \sigma_0(t-2) \right].$$

Аналогично применяется операционный метод и к решению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть требуется решить систему  $n$  дифференциальных уравнений второго порядка

$$L_i = \sum_{k=1}^n \left( a_{ik} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + b_{ik} \frac{dx_k}{dt} + c_{ik} x_k \right) = f_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

при заданных начальных условиях

$$x_k(0) = \alpha_k, \quad \frac{dx_k(0)}{dt} = \beta_k. \quad (6)$$

Заменим систему (5) операторной системой

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} p^2 + b_{ik} p + c_{ik}) X_k(p) = F_k(p) + \sum_{k=1}^n [(a_{ik} p + b_{ik}) \alpha_k + a_{ik} \beta_k].$$

Решая ее как алгебраическую систему уравнений, найдем  $X_k(p)$ , а затем и их оригиналы  $x_k(t)$ .

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x'' = 3(y - x + z), \\ y'' = x - y, \\ z'' = -z, \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = 0.$$

Решение. Перейдем к операторной системе:

$$\begin{cases} p^2 X(p) = 3[Y(p) - X(p) + Z(p)], \\ p^2 Y(p) + 1 = X(p) - Y(p), \\ p^2 Z(p) - p = -Z(p), \end{cases}$$

где

$$X(p) \xleftrightarrow{L} x(t), \quad Y(p) \xleftrightarrow{L} y(t), \quad Z(p) \xleftrightarrow{L} z(t).$$

Решим последнюю систему относительно  $X(p)$ ,  $Y(p)$  и  $Z(p)$ :

$$X(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}, \quad Y(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1},$$

$$Z(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Находя оригиналы для  $X(p)$ ,  $Y(p)$  и  $Z(p)$ , получим решение системы

$$x(t) = \frac{3}{4}(1-t) - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t,$$

$$y(t) = \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t - \cos t,$$

$$z(t) = \cos t.$$

## II. Задачи

**1.** Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

а)  $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ ;

б)  $x''' + x'' = \sin t$ ,  $x(0) = x'(0) = 1$ ,  $x''(0) = 0$ ;

в)  $x''' + x' = \cos t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -2$ ,  $x''(0) = 0$ .

**2.** Решить системы уравнений:

а) 
$$\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1;$$

б) 
$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Практическое занятие 16.  
**РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ  
ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ**

**I. ТЕОРИЯ**

Особая роль при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами отводится интегралу Дюамеля. Пусть требуется решить уравнение

$$L[x] = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t) \quad (1)$$

при нулевых начальных условиях. Если известно решение  $x_1(t)$  уравнения

$$L[x] = 1 \quad (2)$$

также при нулевых начальных условиях, то интеграл Дюамеля позволяет написать решение уравнения (1) без всяких вычислений по формуле .

$$x(t) = x_1(t)f(0) + \int_0^t x_1(\tau) f'(t-\tau) d\tau . \quad (3)$$

**Пример 1.** Используя формулу Дюамеля, решить задачу Коши:

$$x''(t) - x(t) = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0 .$$

**Решение.** Рассмотрим вспомогательную задачу

$$x_1''(t) - x_1(t) = 1, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0 .$$

Применяя операционный метод, находим

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)},$$

откуда

$$x_1(t) = \int_0^t \operatorname{sh} \tau d\tau = \operatorname{ch} t - 1 .$$

По формуле (3)

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau} \operatorname{sh}(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} (e^t - te^t - 1) + \operatorname{sh} t \cdot \ln \frac{1+e^t}{2} .$$

Требование, чтобы начальные условия были нулевыми, является несущественным: простой заменой искомой функции задачу с ненулевыми начальными условиями можно свести к задаче с нулевыми условиями. Покажем это на примере дифференциального уравнения второго порядка.

Пусть требуется решить уравнение

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \quad (4)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'_0 = x_1. \quad (5)$$

Положим

$$y(t) = x(t) - x_0 - x_1 t. \quad (6)$$

Тогда

$$y'(t) = x'(t) - x_1, \quad y''(t) = x''(t),$$

и уравнение (4) преобразуется к виду

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f_1(t), \quad (7)$$

где

$$f_1(t) = f(t) - a_1 x_1 - a_2 x_0 - a_2 x_1 t,$$

причем

$$y(0) = x(0) - x_0 = 0, \quad y'(0) = x'(0) - x_1 = 0. \quad (8)$$

Таким образом, приходим к задаче Коши (7), (8) с нулевыми начальными условиями.

**Пример 12.** С помощью формулы Дюамеля решить задачу Коши:

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2} + t, \quad x(0) = -2, \quad x'_0 = 1.$$

**Решение.** Введем функцию

$$y(t) = x(t) + 2 - t,$$

относительно которой получим уравнение

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2},$$

где

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Решая последнюю задачу с помощью формулы Дюамеля, найдем

$$y(t) = e^{-t}[t - \ln(1+t)].$$

Решение исходной задачи

$$y(t) = e^{-t}[t - \ln(1+t)] - 2 + t.$$

## II. Задачи

С помощью интеграла Дюамеля решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

1.  $x'' - x' = \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
2.  $x'' + x = \frac{1}{2 + \cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
3.  $x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2} + t, \quad x(0) = -2, \quad x'(0) = 1.$
4.  $x'' + x = \frac{1}{1 + \cos^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
5.  $x''' + x' = \frac{1}{2 + \sin t}, \quad x(0) = x''(0) = x'(0) = 0.$