МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Вычислительная механика и математика»

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«21» января 2022г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

____________________________ В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий
по дисциплине (модулю)
«Математика»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки (специальности)
08.03.01 Строительство

с направленностью (профилем)
Промышленное и гражданское строительство

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-05-22

Тула 2022 год

Разработчик(и) методических указаний

Володин Г.Т., профессор, д.т.н

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

Семестр 1

1. Аналитическая геометрия в пространстве R^3
Векторная алгебра

Некоторые сведения из теории

Вектор – направленный отрезок.

Равенство

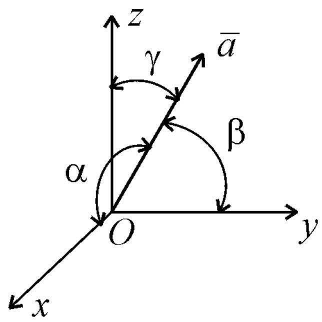
$$\vec{a} = (x,\, y,\, z) \tag{1}$$

означает, что x, y, z – проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2}$$

позволяет по координатам вектора определить его модуль.



Если α, β, γ – углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

$$x = |\,\vec{a}\,|\cos\alpha, \quad y = |\,\vec{a}\,|\cos\beta, \quad z = |\,\vec{a}\,|\cos\gamma, \tag{3}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4}$$

Если известны начало вектора $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и конец $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$, то координаты вектора находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1. \tag{5}$$

Если $\vec{a} = (x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2,\, y_2,\, z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2,\, y_1 \pm y_2,\, z_1 \pm z_2) \tag{6}$$ и

$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1,\, \alpha y_1,\, \alpha z_1)$, где α – любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Признак коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{7}$$

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом:

$$\left|\vec{i}\,\right| = \left|\vec{j}\,\right| = \left|\vec{k}\right| = 1.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по осям соответственно Ox, Oy, Oz в положительную сторону.

Любой вектор $\vec{a} = (x,\, y,\, z)$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{8}$$

<u>Скалярным произведением</u> векторов $\vec{a}=\left(x_1,\, y_1,\, z_1\right)$ и $\vec{b}=\left(x_2,\, y_2,\, z_2\right)$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\varphi, \tag{9}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}, \tag{10}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2, \tag{11}$$ т.е.

скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{12}$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \tag{13}$$

$$cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}. \tag{14}$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа этой силы определяется

$$W=\vec{F}\cdot\vec{S}. \tag{15}$$

<u>Векторным произведением</u> вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot sin\varphi$, где φ − угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;
3. вектор $\vec{c}$ образует с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}. \tag{16}$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|, \tag{17}$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \tag{18}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a}\times\vec{b}=0,$ в частности, $\vec{a}\times\vec{a}=0.$

Если векторы заданы координатами $\vec{a}=\left(x_1,\, y_1,\, z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2,\, y_2,\, z_2\right)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{19}$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке M, а вектор $\vec{a}$ идет из некоторой точки O в точку M, то вектор $\vec{a}\times\vec{F}$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки O:

$$m_{\circ}\vec{F}=\vec{a}\times\vec{F}. \qquad (20)$$

<u>Смешанным произведением</u> трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a}\times\vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right). \qquad (21)$$

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$$V=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}. \qquad (22)$$

Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0. \qquad (23)$$

Для векторов $\vec{a}=\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2, y_2, z_2\right)$, $\vec{c}=\left(x_3, y_3, z_3\right)$ смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (24)$$

<u>Задача 1.</u> На материальную точку действуют силы:

$$\vec{F}_1=(2, -1, 1), \quad \vec{F}_2=(-1, 2, 2), \quad \vec{F}_3=(1, 1, -2).$$

Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

<u>Решение.</u> Найдем равнодействующую

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(2-1+1, -1+2+1, 1+2-2)=(2, 2, 1).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(4-2, 1+1, -1-0)=(2, 2, -1).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W=\vec{R}\cdot\vec{S}=2\cdot2+2\cdot2+1\cdot(-1)=7.$$

<u>Задача 2.</u> Дана сила $\vec{F}=(3, 4, -2)$ и точка ее приложения $A(2, -1, 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

<u>Решение.</u> По формуле (20) $m_{\circ}\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}$. Вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$ по формуле (5) имеет координаты $\vec{r}=(2, -1, 3)$, по формуле (19)

$$\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}=-10\vec{i}+13\vec{j}+11\vec{k}.$$

Итак, $m_\circ\vec{F}=(-10,\,13,\,11)$. Модуль момента находим по формуле (2):

$$\left|m_\circ\vec{F}\right|=\sqrt{(-10)^2+(13)^2+(11)^2}=\sqrt{390}\approx 19{,}748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$cos\,\alpha=\frac{-10}{19{,}748}=-0{,}506,\quad cos\,\beta=\frac{13}{19{,}748}=0{,}658,\quad cos\,\gamma=\frac{11}{19{,}748}=0{,}557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha=120^\circ24',\qquad \beta=48^\circ51',\qquad \gamma=56^\circ9'.$$

Контроль: должно быть $cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1$. У нас:

$$(-0{,}506)^2+(0{,}658)^2+(0{,}557)^2=0{,}999.$$

<u>Задача 3.</u> Написать разложение вектора $\vec{x}=(5,\,16,\,2)$ по векторам $\vec{p}=(2,\,1,\,0)$, $\vec{q}=(0,\,-2,\,0)$, $\vec{r}=(-1,\,5,\,2)$.

<u>Решение.</u>

1. Разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ имеет вид

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{p}+\alpha_2\vec{q}+\alpha_3\vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases}x_1=\alpha_1p_1+\alpha_2q_1+\alpha_3r_1\\ x_2=\alpha_1p_2+\alpha_2q_2+\alpha_3r_2\\ x_3=\alpha_1p_3+\alpha_2q_3+\alpha_3r_3.\end{cases}$$

2. С учетом числовых значений координат векторов $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ и $\vec{x}$ получим систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$:

$$\begin{cases}2\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2-1\cdot\alpha_3=5\\ 1\cdot\alpha_1-2\cdot\alpha_2+5\cdot\alpha_3=16\\ 0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+2\alpha_3=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha_1=5+\alpha_3\\ 2\alpha_2=\alpha_1+5\alpha_3-16\\ \alpha_3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=3\\ \alpha_2=-4\\ \alpha_3=1.\end{cases}$$

3. Разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ имеет вид:

$$\vec{x}=3\vec{p}-4\vec{q}+\vec{r}.$$

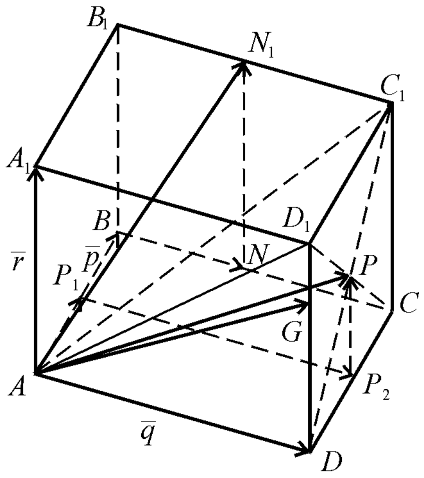
Ответ: $\vec{x}=3\vec{p}-4\vec{q}+\vec{r}$.

<u>Задача 4.</u> В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{r}$ образуют базис. Разложить векторы $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN_1}$ по выбранному базису, если точка G делит ребро DD_1 в отноше-

нии 1:2; точка P – точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C; точка N_1 – середина ребра B_1C_1.

Решение.

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r}$,

$$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

1.2 Прямая и плоскость

Плоскость. Ее уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ – \qquad (25)$$

общее уравнение плоскости.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) + C(z - z_\circ) = 0 \ – \qquad (26)$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \ – \qquad (27)$$

уравнение плоскости «в отрезках». Здесь $a, b, c -$ величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \ – \qquad (28)$$

нормальное уравнение плоскости.

$$d = \frac{|Ax_\circ + By_\circ + Cz_\circ + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ – \qquad (29)$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \ – \qquad (30)$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

1.3 Прямая. Ее уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} - \qquad (31)$$

общее уравнение прямой (прямая задана пересечением двух плоскостей).

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} = \frac{z - z_\circ}{p} - \qquad (32)$$

каноническое уравнение прямой, где $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ – точка, принадлежащая прямой, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой (вектор, параллельный прямой).

$$\begin{cases} x = x_\circ + mt \\ y = y_\circ + nt \\ z = z_\circ + pt \end{cases} - \qquad (33)$$

параметрические уравнения прямой.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} - \qquad (34)$$

уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2 + p_1{}^2} \cdot \sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2 + p_2{}^2}} - \qquad (35)$$

угол между двумя прямыми, где $\vec{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ – направляющие векторы прямых.

$$sin\psi = \frac{|\, Am + Bn + Cp \,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + c^2}} - \qquad (36)$$

угол между прямой и плоскостью, где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

$V_{пирамиды} = \dfrac{1}{6}\left| \overrightarrow{A_1A_2} \;\; \overrightarrow{A_1A_3} \;\; \overrightarrow{A_1A_4} \right|$ – объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$, где $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ – координаты вершин пирамиды.

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \qquad (37)$$

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2,\ 1,\ -1)$, $A_2(3,\ 0,\ 1)$, $A_3(2,\ -1,\ 3)$, $A_4(0,\ 8,\ 0)$. Найти:

1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

3) объем пирамиды V;

4) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$;

5) точку A_4', симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$;

6) точку A_4'', симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3.

Решение.

1) Угол между ребрами находим по формуле (35).

$\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = (3-2,\ 0-1,\ 1-(-1)) = (1,\ -1,\ 2)$ − направляющий вектор прямой A_1A_2;

$\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_4} = (0-2,\ 2-1,\ 0-(-1)) = (-2,\ 7,\ 1)$ − направляющий вектор прямой A_1A_4.

$$cos\varphi = \frac{1\cdot(-2) - 1\cdot 7 + 2\cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}} = -\frac{7}{18}.$$

2) Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через три точки $A_1(2,\ 1,\ -1)$, $A_2(3,\ 0,\ 1)$, $A_3(2,\ -1,\ 3)$, по формуле (30)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & 0-1 & 1+1 \\ 2-2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)\cdot 0 - (y-1)\cdot 4 + (z+1)\cdot(-2) = 0,$$

$$-4y + 4 - 2z - 2 = 0,$$

$4y + 2z - 2 = 0$ − уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

$\vec{n} = (0,\ 2,\ 1)$ − нормальный вектор плоскости;

$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_4} = (-2,\ 7,\ 1)$ − направляющий вектор прямой A_1A_4.

Находим угол ψ между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ по формуле (36)

$$sin\psi = \frac{0\cdot(-2)+2\cdot 7+1\cdot 1}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+7^2+1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{54}} = 0{,}9114.$$

3) Находим объем пирамиды по формуле (37)

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1,\,-1,\,2);\quad \overrightarrow{A_1A_3} = (0,\,-2,\,4);\quad \overrightarrow{A_1A_4} = (-2,\,7,\,1).$$

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(-2+8-8-28) = -\frac{1}{6}(-30) = 15.$$

4) Расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$ находим по формуле (29).

$$d = \frac{|2\cdot 8+0-1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}69.$$

5) Чтобы найти точку A_4', симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, сделаем следующее.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через точку A_4 по формуле (32). За направляющий вектор прямой $\vec{a} = \vec{n} = (0,\,2,\,1)$ берем нормальный вектор плоскости, т.к. прямая перпендикулярна плоскости:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-0}{1}, \qquad \frac{x}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{1}.$$

Составим параметрические уравнения этой прямой по формуле (33):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t+8 \\ z = t. \end{cases}$$

Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью $A_1A_2A_3$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t+8 \\ z = t \\ 2y+z-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6+8 = 2 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \quad 2(2t+8)+t-1 = 0,$$

$$5t+15 = 0, \qquad t = -3.$$

Получаем точку $M(0,\,2,\,-3)$; т.к. точка A_4' симметрична точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, то точка M является серединой отрезка A_4A_4', поэтому

$$x_M = \frac{x_4+x_4'}{2}, \qquad 0 = \frac{0+x_4'}{2}, \qquad x_4' = 0;$$

$$y_M = \frac{y_4 + y_4'}{2}, \qquad 2 = \frac{8 + y_4'}{2}, \qquad y_4' = -4;$$

$$z_M = \frac{z_4 + z_4'}{2}, \qquad -3 = \frac{0 + z_4'}{2}, \qquad z_4' = -6.$$

$A_4'(0, -4, -6)$.

6) Чтобы найти точку A_4'', симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3, составим уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_1A_3 по формуле (26). За нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \vec{a} = (0, -2, 4)$ берем направляющий вектор прямой A_1A_3, т.к. плоскость перпендикулярна прямой.

$$0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 3) + 4 \cdot (z - 0) = 0, \quad -2y + 16 + 4z = 0, \quad y = 2z - 8 = 0.$$

Уравнение прямой A_1A_3 составляем по формуле (34).

$$\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z+1}{3+1}, \qquad \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

Параметрические уравнения прямой A_1A_3:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1. \end{cases}$$

Находим точку N пересечения прямой A_1A_3 и плоскости:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1 \\ y - 2z - 8 = 0, \end{cases}$$

$$-2t + 1 - 2(4t - 1) - 8 = 0, \qquad -10t - 5 = 0, \qquad t = -\frac{1}{2},$$

$$x = 2, \quad y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2, \quad z = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3.$$

Итак, точка $N(2, 2, -3)$. Так как точка A_4'' симметрична точке A_4 относительно прямой A_1A_3, то точка N является серединой отрезка A_4A_4'', тогда

$$x_N = \frac{x_4 + x_4''}{2}, \qquad 2 = \frac{0 + x_4''}{2}, \qquad x_4'' = 4,$$

$$y_N = \frac{y_4 + y_4''}{2}, \qquad 2 = \frac{8 + y_4''}{2}, \qquad y_4'' = -4,$$

$$z_N = \frac{z_4 + z_4''}{2}, \qquad -3 = \frac{0 + z_4''}{2}, \qquad z_4'' = -6, \quad \text{точка } A_4''(4, -4, -6).$$

1.4 Аналитическая геометрия на плоскости

Некоторые сведения из теории

Прямая линия. Ее уравнение

$$Ax + By + C = 0 \ - \qquad (38)$$

общее уравнение прямой.

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} \ - \qquad (39)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$, $\vec{a} = (m, n) -$ вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) = 0 \ - \qquad (40)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с перпендикулярным вектором $\vec{n} = (A, B)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \ - \qquad (41)$$

уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ - \qquad (42)$$

уравнение прямой в «отрезках», где $a, b -$ величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \ - \qquad (43)$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\varphi$ и отрезком $b -$ отсекаемым на оси Oy.

$$y - y_\circ = k(x - x_\circ) \ - \qquad (44)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с угловым коэффициентом k.

$$d = \frac{|\, Ax_\circ + By_\circ + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ - \qquad (45)$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

$$\delta = \frac{Ax_\circ + By_\circ + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ - \qquad (45а)$$

отклонение точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} \ - \qquad (46)$$

угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$.

$$k_1 = k_2 \ - \tag{47}$$

условие параллельности прямых.

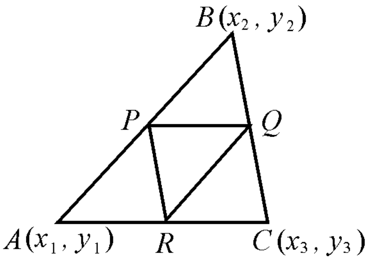
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \ - \tag{48}$$

условие перпендикулярности прямых.

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| - \tag{49}$$

угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2.

Задача 6. Даны середины сторон треугольника $P(1,\ 2),\ Q(5,\ 1),\ R(-4,\ 3)$. Составить уравнения его сторон.



1 способ. Так как точки $P,\ Q,\ R$ являются серединами отрезков $AB,\ AC,\ BC$, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 6, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{array}{lll} x_1 = -8 & y_1 = 6 & \\ x_2 = 0 & y_2 = 0 & A(-8,\ 6), \quad B(10,\ -2), \quad C(0,\ 0). \\ x_3 = 10, & y_3 = -2, & \end{array}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение AB:

$$\frac{x+8}{10+8} = \frac{y-6}{-2-6}, \qquad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC:

$$\frac{x-10}{0-10} = \frac{y+2}{0+2}, \qquad x + 5y = 0.$$

Уравнение AC:

$$\frac{x+8}{0+8} = \frac{y-6}{0-6}, \qquad 3x + 4y = 0.$$

2 способ. Не определяя координат точек $A,\ B,\ C$, составим уравнение каждой из сторон треугольника ABC, как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника PQR параллельно противолежащей стороне.

<u>Уравнение</u> AB: прямая AB проходит через точку P параллельно вектору $\overrightarrow{QR}=(-9,\,4)$. Используем уравнение (39).

$$\frac{x-1}{-9}=\frac{y-2}{4} \quad\Rightarrow\quad 4x+9y-22=0.$$

<u>Уравнение</u> BC: прямая BC проходит через точку Q параллельно вектору $\overrightarrow{PR}=(-5,\,1)$.

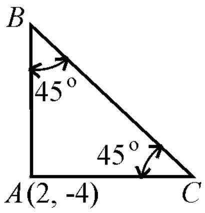
$$\frac{x-5}{-5}=\frac{y+1}{1} \quad\Rightarrow\quad x+5y=0.$$

<u>Уравнение</u> AC: прямая AC проходит через точку R параллельно вектору $\overrightarrow{PQ}=(4,\,-3)$.

$$\frac{x+4}{4}=\frac{y-3}{-3} \quad\Rightarrow\quad 3x+4y=0.$$

Ответ: $4x+9y-22=0,\quad x+5y=0,\quad 3x+4y=0.$

<u>Задача 7.</u> Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x+3y-5=0$ и вершину прямого угла $(2,\,-1)$.



$AB=BC$ (по условию), поэтому $\angle ABC=\angle ACB=45^\circ$, $k_{BC}=-\dfrac{2}{3}$ (по формуле (46)). Уравнения катетов AB и BC составляем по формуле (44): $y+1=k(x-2)$.

$$tg45^\circ=\left|\frac{k+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}k}\right|, \qquad (49)$$

$$\frac{k+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}k}=\pm 1.$$

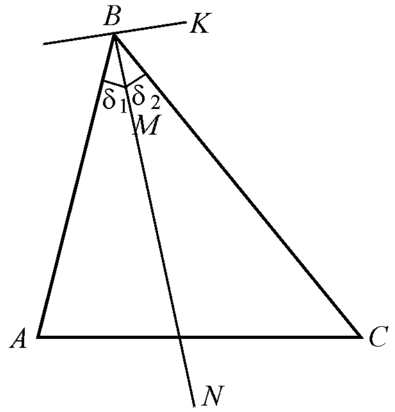
Решая эти уравнения, получим:

$$k=\frac{1}{5},\quad y+1=\frac{1}{5}(x-2),\quad 5y+5=x-2,\qquad x-5y-7=0.$$

$$k=-5,\quad y+1=-5(x-2),\quad y+1=-5x+10,\quad 5x+y-9=0.$$

Ответ: $x-5y-7=0,\qquad 5x+y-9=0.$

<u>Задача 8.</u> В треугольнике с вершинами $A(3,\,-2)$, $B(-1,\,1)$, $C(5,\,-7)$ найти биссектрису внутреннего угла $\angle ABC$.



1) Составим уравнения сторон угла $\angle ABC$, воспользовавшись формулой (41).

Сторона BA:

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-1}{-2-1}, \qquad -3x-4y+1=0.$$

Сторона BC:

$$\frac{x+1}{5+1}=\frac{y-1}{-4-1}, \qquad -8x-6y-2=0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Приравняем расстояния от произвольной точки биссектрисы $M(x,\, y)$ до сторон угла BA и BC, вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-8x-6y-2|}{\sqrt{8^2+6^2}}, \qquad \frac{|-3x-4y+1|}{5}=\frac{|-8x-6y-2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x-4y+1)=-8x-6y-2 \quad \text{и} \quad 2(-3x-4y+1)=-(-8x-6y-2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине B треугольника ABC:

$$x-y+3=0 \qquad \text{(а)}$$

и

$$x+y=0. \qquad \text{(б)}$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника BN отклонения вершин треугольника A и C имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла BK – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек A и C от прямой (а) по формуле (40,а):

$$\delta_A=\frac{3-(-2)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}>0, \qquad \delta_C=\frac{5-(-7)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{2}}>0,$$

следовательно, уравнение (а) – это уравнение прямой BK. Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника ABC при вершине B:

$$x+y=0.$$

Ответ: $x+y=0$.

<u>1.5 Линии второго порядка</u>

<u>Окружность.</u> Уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (50)$$

определяет окружность радиуса R с центром $C(a,\, b)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $a=b=0$, то уравнение окружности примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (51)$$

Общее алгебраическое уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

есть уравнение окружности, если $A = C \neq 0,\quad B = 0,$ т.е.

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (52)$$

Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; - \quad (53)$$

уравнение эллипса (канонический вид).

$$b^2 = a^2 - c^2, \qquad a > b. \quad (54)$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1(-c,\, 0) \text{ и } F_2(c,\, 0). \quad (55)$$

Начало координат $O -$ центр симметрии эллипса, а оси координат – оси симметрии эллипса. Точки $A_1(-a,\, 0),\ A_2(a,\, 0),\ B_1(0,\, -b),\ B_2(0,\, b)$ называются вершинами эллипса, a и $b -$ большая и малая полуоси. Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1 \quad (56)$$

называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, т.к. выражается через отношение его полуосей

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\,. \quad (57)$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a = b$, т.е. $\varepsilon = 0$.

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \; - \quad (58)$$

уравнения директрис.

Если фокусы эллипса расположены на оси Oy, то уравнение эллипса имеет тот же вид (58), но $b > a$. Фокусы имеют координаты: $F_1(0,\, -c)$ и $F_2(0,\, c)$. Уравнения директрис

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}. \quad (59)$$

Гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \; - \quad (60)$$

каноническое уравнение гиперболы.

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad a < c. \tag{61}$$

Фокусы имеют координаты $F_1(-c,\,0)$ и $F_2(c,\,0)$. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка $O -$ центр симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a,\,0)$, $A_2(a,\,0)$, которые называются ее действительными вершинами, а величина $a -$ действительной полуосью гиперболы. Точки $B_1(0,\,-b)$ и $B_2(0,\,b)$ называются мнимыми вершинами, а $b -$ мнимая полуось. Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{62}$$

являются асимптотами гиперболы, т.е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1. \tag{63}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\,. \tag{64}$$

Если $a = b$, гипербола называется равносторонней. В этом случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \; - \tag{65}$$

директрисы гиперболы.

Если уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{66}$$

то асимптоты гиперболы:

$$x = \pm\frac{b}{a}y, \tag{67}$$

фокусы $F_1(0,\,-c)$, $F_2(0,\,c)$.

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon} \; - \tag{68}$$

уравнения директрис.

<u>Парабола.</u>

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \qquad (p > 0), \tag{69}$$

где p – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2},\, 0\right)$. Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

В ряде случаев рассматривают параболы:

а) $y^2 = -2px,\ \ F\left(-\frac{p}{2},\, 0\right)$ – фокус, $x = \frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (70)

б) $x^2 = 2py,\ \ F\left(0,\, \frac{p}{2}\right)$ – фокус, $y = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (71)

в) $x^2 = -2py,\ \ F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ – фокус, $y = \frac{p}{2}$ – уравнение директрисы. (72)

Для всех случаев $p > 0$.

Задача 9. Среди прямых параллельных прямой $2x + y = 0$, выделить касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Уравнение всякой прямой, параллельной данной, можно записать в виде

$$2x + y + c = 0.$$

Касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку, поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно иметь только один ответ.

Из уравнения прямой $y = -2x - c$.

$$\begin{cases} y = -2x - c \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \qquad x^2 + (-2x - c)^2 = 1, \qquad 5x^2 + 4cx + c^2 - 1 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда дискриминант равен нулю: $(4c)^2 - 4 \cdot 5 \cdot \left(c^2 - 1\right) = 0$, откуда $c = \pm\sqrt{5}$.

Итак, искомые касательные имеют уравнения

$$2x + y + \sqrt{5} = 0, \qquad 2x + y - \sqrt{5} = 0.$$

Задача 10. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

Решение. Делим на 225, получаем

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отсюда следует по формуле (53), что $a = 5,\ b = 3$. Из формулы (54):

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, \quad c = \pm 4.$$

По формуле (55): $F_1(-4,\, 0),\ \ F_2(4,\, 0)$.

Эксцентриситет (56): $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Уравнения директрис согласно (58): $x = \pm\frac{5}{4/5} = \pm\frac{25}{4}$.

Ответ: $a = 5,\ b = 3$; $F_1(-4,\ 0)$, $F_2(4,\ 0)$; $\varepsilon = \frac{4}{5}$; $x = \pm\frac{25}{4}$.

Задача 11. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая полуось $2\sqrt{6}$, а расстояние между фокусами $F_1F_2 = 8$.

Решение. $b = 2\sqrt{6},\quad F_1F_2 = 2c = 8,\quad c = 4.$

По формуле (54): $a^2 = b^2 + c^2,\ a^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 + 4^2 = 40,\ a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$

Уравнение эллипса согласно (53): $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1.$

Задача 12. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $4y \pm 3x = 0$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать ее каноническое уравнение.

Решение. Уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$, согласно формуле (62): $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$. Кроме того $F_1F_2 = 2c = 20,\ c = 10$. По формуле (61): $c^2 = a^2 + b^2$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4} \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $a = 8,\ b = 6$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$

Задача 13. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = -1$. Найти координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

Решение. Фокусы данной гиперболы расположены на оси Oy.

$$a = 1,\ b = 3,\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}. \qquad (61)$$

Значит фокусы имеют координаты $F_1\left(0,\ -\sqrt{10}\right)$, $F_2\left(0,\ \sqrt{10}\right)$. Вершины $A_1(0,\ -1)$, $A_2(0,\ 1)$, $B_1(-3,\ 0)$, $B_2(3,\ 0)$. Эксцентриситет по формуле (64):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3},\qquad \varepsilon = \sqrt{10}.$$

Уравнения асимптот: $x = \pm\frac{b}{a}y \quad\Rightarrow\quad x = \pm 3y.$

Уравнения директрис: $y=\pm\dfrac{b}{c} \;\Rightarrow\; y=\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Задача 14. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(1,-2)$ и симметрична относительно оси Oy. Написать ее уравнение. Найти фокус и директрису.

Решение. Уравнение искомой параболы по формуле (72) имеет вид $x^2=-2py$. Точка $A(1,-2)$ лежит на параболе. Подставляем координаты точки A в уравнение: $1=-2p\cdot(-2) \;\Rightarrow\; p=\dfrac{1}{4}$. Следовательно, искомое уравнение будет $x^2=-\dfrac{1}{2}y$ или $y=-2x^2$.

Фоку параболы: $F\left(0,-\dfrac{1}{8}\right)$. Уравнение директрисы согласно (72): $y=\dfrac{1}{8}$.

Задача 15. На параболе $y^2=4x$ найти точки, расстояния которых от директрисы равно 5.

Решение. Уравнение директрисы данной параболы $x=-\dfrac{p}{2}$, $2p=4,\ p=2,\ x=-1$. Тогда расстояние от оси Oy до искомой $\ell=4-\dfrac{p}{2}=5-1=4$ точки и это расстояние определит координату x данной точки, т.е. $x=4$. Координату y найдем из уравнения параболы:

$y^2=4x,\quad y^2=4\cdot 4=16,\quad y=\pm 4.$

Итак, $M_1(4,4),\ M_2(4,-4)$.

2. Введение в анализ
1. Пределы

Пусть каждому натуральному числу $n=1,2,\ldots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число u_n. Тогда говорят, что определена последовательность чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots$ или, короче, последовательность $\{u_n\}$. Отдельные числа u_n называются ее элементами.

Определение 1.1. Число a называется пределом последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется зависящее от него натуральное число N такое, что для всех натуральных чисел $n>N$ выполняется неравенство: $|u_n-a|<\varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=a$.

<u>Определение 1.2.</u> Говорят, что функция $f(x)$ стремится к A $\left(f(x)\to A\right)$ при стремлении к a $(x\to a)$, где A и a – числа, или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ при $|x-a|<\delta$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, если $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ при $|x|>N(\varepsilon)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, если $\left|f(x)\right|>M$ при $|x-a|<\delta(M)$, где M – произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.
1. Если существуют конечные $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

$$а)\ \lim_{x\to a}\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)\pm\lim_{x\to a} f_2(x)$$

$$б)\ \lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$в)\ \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \qquad \left(\lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0\right).$$

2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=0$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\infty,$$

если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=\infty$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взять соответственно две последовательности: $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения. Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 0^0; 1^∞; ∞^0.

<u>Пример 1.1.</u> При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x \to \infty$ или n при $n \to \infty$ для последовательностей (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$) оба члена соотношения полезно предварительно разделить на x^m или, соответственно, n^m где m – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-1}{5x^4+3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(5+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}{5+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^4}}=\frac{3+0+0}{5+0+0}=\frac{3}{5},$$ старшая степень $m=4$, делится на x^4.

$$б)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{9n^4-2n^3+2}+4\sqrt[3]{8n^3+21}}{\sqrt[4]{n^4-3}+2\sqrt{4n^4+9n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{n^4\left(9-\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^4}\right)}+4\cdot\sqrt[3]{n^3\left(8+\dfrac{21}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^4\left(1-\dfrac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{n^4\left(4+\dfrac{9}{n^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2\cdot\sqrt{\left(9-\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^4}\right)}+4n\cdot\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{21}{n^3}\right)}}{n\cdot\sqrt[4]{\left(1-\dfrac{3}{n^4}\right)}+2n^2\cdot\sqrt{\left(4+\dfrac{9}{n^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{\left(9-\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^4}\right)}+\dfrac{4}{n}\cdot\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{21}{n^3}\right)}}{\dfrac{1}{n}\cdot\sqrt[4]{\left(1-\dfrac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{\left(4+\dfrac{9}{n^3}\right)}}=\frac{3\cdot\sqrt{9-0+0}+0\cdot\sqrt[3]{8+0}}{0\cdot\sqrt[4]{1-0}+2\cdot\sqrt{4+0}}=\frac{9}{4}$$

(неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, старшая степень $m=2$, делится на n^2).

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x+7}\,\right]=\left[\infty\cdot(\infty-\infty)\right]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x-7}\,\right]\cdot\left[\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}\,\right]}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\left(x^2+4x+5-x^2-4x+7\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\cdot 12}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}}\left(\frac{:x}{:x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{x^2}}}=\frac{12\cdot 3}{1+1}=18.$$

<u>Пример 1.2.</u> Если $P(x)$ и $Q(x)$ – целые многочлены x, $P(a)\neq 0$ или $Q(a)\neq 0$, то предел рациональной дроби P/Q при $x\to a$ находится непосредственно. Если же $P(a)=Q(a)=0$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$), то дробь P/Q рекомендуется сократить один или несколько раз на $(x-a)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)\left(x^3+x^2+x-3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1+2}{1+2+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

<u>Пример 1.3.</u> Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt[3]{5-x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{9-5-x}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{1}{3+\sqrt{5+x}} = \lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{1-5+x} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{x-4} = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}(1+1+1) = -\frac{1}{2}.$$

б) $$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(x^2-7x-8\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)} = \lim_{x\to 8}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)} =$$

$$= \frac{1}{9\cdot 12} = \frac{1}{108}.$$

<u>Пример 1.4.</u> При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

следствием которого являются пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{arcsin\,x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{arxtgx}{x} = 1.$$

а) $$\lim_{x\to 0}\left[ctg^2 3x - ctg^2 5x\right]\cdot\frac{tg^2 4x\cdot arcsin^2 x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{cos^2 3x}{sin^2 3x}-\frac{cos^2 5x}{sin^2 5x}\right]\cdot\frac{\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2\cdot 16x^2\cdot\left(\frac{arcsin\,x}{x}\right)^2\cdot x^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 16x^2 \cdot \left[\frac{cos^2 3x}{sin^2 3x} - \frac{cos^2 5x}{sin^2 5x}\right] \cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{arcsin x}{x}\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{cos^2 3x \cdot 16x^2}{\left(\frac{sin 3x}{3x}\right)^2 \cdot 9x^2} - \frac{cos^2 5x \cdot 16x^2}{\left(\frac{sin 5x}{5x}\right)^2 \cdot 25x^2}\right] \cdot 1^2 \cdot 1^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{16}{9} cos 3x - \frac{16}{25} cos^2 5x\right] = \frac{16}{9}\cdot 1 - \frac{16}{25}\cdot 1 = \frac{256}{225}.$$

б) $$\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 2x \cdot \sqrt{1 - cos 4x}}{x^2 \cdot arcsin 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2 \cdot 4x^2 \cdot \sqrt{2 sin^2 2x}}{x^2 \cdot \left(\frac{arcsin 3x}{3x}\right) \cdot 3x} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin 3x}{3x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt{2}\, sin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt{2}\left(\frac{sin 2x}{2x}\right)\cdot 2x}{3x} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Пример 1.5. При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда $x \to a$ и $a \neq 0,$ рекомендуется предварительно провести замену $x - a = y.$

$$\lim_{x\to 3} \frac{cos\frac{\pi \cdot x}{6}}{x-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = (x - 3 = y,\ y \to 0 \text{ при } x \to 3) =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{cos\frac{\pi\cdot(y+3)}{6}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot y}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{\pi}{6}\cdot sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}} =$$

$$= -\frac{\pi}{6} \lim_{y\to 0} \frac{sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}} = -\frac{\pi}{6}\cdot 1 = -\frac{\pi}{6}.$$

Пример 1.6. При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = c$ необходимо иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы $A = \lim\limits_{x\to a} f(x),\ B = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x),$

то $c = A^B \ (A > 0)$;

2) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 1, \quad \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \pm\infty,$ то вопрос о нахождении предела c решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty,$ то следует воспользоваться «вторым замечательным пределом»: $\lim\limits_{x\to a}\left(1 + g(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}} = e,$ где $g(x) \to 0$ при $x \to a$ и $e = 2{,}718\ldots$.

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}\right)^{\frac{x^2}{x-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}} = 0, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{x+3} = 4^3 = 64, \text{ т.к. } \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\cdot 4 = 4,$$
$$\lim_{x\to 0}(x + 3) = 3.$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{7}{3x-6}\right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}\cdot\frac{7}{3x-6}\cdot 2x} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x}{3x-6}} = e^{14/3}.$$

г) $$\lim_{x\to 3}(7 - 2x)^{\frac{3}{x-3}} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to 3}\left[1 + (6 - 2x)\right]^{\frac{3}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\left\{\left[1 + (6 - 2x)\right]^{\frac{1}{6-2x}}\right\}^{\frac{(6-2x)\cdot 3}{x-3}} = e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{18-6x}{x-3}} = e^{-6}.$$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

<u>Определение 2.1.</u> Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,$ то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в окрестности точки $x = a$ (при $x \to a$).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть также бесконечно малая при $x \to a$.

<u>Определение 2.2.</u> Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$ и $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c,$ где c – некоторое число, отличное от нуля, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$, если $c = 0,$ то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$.

Бесконечно малая $f(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g^n(x)} = c, \qquad 0 < |c| < +\infty.$$

<u>Пример 2.1.</u> При $x \to 0$ определить порядок малости функции $tgx - sinx$ относительно x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx - sinx}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx\left(\frac{1}{cosx} - 1\right)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{sinx(1 - cosx)}{x^n\, cosx} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2sinx \cdot sin^2 \frac{x}{2}}{x^n\, cosx} = \lim_{x \to 0} \frac{4 sin^3 \frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2}}{x^n\, cosx} = 4 \lim_{x \to 0} \frac{sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{cos\frac{x}{2}}{cosx} =$$

$$= 4 \lim_{x \to 0} \frac{sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot 1 = 4 \lim_{x \to 0} \frac{sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot 2^n} = \frac{4}{2^n} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^n}.$$

Этот предел будет равен константе $c \neq 0$ при $n = 3,$ следовательно, функция $tgx - sinx$ имеет порядок малости $n = 3$ относительно x при $x \to 0$.

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

<u>Пример 2.2.</u> Определить порядок малости относительно x при $x \to 0$ суммы $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$.

Слагаемое $\sqrt[3]{x^2}$ имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x, а слагаемое $\sqrt{x^3}$ – порядок $\frac{3}{2}$, следовательно, сумма имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x при $x \to 0$.

<u>Определение 2.3.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1,$ то бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$: $f(x) \sim g(x)$.

Например, при $x \to 0$ будем иметь:

$$sin x \sim x, \quad tgx \sim x, \quad arcsin x \sim x, arctgx \sim x,$$

$$ln(1+x) \sim x, \quad cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot ln a \ (a \neq 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

<u>Пример 2.3.</u>

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{3^{4tg^2x} - 5^{3arcsin^2 3x}}{3sin^2 4x + 7arctg^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3^{4tg^2x} - 1\right) - \left(5^{3arcsin^2 x} - 1\right)}{3\cdot(4x)^2 + 7\cdot(x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4tg^2x \cdot ln3 - 3arcsin^2 3x \cdot ln5}{55x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4ln3\cdot x^2 - 3ln5\cdot(3x)^2}{55x^2} =$$

$$= \frac{4ln3 - 27ln5}{55}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4arcsin 2x}{3tg8x}\right)^{\frac{ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot 2x}{3\cdot 8x}\right)^{\frac{3x}{x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{ln(3-5x) - ln(3+7x)}{2sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{ln\left[3\left(1 - \frac{5}{3}x\right)\right] - ln\left[3\left(1 + \frac{7}{3}x\right)\right]}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{ln3 + ln\left(1 - \frac{5}{3}x\right) - ln3 - ln\left(1 + \frac{7}{3}x\right)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}x}{2x} = -2.$$

<u>Определение 2.4.</u> Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$.

Подобно тому, как .то сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

<u>Пример 2.4.</u> Пусть $x\to\infty$. Определить порядок бесконечно большой $f(x)=\dfrac{x^5}{x+2}$ по сравнению с x.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^5}{x+2}:x^n\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^n(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}+x^n\cdot 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}}=1$$

при $n=4$.

<u>Определение 2.5.</u>

1) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x\to\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{c\cdot x^{\alpha}}=1$, где c и α – константы, тогда функция $y=cx^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x\to\infty$.

2) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x\to a$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{c\cdot(x-a)^{\alpha}}=1$, где c и α – константы, тогда функция $y=c(x-a)^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x\to a$.

<u>Пример 2.5.</u>

а) Найти асимптотику (асимптотическое представление) функции $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to\infty$.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\sim\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot x^{1/2}},$$

следовательно, асимптотикой функции $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to\infty$ является функция $\frac{1}{2}x^{-1/2}$; $c=\frac{1}{2}$; $\alpha=-\frac{1}{2}$.

б) Найти асимптотику функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x\to 1$.

При $x\to 1$ функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ является бесконечно большой:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2)}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{3(1-x)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}(1-x)^{1/3}}.$$

Асимптотикой в данном случае является функция $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}(1-x)^{-1/3}$.

в) Найти асимптотику функции $f(x)=x^3-3x+2$ при $x\to 1$.

В данном случае при $x\to 1$ функция $f(x)$ является бесконечно малой;

$$f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\sim 3(x-1)^2.$$

Получаем асимптотику $y=3(x-1)^2$; $c=3$; $\alpha=2$.

3. Непрерывность функции.

Определение 3.1. Если $x<a$ и $x\to a,$ то условно пишут $x\to a-0,$ аналогично, если $x>a$ $x\to a,$ то $x\to a+0$. Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ называют соответственно пределом слева функции $f(x)$ в точке a и пределом справа функции $f(x)$ в точке a (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство: $f(a-0)=f(a+0)$.

Определение 3.2. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке a, если

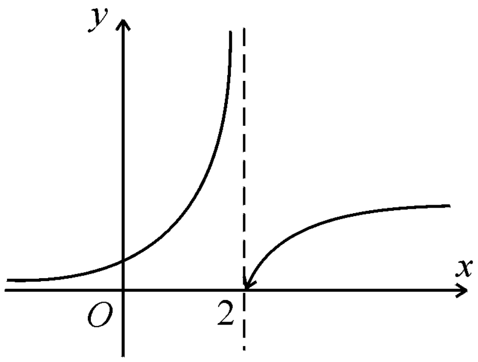
1) она определена в этой точке;
2) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются точками разрыва.

Пример 3.1.

а) Найти точки разрыва функции $y=3^{\frac{1}{2-x}}$, пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.

Функция $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ имеет разрыв в точке $x = 2,$ т.к. она в этой точке не определена. При этом:



$$\lim_{x \to 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

б) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y = \frac{2^{\frac{1}{x+3}} + 4x - 8}{2^{\frac{1}{x+3}} + 4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка $x = -3,$ т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \to -3-0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = \frac{2^{-\infty} - 12 - 8}{2^{-\infty} + 4} = \frac{0 - 20}{0 + 4} = -5;$$

$$\lim_{x \to -3+0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = 1,$$ т.к. при $x \to -3 + 0$ имеем:

$$2^{1/(x+3)} + 4x - 8 \sim 2^{1/(x+3)}; \qquad 2^{1/(x+3)} + 4 \sim 2^{1/(x+3)}.$$

Величина скачка $\Delta = 1 - (-5) = 6.$

в) Найти точки разрыва, величину скачка Δ и построить график функции

$$y = \begin{cases} -3x, & x \le 0 \\ 4\sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \dfrac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

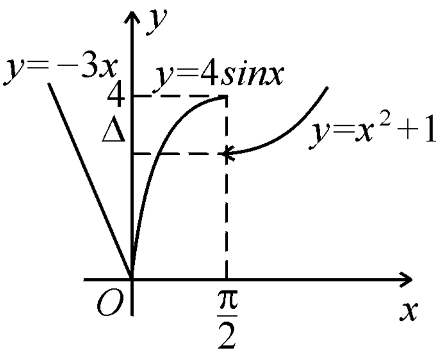
Данная функция непрерывна для $x \in (-\infty;\ 0) \cup \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ +\infty\right).$

Исследуем только точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2},$ т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (-3x) = 0; \qquad \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (4\sin x) = 0;$$

$f(0) = -3x\big|_{x=0} = 0,$ следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (4\sin x) = 4; \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sin\frac{\pi}{2} = 4;$$



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \left(x^2+1\right) = \frac{\pi^2}{4}+1 = 3{,}467,$$ следовательно, точка $x = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва. Величина скачка

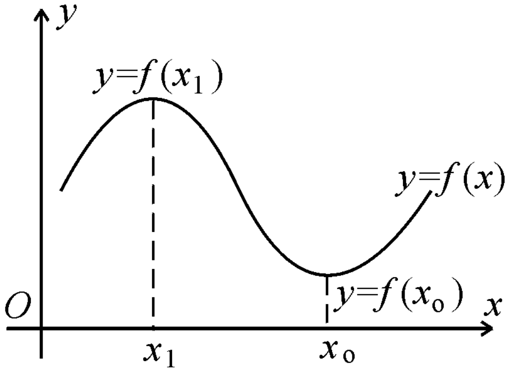
$$\Delta = 4 - \left(\frac{\pi^2}{4}+1\right) = 3 - \frac{\pi^2}{4} \approx 0{,}533.$$

2.1 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек $x_1,\ x_2$, принадлежащих данному интервале (отрезку), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ при $a < x < b,$ то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a;\ b]$.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками x (где $f'(x) = 0$ или же $f'(x)$ не существует).



Если существует такая двусторонняя окрестность точки x_o, что для всякой точки $x \neq x_o$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_o)$, то точка x_o называется точкой минимума функции

$y = f(x)$, а число $f(x_o)$ − минимумом функции $y = f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_1$ некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то x_1 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, а $f(x_1)$ − максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции – экстремумом функции. Если x_o – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_o) = 0$ или же $f'(x_o)$ не существует (*необходимое условие существования экстремума*). Обратное утверждение не верно: точки, в которых $f'(x_o) = 0$ или $f'(x_o)$ не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$.

Достаточный признак существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ следующий: если существует такая окрестность $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ критической точки x_o, что $f'(x) > 0$ при $x_o - \delta < x < x_o$ и $f'(x) < 0$ при $x_o < x < x_o + \delta$, то x_o – точка максимума функции $f(x)$; если же $f'(x) < 0$ при $x_o - \delta < x < x_o$ и $f'(x) > 0$ при $x_o < x < x_o + \delta$, то x_o – точка минимума функции $f(x)$.
Если, наконец, найдется такое положительное число δ, что $f'(x)$ сохраняет неизменный знак при $x_o - \delta < x < x_o + \delta$, то точка x_o не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Наименьшее (*наибольшее*) *значение* непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a; b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a; b]$.

<u>Пример 1.1.</u> Найти экстремумы и интервалы монотонности функции $y = x \cdot \sqrt{-5x}$.

Область существования: $-5x \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; x \leq 0.$

Находим критические точки:

$$y' = \sqrt{-5x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{-5x}} \cdot (-5) = \sqrt{-5x} - \frac{5x}{2\sqrt{-5x}} =$$

$$= \frac{-10x - 5x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{-15x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3 \cdot (-5x)}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{-5x} \geq 0.$$

При $x \leq 0$ функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке $x = 0$: $y(0) = 0.$

<u>Пример 1.2.</u> Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y=\sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}.$$

Область существования: $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

Находим критические точки:

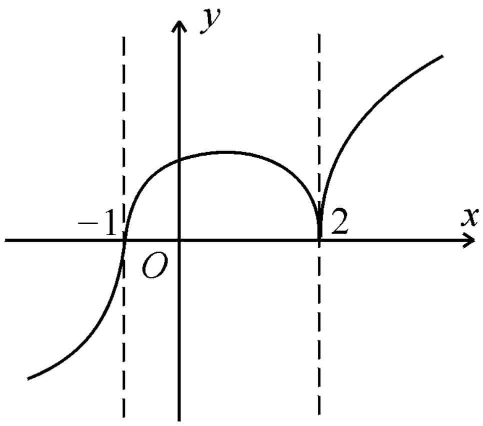
$$y'=\frac{(2-x)^2-2(2-x)(x+1)}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}}=\frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}}=\frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}},$$

$y'=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0,$

y' не существует $\Rightarrow x_2=-1;\ x_3=2.$ Получили три критические точки.

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ +\infty)$
y'	+	не сущ.	+	0	–	не сущ.	+
y	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\lim_{x\to 2+0} y'(x)=\lim_{x\to 2+0}\frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}}=+\infty;\quad \lim_{x\to 2-0}\frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}}=-\infty.$$



$$\lim_{x\to 1-0} y'(x)=\lim_{x\to 1+0} y'(x)=+\infty.$$

Так как $y'(x)=k$, где $k-$ угловой коэффициент касательной, то при $x=-1$ и $x=2$ касательная к графику функции перпендикулярна оси Ox.

$y(-1)=0;\quad y(0)=\sqrt[3]{4};\quad y(2)=0.$

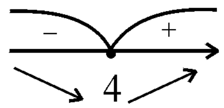
Пример 1.3. Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом 256 м^3 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть $a-$ сторона квадрата основания, $h-$ глубина бассейна;

$$a^2h=256 \;\Rightarrow\; a^2=\frac{256}{h},\quad a=\frac{16}{\sqrt{h}},\quad h>0;$$

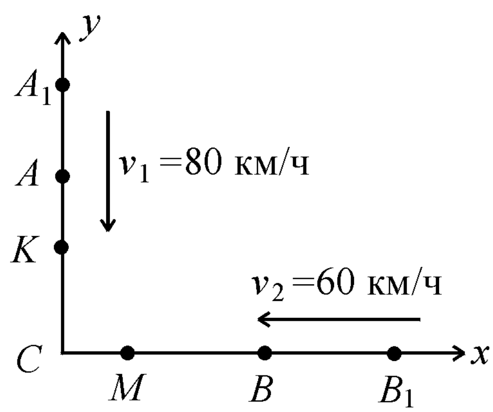
$$S=S_{бок}+S_{дна}=4ah+a^2=4\cdot\frac{16}{\sqrt{h}}\cdot h+\frac{256}{h}=64\sqrt{h}+\frac{256}{\sqrt{h}}=F(h);$$

$$F'(h)=\frac{64}{2\sqrt{h}}-\frac{256}{h^2}=\frac{32}{\sqrt{h}}-\frac{256}{h^2}=\frac{32h^{3/2}-256}{h^2}=\frac{32}{h^2}\left(h^{3/2}-8\right);$$



$F'(h)=0 \;\Rightarrow\; h^{3/2}=8;\quad h=4.$ При $h=4$ величина $F(h)=S$ будет наименьшей.

<u>Пример 1.4.</u> Две прямые железные дороги AA_1 и BB_1 перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте $C,$ причем $AC=800$ км и $BC=700$ км. Из пунктов A и B по направлению к C одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно 80 км/ч и 60 км/ч. Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим ?



Отметим положение поездов в момент $t>0$ точками K и M.

$AK=80t;\quad BM=60t;$

$CK=AC-AK=800-80t;$

$CM=CB-BM=700-60t;$

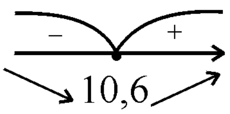
$(KM)^2=(CK)^2+(CM)^2=$

$=(800-80t)^2+(700-60t)^2;$ KM минимально, если минимальна величина

$(KM)^2=F(t)=(800-80t)^2+(700-60t)^2;$

$F(t)=2(800-80t)\cdot(-80)+2(700-60t)\cdot(-60)=$

$=-128000+12800t-84000t+7200t=20000t-212000=0;\quad t=10{,}6;$



$t=10{,}6$ – точка минимума функции $F(t)$. Через $10{,}6$ часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.

2.2. АСИМПТОТЫ

Если точка $(x;\ y)$ непрерывно перемещается по кривой $y=f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Если существует число a такое, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-k_1x\right]=b_1$, то прямая $y=k_1x+b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_2$ и $\lim\limits_{x\to-2}\left[f(x)-k_2x\right]=b_1$, то прямая $y=k_2x+b_2$ будет асимптотой (*левая наклонная асимптота*).

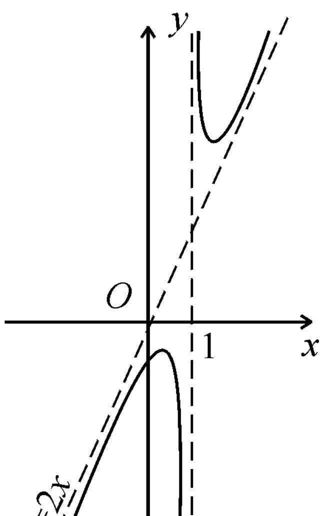
График функции $y=f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

<u>Пример 2.1.</u> Найти асимптоты и построить график функции
$y=2x+\dfrac{3cos(x-1)}{x-1}$.
Область существования: $x\neq 1$.
Ищем вертикальные асимптоты.
Функция имеет разрыв в точке $x=1$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to1-0}\left(2x+\frac{3cos(x-1)}{x-1}\right)=2+\frac{3\cdot1}{-0}=2-\infty=-\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0}\left(2x+\frac{3cos(x-1)}{x-1}\right)=2+\frac{3\cdot1}{+0}=2+\infty=+\infty;$$

следовательно, $x=1$ – вертикальная асимптота.
Ищем наклонные асимптоты в виде $y=kx+b$.



$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\left(2x+\frac{3cos(x-1)}{x-1}\right)=$$

$$=2+0=2;\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[2x+\frac{3cos(x-1)}{x-1}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3cos(x-1)}{x-1}=0.$$

Следовательно, при $x\to\pm\infty$ существует асимптота $y=2x$.

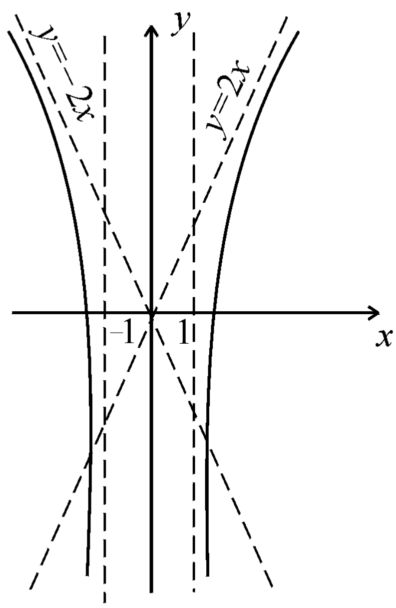
<u>Пример 2.2.</u> Найти асимптоты и построить график

функции $y=\dfrac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$.

Область существования: $x^2-1>0$; $x^2>1$; $x>1$ и $x<-1$.

$$y=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}};\quad y(-x)=\frac{2(-x)^2-9}{\sqrt{(-x)^2-1}}=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}\quad\Rightarrow\quad y(x)=y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при $x>1$, а затем отразить его симметрично относительно оси Oy.



$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2-9}{+0}=-\infty\quad\Rightarrow\quad x=1-$$

вертикальная асимптота при $x\to 1+0$.

Пусть $x\to 1+\infty$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x^2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{9}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=2.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9-2x\cdot\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2-9\right)^2-4x^2\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(2x^2-9+2x\cdot\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-32x^2+81}{x^3\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(2-\frac{9}{x^2}+2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=0.$$

При $x\to+\infty$ получаем асимптоту $y=2x$. График данной функции пересекает ось Ox при $2x^2-9=0$, т.е. в точках $x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

<u>Пример 2.3.</u> Найти асимптоты и построить график функции

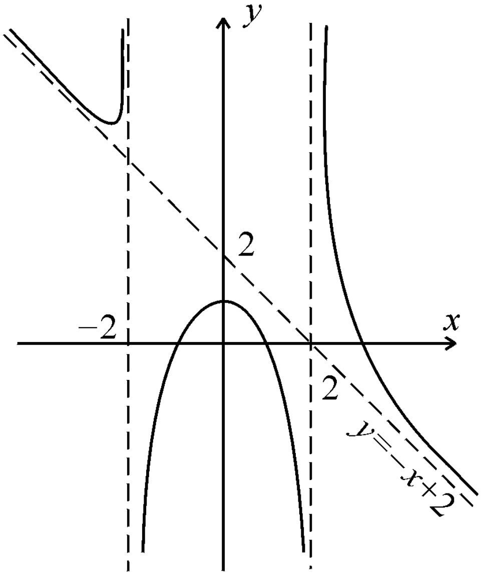
$$y=\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}.$$

Область существования: $4-x^2\neq 0\quad\Rightarrow\quad x\neq 2$ и $x\neq -2$.

В точках $x_1=-2$ и $x_2=+2$ функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{-8-8+6+2}{-0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{-8-8+6+2}{+0}=-\infty;$$



$x=-2$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{8-8-6+2}{+0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{8-8-6+2}{-0}=+\infty;$$

$x=2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x\to\pm\infty$ ищем в виде: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{x\left(4-x^2\right)}=$$

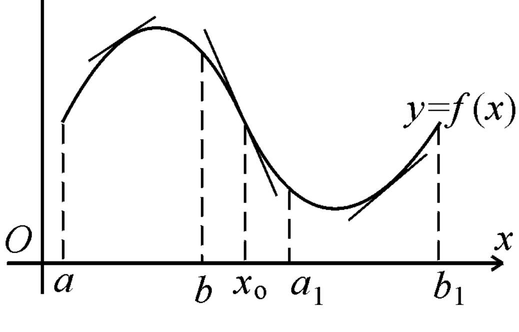
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{1}{-1}=-1;\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+x+2}{4-x^2}=2.$$

При $x\to\pm\infty$ получаем асимптоту $y=-x+2$.

2.3. НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y=f(x)$ *вогнут вниз* на интервале $(a;\ b)$ (*вогнут вверх* на интервале $(a_1;\ b_1)$), если при



$a<x<b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при $a_1<x<b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала $(a;\ b)$ (или интервала $(a_1;\ b_1)$). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y=f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства

$$f'(x)<0\qquad \left(f'(x)>0\right).$$

Точка $(x_o, f(x_o))$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба.* Для абсциссы точки перегиба x_o графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_o) = 0$ или $f''(x_o)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками 2-го рода.* Критическая точка 2-го рода x_o является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_o - \delta < x < x_o$ и $x_o < x < x_o + \delta$, где δ – некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

Пример. Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

Имеем: $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}$. Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают всю область существования функции $(-\infty; \ +\infty)$ на три интервала.

x	$\left(-\infty; \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \ +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	–
y	$\cup$	перегиб	$\cap$	перегиб	$\cup$

Получили: кривая вогнута вверх при $x \in \left(-\infty; \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \ +\infty\right)$ и вогнута вверх при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба.

2.4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область существования этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области существования. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются): четность, периодичность и т.д.

Далее нужно найти точки разрыва, асимптоты, точки экстремума функции, точки перегиба и т.д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции.

Пример 4.1. Провести полное исследование и построить график функции $y = x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Область существования: $x \in (-\infty;\ \ +\infty)$.

$y(x) \neq y(-x) \ \Rightarrow$ функция общего вида.

Так как функция определена при всех x, и у нее нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} = +\infty,$$ следовательно, наклонных асимптот также нет.

Исследуем функцию по первой производной.

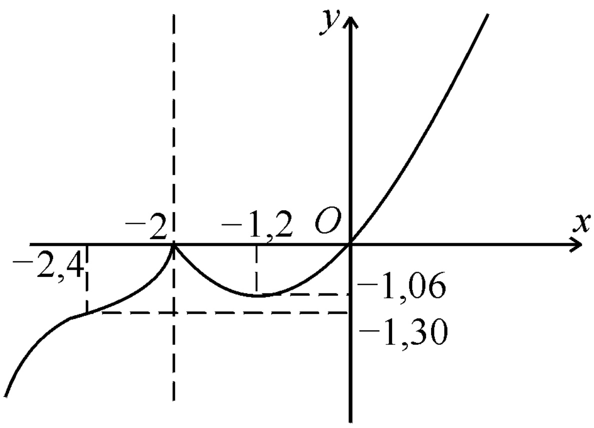
$$y' = \left[x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2} \right] = (x+2)^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{-1/3} = \frac{3(x+2) + 2x}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 6 = 0, \quad x = -1{,}2;$

y' не существует $\quad \Rightarrow \quad x + 2 = 0, \quad x = -2.$

x	$(-\infty;\ -2)$	-2	$(-2;\ -1{,}2)$	$-1{,}2$	$(-1{,}2;\ +\infty)$
y'	+	не сущ.	–	0	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$y_{max} = y(-2) = 0$ (касательная в этой точке перпендикулярна оси Ox).



$y_{min} = y(-1{,}2) = -1{,}2 \cdot \sqrt[3]{0{,}64} \approx -1{,}06$ (касательная в этой точке параллельна оси Ox).

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = \left[\frac{5x+6}{(x+2)^{2/3}} \right]' = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{x+2} - (5x+6) \cdot \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{15(x+2) - (5x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{10x+24}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

$y'' = 0$ при $x = -2{,}4$; y'' не существует при $x = -2$.

x	$(-\infty;\ -2{,}4)$	$-2{,}4$	$(-2{,}4;\ -2)$	-2	$(-2;\ +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	не сущест.	$+$
y	$\cap$	перегиб	$\cup$		$\cup$

$y_{перегиба} = y(-2{,}4) = -2{,}4 \cdot \sqrt[3]{(-2{,}4)^2} \approx -1{,}30;$ $\qquad y(0) = 0.$

<u>Пример 4.2.</u> Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2.$$

Область существования: $x \neq -2$.

$y(x) \neq y(-x) \;\Rightarrow$ функция общего вида.

$x = -2$ – точка разрыва, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \to 2-0} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left(\frac{4+1}{-0} \right)^2 = +\infty; \qquad \lim_{x \to 2+0} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left(\frac{4+1}{+0} \right)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow \; x = 2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = 4.$$

При $x\to\pm\infty$ получаем асимптоту $y=4$.

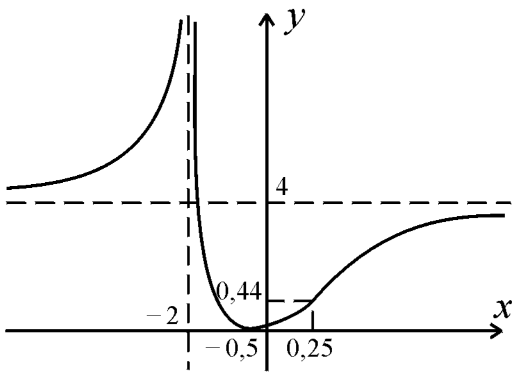
Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = 2\cdot\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)\cdot\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{6(2x+1)}{(x+2)^2};$$

$y'=0 \;\Rightarrow\; 2x+1=0,\;\; x=-0{,}5;$

y' не существует $\Rightarrow$ $x=-2$.

x	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ \ -0{,}5)$	$-0{,}5$	$(-0{,}5;\ \ +\infty)$
y'	+	–	0	+
y	↗	↘	min	↗



$y_{min} = y(-0{,}5) = 0.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = 6\cdot\frac{2(x+2)^3-3(x+2)^2\cdot(2x+1)}{(x+2)^6} =$$

$$= 6\cdot\frac{2(x+2)-3(2x+1)}{(x+2)^4} = \frac{6(1-4x)}{(x+2)^4};$$

$y''=0 \;\Rightarrow\; 1-4x=0;\quad x=0{,}25;$

y'' не существует $\Rightarrow$ $x=-2$.

x	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ \ 0{,}25)$	$0{,}25$	$(0{,}25;\ \ +\infty)$
y''	+	+	0	–
y	$\cup$	$\cup$	перегиб	$\cap$

$$y_{перегиба} = y(0{,}25) = \left(\frac{1{,}5}{2{,}25}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

Пример 4.3. Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{e^{x-3}}{x-3}$.

Область существования: $x - 3 \neq 0;\quad x \neq 3.$

$y(x) \neq y(-x)$ – функция общего вида.

В точке $x = 3$ функция терпит разрыв, т.к. в ней она не определена.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 3-0} \frac{e^{x-3}}{x-3} = -\infty, \\ &\lim_{x\to 3+0} \frac{e^{x-3}}{x-3} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x = 3 \text{ – вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

1) $x \to +\infty,$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{\left(x^2 - 3x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{2x-3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{(2x-3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{2} = +\infty,$$ следовательно, при $x \to +\infty$ наклонных асимптот нет.

2) $x \to -\infty,$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \frac{0}{+\infty} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x-3} = 0,$$

при $x \to -\infty$ получаем асимптоту $y = 0.$

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left(\frac{e^{x-3}}{x-3}\right)' = \frac{e^{x-3}\cdot(x-3) - e^{x-3}}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-3-1}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2},$$

$y' = 0 \;\Rightarrow\; x - 4 = 0,\; x = 4;\qquad y'$ не существует $\;\Rightarrow\; x = 3.$

x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ \ 4)$	4	$(4;\ \ +\infty)$

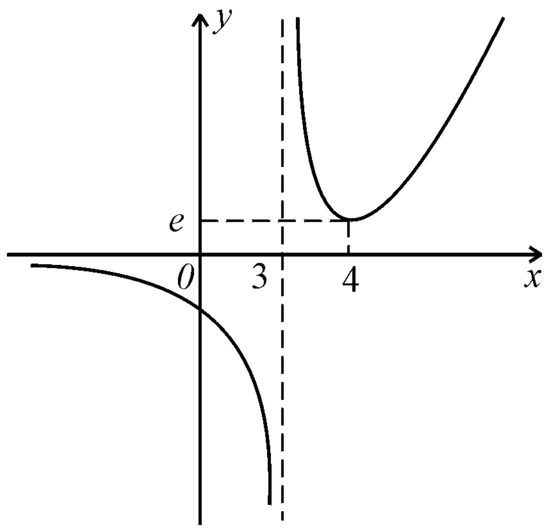
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	↘	min	↗

$y_{min} = y(4) = e \approx 2{,}72.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = e^{x-3} \cdot \frac{x-4}{(x-3)^2} + e^{x-3} \cdot \frac{(x-3)^2 - (x-4)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{e^{x-3}}{(x-3)^2} \cdot \frac{x^2 - 7x + 12 - x + 5}{x-3} = \frac{e^{x-3}\cdot\left(x^2 - 8x + 17\right)}{(x-3)^3}; \qquad y'' \neq 0;$$



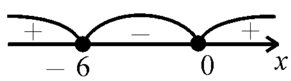
y'' не существует $\Rightarrow$ $x = 3.$

x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

$$y(0) = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \approx —{,}02.$$

<u>Пример 4.4.</u> Провести полное исследование и построить график функции $y = ln\dfrac{x+6}{x} - 1.$

Область существования: $\dfrac{x+6}{x} > 0.$



$x > 0,\ \ x < -6.$

Функция общего вида.

$$\lim_{x\to -6-0}\left[ln\frac{x+6}{x} - 1\right] = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = -6 \ - \text{ вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x\to -+0}\left[ln\frac{x+6}{x} - 1\right] = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = -0 \ - \text{ вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ln\frac{x+6}{x}-1}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[ln\frac{x+6}{x}-1\right] = -1.$$

При $x\to\pm\infty$ получаем асимптоту $y=-1$.

Исследуем функцию по первой производной.

x	$(-\infty;\ -6)$	$(0;\ +\infty)$
y'	–	–
y	$\searrow$	$\searrow$

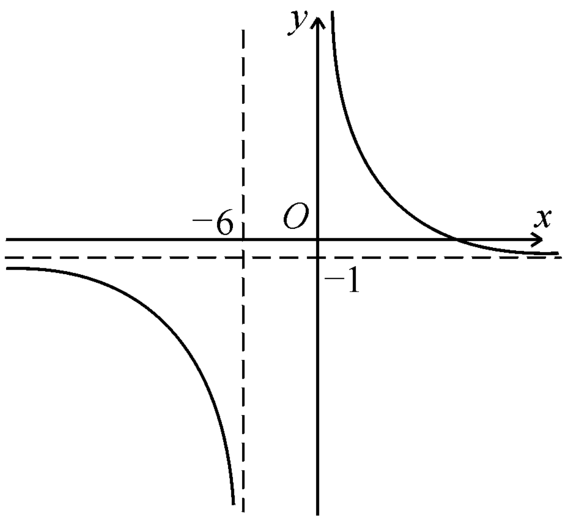
$$y' = \frac{x}{x+6}\cdot\frac{x-x-6}{x^2} = \frac{-6}{x(x+6)} \neq 0.$$

Экстремумов у функции нет.

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = -6\cdot\frac{-(x+6+x)}{x^2(x+6)^2} = \frac{6(2x+6)}{x^2(x+6)^2} = \frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2};$$

$y''=0 \ \Rightarrow\ x+3=0;\quad x=-3$ – не входит в область существования.



x	$(-\infty;\ -6)$	$(0;\ +\infty)$
y''	–	+
y	$\cap$	$\cup$

Точек перегиба нет.

$$ln\frac{x+6}{x}-1=0 \ \Rightarrow\ x=\frac{6}{e-1};$$

$$y\left(\frac{6}{e-1}\right)=0.$$

2 семестр

1. Интегральное исчисление функции одной переменной

1. Неопределенный интеграл

Первообразной функцией для функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется ее общая первообразная

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ .$$

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $F(x)$ − результат интегрирования, C − произвольная постоянная.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$.
2. $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$, где A − постоянная.
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица простейших интегралов:

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $\quad \int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$.
11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x-a}{x+a} + C, (a \neq 0)$.
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C, (A \neq 0)$.

Основные методы интегрирования:

1. Подведение под знак дифференциала:

а) к функции, стоящей под знаком дифференциала, можно прибавлять или вычитать любую постоянную: $df(x) = d(f(x) \pm A)$;

б) под знак дифференциала можно подводить постоянный множитель: $df(x) = \dfrac{1}{A} d(A \cdot f(x))$;

в) под знак дифференциала подводится функция по правилу: $f'(x)dx = df(x)$.

2. Интегрирование по частям с использованием формулы:

$\int u dv = uv - \int v du$, где $u = u(x), v = v(x)$.

С помощью этого метода вычисляются следующие интегралы

а) $\int a^x \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = a^x dx$.

б) $\int \sin ax \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \sin ax dx$.

в) $\int \cos ax \cdot P_n(x)dx$, $u = P_n(x)$, $dv = \cos ax dx$,

г) $\int \ln ax \cdot P_n(x)dx$, $u = \ln ax$, $dv = P_n(x)dx$,

д) $\int \arcsin ax \cdot P_n(x)dx$, $u = \arcsin ax$, $dv = P_n(x)dx$,

е) $\int \mathrm{arctg} ax \cdot P_n(x)dx$, $u = \mathrm{arctg} ax$, $dv = P_n(x)dx$,

где $P_n(x) -$ многочлен n-ой степени.

3. Интегрирование методом замены переменной по формуле

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, где $x = \varphi(t)$.

Пример выполнения задания.

Найти неопределенные интегралы:
а) $\int \dfrac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; б) $\int \dfrac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx$; в) $\int (3x + 4)e^{3x} dx$.

Решение.

а) используя основные свойства неопределенного интеграла и выполняя подведение функций под знак дифференциала, найдем интеграл

$$\int \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(\frac{x^2}{2}) =$$

$$= \int (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) + \left(-\frac{1}{2}\right)\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Проверим результат интегрирования дифференцированием:

$$\left(\frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \sqrt{1-x^2} + C\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3(\arcsin x)^2 \cdot (\arcsin x)' - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' + C' =$$

$$= \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + 0 = \frac{(\arcsin x)^2 + x}{\sqrt{1-x^2}},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

б) подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь. Представим эту дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого выполним деление многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 17 & \underline{x^2 - 4x + 3} \\ \underline{x^3 - 4x^2 + 3x} & x + 4 \\ 4x^2 - 3x - 17 & \\ \underline{4x^2 - 16x + 12} & \\ 13x - 29 & \end{array}$$

Тогда

$$\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3}dx = \int \left(x + 4 + \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3}\right)dx = \int x dx + \int 4dx + \int \frac{13x - 29}{x^2 - 4x + 3}dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}+4x+\int\frac{13x-29}{x^2-4x+3}dx.$$

Для того чтобы найти последний интеграл, представим правильную дробь в виде суммы простейших дробей. Для этого разложим на множители знаменатель дроби $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ и разложим дробь на простейшие

$$\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)},$$

значит $\quad 13x-29=A(x-3)+B(x-1)$.

При $x=3$ имеем $13\cdot 3-29=B(3-1)$, откуда $B=5$;

при $x=1$ имеем $13\cdot 1-29=A(1-3)$, откуда $A=8$.

Получаем $\dfrac{13x-29}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{5}{x-3}$ и интегрируем

$$\int\frac{13x-29}{(x-1)(x-3)}dx=\int\frac{8}{x-1}dx+\int\frac{5}{x-3}dx=8\int\frac{d(x-1)}{x-1}+5\int\frac{d(x-3)}{x-3}=$$

$$=8\ln|x-1|+5\ln|x-3|+C$$

и окончательно получаем

$$\int\frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx=\frac{x^2}{2}+4x+8\ln|x-1|+\ln|x-3|+C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{x^2}{2}+4x+8\ln|x-1|+\ln|x-3|+C\right)'=\frac{2x}{2}+4+\frac{8}{x-1}+\frac{5}{x-3}=$$

$$=\frac{(x+4)(x-1)(x-3)+8(x-3)+5(x-1)}{(x-1)(x+3)}=\frac{x^3-17}{x^2-4x+3},$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

Замечание.

Интеграл от правильной рациональной дроби сводится к сумме интегралов от простейших дробей. Наиболее часто встречаются следующие интегралы:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C; \qquad \int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{(-k+1)}(x-a)^{-k+1}+C,\ (k=2,3,\ldots).$$

в) применим методом интегрирования по частям.

Примем $u = 3x + 4$, $dv = e^{3x}dx$, тогда $du = 3dx$, $v = \frac{1}{3}e^{3x}$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int (3x+4)e^{3x}dx = (3x+4)\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 3dx = \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \int e^{3x}dx =$$

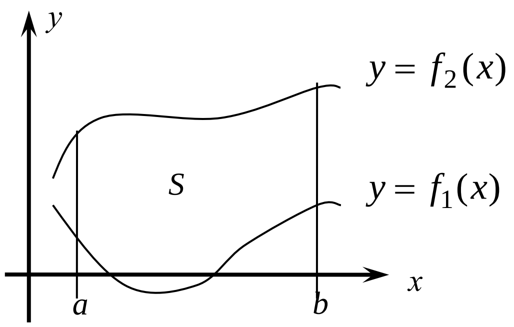
$$= \frac{3x+4}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{3x+4-1}{3}e^{3x} + C = e^{3x}(x+1) + C\,.$$

Проверим результат дифференцированием

$$(e^{3x}(x+1)+C)' = 3e^{3x}(x+1) + e^{3x} = e^{3x}\big(3(x+1)+1\big) = e^{3x}(3x+4)\,,$$

что совпадает с подынтегральной функцией.

1.2 **Определенный интеграл**



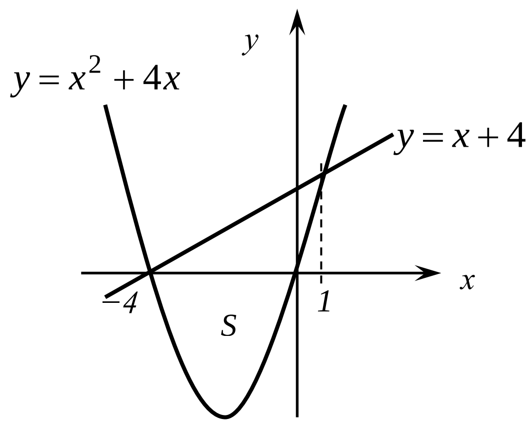
Если на плоскости Oxy задана фигура, ограниченная двумя непрерывными линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь S такой фигуры может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx, \text{ где } f_2(x) \ge f_1(x) \text{ на отрезке } [a,b].$$

Пример 2.1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Решение.

Заданные линии ограничивают на плоскости Оху криволинейную трапецию, изображенную на рисунке.



Найдем координаты точек пересечения заданных линий, для этого решим систему уравнений

$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + 4 \end{cases}$, $x^2 + 4x = x + 4$, $x^2 + 3x - 4 = 0$, откуда $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

Тогда искомая площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{-4}^{1} (x + 4 - x^2 - 4x)dx = \int (4 - 3x - x^2)dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \ (\textit{кв. ед.}).$$

Объемы тел, образованных вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью *Ox* и прямыми $x = a$, $x = b$,

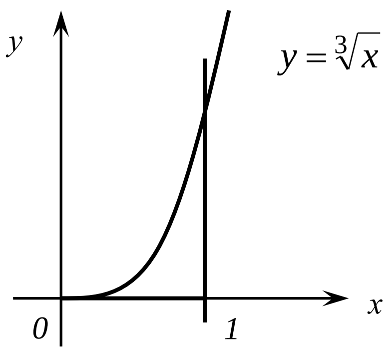
1) вокруг оси *Ox*, вычисляются по формуле $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$;

2) вокруг оси *Oy*, вычисляются по формуле $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$.

Пример.*2.2* Вычислить объемы тел, образованных вращением вокруг осей *Ox* и *Oy* криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y = \sqrt[3]{x}$, осью

Ox и прямой $x=1$.

Решение.



1) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox, равен

$$V_x=\pi\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}\right)^2dx=\pi\left.\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right|_0^1=\frac{3\pi}{5}\ (\textit{куб. ед.})$$

2) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy, равен

$$V_y=2\pi\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{x}dx=2\pi\left.\frac{x^{7/3}}{7/3}\right|_0^1=\frac{6\pi}{7}(\textit{куб. ед.}).$$

2 Ряды

Степенным рядом называют ряд вида

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n, \tag{9}$$

расположенный по степеням двучлена $(x-a)$.

В соответствии с теоремой Абеля ряд (9) сходится на интервале $x\in(a-R,a+R)$, а для всех x, лежащих вне этого интервала, ряд расходится. Число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда. На концах интервала (при $x=a-R$ и при $x=a+R$) вопрос о сходимости и расходимости данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда. У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку ($R=0$), у других охватывает всю ось Ox ($R=\infty$).

Согласно признаку Даламбера радиус сходимости определяют по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{10}$$

Если воспользоваться признаком Коши, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

Пример. Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на краях интервала $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}$

Решение.

Радиус сходимости определим по формуле (10):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^{n-1}}\right|=10\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=10\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=10\,.$$

На концах интервала: при $x=-10$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n\cdot 10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, который является знакочередующимся и сходится по теореме Лейбница, так как его члены убывают по абсолютной величине $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. При $x=10$ получим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Таким образом, данный степенной ряд сходится при $x\in[-10;10)$.

Основные элементарные функции имеют простые разложения по степеням *x,* которые представлены ниже:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{21}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\quad\forall x\in(-\infty,\infty),$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\quad\forall x\in(-\infty,\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\quad\forall x\in(-\infty,\infty),$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\ \forall x\in(-1,1),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots\quad \forall x\in(-1,1),$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\quad \forall x\in(-1,1].$$

При приближенных вычислениях определенных интегралов требуется разложить подынтегральную функцию в степенной ряд, который в пределах интервала сходимости может быть почленно проинтегрирован. Используя формулу Ньютона – Лейбница, определенный интеграл вычисляют как частичную сумму получающегося числового ряда. Если ряд знакочередующийся, то точность приближенных вычислений не превосходит первого из отброшенных членов.

Пример. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда: $\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx$.

Решение.

Используем разложение в ряд для функции $\sin x$ и подставим его в подынтегральное выражение

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^{0,5}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^{0,5}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,5}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3 3!3}+\frac{1}{2^5 5!5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)!(2n-1)}+\ldots\approx$$

$$\approx 0,5-0,0069+0,00005\approx 0,5-0,0069\approx 0,4931\approx 0,493.$$

В вычислениях приведены первые три члена ряда с сохранением четырех знаков после запятой, так как заданная точность составляет 0,001. Третий член ряда отброшен, так как он по величине меньше заданной точности $(0{,}00005) < 0{,}001$. В окончательном результате проведено округление до трех знаков после запятой.

3. Функции нескольких переменных

Переменная величина z называется *функцией двух переменных* x и y, если каждой паре значений (x,y) из данной области соответствует единственное определенное значение $z = f(x,y)$.

Для функции $z = f(x,y)$ вводятся понятия *частных производных* первого порядка, которые определяются выражениями:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y},$$

и *частных производных* второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Функция $z = f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ *максимум* (*минимум*), если значение этой функции в точке M_0 больше (меньше), чем значения функции в любой точке из окрестности точки M_0.

Необходимыми условиями существования *экстремума* (максимума или минимума) дифференцируемой функции $z = f(x,y)$ является равенство нулю ее частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

Точки, в которых частные производные обращаются в ноль, называются *стационарными точками* функции $z = f(x,y)$. Для того чтобы стационарная точка являлась экстремумом, в ней должны выполняться *достаточные условия*.

Обозначим $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}$, $B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}$, $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$, $\Delta = AC - B^2$.

Если в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$

$\Delta > 0, A > 0$, то M_0 есть точка минимума;

$\Delta > 0, A < 0$, то M_0 есть точка максимума;

$\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;

$\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 + 6$.

Решение.

1. Найдем частные производные заданной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2y.$$

2. Запишем необходимые условия существования экстремума

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 4 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

значит точка $M(1;2)$ является стационарной точкой функции.

3. Проверим выполнение в точке M достаточного условия. Для этого найдем вторые частные производные функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

В точке $M(1;2)$ $A = -2, B = 0, C = -2$ и $\Delta = (-2)\cdot(-2) - 0 = 4$. Поскольку $\Delta = 4 > 0, A = -2 < 0$, точка $M(1;2)$ является точкой максимума. Значение функции в этой точке $z|_M = 2\cdot 1 + 4\cdot 2 - 1^2 - 2^2 + 6 = 11$.

Функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$ принимает наибольшее и наименьшее значения в области *D*, ограниченной линией $\varphi(x, y) = 0$, либо в стационарных точках, расположенных внутри области *D*, либо на границе этой области.

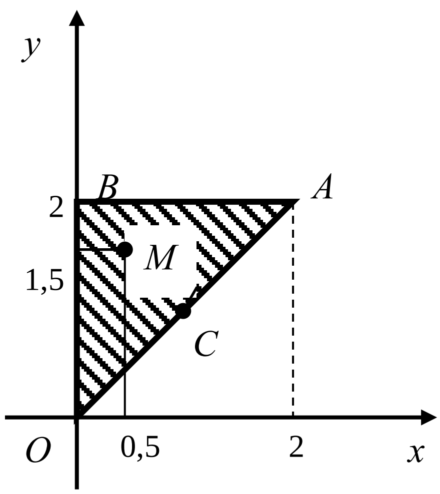
Задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x, y)$ в заданной области D решается по следующему плану:

1. Определяем стационарные точки функции, расположенные внутри области *D*, и вычисляем значения функции в этих точках.
2. Находим стационарные точки функции на границе $\varphi(x, y) = 0$ области или на отдельных ее участках, заданных различными уравнениями, и вычисляем значения функции в этих точках.
3. Из всех вычисленных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x - y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 2$, $y = x$.

Решение.

1. Найдем стационарные точки функции из условий равенства нулю частных производных функции



$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 1{,}5 \end{cases}$$

Стационарная точка $M(0{,}5;1{,}5)$ лежит внутри заданной области *OAB*.

Значение функции в точке *M* равно

$$z\big|_M = 0{,}5^2 + 2\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5 - 4\cdot 0{,}5 - 1{,}5 = -1{,}75\,.$$

2. Исследуем поведение функции на границах области:

а) на границе *OA* $y = x$, $0 \le x \le 2$, $z = x^2 + 2x\cdot x - 4\cdot x - x$ или $z = 3x^2 - 5x$;

$z' = 6x - 5$, $z' = 0$ при $x = \dfrac{5}{6}$, тогда $y = \dfrac{5}{6}$ (так как y=x).

В точке $C\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{6}\right)$ значение функции равно $z\big|_C = 3\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 - 5\cdot\dfrac{5}{6} = -\dfrac{25}{12}$.

Вычислим значения функции в крайних точках отрезка *OA*.

В точке $O(0;0)$ $z\big|_O = 0$, в точке $A(2;2)$ значение функции равно

$z\big|_A = 3\cdot 2^2 - 5\cdot 2 = 2$.

б) на границе *BA* $y = 2$, $0 \le x \le 2$, $z = x^2 + 2x\cdot 2 - 4x - 2$ или $z = x^2 - 2$;

$z' = 2x$, $z' = 0$ при $x = 0$, а $y = 2$ согласно уравнению прямой *BA*.

В точке $B(0;2)$ значение функции равно $z\big|_B = 3\cdot 0^2 - 2 = -2$.

в) на границе *OB* $x = 0$, $0 \le y \le 2$, $z = -y$;

$z' = -1 \ne 0$ при всех $y \in [0;2]$, следовательно, стационарных точек на линии *OB* нет.

3. Из всех вычисленных значений заданной функции выбираем наибольшее и наименьшее:

$z\big|_A = 2$ – наибольшее значение функции в области *OAB*

$z\big|_C = -\dfrac{25}{12}$ – наименьшее значение функции в области *OAB*

Семестр 3
1. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения, в которых переменные можно разделить посредством умножения обеих частей уравнения на одно и то же выражение, называют дифференциальными уравнениями *с разделяющимися переменными*:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_2(x)}{f_1(y)}\to f_1(y)dy=f_2(x)dx, \tag{1}$$

или в дифференциальной форме

$$f_1(x)\cdot f_2(y)dx+f_3(x)f_4(y)dy=0. \tag{2}$$

Разделим обе части уравнения (2) на произведение функций $f_2(y)f_3(x)$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=0 \tag{2'}$$

и, после интегрирования, получим общий интеграл (общее решение) уравнения:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=C.$$

При делении на $f_2(y)f_3(x)$ может произойти потеря некоторых частных решений. Пусть, например, при $y=y_0$ имеем $f_2(y_0)=0$, тогда функция $y=y_0$ является решением уравнения (2′), т.к. $dy=dy_0=0$. Решением может также быть функция $x=x_0$, если $f_3(x_0)=0$.

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка $x(y+1)dx-\left(x^2+1\right)ydy=0$.

Решение:

Данное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, причем $f_1(x)=x$; $f_2(y)=y+1$; $f_3(x)=x^2+1$; $f_4(y)=-y$. Разделим обе части уравнения на произведение

$$f_2(y)\,f_3(x)=(y+1)\left(x^2+1\right)$$

и получим

$$\frac{xdx}{x^2+1}-\frac{ydy}{y+1}=0.$$

Проинтегрируем последнее равенство

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}-\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=C,$$

используя подведение под знак дифференциала

$$\int\frac{\frac{1}{2}d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}-\int dy+\int\frac{d(y+1)}{y+1}=C,$$

получим общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-y+\ln|y+1|=C.$$

При делении на $f_2(y)=y+1$ потеряно частное решение: $y=-1$.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{3}$$

линейное относительно искомой функции и её производной, называется *линейным*.

Уравнение (3) сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными следующим образом. Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций: $y=u(x)\cdot v(x)$. Одна из этих функций может быть абсолютно произвольной, а вторая определяется в зависимости от первой так, чтобы их произведение удовлетворяло уравнению (3).

Из равенства $y = u \cdot v$ находим $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тогда в соответствие с (3) имеем $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ или $u'v + u\big(v' + p(x)v\big) = q(x)$. Выберем в качестве $v(x)$ какое-нибудь частное решение уравнения

$$v' + p(x)v = 0, \tag{4}$$

тогда для отыскания $u(x)$ получим уравнение

$$u'v = q(x). \tag{5}$$

Найдем $v(x)$, разделяя переменные в (4):

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx, \text{ откуда } \ln v = -\int p(x)dx \text{ и } v = e^{-\int p(x)}dx.$$

Зная $v(x)$, найдем $u(x)$ из уравнения (5):

$$\frac{du}{dx}v = q(x) \;\Rightarrow\; du = e^{\int p(x)dx}q(x)dx, \text{ тогда } u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Общее решение линейного уравнения (3) имеет вид

$$y = uv = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right].$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y' - 2y = 1$.

Решение.

Запишем искомую функцию $y(x)$ в виде произведения двух функций:

$$y = u(x) \cdot v(x), \text{ тогда } y' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

и подставим полученные выражения в заданное уравнение

$$u'v + uv' - 2uv = 1.$$

Вынесем за скобки $u(x)$

$$u'v + u(v' - 2v) = 1$$

и, приравнивая к нулю выражение в скобках, получим и решим два дифференциальных уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' - 2v = 0 \qquad\qquad u'v = 1$$

$$\frac{dv}{v} = 2dx \qquad\qquad \frac{du}{dx}e^{2x} = 1$$

$$\ln v = 2x \qquad\qquad du = e^{-2x}dx$$

$$v = e^{2x} \qquad\qquad u = \int e^{-2x}dx,$$

$$u = -\frac{1}{2}\int e^{-2x}d(-2x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

Запишем общее решение заданного дифференциального уравнения в виде

$$y = uv = \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)\cdot e^{2x}, \text{ или } y = -\frac{1}{2} + Ce^{2x}.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + a_1y' + a_2y = f\left(x\right) \qquad (6)$$

называется неоднородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами a_1 и a_2.

Общее решение этого уравнения $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения; y^* – частное решение уравнения (6). Дифференциальное уравнение

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \qquad (7)$$

является однородным и называется соответствующим неоднородному уравнению (6). Общее решение однородного уравнения (7) находят по корням характеристического уравнения

$$r^2 + a_1r + a_2 = 0.$$

Характеристическое уравнение может иметь три случая для корней r_1 и r_2:

1) *корни характеристического уравнения действительные и различные*: $r_1 \neq r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\bar{y} = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные;

2) *корни характеристического уравнения действительные и равные*: $r_1 = r_2$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\overline{y} = e^{r_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные;
3) *корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа* $r_{1,2} = \alpha \pm \beta \cdot i,\ \beta \neq 0$. В этом случае общее решение уравнения (7) записывается в виде $\overline{y} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные.

Частное решение y^* неоднородного уравнения (6) может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в зависимости от вида правой части уравнения $f(x)$.

Первый случай. Правая часть уравнения (6) имеет вид $f\left(x\right) = P\left(x\right)e^{mx}$, где $P\left(x\right)$ – многочлен. Тогда уравнение (6) имеет частное решение вида

$$y^* = x^k Q\left(x\right)e^{mx}, \tag{8}$$

где $Q\left(x\right)$ – полный многочлен той же степени от x, что и $P\left(x\right)$, но с неопределенными коэффициентами;

$k = 0$, если число m не является корнем характеристического уравнения;

$k = 1$, если число m является простым корнем характеристического уравнения;

$k = 2$, если число m является двукратным корнем характеристического уравнения.

Правило сохраняет свою силу и при $m = 0$, когда $f(x)=P(x)$ – многочлен.

Неопределенные коэффициенты в многочлене $Q\left(x\right)$ определяют подстановкой функции (8) и ее производных в уравнение (6) с последующим приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения.

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$3(x^2 y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}dx = 0 \tag{1}$$

Решение

Данное уравнение допускает разделение перлеменных. Действительно, $3y(x^2+1)dy+\sqrt{2+y^2}dx=0$ (2)

или

$$\frac{ydy}{\sqrt{2+y^2}}=\frac{dx}{3(x^2+1)} \quad (3)$$

Находя квадратуры левой и правой частей уравнения (3), получим

$$\frac{1}{2}(2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2=\frac{1}{3}arctgx+C,\ C=const$$

или $\sqrt{2+y^2}=\frac{1}{3}arctgx+C$ (4)

Соотношение (4) является общим интегралом уравнения (1), представленное в неявном виде (не разрешено относительно y).

Замечание. В данном случае уравнение (4) допускает разрешение его относительно y; в других (общем случае) случаях это сделать не всегда удастся.

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$xy'=4\sqrt{2x^2+y^2}+y \quad (5)$$

Решение

Данное уравнение является однородным, т.к. оно может быть представлено в виде

$$y'=4\sqrt{2+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x} \quad (6)$$

Введем замену переменных $z=\frac{y}{x},\ y=xz,\ y'=z+xz'$

Подставив (7) в (6), получим

$$z+xz'=4\sqrt{2+z^2}+z$$

или

$$\frac{dz}{dx}=\frac{4\sqrt{2+z^2}}{x}\Rightarrow\frac{dz}{4\sqrt{2+z^2}}=\frac{dx}{x} \quad (7)$$

Находя квадратуры в уравнении (7), получим

$$\ln\left|z+\sqrt{2+z^2}\right| = 4\ln|x| + \ln C,\ C>0,\ C=const$$

или

$$z+\sqrt{2+z^2} = Cx^4 \quad (8)$$

Возвращаясь к переменной y из (7) к (8), получим

$$\frac{y}{x}+\sqrt{2+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx^4 \quad (9)$$

или

$$y+\sqrt{2x^2+y^2} = Cx^5 \quad (10)$$

(10) – искомый общий интеграл, *C=const.*

Пример. Решить задачу Коши

$$dx+(2x+\sin 2y-2\cos^2 y)dy=0,\ y(-1)=0 \quad (11)$$

Решение

Данное уравнение является линейным относительно функции *x(y).*

Действительно, поделив обе его части на $dy \neq 0$, получим

$$\frac{dx}{dy}+2x=2\cos^2 y-\sin 2y \quad (12)$$

или

$$\frac{dx}{dy}+2x=1+\cos 2y-\sin 2y$$

Введём замену (согласно методу Бернулли) в виде

$$x=u(y)\cdot v(y) \quad (13)$$

Подставляя (13) в уравнение (12), получим

$$u'v+v'u+2uv=1+\cos 2y-\sin 2y \quad (14)$$

или $u'v+u(v'+2v)=1+\cos 2y-\sin 2y \quad (15)$

Выберем функцию $v(y)$ так, чтобы удовлетворять уравнение

$$v'+2v=0 \quad (16)$$

или $\dfrac{dv}{dy}=-2v \Rightarrow \dfrac{dv}{v}=-2dy \quad (17)$

Находя квадратуры для (17), получим

$\ln|v| = -2y \Rightarrow v = e^{-2y}$ (18)

Подставим теперь найденную функцию $v(y)$ из (18) в уравнение (15), получим:

$u'e^{-2y} = 1 + \cos 2y - \sin 2y$

или $u' = (1 + \cos 2y - \sin 2y)e^{2y}$ (19)

Интегрируя (19) по y, найдём

$$u = \frac{1}{2}e^{2y} + \int(\cos 2y - \sin 2y)e^{2y}dy + C$$

Найдём отдельно

$$\int(\cos 2y - \sin 2y)e^{2y}dy + C = \left(\begin{array}{l|c} t = e^{2y} & dt = 2e^{2y}dy \\ dS = (\cos 2y - \sin 2y)dy & S = \frac{1}{2}(\sin 2y + \cos 2y) \end{array}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2y}(\sin 2y + \cos 2y) - \int e^{2y}(\sin 2y + \cos 2y)dy = \left(\begin{array}{l|c} t = e^{2y} & dt = 2e^{2y}dy \\ dS = (\sin 2y + \cos 2y)dy & S = \frac{1}{2}(-\cos 2y + \sin 2y) \end{array}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2y}(\sin 2y + \cos 2y) + \frac{1}{2}e^{2y}(\sin 2y + \cos 2y) + \int e^{2y}(-\cos 2y + \sin 2y)dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int(\cos 2y - \sin 2y)e^{2y}dy = \frac{1}{2}e^{2y}\cos 2y + C$$

Следовательно,

$$u = \frac{1}{2}e^{2y} + \frac{1}{2}e^{2y}\cos 2y + C, \Rightarrow x = u(y)\cdot v(y) =$$

$$\left[\frac{1}{2}e^{2y}(1 + \cos 2y) + C\right]\cdot e^{-2y} = Ce^{-2y} + \cos^2 y$$

$\textit{Ответ}: x = Ce^{-2y} + \cos^2 y$ (20)

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{y}{x^2}\cdot\cos\frac{y}{x}dx - \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right)dy = 0 \quad (21)$$

Решение

Данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах . Запишем это уравнение в канонической форме

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \quad (22)$

где

$$\left.\begin{aligned} &M(x,y) = \frac{y}{x^2}\cdot\cos\frac{y}{x} \\ &N(x,y) = -\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Проверим условия Коши-Римана $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \quad (24)$

Найдём

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x^2}\cdot(\sin\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x} \quad (25)$$

Теперь найдем

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}(\sin\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2}) = \frac{1}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x^3}\sin\frac{y}{x} \quad (26)$$

Из выражений (25) и (26) следует, что условие (24) выполнено, потому данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Запишем его в виде:

$$du = 0, \quad (27)$$

где

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u'}{\partial y}dy = \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - (\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y)dy \quad (28)$$

Сравнивая коэффициенты при дифференциалах *dx* и *dy,* получим систему уравнений относительно функции *u(x,y)* в виде:

$$\left.\begin{aligned} &1.\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} \\ &2.\frac{\partial u}{\partial y} = -(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y) \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Интегрируя по *x* первое уравнение системы (29), получим

$$u(x,y) = \int\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx = -\sin\frac{y}{x} + C(y) \quad (30)$$

Подставив выражение (30) во второе уравнение системы (29) найдем уравнение

$$-(\cos\frac{y}{x})\frac{1}{x}+C'(y)=-\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-2y\Rightarrow C'(y)=-y^2+const$$

Следовательно, из (30) при подстановке (31) получим

$u(x,y)=-\sin\frac{y}{x}-y^2+const$, поэтому относительно решение уравнения (21) имеет вид

$\sin\frac{y}{x}+y^2+C_1=0$ (32), где C_1- произвольная константа.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:
$y''-3y'-4y=4x-1,\quad y\big|_{x=0}=2,\quad y'\big|_{x=0}=3.$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2-3r-4=0$ имеет два различных действительных корня $r_1=-1,\ r_2=4$, следовательно, $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$. Правая часть уравнения имеет вид $f\left(x\right)=4x-1=\left(4x-1\right)\cdot e^{0\cdot x}$, где $m=0$ и не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение при $k=0$ ищем в виде $y^*=x^0\cdot\left(Ax+B\right)\cdot e^{0\cdot x}=Ax+B,\ \left(y^*\right)'=A,\ \left(y^*\right)''=0.$ После подстановки в дифференциальное уравнение получаем

$$0-3A-4(Ax+B)=4x-1;$$
$$-3A-4Ax-4B=4x-1;$$
$$-4A\cdot x+(-3A-4B)=4\cdot x+(-1);$$
$$x^1:\ -4A=4;\qquad A=-1$$
$$x^0:\ -3A-4B=-1,\quad -4B=-1+3A=-4,\quad B=1$$

Частным решением является функция $y^*=Ax+B=-1\cdot x+1=1-x.$ Общим решением является функция $y=\overline{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}-x+1.$

Найдем значение констант C_1, C_2 из начальных условий. Для этого определим $y' = -C_1e^{-x} + 4C_2e^{4x} - 1$.

Тогда $\left. y\right|_{x=0} = C_1 + C_2 + 1 = 2,$
$\left. y'\right|_{x=0} = -C_1 + 4C_2 - 1 = 3,$ $\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$

Искомым частным решением является функция $y = e^{4x} - x + 1$.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad \left. y\right|_{x=0} = 2, \quad \left. y'\right|_{x=0} = 3.$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 4 = 0$ имеет двукратный корень $r_1 = 2$, следовательно, $\bar{y} = e^{2x}(C_1 + C_2x)$. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = e^{2x}$, $m = 2$ является двукратным $(k = 2)$ корнем характеристического уравнения, тогда частное решение ищем в виде

$$y^* = x^2 \cdot Ae^{2x}, \quad \left(y^*\right)' = x^2 \cdot 2Ae^{2x} + 2x \cdot Ae^{2x} = 2Ae^{2x}\left(x^2 + x\right),$$

$$\left(y^*\right)'' = 4Ae^{2x}\left(x^2 + x\right) + 2Ae^{2x}(2x + 1) = Ae^{2x}\left(4x^2 + 8x + 2\right).$$

После подстановки y^* и ее производных в исходное дифференциальное уравнение получаем

$$Ae^{2x}\left(4x^2 + 8x + 2\right) - 4 \cdot 2Ae^{2x}\left(x^2 + x\right) + 4Ae^{2x} \cdot x^2 = e^{2x},$$

$$Ae^{2x}\left(\cancel{4x^2} + \cancel{8x} + 2 \cancel{- 8x^2} \cancel{- 8x} + \cancel{4x^2}\right) = e^{2x},$$

$$2Ae^{2x} = e^{2x},$$

$$2A = 1, \quad A = \frac{1}{2}.$$

Частным решением является функция $y^* = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x^2$.

Общим решением является функция $y = \bar{y} + y^* = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x\right) + \frac{1}{2}e^{2x}\cdot x^2.$

Найдем значение констант C_1, C_2 из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = e^{2x}\left(2C_1 + 2C_2 x + C_2\right) + e^{2x}\left(x^2 + x\right),$$

и получим систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y\big|_{x=0} = e^0 \cdot C_1 = 2, \quad C_1 = 2$$
$$y'\big|_{x=0} = e^0\left(2C_1 + C_2\right) = 3, \quad C_2 = -1$$

Искомым решением является функция $y = \bar{y} + y^* = e^{2x}\left(2 - x\right) + \frac{1}{2}e^{2x}\cdot x^2.$

Второй случай. Правая часть уравнения (6) имеет вид $f(x) = a\cos nx + b\sin nx$.

Если числа $\pm in$ не являются корнями характеристического уравнения, то

$$y^* = A\cos nx + B\sin nx.$$

Если числа $\pm in$ являются корнями характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y^* = \left(A\cos nx + B\sin nx\right)\cdot x.$$

В частных случаях, когда a или b равно нулю, решение всё равно надо искать в указанном общем виде.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$y'' + 4y' + 13y = 5\sin 3x,\ y\big|_{x=0} = \frac{1}{8},\quad y'\big|_{x=0} = \frac{1}{2}.$

Решение. Характеристическое уравнение $r^2 + 4r + 13 = 0$ имеет корни

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 13}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i,$$

тогда $\bar{y} = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right)$.

Числа $\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, поэтому

$$y^* = A\sin 3x + B\cos 3x,$$

$$\left(y^*\right)' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x,$$

$$\left(y^*\right)'' = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x.$$

Подставляем y^* и ее производные в исходное уравнение и получаем

$$-9A\sin 3x - 9B\cos 3x + 4\left(3A\cos 3x - 3B\sin 3x\right) + 13\left(A\sin 3x + B\cos 3x\right) = C,$$
$$(4A - 12B)\sin 3x + (4B + 12A)\cos 3x = 5\cdot\sin 3x + 0\cdot\cos 3x;$$

$$\left.\begin{matrix}\sin 3x:\ \ 4A - 12B = 5\\ \cos 3x:\ 4B + 12A = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}A = \dfrac{1}{8}\\ B = -\dfrac{3}{8}\end{matrix}\right\}.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + \frac{1}{8}\sin 3x - \frac{3}{8}\cos 3x\,.$$

Найдем значение констант C_1, C_2 из начальных условий. Для этого определим производную

$$y' = -2e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + e^{-2x}\left(-3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x\right) +$$
$$+\frac{3}{8}\cos 3x + \frac{9}{8}\sin 3x$$

и запишем систему уравнений для определения значений произвольных констант

$$y\big|_{x=0} = e^0\left(C_1 + C_2\cdot 0\right) - \frac{3}{8} = \frac{1}{8},$$

$$y'\big|_{x=0} = -2e^0\left(C_1 + C_2\cdot 0\right) + e^0\left(C_1\cdot 0 + 3C_2\right) + \frac{3}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2}, \\ C_2 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

Искомым решением является функция

$$y=e^{-2x}\left(\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{3}{8}\sin 3x\right)+\frac{1}{8}\sin 3x-\frac{3}{8}\cos 3x .$$

2. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Двойной интеграл

На плоскости рассмотрим некоторую замкнутую область D, ограниченную замкнутой линией L. Пусть в области D задана функция $z=f\left(x,y\right)$. *Двойной интеграл* от этой функции по области D обозначается

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy .$$

Основные свойства двойного интеграла:

1. $\iint\limits_D cf\left(x,y\right)dxdy=c\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$.

2. $\iint\limits_D \left(f_1\left(x,y\right)+f_2\left(x,y\right)\right)dxdy=\iint\limits_D f_1\left(x,y\right)dxdy+\iint\limits_D f_2\left(x,y\right)dxdy$.

3. Пусть $D=D_1\bigcup D_2$, тогда

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy=\iint\limits_{D_1} f\left(x,y\right)dxdy+\iint\limits_{D_2} f\left(x,y\right)dxdy .$$

Приложения двойного интеграла

1. *Площадь* области D вычисляется по формуле $S_D=\iint\limits_D dxdy$.

2. *Объем* цилиндрического тела, нижним основанием которого является область D, лежащая в плоскости xOy, верхним – часть поверхности $z=f\left(x,y\right)$, проектирующаяся в область D, боковая поверхность – цилиндрическая, ее образующие параллельны оси Oz и проходят через границу L области D, вычисляется по формуле $V=\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$.

3. *Масса* плоской пластины D, имеющей поверхностную плотность $\rho=\rho\left(x,y\right)$, непрерывную в области D, вычисляется по формуле $M=\iint\limits_D \rho\left(x,y\right)dxdy$.

Вычисление двойного интеграла

1. Пусть область D ограничена двумя вертикальными прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ и двумя кривыми $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, причем $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ для всех $x\in[a,b]$. Тогда двойной интеграл можно свести к повторному (двукратному) следующим образом:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

2. Пусть область D ограничена двумя горизонтальными прямыми $y=c,\ y=d\ (c<d)$ и двумя кривыми $x=\varphi_1(y),\ x=\varphi_2(y)$, причем $\varphi_1(y)\le\varphi_2(y)$ для всех $y\in[c,d]$. Тогда двойной интеграл можно свести к повторному (двукратному) следующим образом:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

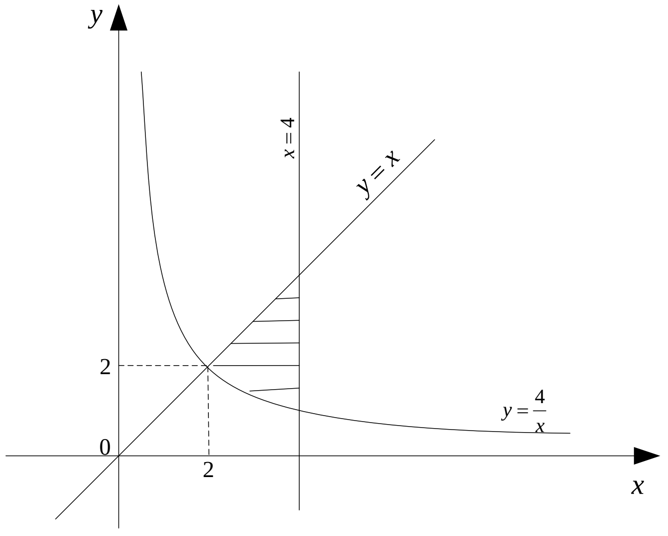
3. Пусть область D не является элементарной. Тогда ее следует разбить на конечное число элементарных областей прямыми, параллельными осям координат. При вычислении таких двойных интегралов следует применить свойство 3.

<u>Пример.</u> Записать двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного

интеграла двумя способами, если область интегрирования D ограничена

линиями $y=\dfrac{4}{x}$, $y=x$, $x=4$.

Строим область:



Первый способ записи. При проектировании на ось Ox данная область является элементарной. Так как при $2 \le x \le 4$ имеем $\frac{4}{x} \le y \le x$, то

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_2^4 dx \int_{\frac{4}{x}}^{x} f(x,y)\,dy.$$

Второй способ записи. При проектировании на ось Oy данная область не является элементарной. Найдем координаты точки пересечения прямой $x=4$ и ветви гиперболы $y=\frac{4}{x}$: $y=\frac{4}{4}=1$. Также понадобится координата y точки пересечения прямых $y=x$ и $x=4$, то есть $y=4$. Полученную фигуру необходимо разбить на две с помощью прямой $y=2$, параллельной оси Ox и воспользоваться пунктом 3. Для первой области: $1 \le y \le 2,\ \frac{4}{y} \le x \le 4,$ для второй: $2 \le y \le 4,\ y \le x \le 4$. В результате имеем

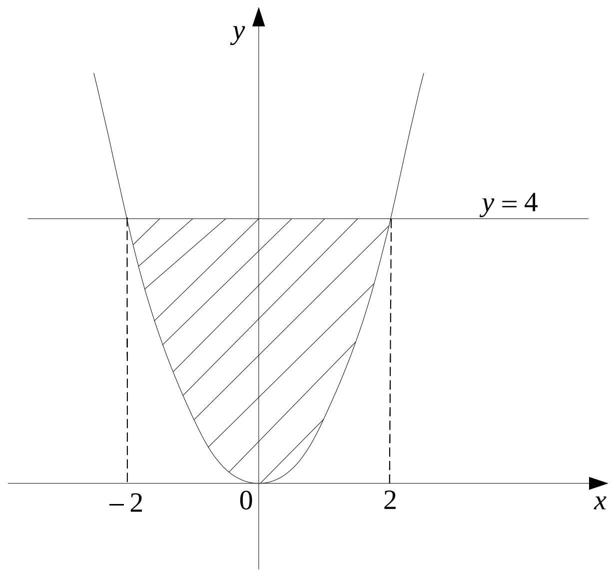
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_1^2 dy \int_{\frac{4}{y}}^{4} f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy \int_y^4 f(x,y)\,dx.$$

<u>Пример.</u> Вычислить двойной интеграл $\iint_D x\,dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y=4, y=x^2$.

Сделаем чертеж и определим пределы интегрирования:

$$-2 \le x \le 2,$$

$$x^2 \le y \le 4.$$

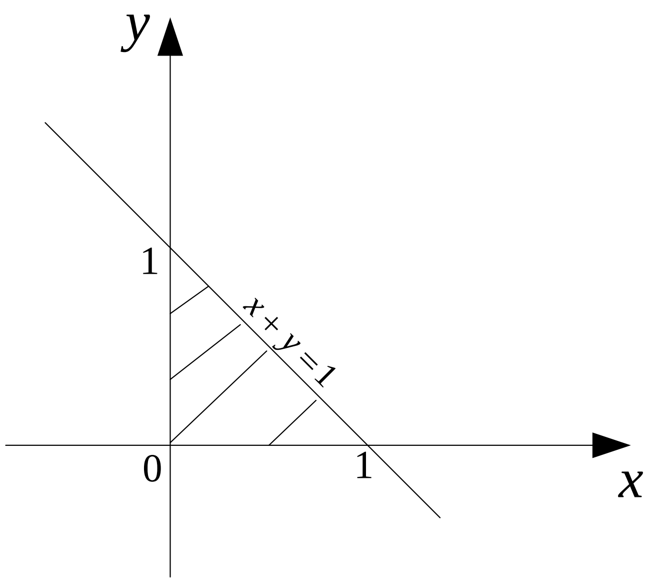


$$\iint_D x\,dxdy = \int_{-2}^{2} x\,dx \int_{x^2}^{4} dy = \int_{-2}^{2} x\,dx\left(4-x^2\right) = \int_{-2}^{2}\left(4x-x^3\right)dx =$$

$$=\left(4\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)_{-2}^{2}=\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)_{-2}^{2}=\left(8-4\right)-\left(8-4\right)=0\,.$$

<u>Пример.</u> Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x+y=1$, $z=x^2+y^2+1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Изобразим на плоскости xOy проекцию тела:



$$V=\iint\limits_D z\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(x^2+y^2+1\right)dy=\int\limits_0^1 dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right)_0^{1-x}=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^2\left(1-x\right)+\frac{\left(1-x\right)^3}{3}+\left(1-x\right)\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^2-x^3+1-x+\frac{\left(1-x\right)^3}{3}\right)dx=$$

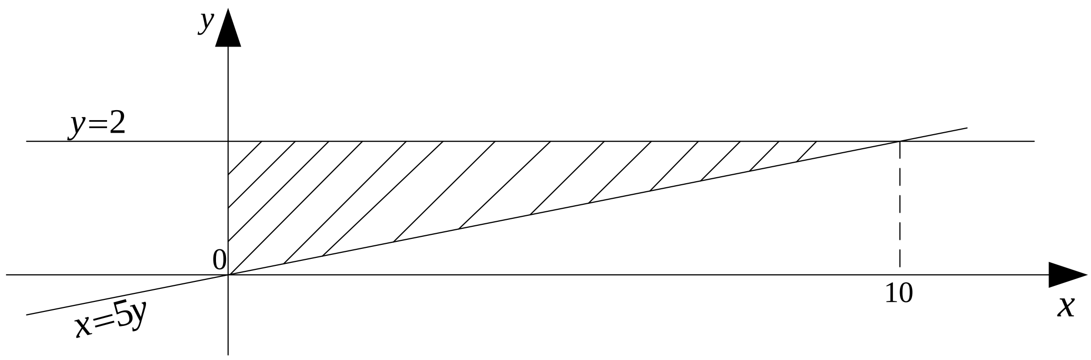
$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x-\frac{x^2}{2}-\frac{\left(1-x\right)^4}{12}\right)_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-0+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.$$

<u>Пример.</u> Найти массу пластинки, ограниченной линиями $x=5y$, $x=0$, $y=2$ и имеющей переменную поверхностную плотность $\rho=2x+3y$.

Массу пластинки вычислим по формуле

$$m=\iint\limits_D \rho\left(x,y\right)dxdy\,.$$

Строим область:



Найдем абсциссу точки пересечения прямых $x=5y$ и $y=2$, получаем $x=10$.

Тогда $0\le x\le 10$, $\frac{x}{5}\le y\le 2$ и

$$m=\iint_D \rho(x,y)\,dxdy=\iint_D (2x+3y)\,dxdy=\int_0^{10}dx\int_{\frac{x}{5}}^{2}(2x+3y)\,dy=\int_0^{10}dx\left(2xy+\frac{3}{2}y^2\right)\Bigg|_{\frac{x}{5}}^{2}=$$

$$=\int_0^{10}dx\left(4x+6-\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{25}\right)=\int_0^{10}\left(4x+6-\frac{23}{50}x^2\right)dx=\left(2x^2+6x-\frac{23}{150}x^3\right)\Bigg|_0^{10}=$$

$$=200+60-\frac{23}{150}\cdot 1000=260-\frac{460}{3}=\frac{320}{3}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить момент инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $x=0$, $y=0$ относительно начала координат.

В силу однородности пластинки, положим ее плотность равной $\rho(x,y)=1$.

Уравнения границ пластинки $y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)$, $x=0$, $y=0$. Мы получаем

$$I_0=\iint_D \rho\cdot\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\left(x^2+y^2\right)dy=\int_0^a\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}dx=$$

$$=\int_0^a\left(x^2b\left(1-\frac{x}{a}\right)+\frac{b^3\left(1-\frac{x}{a}\right)^3}{3}\right)dx=b\int_0^a\left(x^2-\frac{x^3}{a}+\frac{1}{3}b^2\left(1-3\frac{x}{a}+3\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}\right)\right)dx=$$

$$=b\int_0^a\left(x^2-\frac{x^3}{a}+\frac{b^2}{3}-\frac{xb^2}{a}+\frac{x^2b^2}{a^2}-\frac{x^3b^2}{3a^3}\right)dx=$$

$$=b\int_0^a\left(x^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-\frac{x^3}{a}\left(1+\frac{b^2}{3a^2}\right)+\frac{b^2}{3}-\frac{xb^2}{a}\right)dx=$$

$$=b\left(\frac{x^3}{3}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-\frac{x^4}{4a}\left(1+\frac{b^2}{3a^2}\right)+\frac{b^2}{3}x-\frac{x^2b^2}{2a}\right)\Bigg|_0^a=$$

$$=b\left(\frac{a^3}{3}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)-\frac{a^4}{4a}\left(1+\frac{b^2}{3a^2}\right)+\frac{b^2}{3}a-\frac{a^2b^2}{2a}\right)=$$

$$=b\left(\frac{a^3}{3}+\frac{ab^2}{3}-\frac{a^3}{4}-\frac{ab^2}{12}+\frac{ab^2}{3}-\frac{ab^2}{2}\right)=\frac{a^3b}{12}.$$

2.1 Тройной интеграл

Пусть в пространственной цилиндрической области V задана функция $u=f(x,y,z)$. Пусть область D является проекцией области V на плоскость xOy, сама область V снизу ограничена поверхностью $z=\psi_1(x,y)$, сверху - поверхностью $z=\psi_2(x,y)$, причем для всех точек области D $\psi_1(x,y)\le\psi_2(x,y)$. Тогда тройной интеграл от функции $u=f(x,y,z)$ по области V обозначается $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ и может быть преобразован следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Если при этом область D ограничена двумя вертикальными прямыми $x=a,\ x=b\ (a<b)$ и двумя кривыми $y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ для всех $x\in[a,b]$, то тройной интеграл можно свести к повторному (трехкратному) следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Аналогично, если область D ограничена двумя горизонтальными прямыми $y=c,\ y=d\ (c<d)$ и двумя кривыми $x=\varphi_1(y),\ x=\varphi_2(y)$, причем $\varphi_1(y)\le\varphi_2(y)$ для всех $y\in[c,d]$, то тройной интеграл можно свести к повторному (трехкратному) следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=18,\quad x=\sqrt{3y},\quad x=0,\quad z=0,\quad z=\frac{10y}{11}.$$

Поверхность $x^2+y^2=18$ - цилиндрическая, с образующей, параллельной оси Oz; в сечении, перпендикулярном образующей, - окружность с центром в начале координат радиуса $3\sqrt{2}$;

поверхность $x=\sqrt{3y}$ - цилиндрическая, с образующей, параллельной оси Oz; в сечении, перпендикулярном образующей, ветвь параболы $x=\sqrt{3y}$,

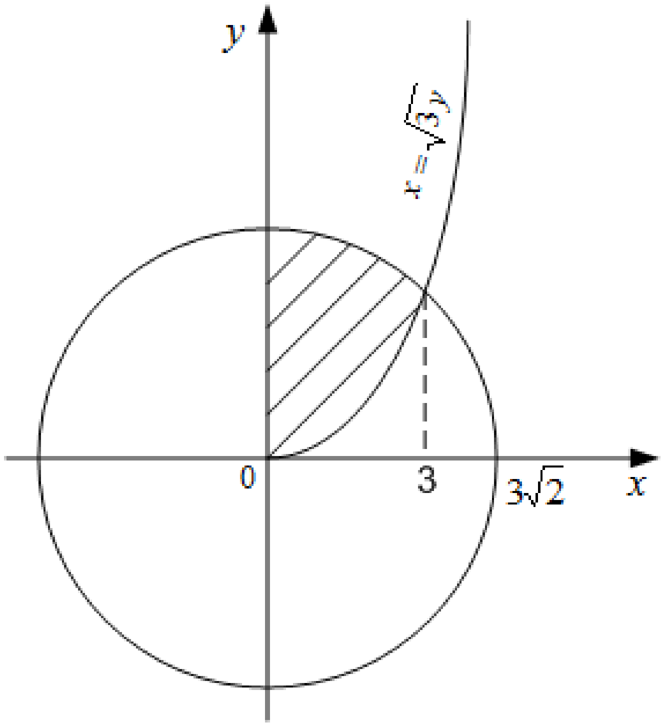
поверхность $x=0$ - плоскость Oyz,

поверхность $z=0$ - плоскость Oxy,

поверхность $z=\dfrac{10y}{11}$ - плоскость, содержащая ось Ox.

Объем тела вычисляем по формуле:

$$V=\iiint\limits_V dxdydz.$$



Для расстановки пределов найдем на плоскости Oxy точку пересечения окружности и параболы. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=18, \\ x=\sqrt{3y}. \end{cases}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим

$$3y+y^2=18;$$

$$y^2+3y-18=0;$$

откуда $y_1=3$, $y_2=-6$.

Так как в области $y\geq 0$, то значение $y_2=-6$ не подходит. Подставим в $x=\sqrt{3y}$ значение $y_1=3$, получим $x(3)=3$.

Тогда для проекции тела на плоскость Oxy получаем следующие неравенства:

$$0\leq x\leq 3,$$

$$\frac{x^2}{3} \le y \le \sqrt{18 - x^2},$$

соответственно для переменной z имеем $0 \le z \le \frac{10}{11} y$.

Расставим пределы интегрирования и вычислим тройной интеграл:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^3 dx \int_{\frac{x^2}{3}}^{\sqrt{18-x^2}} dy \int_0^{\frac{10}{11}y} dz = \int_0^3 dx \int_{\frac{x^2}{3}}^{\sqrt{18-x^2}} dy (z)\Big|_0^{\frac{10}{11}y} =$$

$$= \int_0^3 dx \int_{\frac{x^2}{3}}^{\sqrt{18-x^2}} \left(\frac{10}{11} y\right) dy = \frac{10}{11} \int_0^3 dx \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{x^2}{3}}^{\sqrt{18-x^2}} =$$

$$= \frac{5}{11} \int_0^3 \left(\left(\sqrt{18 - x^2}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{3}\right)^2\right) dx = \frac{5}{11} \int_0^3 \left(18 - x^2 - \frac{x^4}{9}\right) dx = \frac{5}{11}\left(18x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{9}\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{5}{11}\left(54 - 9 - \frac{27}{5}\right) = \frac{5}{11}\left(45 - \frac{27}{5}\right) = \frac{5 \cdot 9}{11}\left(5 - \frac{3}{5}\right) = \frac{5 \cdot 9}{11} \cdot \frac{22}{5} = 18.$$

2.2 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейный интеграл 1 рода (по длине дуги)

1. Пусть гладкая кривая L плоскости xOy задана функцией $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, Будем предполагать, что функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках кривой L, тогда криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги) записывается следующим образом: $\int\limits_L f\left(x,y\right)dl$ и вычисляется по формуле

$$\int\limits_L f\left(x,y\right)dl = \int\limits_a^b f\left(x,y\left(x\right)\right)\sqrt{1+\left(y'\left(x\right)\right)^2}\,dx.$$

2. Пусть на плоскости xOy параметрически задана гладкая кривая

$$L:\begin{cases} x = x\left(t\right) \\ y = y\left(t\right) \end{cases}, t \in \left[a,b\right],$$

т.е. будем предполагать, что функции $x\left(t\right), y\left(t\right)$ - непрерывно дифференцируемые; пусть функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках кривой L, тогда криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги) вычисляется по формуле

$$\int\limits_L f\left(x,y\right)dl = \int\limits_a^b f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)\sqrt{\left(\left(x'\left(t\right)\right)^2+\left(y'\left(t\right)\right)^2\right)}dt.$$

Если кривая L задана в трехмерном пространстве, т.е.

$$L:\begin{cases} x = x\left(t\right) \\ y = y\left(t\right), t \in \left[a,b\right], \\ z = z\left(t\right), \end{cases}$$

то соответственно имеем

$$\int\limits_L f\left(x,y,z\right)dl = \int\limits_a^b f\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right)\right)\sqrt{\left(\left(x'\left(t\right)\right)^2+\left(y'\left(t\right)\right)^2+\left(z'\left(t\right)\right)^2\right)}dt.$$

Приложения криволинейного интеграла 1 рода

1. *Геометрическое приложение:* вычисление длины кривой по формуле

$$\left|L\right| = \int\limits_L dl.$$

2. *Механическое приложение:* вычисление массы кривой.

Пусть L - плоская кривая и $\delta\left(x,y\right)$ - плотность на кривой L. Тогда масса вычисляется по формуле

$$m_L = \int\limits_L \delta\left(x,y\right)dl$$

В случае пространственной кривой получаем соответственно

$$m_L=\int\limits_L \delta\left(x,y,z\right)dl .$$

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{x}{y}dl$, где L - дуга параболы $y^2=2x$, заключенная между точками $A(2,2)$ и $B\left(8,4\right)$.

Вычислим дифференциал длины дуги dl для кривой $y=\sqrt{2x}$:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2x}},\quad dl=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx=\sqrt{\frac{1+2x}{2x}}dx.$$

Следовательно, данный интеграл равен

$$\int\limits_L \frac{x}{y}dl=\int\limits_2^8 \frac{x}{\sqrt{2x}}\sqrt{\frac{1+2x}{2x}}dx=\int\limits_2^8 \frac{1}{2}\sqrt{1+2x}dx=\frac{1}{2}(1+2x)^{3/2}\Bigg|_2^8=\frac{1}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}).$$

<u>Пример.</u> Найти массу однородной дуги циклоиды

$$L:\begin{cases} x=a\left(t-\sin t\right) \\ y=a\left(1-\cos t\right)\end{cases},t\in\left[0,2\pi\right]$$

Так как кривая однородная, то плотность $\delta\left(x,y\right)=1$. Найдем $x',\ y'$ и dl:

$x'=a(1-\cos t)$, $y'=a\sin t$,

$$dl=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\ dt=a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\ dt=a\sqrt{2-2\cos t}=$$

$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}=a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\ dt=2a\sin\frac{t}{2}dt .$$

Следовательно,

$$m_L=\int\limits_L \delta\left(x,y\right)dl=\int\limits_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=8a .$$

<u>Криволинейный интеграл 2 рода (по координатам)</u>

1. Пусть AB - дуга гладкой кривой L, заданной на плоскости xOy функцией $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, Будем предполагать, что функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывна во всех точках кривой L, тогда криволинейный интеграл второго рода (по координатам) записывается следующим образом: $\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ и вычисляется по формуле:

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b (P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x))dx .$$

Важным свойством интеграла является то, что он зависит от ориентации кривой, именно,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int\limits_{BA} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Если кривая замкнута, то интеграл обозначают следующим образом:

$$\oint\limits_{L} Pdx+Qdy.$$

В случае замкнутой кривой различают положительную и отрицательную ориентацию: против часовой стрелки и по часовой стрелке.

2. Пусть $L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, t\in[\alpha,\beta]$ - гладкая кривая, заданная параметрически.

Будем предполагать, что функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны во всех точках кривой L, тогда криволинейный интеграл второго рода (по координатам) вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t))dt.$$

Аналогично записывается и вычисляется криволинейный интеграл по пространственной кривой.

<u>Приложения криволинейного интеграла 2 рода</u>

Функции $P(x,y),Q(x,y)$ в записи интеграла можно считать координатами вектора $\bar{a}=(P(x,y),Q(x,y))$. Его называют *векторным полем*, заданным на кривой $AB=L$.

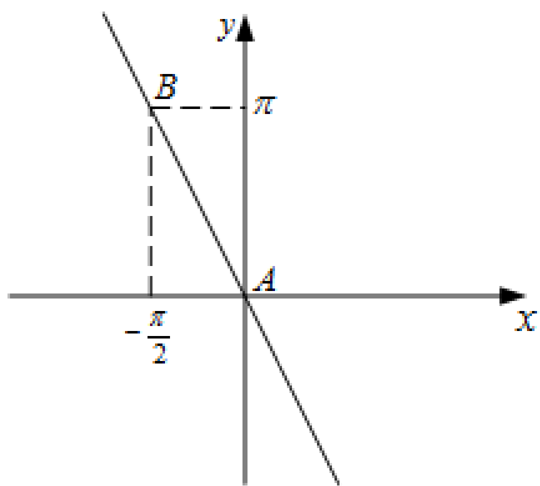
Обозначим $\bar{r}=(x,y)$, $d\bar{r}=(dx,dy)$.

Криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int\limits_{AB}(\bar{a},d\bar{r})$ определяет *работу* векторного (силового) поля $\bar{a}$ вдоль кривой AB в направлении от точки A к точке B.

Работу векторного (силового) поля $\bar{a}$ по замкнутой кривой часто называют *циркуляцией:*

$$C=\oint\limits_{\Gamma} Pdx+Qdy$$

<u>Пример.</u> Вычислить работу силы (векторного поля) $\vec{F}=\{\cos y,\sin x\}$ вдоль отрезка AB от точки $A(0,0)$ до точки $B\left(-\frac{\pi}{2},\pi\right)$.



Работа силы $\vec{F}$ вычисляется по формуле:

$$A=\int\limits_{AB} F_x dx+F_y dy,$$

Запишем уравнение прямой (AB)

$$\frac{x-0}{-\frac{\pi}{2}-0}=\frac{y-0}{\pi-0}, \qquad \frac{2x}{-\pi}=\frac{y}{\pi}, \qquad x=-\frac{1}{2}y.$$

$$0\le y\le \pi,\ dx=-\frac{1}{2}dy$$

$$A=\int_{AB} F_x dx+F_y dy=\int_{AB}\cos y dx+\sin x dy=\int_0^{\pi}\cos y\left(-\frac{1}{2}dy\right)+\sin\left(-\frac{1}{2}y\right)dy=$$

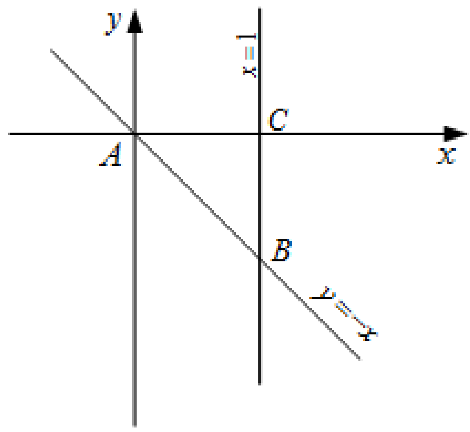
$$=\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos y-\sin\left(\frac{1}{2}y\right)\right)dy=\left(-\frac{1}{2}\sin y+2\cos\left(\frac{1}{2}y\right)\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sin\pi+2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)+\frac{1}{2}\sin 0-2\cos 0=-2.$$

<u>Пример.</u> Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}=\{xy+x-y,\ -xy+x-y\}$ по контуру $Г$, состоящему из частей кривых $y=-x$, $x=1$ и $y=0$ (направление обхода положительное).

Формула для вычисления циркуляции:

$$C=\oint_{Г} Pdx+Qdy$$



$Г$ – контур треугольника ABC, проходимый против часовой стрелки. Вычислим циркуляцию по каждой из сторон.

AB: $y=-x$, $dy=-dx$, $0\le x\le 1$.

$$C_{AB}=\int_{AB}(xy+x-y)dx+(-xy+x-y)dy=\int_0^1\left(-x^2+x+x\right)dx+\left(x^2+x+x\right)(-dx)=$$

$$=\int_0^1\left(-x^2+2x-x^2-2x\right)dx=\int_0^1\left(-2x^2\right)dx=-2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{2}{3}.$$

BC: $x=1$, $dx=0$, $-1\le y\le 0$.

$$C_{BC}=\int\limits_{BC}\left(xy+x-y\right)dx+\left(-xy+x-y\right)dy=\int\limits_{-1}^{0}\left(-y+1-y\right)dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}\left(-2y+1\right)dy=\left(-y^2+y\right)\Big|_{-1}^{0}=-\left(-1-1\right)=2$$

CA: $y=0$, $dy=0$, $0\le x\le 1$.

$$C_{CA}=\int\limits_{CA}\left(xy+x-y\right)dx+\left(-xy+x-y\right)dy=\int\limits_{1}^{0}xdx=\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{0}=-\frac{1}{2}.$$

$$C=C_{AB}+C_{BC}+C_{CA}=-\frac{2}{3}+2-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} y^2dx+xdy+ydz$, где AB - дуга кривой

$$L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ z=2\end{cases},\ t_A=\pi,\ t_B=0.$$

Запишем уравнение кривой в параметрическом виде:

$$L:\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\\ z=2\end{cases},\ t_A=\pi,\ t_B=0.$$

Тогда $x'=-2\sin t,\ y'=cost,\ z'=0$ и мы получаем

$$\int\limits_{AB} y^2dx+xdy+ydz=\int\limits_{\pi}^{0}\left(-\sin^2 t\cdot 2\sin t+2\cos t\cdot\cos t+\sin t\cdot 0\right)dt=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 t\cdot\sin t dt+\int\limits_{\pi}^{0}2\cos^2 t dt=2\int\limits_{0}^{\pi}(\cos^2 t-1)d\cos t+\int\limits_{\pi}^{0}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=2\left(\frac{\cos^3 t}{3}-\cos t\right)\Bigg|_{0}^{\pi}+\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{0}=2\cdot\frac{4}{3}-\pi=\frac{8}{3}-\pi.$$

3. Теория вероятностей

При классическом определении *вероятность события* определяется равенством

$P(A)=m/n$,

где m – число элементарных исходов испытаний, благоприятствующих появлению события A, n – общее число элементарных исходов испытания.

Числом сочетаний из l элементов по k называют количество комбинаций, составленных из l элементов по k, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}.$$

Пример. В ящике имеется 15 деталей, из которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Решение:

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь три детали из пятнадцати, то есть $n = C_{15}^3$;

б) число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, равно числу способов, которыми можно выбрать три окрашенных детали из 10, то есть $m = C_{10}^3$;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{\dfrac{10!}{3!\cdot 7!}}{\dfrac{15!}{3!\cdot 12!}} = \frac{10!\cdot 12!}{7!\cdot 15!} = \frac{\cancel{7!}\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot \cancel{12!}}{\cancel{7!}\cdot \cancel{12!}\cdot 13\cdot 14\cdot 15} = \frac{24}{91} \approx 0{,}26.$$

Пример. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны 5 деталей. Определить вероятность того, что среди отобранных деталей ровно три стандартных.

Решение:

а) общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь пять деталей из десяти, то есть $n = C_{10}^5$;

б) найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди отобранных пяти деталей ровно три стандартные): три стандартные детали можно выбрать из 7 стандартных деталей C_7^3 способами; при этом остальные (5–3=2) детали должны быть нестандартными, которые можно выбрать из (10–7=3) нестандартных деталей, имевшихся в партии, C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов $m = C_7^3 \cdot C_3^2$;

в) искомая вероятность равна отношению общего числа исходов к числу благоприятных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{\dfrac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \dfrac{3!}{2!\cdot 1!}}{\dfrac{10!}{5!\cdot 5!}} = \frac{7!\cdot 5!\cdot 5!}{2!\cdot 4!\cdot 10!} = \frac{\cancel{7!} \cdot \cancel{4!} \cdot 5 \cdot 5!}{2 \cdot \cancel{4!} \cdot \cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{5!}{4 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Вероятность события *A*, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события *A*:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A),$$

где $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$.

Приведенную формулу называют *формулой полной вероятности*.

Пример. Имеются три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь. Найти вероятность того, что она окажется бракованной.

Решение:

а) обозначим через A событие – взятая деталь является бракованной. Можно сделать три предположения (гипотезы): H_1 – деталь выбрана из первой партии; H_2 – деталь выбрана из второй партии; H_3 – деталь выбрана из третьей партии. Поскольку число деталей во всех трех партиях равно, вероятности гипотез равны

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

б) условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из первой парии, $P_{H_1}(A) = 0$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из второй парии, $P_{H_2}(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она взята из третьей парии, $P_{H_3}(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

в) искомая вероятность того, что выбранная наудачу деталь является бракованной, находится по формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Вероятность того, что в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), определяется по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $q = 1 - p$ – вероятность того, что событие в каждом из испытаний не появится.

Пример. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут не менее трех.

Решение:

а) пусть событие A – из 4 семян взойдут не менее трех семян; событие B – из 4 семян взойдут 3 семени; событие C – из 4 семян взойдут 4 семени. По теореме сложения вероятностей

$P(A) = P(B) + P(C)$.

б) вероятности событий B и C определим по формуле Бернулли:

$$P(B) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0{,}9^3 \cdot (1-0{,}9) = 0{,}2916,$$

$$P(C) = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0{,}9^4 = 0{,}6561.$$

в) искомая вероятность $P(A) = 0{,}2916 + 0{,}6561 = 0{,}9477$.

Если число повторяющихся испытаний велико, то определение вероятности по формуле Бернулли затруднено из-за громоздкости вычислений. В этом случае применяют приближенную формулу, выражающую *локальную теорему Лапласа*:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ и $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ определяются из таблицы, приведенной в приложении 1.

При малых значениях вероятности p для вычисления $P_n(k)$ применяют асимптотическую *формулу Пуассона*

$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, где $e = 2{,}7182...; \lambda = np$.

Эта формула используется при $\lambda \le 10$, причем чем меньше p и больше n, тем результат точнее.

Пример. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 посеянных семян взойдут 350 семян.

Решение.

а) из условия задачи $p = 0,9; q = 1 - 0,9 = 0,1; n = 400; k = 350$. Тогда $x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -\frac{10}{6} \approx -1,67$;

б) из таблицы в приложении 1 находим $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67) = 0,0989$;

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(350) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0.9 \cdot 0,1}} \cdot 0,0989 \approx 0,0165 .$$

Пример. Среди семян пшеницы 0,02% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

Решение.

Из условия задачи $p = 0,0002;\ n = 10000; k = 6$. Тогда $\lambda = 10000 \cdot 0,0002 = 2$.

Искомая вероятность равна

$$P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} \approx \frac{64}{720} \cdot 0,1353 \approx 0,012 .$$

Если вероятность наступления события *A* в каждом из *n* испытаний постоянна и равна *p*, то вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что событие *A* в таких испытаниях наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, определяется по интегральной теореме Лапласа формулой:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx ,$$

где $\alpha = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ и $\beta = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

Функция $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется функцией Лапласа. В приложении 2 даны значения этой функции для $0 \le x \le 5$. При $x > 5$ функция $\Phi(x) = 0{,}5$. При отрицательных значениях x в силу нечетности функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Используя функцию Лапласа, имеем

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Пример. Процент всхожести семян пшеницы равен 90%. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

Решение.

а) из условия задачи $p = 0{,}9; q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1; n = 500; k_1 = 400; k_2 = 440$.

Тогда $\alpha = \dfrac{400 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -7{,}45$; $\beta = \dfrac{440 - 500 \cdot 0{,}9}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -1{,}49$.

б) из таблицы в приложении 2 находим

$\Phi(-1{,}49) = -\Phi(1{,}49) \approx -0{,}4319$; $\Phi(-7{,}45) = -\Phi(7{,}45) \approx -0{,}5$.

в) искомая вероятность равна

$$P_{400}(400 \le k \le 440) \approx \Phi(-1{,}49) - \Phi(-7{,}45) = -0{,}4312 + 0{,}5 = 0{,}0681.$$

Литература

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2017. — 448 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/91080 — Загл. с экрана.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2017. — 224 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/92615 — Загл. с экрана.

3. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2015. — 240 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/4549 — Загл. с экрана.

4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов. Т.1 / Н.С.Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2010 .— 416 с.

5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов : в 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. — Изд. стер. — Москва : Интеграл-Пресс, 2009 .— 544 с.

6. Лакерник А.Р. Высшая математика. Краткий курс [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Лакерник А.Р.— Электрон. текстовые данные.— М.: Логос, 2008.— 528 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/9112.html.— ЭБС «IPRbooks»

7. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман .— 12-е изд., перераб. и доп .— М. : Юрайт, 2011 .— 480 с. : ил. — (Основы наук). — Предм. указ.: с. 474-479 .— ISBN 978-5-9916-1163-3 (Изд-во Юрайт) .— ISBN 978-5-9692-1122-3 (ИД Юрайт).

Дополнительная литература

1. Аверин, В. В. Математика. Ч. 1 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 254 с. : ил.- ISBN 978-5-7679-1748-8. – Режим доступа : https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/ 2014100214370663049600009433, по паролю

2. Аверин, В. В. Математика. Ч. 2 [электронный ресурс] : курс лекций: учебное пособие/ В. В. Аверин, М. Ю. Соколова, Д. В. Христич; ТулГУ. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. - 275 с. : ил. - ISBN 978-5-7679-1749-5. – Режим доступа по паролю : https://tsutula.bibliotech.ru/Reader/Book/2014100214412943155100008498, по паролю

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. Дифференциальные уравнения [электронный ресурс] : ежемесячный математический журнал: журнал/ РАН. - М.: Наука/Интерпериодика, 2014 - . - ISSN 0374-0641.- Режим доступа : http://elibrary.ru/issues.asp?id=9677, со всех компьютеров НБ ТулГУ, по паролю

2. Успехи математических наук/ Российская академия наук. - М.: Наука, 1995-ISSN 0042-1316

3. Электронный читальный зал “БИБЛИОТЕХ” : учебники авторов ТулГУ по всем дисциплинам.- Режим доступа: https://tsutula.bibliotech.ru/, по паролю.- Загл. с экрана

4. ЭБС IPRBooks универсальная базовая коллекция изданий.-Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/, по паролю.- .- Загл. с экрана

5. Научная Электронная Библиотека eLibrary – библиотека электронной периодики, режим доступа: http://elibrary.ru/ , по паролю.- Загл. с экрана.

6. НЭБ КиберЛенинка научная электронная библиотека открытого доступа, режим доступа http://cyberleninka.ru/ ,свободный.- Загл. с экрана.

7. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа : http: //window.edu.ru. ,свободный.- Загл. с экрана.

8. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: портал [Электронный ресурс]. - Режим доступа : http: //exponenta.ru. ,свободный.- Загл. с экрана.