

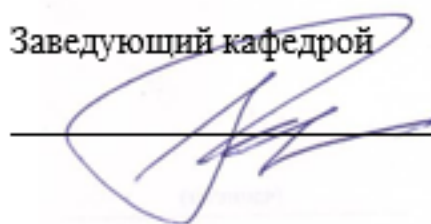
МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»**

**Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Вычислительная механика и математика»**

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«21» января 2022г., протокол № 5

Заведующий кафедрой



В.В. Глаголев

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий
по дисциплине (модулю)
«Математическая составляющая естественнонаучных дисциплин»**

**основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата**

**по направлению подготовки (специальности)
08.03.01 Строительство**

**с направленностью (профилем)
Производство и применение строительных материалов, изделий и
конструкций**

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-04-22

Тула 2022 год

Разработчик(и) методических указаний

Володин Г.Т., профессор, д.т.н
(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)


(подпись)

Аналитическая геометрия в пространстве R^3 Векторная алгебра

Некоторые сведения из теории

Вектор – направленный отрезок.

Равенство

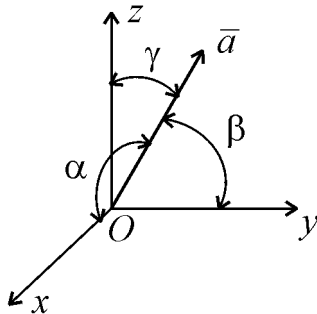
$$\vec{a} = (x, y, z) \quad (1)$$

означает, что x, y, z – проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2)$$

позволяет по координатам вектора определить его модуль.



Если α, β, γ – углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются направляющими косинусами вектора \vec{a} .

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma, \quad (3)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4)$$

Если известны начало вектора $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и конец $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора находятся по формулам

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1. \quad (5)$$

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \quad (6) \text{ и}$$

$\alpha \vec{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$, где α – любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Признак коллинеарности векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (7)$$

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по осям соответственно Ox, Oy, Oz в положительную сторону.

Любой вектор $\vec{a} = (x, y, z)$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (8)$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (9)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{np}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{np}_{\vec{b}} \vec{a}, \quad (10)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \quad (11) \text{ т.е.}$$

скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (12)$$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (13)$$

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (14)$$

Если вектор \vec{F} изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора \vec{S} , то работа этой силы определяется

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}. \quad (15)$$

Векторным произведением вектора \vec{a} на \vec{b} называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ;
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;
3. вектор \vec{c} образует с векторами \vec{a} и \vec{b} «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (16)$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} :

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|, \quad (17)$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (18)$$

Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, в частности, $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Если вектор \vec{F} изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке M , а вектор \vec{a} идет из некоторой точки O в точку M , то вектор $\vec{a} \times \vec{F}$ представляет собой момент силы \vec{F} относительно точки O :

$$m_o \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F}. \quad (20)$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a} \times \vec{b}$, умноженному скалярно на вектор \vec{c} , т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (21)$$

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$$V = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c}. \quad (22)$$

Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0. \quad (23)$$

Для векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Задача 1. На материальную точку действуют силы:

$$\vec{F}_1 = (2, -1, 1), \quad \vec{F}_2 = (-1, 2, 2), \quad \vec{F}_3 = (1, 1, -2).$$

Найти работу равнодействующей этих сил \vec{R} при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

Решение. Найдем равнодействующую

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2 - 1 + 1, -1 + 2 + 1, 1 + 2 - 2) = (2, 2, 1).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (4 - 2, 1 + 1, -1 - 0) = (2, 2, -1).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W = \vec{R} \cdot \vec{S} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 7.$$

Задача 2. Дана сила $\vec{F} = (3, 4, -2)$ и точка ее приложения $A(2, -1, 3)$.

Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. По формуле (20) $m_o \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$. Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ по формуле (5) имеет координаты $\vec{r} = (2, -1, 3)$, по формуле (19)

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 13\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Итак, $m_o \vec{F} = (-10, 13, 11)$. Модуль момента находим по формуле (2):

$$|m_o \vec{F}| = \sqrt{(-10)^2 + (13)^2 + (11)^2} = \sqrt{390} \approx 19,748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$\cos \alpha = \frac{-10}{19,748} = -0,506, \quad \cos \beta = \frac{13}{19,748} = 0,658, \quad \cos \gamma = \frac{11}{19,748} = 0,557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha = 120^\circ 24', \quad \beta = 48^\circ 51', \quad \gamma = 56^\circ 9'.$$

Контроль: должно быть $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. У нас:

$$(-0,506)^2 + (0,658)^2 + (0,557)^2 = 0,999.$$

Задача 3. Написать разложение вектора $\vec{x} = (5, 16, 2)$ по векторам $\vec{p} = (2, 1, 0)$, $\vec{q} = (0, -2, 0)$, $\vec{r} = (-1, 5, 2)$.

Решение.

1. Разложение вектора \vec{x} по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{p} + \alpha_2 \vec{q} + \alpha_3 \vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 q_1 + \alpha_3 r_1 \\ x_2 = \alpha_1 p_2 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 r_2 \\ x_3 = \alpha_1 p_3 + \alpha_2 q_3 + \alpha_3 r_3. \end{cases}$$

2. С учетом числовых значений координат векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ и \vec{x} получим систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} 2 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 - 1 \cdot \alpha_3 = 5 \\ 1 \cdot \alpha_1 - 2 \cdot \alpha_2 + 5 \cdot \alpha_3 = 16 \\ 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 2 \alpha_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 = 5 + \alpha_3 \\ 2\alpha_2 = \alpha_1 + 5\alpha_3 - 16 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -4 \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

3. Разложение вектора \vec{x} по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ имеет вид:

$$\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}.$$

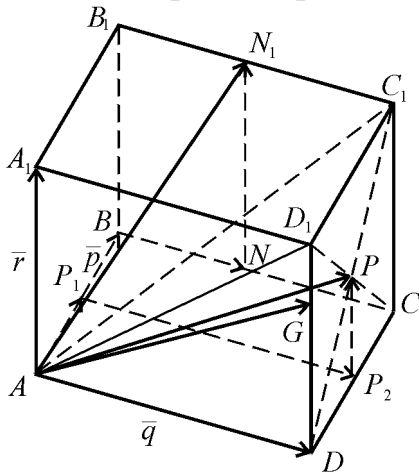
Ответ: $\vec{x} = 3\vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}$.

Задача 4. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{r}$ образуют базис. Разложить векторы \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{AP} , $\overrightarrow{AN_1}$ по выбранному базису, если точка G делит ребро DD_1 в отноше-

нии 1:2; точка P – точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C ; точка N_1 – середина ребра B_1C_1 .

Решение.

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}, \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$

$$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Прямая и плоскость **Плоскость. Ее уравнения**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad - \quad (25)$$

общее уравнение плоскости.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad - \quad (26)$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$

перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad - \quad (27)$$

уравнение плоскости «в отрезках». Здесь a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad - \quad (28)$$

нормальное уравнение плоскости.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad - \quad (29)$$

расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad - \quad (30)$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Прямая. Ее уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad - \quad (31)$$

общее уравнение прямой (прямая задана пересечением двух плоскостей).

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad - \quad (32)$$

каноническое уравнение прямой, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, принадлежащая прямой, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой (вектор, параллельный прямой).

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad - \quad (33)$$

параметрические уравнения прямой.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad - \quad (34)$$

уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\cos \varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad - \quad (35)$$

угол между двумя прямыми, где $\vec{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ – направляющие векторы прямых.

$$\sin \psi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad - \quad (36)$$

угол между прямой и плоскостью, где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} \vec{A_1A_2} & \vec{A_1A_3} & \vec{A_1A_4} \end{vmatrix} \right| \quad - \text{объем пирамиды } A_1A_2A_3A_4, \text{ где}$$

$A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ – координаты вершин пирамиды.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \quad (37)$$

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, $A_4(0, 8, 0)$. Найти:

- 1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 ;
- 2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
- 3) объем пирамиды V ;
- 4) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$;
- 5) точку A'_4 , симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$;
- 6) точку A''_4 , симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3 .

Решение.

- 1) Угол между ребрами находим по формуле (35).

$\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2} = (3-2, 0-1, 1-(-1)) = (1, -1, 2)$ – направляющий вектор прямой A_1A_2 ;

$\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_1A_4} = (0-2, 8-1, 0-(-1)) = (-2, 7, 1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4 .

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot (-2) - 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}} = -\frac{7}{18}.$$

2) Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через три точки $A_1(2, 1, -1)$, $A_2(3, 0, 1)$, $A_3(2, -1, 3)$, по формуле (30)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & 0-1 & 1+1 \\ 2-2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2) \cdot 0 - (y-1) \cdot 4 + (z+1) \cdot (-2) = 0, \\ -4y + 4 - 2z - 2 = 0,$$

$4y + 2z - 2 = 0$ – уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

$\vec{n} = (0, 2, 1)$ – нормальный вектор плоскости;

$\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_4} = (-2, 7, 1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4 .

Находим угол ψ между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ по формуле (36)

$$\sin \psi = \frac{0 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{54}} = 0,9114.$$

3) Находим объем пирамиды по формуле (37)

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = (1, -1, 2); \quad \overrightarrow{A_1 A_3} = (0, -2, 4); \quad \overrightarrow{A_1 A_4} = (-2, 7, 1).$$

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} (-2 + 8 - 8 - 28) = -\frac{1}{6} (-30) = 15.$$

4) Расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1 A_2 A_3$ находим по формуле (29).

$$d = \frac{|2 \cdot 8 + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \approx 6,69.$$

5) Чтобы найти точку A'_4 , симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1 A_2 A_3$, сделаем следующее.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $A_1 A_2 A_3$, проходящей через точку A_4 по формуле (32). За направляющий вектор прямой $\vec{a} = \vec{n} = (0, 2, 1)$ берем нормальный вектор плоскости, т.к. прямая перпендикулярна плоскости:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-0}{1}, \quad \frac{x}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{1}.$$

Составим параметрические уравнения этой прямой по формуле (33):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t. \end{cases}$$

Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью $A_1 A_2 A_3$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t + 8 \\ z = t \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -6 + 8 = 2 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow 2(2t + 8) + t - 1 = 0,$$

$$5t + 15 = 0, \quad t = -3.$$

Получаем точку $M(0, 2, -3)$; т.к. точка A'_4 симметрична точке A_4 относительно плоскости $A_1 A_2 A_3$, то точка M является серединой отрезка $A_4 A'_4$, поэтому

$$x_M = \frac{x_4 + x'_4}{2}, \quad 0 = \frac{0 + x'_4}{2}, \quad x'_4 = 0;$$

$$y_M = \frac{y_4 + y'_4}{2}, \quad 2 = \frac{8 + y'_4}{2}, \quad y'_4 = -4;$$

$$z_M = \frac{z_4 + z'_4}{2}, \quad -3 = \frac{0 + z'_4}{2}, \quad z'_4 = -6.$$

$$A'_4(0, -4, -6).$$

6) Чтобы найти точку A'_4 , симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3 , составим уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_1A_3 по формуле (26). За нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \vec{a} = (0, -2, 4)$ берем направляющий вектор прямой A_1A_3 , т.к. плоскость перпендикулярна прямой.

$$0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 3) + 4 \cdot (z - 0) = 0, \quad -2y + 16 + 4z = 0, \quad y = 2z - 8 = 0.$$

Уравнение прямой A_1A_3 составляем по формуле (34).

$$\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z+1}{3+1}, \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

Параметрические уравнения прямой A_1A_3 :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1. \end{cases}$$

Находим точку N пересечения прямой A_1A_3 и плоскости:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1 \\ y - 2z - 8 = 0, \end{cases}$$

$$-2t + 1 - 2(4t - 1) - 8 = 0, \quad -10t - 5 = 0, \quad t = -\frac{1}{2},$$

$$x = 2, \quad y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2, \quad z = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3.$$

Итак, точка $N(2, 2, -3)$. Так как точка A''_4 симметрична точке A_4 относительно прямой A_1A_3 , то точка N является серединой отрезка $A_4A''_4$, тогда

$$x_N = \frac{x_4 + x''_4}{2}, \quad 2 = \frac{0 + x''_4}{2}, \quad x''_4 = 4,$$

$$y_N = \frac{y_4 + y''_4}{2}, \quad 2 = \frac{8 + y''_4}{2}, \quad y''_4 = -4,$$

$$z_N = \frac{z_4 + z''_4}{2}, \quad -3 = \frac{0 + z''_4}{2}, \quad z''_4 = -6, \quad \text{точка } A''_4(4, -4, -6).$$

Аналитическая геометрия на плоскости

Некоторые сведения из теории

Прямая линия. Ее уравнение

$$Ax + By + C = 0 \quad - \quad (38)$$

общее уравнение прямой.

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad - \quad (39)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{a} = (m, n)$ – вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad - \quad (40)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с перпендикулярным вектором $\vec{n} = (A, B)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad - \quad (41)$$

уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad - \quad (42)$$

уравнение прямой в «отрезках», где a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \quad - \quad (43)$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \varphi$ и отрезком b – отсекаемым на оси Oy .

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad - \quad (44)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ с угловым коэффициентом k .

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad - \quad (45)$$

расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad - \quad (45a)$$

отклонение точки $M_0(x_0, y_0)$ от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} \quad - \quad (46)$$

угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$.

$$k_1 = k_2 \quad - \quad (47)$$

условие параллельности прямых.

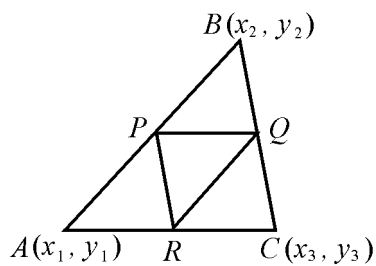
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad - \quad (48)$$

условие перпендикулярности прямых.

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \quad - \quad (49)$$

угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 .

Задача 6. Даны середины сторон треугольника $P(1, 2)$, $Q(5, 1)$, $R(-4, 3)$. Составить уравнения его сторон.



1 способ. Так как точки P , Q , R являются серединами отрезков AB , AC , BC , то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 = -8, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 6, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= -8 & y_1 &= 6 \\ x_2 &= 0 & y_2 &= 0 & A(-8, 6), \quad B(10, -2), \quad C(0, 0). \\ x_3 &= 10, & y_3 &= -2, \end{aligned}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение AB :

$$\frac{x + 8}{10 + 8} = \frac{y - 6}{-2 - 6}, \quad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC :

$$\frac{x - 10}{0 - 10} = \frac{y + 2}{0 + 2}, \quad x + 5y = 0.$$

Уравнение AC :

$$\frac{x + 8}{0 + 8} = \frac{y - 6}{0 - 6}, \quad 3x + 4y = 0.$$

2 способ. Не определяя координат точек A , B , C , составим уравнение каждой из сторон треугольника ABC , как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника PQR параллельно противоположной стороне.

Уравнение AB : прямая AB проходит через точку P параллельно вектору $\overrightarrow{QR} = (-9, 4)$. Используем уравнение (39).

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y-2}{4} \Rightarrow 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC : прямая BC проходит через точку Q параллельно вектору $\overrightarrow{PR} = (-5, 1)$.

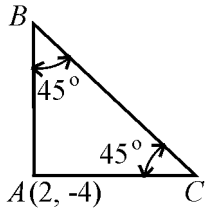
$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y+1}{1} \Rightarrow x + 5y = 0.$$

Уравнение AC : прямая AC проходит через точку R параллельно вектору $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$.

$$\frac{x+4}{4} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow 3x + 4y = 0.$$

Ответ: $4x + 9y - 22 = 0$, $x + 5y = 0$, $3x + 4y = 0$.

Задача 7. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x + 3y - 5 = 0$ и вершину прямого угла $(2, -1)$.



$AB = BC$ (по условию), поэтому $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$,

$k_{BC} = -\frac{2}{3}$ (по формуле (46)). Уравнения катетов AB и BC

составляем по формуле (44): $y + 1 = k(x - 2)$.

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} \right|, \quad (49)$$

$$\frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} = \pm 1.$$

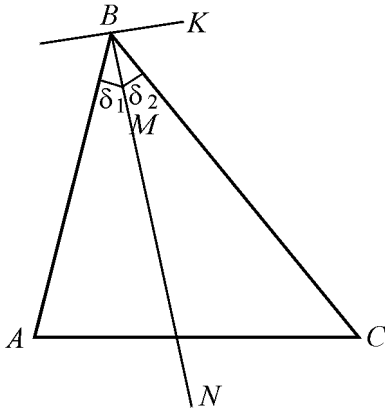
Решая эти уравнения, получим:

$$k = \frac{1}{5}, \quad y + 1 = \frac{1}{5}(x - 2), \quad 5y + 5 = x - 2, \quad x - 5y - 7 = 0.$$

$$k = -5, \quad y + 1 = -5(x - 2), \quad y + 1 = -5x + 10, \quad 5x + y - 9 = 0.$$

Ответ: $x - 5y - 7 = 0$, $5x + y - 9 = 0$.

Задача 8. В треугольнике с вершинами $A(3, -2)$, $B(-1, 1)$, $C(5, -7)$ найти биссектрису внутреннего угла $\angle ABC$.



1) Составим уравнения сторон угла $\angle ABC$, воспользовавшись формулой (41).

Сторона BA :

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y-1}{-2-1}, \quad -3x - 4y + 1 = 0.$$

Сторона BC :

$$\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-1}{-4-1}, \quad -8x - 6y - 2 = 0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла.

Приравняем расстояния от произвольной точки

биссектрисы $M(x, y)$ до сторон угла BA и BC , вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-8x - 6y - 2|}{\sqrt{8^2 + 6^2}}, \quad \frac{|-3x - 4y + 1|}{5} = \frac{|-8x - 6y - 2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x - 4y + 1) = -8x - 6y - 2 \quad \text{и} \quad 2(-3x - 4y + 1) = -(-8x - 6y - 2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине B треугольника ABC :

$$x - y + 3 = 0 \quad (a)$$

и

$$x + y = 0. \quad (б)$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника BN отклонения вершин треугольника A и C имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла BK – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек A и C от прямой (a) по формуле (40,a):

$$\delta_A = \frac{3 - (-2) + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} > 0, \quad \delta_C = \frac{5 - (-7) + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} > 0,$$

следовательно, уравнение (a) – это уравнение прямой BK . Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника ABC при вершине B :

$$x + y = 0.$$

Ответ: $x + y = 0$.

Линии второго порядка

Окружность. Уравнение

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (50)$$

определяет окружность радиуса R с центром $C(a, b)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $a = b = 0$, то уравнение окружности примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (51)$$

Общее алгебраическое уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

есть уравнение окружности, если $A = C \neq 0$, $B = 0$, т.е.

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (52)$$

Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \quad (53)$$

уравнение эллипса (канонический вид).

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad a > b. \quad (54)$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1(-c, 0) \text{ и } F_2(c, 0). \quad (55)$$

Начало координат O – центр симметрии эллипса, а оси координат – оси симметрии эллипса. Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ называются вершинами эллипса, a и b – большая и малая полуоси.

Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1 \quad (56)$$

называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, т.к. выражается через отношение его полуосей

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (57)$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a = b$, т.е. $\varepsilon = 0$.

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} - \quad (58)$$

уравнения директрис.

Если фокусы эллипса расположены на оси Oy , то уравнение эллипса имеет тот же вид (58), но $b > a$. Фокусы имеют координаты: $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$. Уравнения директрис

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon}. \quad (59)$$

Гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \quad (60)$$

каноническое уравнение гиперболы.

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad a < c. \quad (61)$$

Фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка O – центр симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, которые называются ее действительными вершинами, а величина a – действительной полуосью гиперболы. Точки $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ называются мнимыми вершинами, а b – мнимая полуось. Прямоугольник с центром в начале координат и сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y = \pm \frac{b}{a}x \quad (62)$$

являются асимптотами гиперболы, т.е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1. \quad (63)$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (64)$$

Если $a = b$, гипербола называется равносторонней. В этом случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} - \quad (65)$$

директрисы гиперболы.

Если уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (66)$$

то асимптоты гиперболы:

$$x = \pm \frac{b}{a}y, \quad (67)$$

фокусы $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$.

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon} - \quad (68)$$

уравнения директрис.

Парабола.

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \quad (p > 0), \quad (69)$$

где p – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

В ряде случаев рассматривают параболы:

$$\text{а) } y^2 = -2px, \quad F\left(-\frac{p}{2}, 0\right) \text{ – фокус, } x = \frac{p}{2} \text{ – уравнение директрисы;} \quad (70)$$

$$\text{б) } x^2 = 2py, \quad F\left(0, \frac{p}{2}\right) \text{ – фокус, } y = -\frac{p}{2} \text{ – уравнение директрисы;} \quad (71)$$

$$\text{в) } x^2 = -2py, \quad F\left(0, -\frac{p}{2}\right) \text{ – фокус, } y = \frac{p}{2} \text{ – уравнение директрисы.} \quad (72)$$

Для всех случаев $p > 0$.

Задача 9. Среди прямых параллельных прямой $2x + y = 0$, выделить касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Уравнение всякой прямой, параллельной данной, можно записать в виде

$$2x + y + c = 0.$$

Касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку, поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно иметь только один ответ.

Из уравнения прямой $y = -2x - c$.

$$\begin{cases} y = -2x - c \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \quad x^2 + (-2x - c)^2 = 1, \quad 5x^2 + 4cx + c^2 - 1 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда дискриминант равен нулю: $(4c)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (c^2 - 1) = 0$, откуда $c = \pm\sqrt{5}$.

Итак, искомые касательные имеют уравнения

$$2x + y + \sqrt{5} = 0, \quad 2x + y - \sqrt{5} = 0.$$

Задача 10. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

Решение. Делим на 225, получаем

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отсюда следует по формуле (53), что $a = 5$, $b = 3$. Из формулы (54):

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, \quad c = \pm 4.$$

По формуле (55): $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.

Эксцентриситет (56): $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Уравнения директрис согласно (58): $x = \pm \frac{5}{4/5} = \pm \frac{25}{4}$.

Ответ: $a = 5$, $b = 3$; $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$; $\varepsilon = \frac{4}{5}$; $x = \pm \frac{25}{4}$.

Задача 11. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая полуось $2\sqrt{6}$, а расстояние между фокусами $F_1F_2 = 8$.

Решение. $b = 2\sqrt{6}$, $F_1F_2 = 2c = 8$, $c = 4$.

По формуле (54): $a^2 = b^2 + c^2$, $a^2 = (2\sqrt{6})^2 + 4^2 = 40$, $a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Уравнение эллипса согласно (53): $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$.

Задача 12. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $4y \pm 3x = 0$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать ее каноническое уравнение.

Решение. Уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$, согласно формуле (62):

$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$. Кроме того $F_1F_2 = 2c = 20$, $c = 10$. По формуле (61): $c^2 = a^2 + b^2$,

получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $a = 8$, $b = 6$. Следовательно, каноническое уравнение

гиперболы: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Задача 13. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = -1$. Найти координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

Решение. Фокусы данной гиперболы расположены на оси Oy .

$$a = 1, b = 3, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}. \quad (61)$$

Значит фокусы имеют координаты $F_1(0, -\sqrt{10})$, $F_2(0, \sqrt{10})$. Вершины $A_1(0, -1)$, $A_2(0, 1)$, $B_1(-3, 0)$, $B_2(3, 0)$. Эксцентриситет по формуле (64):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{1}, \quad \varepsilon = \sqrt{10}.$$

Уравнения асимптот: $x = \pm \frac{b}{a}y \Rightarrow x = \pm 3y$.

Уравнения директрис: $y = \pm \frac{b}{c} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Задача 14. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(1, -2)$ и симметрична относительно оси Oy . Написать ее уравнение. Найти фокус и директрису.

Решение. Уравнение искомой параболы по формуле (72) имеет вид $x^2 = -2py$. Точка $A(1, -2)$ лежит на параболы. Подставляем координаты точки A в уравнение: $1 = -2p \cdot (-2) \Rightarrow p = \frac{1}{4}$. Следовательно, искомое уравнение будет $x^2 = -\frac{1}{2}y$ или $y = -2x^2$.

Фоку параболы: $F\left(0, -\frac{1}{8}\right)$. Уравнение директрисы согласно (72): $y = \frac{1}{8}$.

Задача 15. На параболы $y^2 = 4x$ найти точки, расстояния которых от директрисы равно 5.

Решение. Уравнение директрисы данной параболы $x = -\frac{p}{2}$, $2p = 4$, $p = 2$, $x = -1$. Тогда расстояние от оси Oy до искомой $\ell = 4 - \frac{p}{2} = 5 - 1 = 4$ точки и это расстояние определит координату x данной точки, т.е. $x = 4$. Координату y найдем из уравнения параболы:

$$y^2 = 4x, \quad y^2 = 4 \cdot 4 = 16, \quad y = \pm 4.$$

Итак, $M_1(4, 4)$, $M_2(4, -4)$.

1. Пределы

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \dots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число u_n . Тогда говорят, что определена последовательность чисел u_1, u_2, u_3, \dots или, короче, последовательность $\{u_n\}$. Отдельные числа u_n называются ее элементами.

Определение 1.1. Число a называется пределом последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется зависящее от него

натуральное число N такое, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство: $|u_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.

Определение 1.2. Говорят, что функция $f(x)$ стремится к A ($f(x) \rightarrow A$) при стремлении к a ($x \rightarrow a$), где A и a — числа, или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Аналогично, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta(M)$, где M — произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.

1. Если существуют конечные $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$, то

$$a) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

$$б) \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x),$$

$$в) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0 \right).$$

2. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = 0$ (A — конечно), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty,$$

если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = \infty$ (A — конечно), то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взять соответственно две последовательности: $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения.

Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0 .

Пример 1.1. При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x \rightarrow \infty$ или n при $n \rightarrow \infty$ для последовательностей (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$) оба члена соотношения полезно предварительно разделить на x^m или, соответственно, n^m где m – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

$$\begin{aligned}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{5x^4 + 3x + 2} &= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left(5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^4}}{5 + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^4}} = \frac{3 + 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}, \quad \text{старшая степень } m = 4, \\
 &\text{делится на } x^4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 б) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{9n^4 - 2n^3 + 2} + 4\sqrt[3]{8n^3 + 21}}{\sqrt[4]{n^4 - 3} + 2\sqrt{4n^4 + 9n}} &= \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt{n^4 \left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} \right)} + 4 \cdot \sqrt[3]{n^3 \left(8 + \frac{21}{n^3} \right)}}{\sqrt[4]{n^4 \left(1 - \frac{3}{n^4} \right)} + 2 \cdot \sqrt{n^4 \left(4 + \frac{9}{n^3} \right)}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 \cdot \sqrt{\left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} \right)} + 4n \cdot \sqrt[3]{\left(8 + \frac{21}{n^3} \right)}}{n \cdot \sqrt[4]{\left(1 - \frac{3}{n^4} \right)} + 2n^2 \cdot \sqrt{\left(4 + \frac{9}{n^3} \right)}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt{\left(9 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4} \right)} + \frac{4}{n} \cdot \sqrt[3]{\left(8 + \frac{21}{n^3} \right)}}{\frac{1}{n} \cdot \sqrt[4]{\left(1 - \frac{3}{n^4} \right)} + 2 \cdot \sqrt{\left(4 + \frac{9}{n^3} \right)}} = \frac{3 \cdot \sqrt{9 - 0 + 0} + 0 \cdot \sqrt[3]{8 + 0}}{0 \cdot \sqrt[4]{1 - 0} + 2 \cdot \sqrt{4 + 0}} = \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

(неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, старшая степень $m = 2$, делится на n^2).

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+1) \left[\sqrt{x^2+4x+5} - \sqrt{x^2+4x+7} \right] &= [\infty \cdot (\infty - \infty)] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1) \left[\sqrt{x^2+4x+5} - \sqrt{x^2+4x+7} \right] \cdot \left[\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x+7} \right]}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x+7}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)(x^2+4x+5 - x^2 - 4x + 7)}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x+7}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1) \cdot 12}{\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x^2+4x+7}} \left(\frac{:x}{:x} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 \left(3 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}} = \frac{12 \cdot 3}{1+1} = 18.
 \end{aligned}$$

Пример 1.2. Если $P(x)$ и $Q(x)$ – целые многочлены x , $P(a) \neq 0$ или $Q(a) \neq 0$, то предел рациональной дроби P/Q при $x \rightarrow a$ находится непосредственно. Если же $P(a) = Q(a) = 0$ (неопределенность $\frac{0}{0}$), то дробь P/Q рекомендуется сократить один или несколько раз на $(x-a)$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3} = \\
 &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Пример 1.3. Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность $\frac{0}{0}$).

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt[3]{5-x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{5+x})(3 + \sqrt{5+x})}{(1 - \sqrt[3]{5-x})(3 + \sqrt{5+x})} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{9-5-x}{(1-\sqrt[3]{5-x})(3+\sqrt{5+x})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{3+\sqrt{5+x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}} \cdot \frac{1}{6} = \\
&= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2})}{(1-\sqrt[3]{5-x})(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2})} = \\
&= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2})}{1-5+x} = \\
&= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2})}{x-4} = -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 4} (1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}) = \\
&= -\frac{1}{6}(1+1+1) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x^2-7x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \\
&= \frac{1}{9 \cdot 12} = \frac{1}{108}.
\end{aligned}$$

Пример 1.4. При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

следствием которого являются пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} [\operatorname{ctg}^2 3x - \operatorname{ctg}^2 5x] \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 4x \cdot \arcsin^2 x}{x^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} - \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x} \right] \cdot \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \right)^2 \cdot 16x^2 \cdot \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2 \cdot x^2}{x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} 16x^2 \cdot \left[\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} - \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2 = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos^2 3x \cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \cdot 9x^2} - \frac{\cos^2 5x \cdot 16x^2}{\left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)^2 \cdot 25x^2} \right] \cdot 1^2 \cdot 1^2 = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{16}{9} \cos 3x - \frac{16}{25} \cos^2 5x \right] = \frac{16}{9} \cdot 1 - \frac{16}{25} \cdot 1 = \frac{256}{225}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x \cdot \sqrt{1 - \cos 4x}}{x^2 \cdot \arcsin 3x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \right)^2 \cdot 4x^2 \cdot \sqrt{2 \sin^2 2x}}{x^2 \cdot \left(\frac{\arcsin 3x}{3x} \right) \cdot 3x} = \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \right)^2}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{3x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{2} \sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{2} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) \cdot 2x}{3x} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

Пример 1.5. При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда $x \rightarrow a$ и $a \neq 0$, рекомендуется предварительно провести замену $x - a = y$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos \frac{\pi \cdot x}{6}}{x - 3} &= \left(\frac{0}{0} \right) = (x - 3 = y, y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 3) = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi \cdot (y + 3)}{6}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \cdot \cos \left(\frac{\pi \cdot y}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi \cdot y}{6}}{\frac{\pi \cdot y}{6}} = \\
&= -\frac{\pi}{6} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi \cdot y}{6}}{\frac{\pi \cdot y}{6}} = -\frac{\pi}{6} \cdot 1 = -\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Пример 1.6. При вычислении пределов вида $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} = c$ необходимо

иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$,

то $c = A^B$ ($A > 0$);

2) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \pm\infty$, то вопрос о нахождении

предела c решается непосредственно;

3) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$, то следует воспользоваться

«вторым замечательным пределом»: $\lim_{x \rightarrow a} (1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}} = e$, где

$g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ и $e = 2,718\dots$

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2}{x-1}} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2} \right)^{+\infty}} = 0, \text{ т.к.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{x} \right)^{x+3} = 4^3 = 64, \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \right) \cdot 4 = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+3) = 3.$$

$$в) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{2x} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{\frac{3x-6}{7} \cdot \frac{7}{3x-6} \cdot 2x} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{3x-6} \right)^{\frac{3x-6}{7}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x}{3x-6}} = e^{14/3}.$$

$$г) \quad \lim_{x \rightarrow 3} (7-2x)^{\frac{3}{x-3}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 3} [1 + (6-2x)]^{\frac{3}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ [1 + (6-2x)]^{\frac{1}{6-2x}} \right\}^{\frac{(6-2x) \cdot 3}{x-3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{18-6x}{x-3}} = e^{-6}.$$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 2.1. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в окрестности точки $x = a$ (при $x \rightarrow a$).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ есть также бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Определение 2.2. Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow a$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, где c – некоторое число, отличное от нуля, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x \rightarrow a$, если $c = 0$, то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $g(x)$ при $x \rightarrow a$.

Бесконечно малая $f(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с $g(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g^n(x)} = c, \quad 0 < |c| < +\infty.$$

Пример 2.1. При $x \rightarrow 0$ определить порядок малости функции $\operatorname{tg} x - \sin x$ относительно x .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^n \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^n \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{x^n \cos x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x} = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^n} \cdot 1 = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^n \cdot 2^n} = \frac{4}{2^n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^n}. \end{aligned}$$

Этот предел будет равен константе $c \neq 0$ при $n = 3$, следовательно, функция $\operatorname{tg} x - \sin x$ имеет порядок малости $n = 3$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

Пример 2.2. Определить порядок малости относительно x при $x \rightarrow 0$ суммы $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$.

Слагаемое $\sqrt[3]{x^2}$ имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x , а слагаемое $\sqrt{x^3}$ — порядок $\frac{3}{2}$, следовательно, сумма имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x при $x \rightarrow 0$.

Определение 2.3. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$

называются эквивалентными при $x \rightarrow a$: $f(x) \sim g(x)$.

Например, при $x \rightarrow 0$ будем иметь:

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \quad (a \neq 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

Пример 2.3.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{4\operatorname{tg}^2 x} - 5^{3\arcsin^2 3x}}{3\sin^2 4x + 7\operatorname{arctg}^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^{4\operatorname{tg}^2 x} - 1) - (5^{3\arcsin^2 3x} - 1)}{3 \cdot (4x)^2 + 7 \cdot (x)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\operatorname{tg}^2 x \cdot \ln 3 - 3\arcsin^2 3x \cdot \ln 5}{55x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\ln 3 \cdot x^2 - 3\ln 5 \cdot (3x)^2}{55x^2} = \\ &= \frac{4\ln 3 - 27\ln 5}{55}. \end{aligned}$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4\arcsin 2x}{3\operatorname{tg} 8x} \right)^{\frac{\ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4 \cdot 2x}{3 \cdot 8x} \right)^{\frac{3x}{x}} = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}.$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3-5x) - \ln(3+7x)}{2\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[3 \left(1 - \frac{5}{3}x \right) \right] - \ln \left[3 \left(1 + \frac{7}{3}x \right) \right]}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3 + \ln \left(1 - \frac{5}{3}x \right) - \ln 3 - \ln \left(1 + \frac{7}{3}x \right)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}x}{2x} = -2. \end{aligned}$$

Определение 2.4. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$.

Подобно тому, как это сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

Пример 2.4. Пусть $x \rightarrow \infty$. Определить порядок бесконечно большой

$f(x) = \frac{x^5}{x+2}$ по сравнению с x .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^5}{x+2} : x^n \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^n(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^{n+1} + x^n \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^{n+1}} = 1$$

при $n = 4$.

Определение 2.5.

1) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x \rightarrow \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{c \cdot x^\alpha} = 1$, где c и α – константы, тогда функция $y = cx^\alpha$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

2) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x \rightarrow a$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{c \cdot (x-a)^\alpha} = 1$, где c и α – константы, тогда функция

$y = c(x-a)^\alpha$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$.

Пример 2.5.

а) Найти асимптотику (асимптотическое представление) функции $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ при $x \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot x^{1/2}}, \end{aligned}$$

следовательно, асимптотикой функции $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ при $x \rightarrow \infty$

является функция $\frac{1}{2}x^{-1/2}$; $c = \frac{1}{2}$; $\alpha = -\frac{1}{2}$.

б) Найти асимптотику функции $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x \rightarrow 1$.

При $x \rightarrow 1$ функции $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ является бесконечно большой:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x+x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}(1-x)^{1/3}}.$$

Асимптотикой в данном случае является функция $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(1-x)^{-1/3}$.

в) Найти асимптотику функции $f(x) = x^3 - 3x + 2$ при $x \rightarrow 1$.

В данном случае при $x \rightarrow 1$ функция $f(x)$ является бесконечно малой;
 $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) \sim 3(x-1)^2$.

Получаем асимптотику $y = 3(x-1)^2$; $c = 3$; $\alpha = 2$.

3. Непрерывность функции.

Определение 3.1. Если $x < a$ и $x \rightarrow a$, то условно пишут $x \rightarrow a-0$, аналогично, если $x > a$ и $x \rightarrow a$, то $x \rightarrow a+0$. Числа

$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ и $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ называют соответственно

пределом слева функции $f(x)$ в точке a и пределом справа функции $f(x)$ в точке a (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство: $f(a-0) = f(a+0)$.

Определение 3.2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a , если

1) она определена в этой точке;

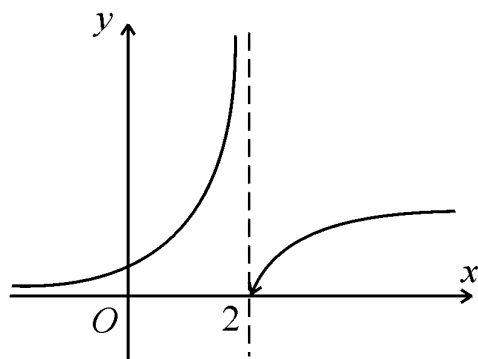
$$2) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются точками разрыва.

Пример 3.1.

а) Найти точки разрыва функции $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$, пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.

Функция $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ имеет разрыв в точке $x = 2$, т.к. она в этой точке не определена. При этом:



$$\lim_{x \rightarrow 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

б) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y = \frac{\frac{1}{2^{x+3}} + 4x - 8}{\frac{1}{2^{x+3}} + 4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка $x = -3$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1/(x+3)} + 4} = \frac{2^{-\infty} - 12 - 8}{2^{-\infty} + 4} = \frac{0 - 20}{0 + 4} = -5;$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1/(x+3)} + 4} = 1, \text{ т.к. при } x \rightarrow -3+0 \text{ имеем:}$$

$$2^{1/(x+3)} + 4x - 8 \sim 2^{1/(x+3)}; \quad 2^{1/(x+3)} + 4 \sim 2^{1/(x+3)}.$$

$$\text{Величина скачка } \Delta = 1 - (-5) = 6.$$

в) Найти точки разрыва, величину скачка Δ и построить график функции

$$y = \begin{cases} -3x, & x \leq 0 \\ 4 \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \frac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

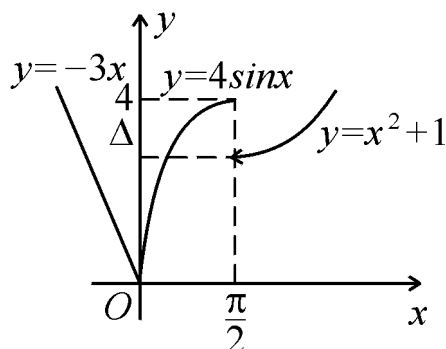
Данная функция непрерывна для $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$.

Исследуем только точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$, т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (-3x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (4 \sin x) = 0;$$

$f(0) = -3x \Big|_{x=0} = 0$, следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (4 \sin x) = 4; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4;$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} (x^2 + 1) = \frac{\pi^2}{4} + 1 = 3,467, \text{ сл}$$

едовательно, точка $x = \frac{\pi}{2}$ — точка разрыва.

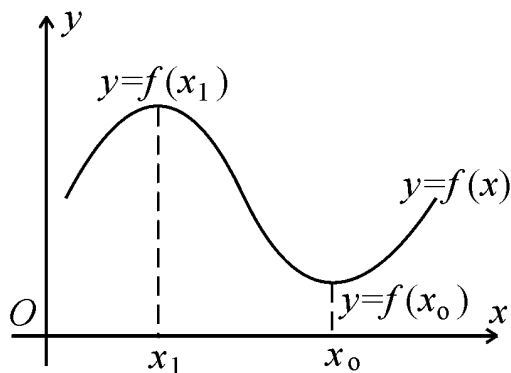
Величина скачка

$$\Delta = 4 - \left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) = 3 - \frac{\pi^2}{4} \approx 0,533.$$

□ 1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек x_1, x_2 , принадлежащих данному интервалу (отрезку), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при $a < x < b$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками x (где $f'(x) = 0$ или же $f'(x)$ не существует).



Если существует такая двусторонняя окрестность точки x_0 , что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой минимума функции $y = f(x)$, а число $f(x_0)$ — минимумом

функции $y = f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_1$ некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то x_1 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, а $f(x_1)$ – максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции – экстремумом функции. Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ или же $f'(x_0)$ не существует (*необходимое условие существования экстремума*). Обратное утверждение не верно: точки, в которых $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$.

Достаточный признак существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ следующий: если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ критической точки x_0 , что $f'(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$; если же $f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 – точка минимума функции $f(x)$.

Если, наконец, найдется такое положительное число δ , что $f'(x)$ сохраняет неизменный знак при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, то точка x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

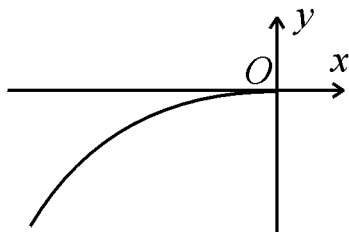
Наименьшее (наибольшее) значение непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a; b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a; b]$.

Пример 1.1. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = x \cdot \sqrt{-5x}.$$

Область существования: $-5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Находим критические точки:



$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{-5x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{-5x}} \cdot (-5) = \sqrt{-5x} - \frac{5x}{2\sqrt{-5x}} = \\ &= \frac{-10x - 5x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{-15x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3 \cdot (-5x)}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{-5x} \geq 0. \end{aligned}$$

При $x \leq 0$ функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке $x = 0$: $y(0) = 0$.

Пример 1.2. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции

$$y = \sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}.$$

Область существования: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Находим критические точки:

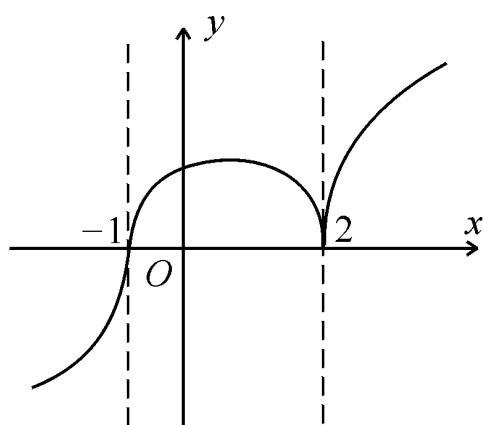
$$y' = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)(x+1)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}},$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0,$$

y' не существует $\Rightarrow x_2 = -1; x_3 = 2$. Получили три критические точки.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	$+$	не сущ.	$+$	0	$-$	не сущ.	$+$
y	\nearrow		\nearrow	max	\searrow	min	\nearrow

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = -\infty.$$



$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} y'(x) = +\infty.$$

Так как $y'(x) = k$, где k – угловой коэффициент касательной, то при $x = -1$ и $x = 2$ касательная к графику функции перпендикулярна оси Ox .

$$y(-1) = 0; \quad y(0) = \sqrt[3]{4}; \quad y(2) = 0.$$

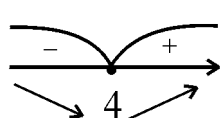
Пример 1.3. Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом 256 м^3 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть a – сторона квадрата основания, h – глубина бассейна;

$$a^2 h = 256 \Rightarrow a^2 = \frac{256}{h}, \quad a = \frac{16}{\sqrt{h}}, \quad h > 0;$$

$$S = S_{\text{бок}} + S_{\text{дна}} = 4ah + a^2 = 4 \cdot \frac{16}{\sqrt{h}} \cdot h + \frac{256}{h} = 64\sqrt{h} + \frac{256}{\sqrt{h}} = F(h);$$

$$F'(h) = \frac{64}{2\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32}{\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32h^{3/2} - 256}{h^2} = \frac{32}{h^2} (h^{3/2} - 8);$$



$F'(h) = 0 \Rightarrow h^{3/2} = 8; \quad h = 4$. При $h = 4$ величина $F(h) = S$ будет наименьшей.

Пример 1.4. Две прямые железные дороги AA_1 и BB_1 перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте C , причем $AC = 800$ км и $BC = 700$ км. Из пунктов A и B по направлению к C одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно 80 км/ч и 60 км/ч. Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим?

Отметим положение поездов в момент

$t > 0$ точками K и M .

$$AK = 80t; \quad BM = 60t;$$

$$CK = AC - AK = 800 - 80t;$$

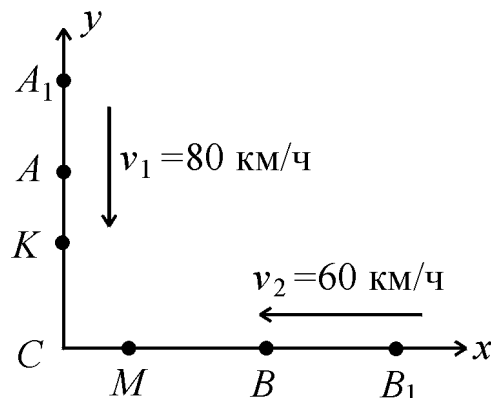
$$CM = CB - BM = 700 - 60t;$$

$$(KM)^2 = (CK)^2 + (CM)^2 =$$

$$= (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2; \quad KM$$

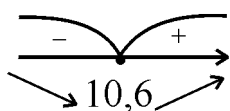
минимально, если минимальна величина

$$(KM)^2 = F(t) = (800 - 80t)^2 + (700 - 60t)^2;$$



$$F(t) = 2(800 - 80t) \cdot (-80) + 2(700 - 60t) \cdot (-60) =$$

$$= -128000 + 12800t - 84000t + 7200t = 20000t - 212000 = 0; \quad t = 10,6;$$



$t = 10,6$ — точка минимума функции $F(t)$. Через $10,6$ часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.

□ 2. АСИМПТОТЫ

Если точка $(x; y)$ непрерывно перемещается по кривой $y = f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Если существует число a такое, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$ и

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1x] = b_1$, то прямая $y = k_1x + b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2$ и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2 x] = b_1$, то прямая $y = k_2 x + b_2$ будет асимптотой (левая наклонная асимптота).

График функции $y = f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

Пример 2.1. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = 2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1}.$$

Область существования: $x \neq 1$.

Ищем вертикальные асимптоты.

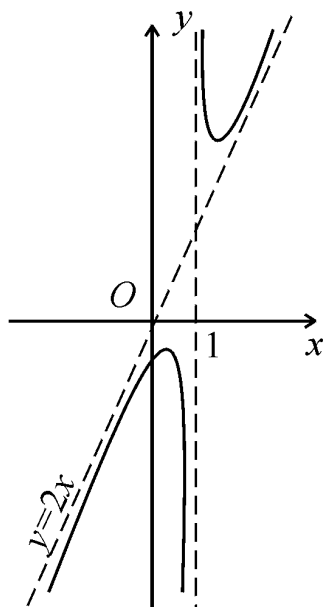
Функция имеет разрыв в точке $x = 1$, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{-0} = 2 - \infty = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \left(2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} \right) = 2 + \frac{3 \cdot 1}{+0} = 2 + \infty = +\infty;$$

следовательно, $x = 1$ – вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$.



$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} \left(2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} \right) = \\ &= 2 + 0 = 2; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2x + \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} - 2x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 \cos(x-1)}{x-1} = 0. \end{aligned}$$

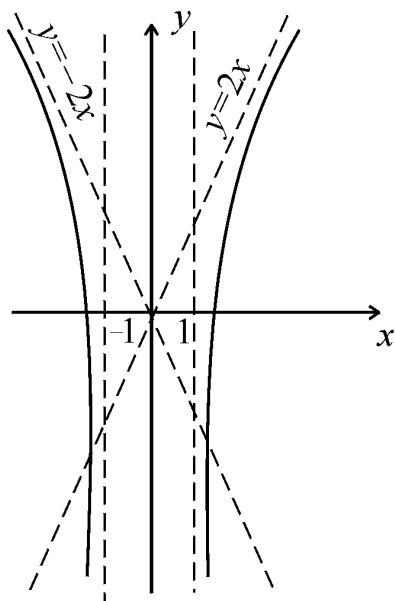
Следовательно, при $x \rightarrow \pm\infty$ существует асимптота $y = 2x$.

Пример 2.2. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Область существования: $x^2 - 1 > 0$; $x^2 > 1$; $x > 1$ и $x < -1$.

$$y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad y(-x) = \frac{2(-x)^2 - 9}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow y(x) = y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при $x > 1$, а затем отразить его симметрично относительно оси Oy .



$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2 - 9}{+0} = -\infty \Rightarrow x = 1 -$$

вертикальная асимптота при $x \rightarrow 1 + 0$.

Пусть $x \rightarrow 1 + \infty$.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9}{x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{9}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 2.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9 - 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2 - 9)^2 - 4x^2(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 1}(2x^2 - 9 + 2x \cdot \sqrt{x^2 - 1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-32x^2 + 81}{x^3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \left(2 - \frac{9}{x^2} + 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)} = 0.$$

При $x \rightarrow +\infty$ получаем асимптоту $y = 2x$. График данной функции

пересекает ось Ox при $2x^2 - 9 = 0$, т.е. в точках $x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Пример 2.3. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2}.$$

Область существования: $4 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ и $x \neq -2$.

В точках $x_1 = -2$ и $x_2 = +2$ функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{-8 - 8 + 6 + 2}{-0} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{-8 - 8 + 6 + 2}{+0} = -\infty;$$

$x = -2$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{8 - 8 - 6 + 2}{+0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} = \frac{8 - 8 - 6 + 2}{-0} = +\infty;$$

$x = 2$ – вертикальная асимптота.

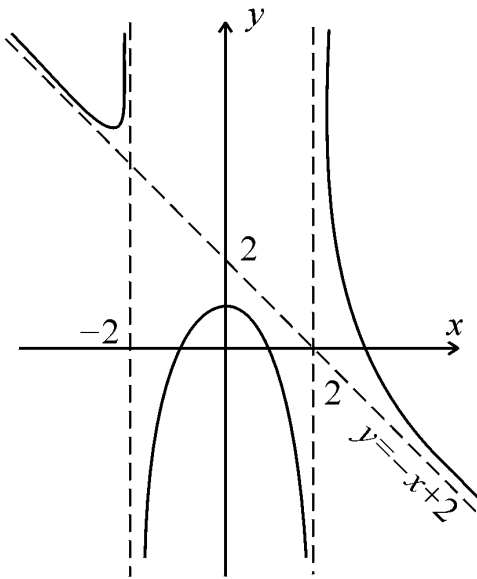
Наклонные асимптоты при $x \rightarrow \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{x(4 - x^2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{1}{-1} = -1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{4 - x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + x + 2}{4 - x^2} = 2.$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ получаем асимптоту $y = -x + 2$.



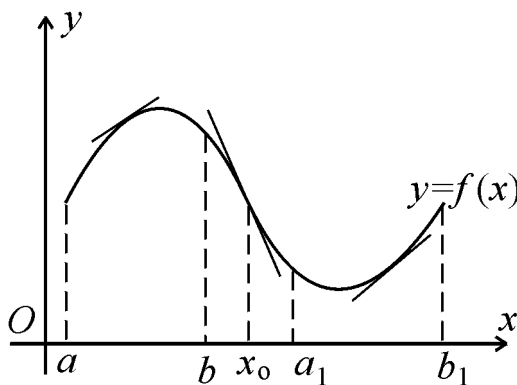
□ 3. НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ *вогнут вниз* на интервале $(a; b)$ (*вогнут вверх* на интервале $(a_1; b_1)$), если при

$a < x < b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при $a_1 < x < b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала $(a; b)$ (или интервала $(a_1; b_1)$).

Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y = f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства

$$f''(x) < 0 \quad (f''(x) > 0).$$



Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба*. Для абсциссы точки перегиба x_0

графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками 2-го рода*. Критическая точка 2-го рода x_0 является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_0 - \delta < x < x_0$ и $x_0 < x < x_0 + \delta$, где δ – некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

Пример. Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

Имеем: $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают всю область существования функции $(-\infty; +\infty)$ на три интервала.

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	–
y	∪	перегиб	∩	перегиб	∪

Получили: кривая вогнута вверх при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ и вогнута вниз при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Точки $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба.

□ 4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область существования этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области существования. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются): четность, периодичность и т.д.

Далее нужно найти точки разрыва, асимптоты, точки экстремума функции, точки перегиба и т.д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции.

Пример 4.1. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}.$$

Область существования: $x \in (-\infty; +\infty)$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

Так как функция определена при всех x , и у нее нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты при $x \rightarrow \pm\infty$ ищем в виде:
 $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} = +\infty, \text{ следовательно, наклонных}$$




асимптот также нет.

Исследуем функцию по первой производной.

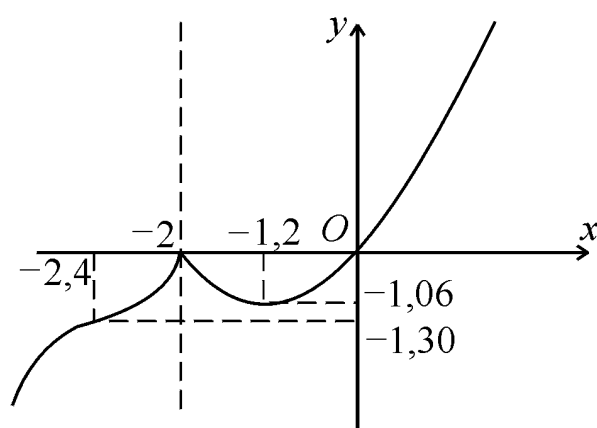
$$y' = \left[x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2} \right] = (x+2)^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{-1/3} = \frac{3(x+2) + 2x}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow 5x+6=0, \quad x=-1,2;$$

$$y' \text{ не существует} \Rightarrow x+2=0, \quad x=-2.$$

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1,2)$	$-1,2$	$(-1,2; +\infty)$
y'	+	не сущ.	-	0	+
y		max		min	

$y_{\max} = y(-2) = 0$ (касательная в этой точке перпендикулярна оси Ox).



$$y_{\min} = y(-1,2) = -1,2 \cdot \sqrt[3]{0,64} \approx -1,06$$

(касательная в этой точке параллельна оси Ox).

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = \left[\frac{5x+6}{(x+2)^{2/3}} \right] = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{x+2} - (5x+6) \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{15(x+2) - (5x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{10x+24}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

$y'' = 0$ при $x = -2,4$; y'' не существует при $x = -2$.

x	$(-\infty; -2,4)$	$-2,4$	$(-2,4; -2)$	-2	$(-2; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$	не сущест.	$+$
y	\cap	перегиб	\cup		\cup

$$y_{\text{перегиба}} = y(-2,4) = -2,4 \cdot \sqrt[3]{(-2,4)^2} \approx -1,30; \quad y(0) = 0.$$

Пример 4.2. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2.$$

Область существования: $x \neq -2$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

$x = -2$ — точка разрыва, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left(\frac{4+1}{-0} \right)^2 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = \left(\frac{4+1}{+0} \right)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow x = 2$ — вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x \rightarrow \pm \infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 = 4.$$




При $x \rightarrow \pm \infty$ получаем асимптоту $y = 4$.

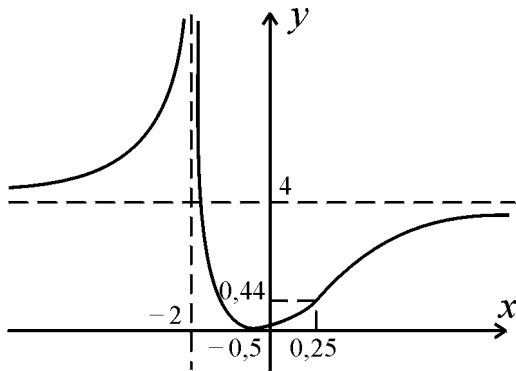
Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2} \right) \cdot \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{6(2x+1)}{(x+2)^2};$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0, \quad x = -0,5;$$

$$y' \text{ не существует} \Rightarrow x = -2.$$

x	$(-\infty; -2)$	$(-2; -0,5)$	$-0,5$	$(-0,5; +\infty)$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y			min	



$$y_{\min} = y(-0,5) = 0.$$

Исследуем функцию по второй производной.

$$\begin{aligned} y'' &= 6 \cdot \frac{2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 \cdot (2x+1)}{(x+2)^6} = \\ &= 6 \cdot \frac{2(x+2) - 3(2x+1)}{(x+2)^4} = \frac{6(1-4x)}{(x+2)^4}; \end{aligned}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 1 - 4x = 0; \quad x = 0,25;$$

$$y'' \text{ не существует} \Rightarrow x = -2.$$

x	$(-\infty; -2)$	$(-2; 0,25)$	$0,25$	$(0,25; +\infty)$
y''	+	+	0	-
y	\cup	\cup	перегиб	\cap

$$y_{\text{перегиба}} = y(0,25) = \left(\frac{1,5}{2,25}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0,44.$$

Пример 4.3. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \frac{e^{x-3}}{x-3}.$$

Область существования: $x-3 \neq 0$; $x \neq 3$.

$y(x) \neq y(-x)$ – функция общего вида.

В точке $x = 3$ функция терпит разрыв, т.к. в ней она не определена.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{e^{x-3}}{x-3} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{e^{x-3}}{x-3} &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 3 \text{ – вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b$.

1) $x \rightarrow +\infty$,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x-3})'}{(x^2 - 3x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{2x - 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x-3})'}{(2x-3)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3}}{2} = +\infty, \text{ следовательно, при } x \rightarrow +\infty$$

наклонных асимптот нет.

2) $x \rightarrow -\infty$,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \frac{0}{+\infty} = 0;$$




$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-3}}{x-3} = 0,$$

при $x \rightarrow -\infty$ получаем асимптоту $y = 0$.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left(\frac{e^{x-3}}{x-3} \right)' = \frac{e^{x-3} \cdot (x-3) - e^{x-3}}{(x-3)^2} = e^{x-3} \cdot \frac{x-3-1}{(x-3)^2} = e^{x-3} \cdot \frac{x-4}{(x-3)^2},$$

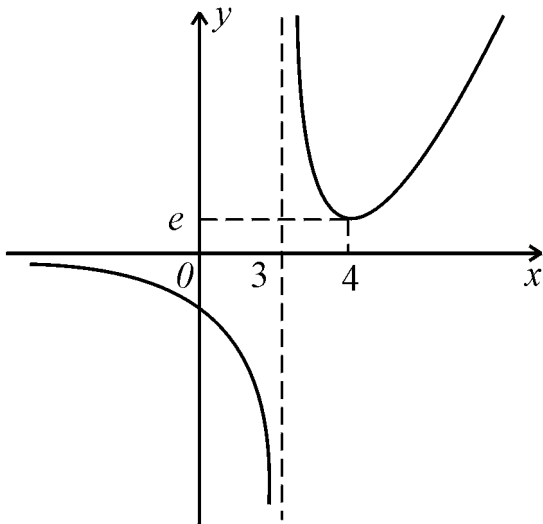
$$y' = 0 \Rightarrow x-4=0, \quad x=4; \quad y' \text{ не существует} \Rightarrow x=3.$$

x	$(-\infty; 3)$	$(3; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y'	-	-	0	+
y			min	

$$y_{\min} = y(4) = e \approx 2,72.$$

Исследуем функцию по второй производной.

$$\begin{aligned} y'' &= e^{x-3} \cdot \frac{x-4}{(x-3)^2} + e^{x-3} \cdot \frac{(x-3)^2 - (x-4) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \\ &= \frac{e^{x-3}}{(x-3)^2} \cdot \frac{x^2 - 7x + 12 - x + 5}{x-3} = \frac{e^{x-3} \cdot (x^2 - 8x + 17)}{(x-3)^3}; \quad y'' \neq 0; \end{aligned}$$



y'' не существует $\Rightarrow x = 3$.

x	$(-\infty; 3)$	$(3; +\infty)$
y''	—	+
y	\cap	\cup

$$y(0) = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \approx -0,02.$$

Пример 4.4. Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \ln \frac{x+6}{x} - 1.$$

Область существования: $\frac{x+6}{x} > 0$.

$$x > 0, \quad x < -6.$$

Функция общего вида.

$$\lim_{x \rightarrow -6-0} \left[\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = -\infty \Rightarrow x = -6 - \text{вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -+0} \left[\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = +\infty \Rightarrow x = -0 - \text{вертикальная асимптота.}$$



Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \frac{x+6}{x} - 1}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right] = -1.$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ получаем асимптоту $y = -1$.

Исследуем функцию по первой производной.

x	$(-\infty; -6)$	$(0; +\infty)$
y'	—	—
y	\searrow	\searrow

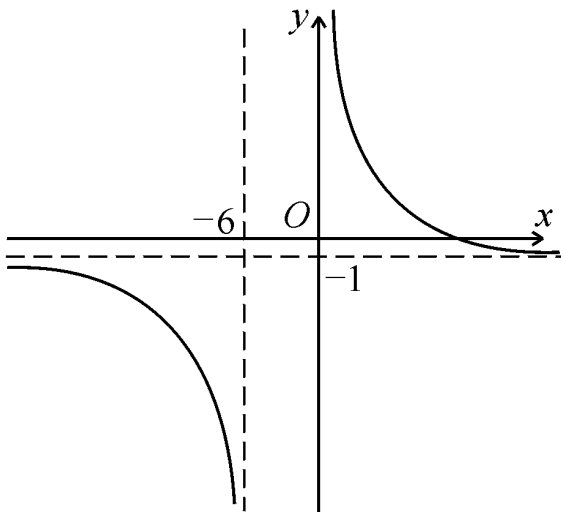
$$y' = \frac{x}{x+6} \cdot \frac{x-x-6}{x^2} = \frac{-6}{x(x+6)} \neq 0.$$

Экстремумов у функции нет.

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = -6 \cdot \frac{-(x+6+x)}{x^2(x+6)^2} = \frac{6(2x+6)}{x^2(x+6)^2} = \frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2};$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x+3=0; \quad x=-3 \text{ — не входит в область существования.}$$



x	$(-\infty; -6)$	$(0; +\infty)$
y''	–	+
y	\cap	\cup

Точек перегиба нет.

$$\ln \frac{x+6}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{e-1};$$

$$y\left(\frac{6}{e-1}\right) = 0.$$