МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Вычислительная механика и математика»

Утверждено на заседании кафедры
«Вычислительная механика и математика»
«21» января 2022г., протокол № 5

Заведующий кафедрой

_______________________________В.В. Глаголев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по проведению практических занятий
по дисциплине (модулю)
«Математическая составляющая естественнонаучных дисциплин»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки (специальности)
08.03.01 Строительство

с направленностью (профилем)
Теплогазоснабжение и вентиляция

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 080301-06-22

Тула 2022 год

Разработчик(и) методических указаний

Володин Г.Т., профессор, д.т.н

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

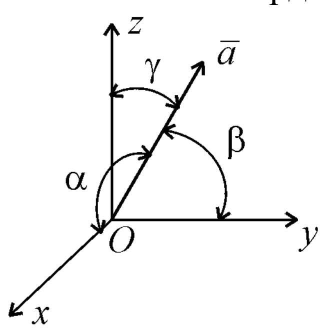
Аналитическая геометрия в пространстве R^3
Векторная алгебра

Некоторые сведения из теории

Вектор – направленный отрезок.

Равенство
$$\vec{a} = (x,\, y,\, z) \qquad (1)$$
означает, что x, y, z – проекции вектора на оси координат или его декартовы координаты.

Формула
$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (2)$$
позволяет по координатам вектора определить его модуль.



Если α, β, γ – углы, которые вектор образует с положительным направлением осей координат, то $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.
$$x = |\,\vec{a}\,|\cos\alpha, \quad y = |\,\vec{a}\,|\cos\beta, \quad z = |\,\vec{a}\,|\cos\gamma, \qquad (3)$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (4)$$

Если известны начало вектора $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и конец $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$, то координаты вектора находятся по формулам
$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1. \qquad (5)$$

Если $\vec{a} = (x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2,\, y_2,\, z_2)$, то
$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2,\, y_1 \pm y_2,\, z_1 \pm z_2) \qquad (6)$$ и
$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1,\, \alpha y_1,\, \alpha z_1)$, где α – любое число.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются коллинеарными. Признак коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (7)$$

Тройка векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называется координатным базисом:
$$|\,\vec{i}\,| = |\,\vec{j}\,| = |\,\vec{k}\,| = 1.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ направлены по осям соответственно Ox, Oy, Oz в положительную сторону.

Любой вектор $\vec{a} = (x,\, y,\, z)$ может быть представлен в виде
$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (8)$$

<u>Скалярным произведением</u> векторов $\vec{a}=\left(x_1,\, y_1,\, z_1\right)$ и $\vec{b}=\left(x_2,\, y_2,\, z_2\right)$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\varphi, \tag{9}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}, \tag{10}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2, \tag{11}$$ т.е.

скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{12}$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \tag{13}$$

$$cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}\cdot\sqrt{x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2}}. \tag{14}$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа этой силы определяется

$$W=\vec{F}\cdot\vec{S}. \tag{15}$$

<u>Векторным произведением</u> вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;
3. вектор $\vec{c}$ образует с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ «правую» тройку.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}. \tag{16}$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|, \tag{17}$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \tag{18}$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a}\times\vec{b}=0$, в частности, $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

Если векторы заданы координатами $\vec{a}=\left(x_1,\, y_1,\, z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2,\, y_2,\, z_2\right)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{19}$$

Если вектор $\vec{F}$ изображает силу, приложенную в какой-нибудь точке M, а вектор $\vec{a}$ идет из некоторой точки O в точку M, то вектор $\vec{a}\times\vec{F}$ представляет собой момент силы $\vec{F}$ относительно точки O:

$$m_{\circ}\vec{F}=\vec{a}\times\vec{F}. \qquad (20)$$

<u>Смешанным произведением</u> трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a}\times\vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right). \qquad (21)$$

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, со знаком «минус», если эта тройка левая.

$$V=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}. \qquad (22)$$

Если векторы компланарны (лежат в одной плоскости), то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0. \qquad (23)$$

Для векторов $\vec{a}=\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2, y_2, z_2\right)$, $\vec{c}=\left(x_3, y_3, z_3\right)$ смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (24)$$

<u>Задача 1.</u> На материальную точку действуют силы:

$$\vec{F}_1=\left(2, -1, 1\right),\quad \vec{F}_2=\left(-1, 2, 2\right),\quad \vec{F}_3=\left(1, 1, -2\right).$$

Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

<u>Решение.</u> Найдем равнодействующую

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\left(2-1+1, -1+2+1, 1+2-2\right)=\left(2, 2, 1\right).$$

Вектор перемещения по формуле (5)

$$\vec{S}=\overrightarrow{AB}=\left(4-2, 1+1, -1-0\right)=\left(2, 2, -1\right).$$

Искомую работу находим по формуле (15)

$$W=\vec{R}\cdot\vec{S}=2\cdot2+2\cdot2+1\cdot\left(-1\right)=7.$$

<u>Задача 2.</u> Дана сила $\vec{F}=\left(3, 4, -2\right)$ и точка ее приложения $A\left(2, -1, 3\right)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

<u>Решение.</u> По формуле (20) $m_{\circ}\vec{F}=\vec{r}\times\vec{F}$. Вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$ по формуле (5) имеет координаты $\vec{r}=\left(2, -1, 3\right)$, по формуле (19)

$$\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}=-10\vec{i}+13\vec{j}+11\vec{k}.$$

Итак, $m_{\circ}\vec{F}=(-10,\ 13,\ 11)$. Модуль момента находим по формуле (2):

$$\left|m_{\circ}\vec{F}\right|=\sqrt{(-10)^2+(13)^2+(11)^2}=\sqrt{390}\approx 19{,}748.$$

Направляющие косинусы по формуле (3):

$$cos\,\alpha=\frac{-10}{19{,}748}=-0{,}506,\quad cos\,\beta=\frac{13}{19{,}748}=0{,}658,\quad cos\,\gamma=\frac{11}{19{,}748}=0{,}557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие

$$\alpha=120^{\circ}24',\qquad \beta=48^{\circ}51',\qquad \gamma=56^{\circ}9'.$$

Контроль: должно быть $cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1.$ У нас:

$$(-0{,}506)^2+(0{,}658)^2+(0{,}557)^2=0{,}999.$$

<u>Задача 3.</u> Написать разложение вектора $\vec{x}=(5,\ 16,\ 2)$ по векторам $\vec{p}=(2,\ 1,\ 0),\ \vec{q}=(0,\ -2,\ 0),\ \vec{r}=(-1,\ 5,\ 2).$

<u>Решение.</u>

1. Разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ имеет вид

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{p}+\alpha_2\vec{q}+\alpha_3\vec{r}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases}x_1=\alpha_1 p_1+\alpha_2 q_1+\alpha_3 r_1\\ x_2=\alpha_1 p_2+\alpha_2 q_2+\alpha_3 r_2\\ x_3=\alpha_1 p_3+\alpha_2 q_3+\alpha_3 r_3.\end{cases}$$

2. С учетом числовых значений координат векторов $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ и $\vec{x}$ получим систему уравнений относительно неизвестных $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$:

$$\begin{cases}2\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2-1\cdot\alpha_3=5\\ 1\cdot\alpha_1-2\cdot\alpha_2+5\cdot\alpha_3=16\\ 0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+2\alpha_3=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha_1=5+\alpha_3\\ 2\alpha_2=\alpha_1+5\alpha_3-16\\ \alpha_3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=3\\ \alpha_2=-4\\ \alpha_3=1.\end{cases}$$

3. Разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ имеет вид:

$$\vec{x}=3\vec{p}-4\vec{q}+\vec{r}.$$

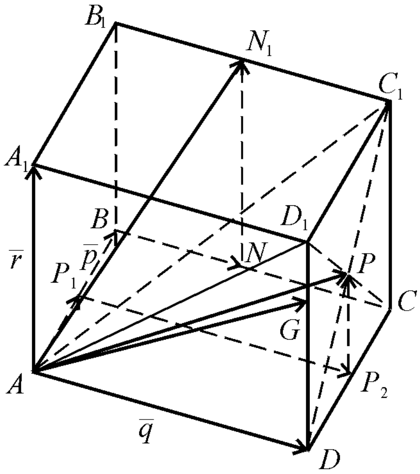
Ответ: $\vec{x}=3\vec{p}-4\vec{q}+\vec{r}.$

<u>Задача 4.</u> В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{p},$ $\overrightarrow{AD}=\vec{q},$ $\overrightarrow{AA_1}=\vec{r}$ образуют базис. Разложить векторы $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN_1}$ по выбранному базису, если точка G делит ребро DD_1 в отноше-

нии 1:2; точка P – точка пересечения диагоналей грани DD_1C_1C; точка N_1 – середина ребра B_1C_1.

Решение.

Построим чертеж. Непосредственно из чертежа следует:



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{P_2P} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AN_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AG} = \vec{q} + \frac{2}{3}\vec{r}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{p} + \vec{q} + \frac{1}{2}\vec{r}$,

$$\overrightarrow{AN_1} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{r}.$$

Прямая и плоскость

Плоскость. Ее уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad - \qquad (25)$$

общее уравнение плоскости.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) + C(z - z_\circ) = 0 \quad - \qquad (26)$$

уравнение плоскости, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad - \qquad (27)$$

уравнение плоскости «в отрезках». Здесь $a, b, c -$ величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad - \qquad (28)$$

нормальное уравнение плоскости.

$$d = \frac{|Ax_\circ + By_\circ + Cz_\circ + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad - \qquad (29)$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad - \qquad (30)$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Прямая. Ее уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} - \tag{31}$$

общее уравнение прямой (прямая задана пересечением двух плоскостей).

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} = \frac{z - z_\circ}{p} - \tag{32}$$

каноническое уравнение прямой, где $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ – точка, принадлежащая прямой, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой (вектор, параллельный прямой).

$$\begin{cases} x = x_\circ + mt \\ y = y_\circ + nt \\ z = z_\circ + pt \end{cases} - \tag{33}$$

параметрические уравнения прямой.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} - \tag{34}$$

уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1{}^2 + n_1{}^2 + p_1{}^2} \cdot \sqrt{m_2{}^2 + n_2{}^2 + p_2{}^2}} - \tag{35}$$

угол между двумя прямыми, где $\vec{a}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{a}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ – направляющие векторы прямых.

$$sin\psi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + c^2}} - \tag{36}$$

угол между прямой и плоскостью, где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{a} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой.

$$V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\left| \overrightarrow{A_1A_2} \; \overrightarrow{A_1A_3} \; \overrightarrow{A_1A_4} \right|$$ – объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$, где $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_{21}(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$ – координаты вершин пирамиды.

$$V_{пирамиды}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}. \qquad (37)$$

<u>Задача 5.</u> Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2,\,1,\,-1)$, $A_2(3,\,0,\,1)$, $A_3(2,\,-1,\,3)$, $A_4(0,\,8,\,0)$. Найти:

1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

3) объем пирамиды V;

4) расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$;

5) точку A_4', симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$;

6) точку A_4'', симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3.

<u>Решение.</u>

1) Угол между ребрами находим по формуле (35).

$\vec a_1=\overrightarrow{A_1A_2}=\big(3-2,\,0-1,\,1-(-1)\big)=(1,\,-1,\,2)$ – направляющий вектор прямой A_1A_2;

$\vec a_2=\overrightarrow{A_1A_4}=\big(0-2,\,2-1,\,0-(-1)\big)=(-2,\,7,\,1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4.

$$cos\varphi=\frac{1\cdot(-2)-1\cdot 7+2\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+7^2+1^2}}=\frac{-7}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}}=-\frac{7}{18}.$$

2) Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через три точки $A_1(2,\,1,\,-1)$, $A_2(3,\,0,\,1)$, $A_3(2,\,-1,\,3)$, по формуле (30)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3-2 & 0-1 & 1+1 \\ 2-2 & -1-1 & 3+1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)\cdot 0-(y-1)\cdot 4+(z+1)\cdot(-2)=0,$$

$$-4y+4-2z-2=0,$$

$4y+2z-2=0$ – уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

$\vec n=(0,\,2,\,1)$ – нормальный вектор плоскости;

$\vec a=\overrightarrow{A_1A_4}=(-2,\,7,\,1)$ – направляющий вектор прямой A_1A_4.

Находим угол ψ между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$ по формуле (36)

$$sin\psi = \frac{0\cdot(-2)+2\cdot 7+1\cdot 1}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+7^2+1^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{54}} = 0{,}9114.$$

3) Находим объем пирамиды по формуле (37)

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1,\,-1,\,2); \quad \overrightarrow{A_1A_3} = (0,\,-2,\,4); \quad \overrightarrow{A_1A_4} = (-2,\,7,\,1).$$

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(-2+8-8-28) = -\frac{1}{6}(-30) = 15.$$

4) Расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$ находим по формуле (29).

$$d = \frac{|\,2\cdot 8+0-1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}69.$$

5) Чтобы найти точку A_4', симметричную точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, сделаем следующее.

Составим уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$, проходящей через точку A_4 по формуле (32). За направляющий вектор прямой $\vec{a} = \vec{n} = (0,\,2,\,1)$ берем нормальный вектор плоскости, т.к. прямая перпендикулярна плоскости:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z-0}{1}, \qquad \frac{x}{0} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{1}.$$

Составим параметрические уравнения этой прямой по формуле (33):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t+8 \\ z = t. \end{cases}$$

Находим точку пересечения этой прямой с плоскостью $A_1A_2A_3$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t+8 \\ z = t \\ 2y+z-1=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -6+8 = 2 \\ z = t \end{cases} \quad\Rightarrow\quad 2(2t+8)+t-1=0,$$

$$5t+15=0, \qquad t=-3.$$

Получаем точку $M(0,\,2,\,-3)$; т.к. точка A_4' симметрична точке A_4 относительно плоскости $A_1A_2A_3$, то точка M является серединой отрезка A_4A_4', поэтому

$$x_M = \frac{x_4+x_4'}{2}, \qquad 0 = \frac{0+x_4'}{2}, \qquad x_4' = 0;$$

$$y_M = \frac{y_4 + y_4'}{2}, \qquad 2 = \frac{8 + y_4'}{2}, \qquad y_4' = -4;$$

$$z_M = \frac{z_4 + z_4'}{2}, \qquad -3 = \frac{0 + z_4'}{2}, \qquad z_4' = -6.$$

$A_4'(0, -4, -6)$.

6) Чтобы найти точку A_4'', симметричную точке A_4 относительно прямой A_1A_3, составим уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_1A_3 по формуле (26). За нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \vec{a} = (0, -2, 4)$ берем направляющий вектор прямой A_1A_3, т.к. плоскость перпендикулярна прямой.

$$0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 3) + 4 \cdot (z - 0) = 0, \quad -2y + 16 + 4z = 0, \quad y = 2z - 8 = 0.$$

Уравнение прямой A_1A_3 составляем по формуле (34).

$$\frac{x-2}{2-2} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z+1}{3+1}, \qquad \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

Параметрические уравнения прямой A_1A_3:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1. \end{cases}$$

Находим точку N пересечения прямой A_1A_3 и плоскости:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t - 1 \\ y - 2z - 8 = 0, \end{cases}$$

$$-2t + 1 - 2(4t - 1) - 8 = 0, \qquad -10t - 5 = 0, \qquad t = -\frac{1}{2},$$

$$x = 2, \quad y = -2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2, \quad z = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3.$$

Итак, точка $N(2, 2, -3)$. Так как точка A_4'' симметрична точке A_4 относительно прямой A_1A_3, то точка N является серединой отрезка A_4A_4'', тогда

$$x_N = \frac{x_4 + x_4''}{2}, \qquad 2 = \frac{0 + x_4''}{2}, \qquad x_4'' = 4,$$

$$y_N = \frac{y_4 + y_4''}{2}, \qquad 2 = \frac{8 + y_4''}{2}, \qquad y_4'' = -4,$$

$$z_N = \frac{z_4 + z_4''}{2}, \qquad -3 = \frac{0 + z_4''}{2}, \qquad z_4'' = -6, \quad \text{точка } A_4''(4, -4, -6).$$

Аналитическая геометрия на плоскости

Некоторые сведения из теории

Прямая линия. Ее уравнение

$$Ax + By + C = 0 \ - \qquad (38)$$

общее уравнение прямой.

$$\frac{x - x_\circ}{m} = \frac{y - y_\circ}{n} \ - \qquad (39)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$, $\vec{a} = (m, n) -$ вектор, параллельный прямой.

$$A(x - x_\circ) + B(y - y_\circ) = 0 \ - \qquad (40)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с перпендикулярным вектором $\vec{n} = (A, B)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \ - \qquad (41)$$

уравнение прямой проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ - \qquad (42)$$

уравнение прямой в «отрезках», где $a, b -$ величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

$$y = kx + b \ - \qquad (43)$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = tg\varphi$ и отрезком $b -$ отсекаемым на оси Oy.

$$y - y_\circ = k(x - x_\circ) \ - \qquad (44)$$

уравнение прямой, проходящей через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ с угловым коэффициентом k.

$$d = \frac{|\,Ax_\circ + By_\circ + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ - \qquad (45)$$

расстояние от точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ до прямой $Ax + By + C = 0$.

$$\delta = \frac{Ax_\circ + By_\circ + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ - \qquad (45а)$$

отклонение точки $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ от прямой.

$$k = -\frac{A}{B} \ - \qquad (46)$$

угловой коэффициент прямой $Ax + By + C = 0$.

$$k_1 = k_2 \; - \tag{47}$$

условие параллельности прямых.

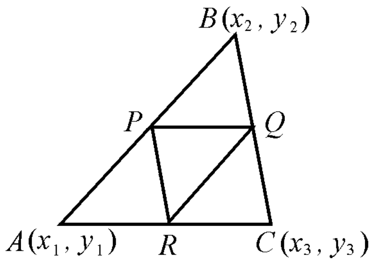
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \; - \tag{48}$$

условие перпендикулярности прямых.

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \; - \tag{49}$$

угол между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2.

Задача 6. Даны середины сторон треугольника $P(1,\ 2),\ Q(5,\ 1),\ R(-4,\ 3)$. Составить уравнения его сторон.



1 способ. Так как точки $P,\ Q,\ R$ являются серединами отрезков $AB,\ AC,\ BC$, то

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = 5, \quad \frac{x_1 + x_3}{2} = -4,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 2, \quad \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \quad \frac{y_1 + y_3}{2} = 3.$$

Решаем две системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_3 = -8, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 = 4 \\ y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 + y_3 = 6, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{array}{lll} x_1 = -8 & y_1 = 6 & \\ x_2 = 0 & y_2 = 0 & A(-8,\ 6),\quad B(10,\ -2),\quad C(0,\ 0). \\ x_3 = 10, & y_3 = -2, & \end{array}$$

Теперь составляем уравнения сторон треугольника, как прямых, проходящих через две точки, по формуле (41).

Уравнение AB:

$$\frac{x+8}{10+8} = \frac{y-6}{-2-6}, \qquad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC:

$$\frac{x-10}{0-10} = \frac{y+2}{0+2}, \qquad x + 5y = 0.$$

Уравнение AC:

$$\frac{x+8}{0+8} = \frac{y-6}{0-6}, \qquad 3x + 4y = 0.$$

2 способ. Не определяя координат точек $A,\ B,\ C$, составим уравнение каждой из сторон треугольника ABC, как прямой, проходящей через одну из вершин треугольника PQR параллельно противолежащей стороне.

Уравнение AB: прямая AB проходит через точку P параллельно вектору $\overrightarrow{QR} = (-9, 4)$. Используем уравнение (39).

$$\frac{x-1}{-9} = \frac{y-2}{4} \quad \Rightarrow \quad 4x + 9y - 22 = 0.$$

Уравнение BC: прямая BC проходит через точку Q параллельно вектору $\overrightarrow{PR} = (-5, 1)$.

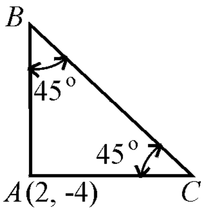
$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y+1}{1} \quad \Rightarrow \quad x + 5y = 0.$$

Уравнение AC: прямая AC проходит через точку R параллельно вектору $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$.

$$\frac{x+4}{4} = \frac{y-3}{-3} \quad \Rightarrow \quad 3x + 4y = 0.$$

Ответ: $4x + 9y - 22 = 0, \quad x + 5y = 0, \quad 3x + 4y = 0.$

Задача 7. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $2x + 3y - 5 = 0$ и вершину прямого угла $(2, -1)$.



$AB = BC$ (по условию), поэтому $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$, $k_{BC} = -\frac{2}{3}$ (по формуле (46)). Уравнения катетов AB и BC составляем по формуле (44): $y + 1 = k(x - 2)$.

$$tg45^\circ = \left| \frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} \right|, \tag{49}$$

$$\frac{k + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k} = \pm 1.$$

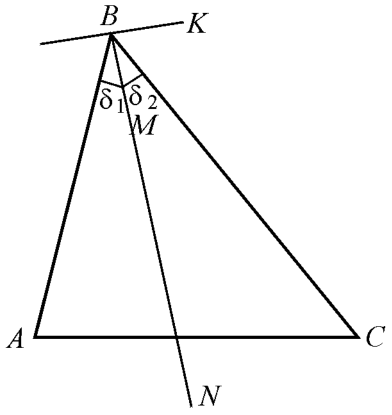
Решая эти уравнения, получим:

$$k = \frac{1}{5}, \quad y + 1 = \frac{1}{5}(x - 2), \quad 5y + 5 = x - 2, \qquad x - 5y - 7 = 0.$$

$$k = -5, \quad y + 1 = -5(x - 2), \quad y + 1 = -5x + 10, \quad 5x + y - 9 = 0.$$

Ответ: $x - 5y - 7 = 0, \qquad 5x + y - 9 = 0.$

Задача 8. В треугольнике с вершинами $A(3, -2)$, $B(-1, 1)$, $C(5, -7)$ найти биссектрису внутреннего угла $\angle ABC$.



1) Составим уравнения сторон угла $\angle ABC$, воспользовавшись формулой (41).

Сторона BA:

$$\frac{x+1}{3+1}=\frac{y-1}{-2-1},\qquad -3x-4y+1=0.$$

Сторона BC:

$$\frac{x+1}{5+1}=\frac{y-1}{-4-1},\qquad -8x-6y-2=0.$$

2) Точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Приравняем расстояния от произвольной точки биссектрисы $M(x,\,y)$ до сторон угла BA и BC, вычисляя их по формуле (45).

$$\frac{|-3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-8x-6y-2|}{\sqrt{8^2+6^2}},\qquad \frac{|-3x-4y+1|}{5}=\frac{|-8x-6y-2|}{10}.$$

Из последнего равенства получаем следующие два:

$$2(-3x-4y+1)=-8x-6y-2 \quad \text{и} \quad 2(-3x-4y+1)=-(-8x-6y-2).$$

После преобразования получаем уравнения двух прямых, которые являются биссектрисами внутреннего и внешнего углов при вершине B треугольника ABC:

$$x-y+3=0 \qquad \text{(а)}$$

и

$$x+y=0. \qquad \text{(б)}$$

Для биссектрисы внутреннего угла треугольника BN отклонения вершин треугольника A и C имеют разные знаки, а для биссектрисы внешнего угла BK – знаки отклонений одинаковы.

Найдем отклонения точек A и C от прямой (а) по формуле (40,а):

$$\delta_A=\frac{3-(-2)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}>0,\qquad \delta_C=\frac{5-(-7)+2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{2}}>0,$$

следовательно, уравнение (а) – это уравнение прямой BK. Тогда уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника ABC при вершине B:

$$x+y=0.$$

Ответ: $x+y=0$.

<u>Линии второго порядка</u>

<u>Окружность.</u> Уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (50)$$

определяет окружность радиуса R с центром $C(a,\,b)$. Если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $a=b=0$, то уравнение окружности примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{51}$$

Общее алгебраическое уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

есть уравнение окружности, если $A = C \neq 0,\quad B = 0,$ т.е.

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{52}$$

Эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ - \tag{53}$$

уравнение эллипса (канонический вид).

$$b^2 = a^2 - c^2, \qquad a > b. \tag{54}$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1(-c,\, 0) \ \text{ и } \ F_2(c,\, 0). \tag{55}$$

Начало координат $O -$ центр симметрии эллипса, а оси координат – оси симметрии эллипса. Точки $A_1(-a,\, 0)$, $A_2(a,\, 0)$, $B_1(0,\, -b)$, $B_2(0,\, b)$ называются вершинами эллипса, a и $b -$ большая и малая полуоси. Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1 \tag{56}$$

называется эксцентриситетом эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, т.к. выражается через отношение его полуосей

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\ . \tag{57}$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a = b$, т.е. $\varepsilon = 0$.

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \ - \tag{58}$$

уравнения директрис.

Если фокусы эллипса расположены на оси Oy, то уравнение эллипса имеет тот же вид (58), но $b > a$. Фокусы имеют координаты: $F_1(0,\, -c)$ и $F_2(0,\, c)$. Уравнения директрис

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}. \tag{59}$$

Гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ - \tag{60}$$

каноническое уравнение гиперболы.

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad a < c. \tag{61}$$

Фокусы имеют координаты $F_1(-c,\, 0)$ и $F_2(c,\, 0)$. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка $O -$ центр симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a,\, 0)$, $A_2(a,\, 0)$, которые называются ее действительными вершинами, а величина $a -$ действительной полуосью гиперболы. Точки $B_1(0,\, -b)$ и $B_2(0,\, b)$ называются мнимыми вершинами, а $b -$ мнимая полуось. Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{62}$$

являются асимптотами гиперболы, т.е. прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1. \tag{63}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\,. \tag{64}$$

Если $a = b$, гипербола называется равносторонней. В этом случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}\ - \tag{65}$$

директрисы гиперболы.

Если уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ , \tag{66}$$

то асимптоты гиперболы:

$$x = \pm\frac{b}{a}y, \tag{67}$$

фокусы $F_1(0,\, -c)$, $F_2(0,\, c)$.

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}\ - \tag{68}$$

уравнения директрис.

<u>Парабола.</u>

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \qquad (p > 0), \tag{69}$$

где p – расстояние от фокуса до директрисы. Уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

В ряде случаев рассматривают параболы:

а) $y^2 = -2px,\ \ F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус, $x = \frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (70)

б) $x^2 = 2py,\ \ F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ – фокус, $y = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы; (71)

в) $x^2 = -2py,\ \ F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$ – фокус, $y = \frac{p}{2}$ – уравнение директрисы. (72)

Для всех случаев $p > 0$.

Задача 9. Среди прямых параллельных прямой $2x + y = 0$, выделить касательные к окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Уравнение всякой прямой, параллельной данной, можно записать в виде

$$2x + y + c = 0.$$

Касательная к окружности имеет с ней только одну общую точку, поэтому совместное решение уравнений прямой и окружности должно иметь только один ответ.

Из уравнения прямой $y = -2x - c$.

$$\begin{cases} y = -2x - c \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \quad x^2 + (-2x - c)^2 = 1, \quad 5x^2 + 4cx + c^2 - 1 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда дискриминант равен нулю: $(4c)^2 - 4 \cdot 5 \cdot \left(c^2 - 1\right) = 0$, откуда $c = \pm\sqrt{5}$.

Итак, искомые касательные имеют уравнения

$$2x + y + \sqrt{5} = 0, \qquad 2x + y - \sqrt{5} = 0.$$

Задача 10. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

Решение. Делим на 225, получаем

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отсюда следует по формуле (53), что $a = 5,\ b = 3$. Из формулы (54):

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16, \quad c = \pm 4.$$

По формуле (55): $F_1(-4, 0),\ \ F_2(4, 0)$.

Эксцентриситет (56): $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Уравнения директрис согласно (58): $x = \pm\frac{5}{4/5} = \pm\frac{25}{4}$.

Ответ: $a = 5,\ b = 3$; $F_1(-4,\ 0),\quad F_2(4,\ 0)$; $\varepsilon = \frac{4}{5}$; $x = \pm\frac{25}{4}$.

<u>Задача 11.</u> Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая полуось $2\sqrt{6}$, а расстояние между фокусами $F_1F_2 = 8$.

<u>Решение.</u> $b = 2\sqrt{6},\quad F_1F_2 = 2c = 8,\quad c = 4.$

По формуле (54): $a^2 = b^2 + c^2$, $a^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 + 4^2 = 40,\ a = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$

Уравнение эллипса согласно (53): $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1.$

<u>Задача 12.</u> Асимптоты гиперболы имеют уравнения $4y \pm 3x = 0$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать ее каноническое уравнение.

<u>Решение.</u> Уравнения асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$, согласно формуле (62): $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$. Кроме того $F_1F_2 = 2c = 20,\ c = 10.$ По формуле (61): $c^2 = a^2 + b^2$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4} \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $a = 8,\ b = 6.$ Следовательно, каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$

<u>Задача 13.</u> Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = -1.$ Найти координаты фокусов и вершин, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

<u>Решение.</u> Фокусы данной гиперболы расположены на оси Oy.

$$a = 1,\ b = 3,\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}. \tag{61}$$

Значит фокусы имеют координаты $F_1\left(0,\ -\sqrt{10}\right),\quad F_2\left(0,\ \sqrt{10}\right).$ Вершины $A_1(0,\ -1),\ A_2(0,\ 1),\ B_1(-3,\ 0),\ B_2(3,\ 0).$ Эксцентриситет по формуле (64):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3},\quad \varepsilon = \sqrt{10}.$$

Уравнения асимптот: $x = \pm\frac{b}{a}y \quad\Rightarrow\quad x = \pm 3y.$

Уравнения директрис: $y = \pm\frac{b}{c} \;\Rightarrow\; y = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Задача 14. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(1,-2)$ и симметрична относительно оси Oy. Написать ее уравнение. Найти фокус и директрису.

Решение. Уравнение искомой параболы по формуле (72) имеет вид $x^2 = -2py$. Точка $A(1,-2)$ лежит на параболе. Подставляем координаты точки A в уравнение: $1 = -2p\cdot(-2) \;\Rightarrow\; p = \frac{1}{4}$. Следовательно, искомое уравнение будет $x^2 = -\frac{1}{2}y$ или $y = -2x^2$.

Фоку параболы: $F\left(0,-\frac{1}{8}\right)$. Уравнение директрисы согласно (72): $y = \frac{1}{8}$.

Задача 15. На параболе $y^2 = 4x$ найти точки, расстояния которых от директрисы равно 5.

Решение. Уравнение директрисы данной параболы $x = -\frac{p}{2}$, $2p = 4,\ p = 2,\ x = -1$. Тогда расстояние от оси Oy до искомой $\ell = 4 - \frac{p}{2} = 5 - 1 = 4$ точки и это расстояние определит координату x данной точки, т.е. $x = 4$. Координату y найдем из уравнения параболы:

$y^2 = 4x,\quad y^2 = 4\cdot 4 = 16,\quad y = \pm 4.$

Итак, $M_1(4,4),\ M_2(4,-4)$.

1. Пределы

Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, \ldots$ приведено в соответствие в силу некоторого закона число u_n. Тогда говорят, что определена последовательность чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots$ или, короче, последовательность $\{u_n\}$. Отдельные числа u_n называются ее элементами.

Определение 1.1. Число a называется пределом последовательности $\{u_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется зависящее от него натуральное число N такое, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство: $|u_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

<u>Определение 1.2.</u> Говорят, что функция $f(x)$ стремится к A $\left(f(x)\to A\right)$ при стремлении к a $(x \to a)$, где A и a – числа, или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Аналогично, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $|x - a| < \delta(M)$, где M – произвольное положительное число.

При вычислении пределов можно использовать следующие теоремы.
1. Если существуют конечные $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

$$а)\ \lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x)$$

$$б)\ \lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$в)\ \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \qquad \left(\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0\right).$$

2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = 0$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty,$$

если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$ (A – конечно), то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

Эти утверждения справедливы, если вместо двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взять соответственно две последовательности: $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента, часто, однако, приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразование данного выражения.

Это следует делать в тех случаях, когда имеют место так называемые неопределенности: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 0^0; 1^∞; ∞^0.

Пример 1.1. При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x\to\infty$ или n при $n\to\infty$ для последовательностей (неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$) оба члена соотношения полезно предварительно разделить на x^m или, соответственно, n^m где m – наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^2-1}{5x^4+3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}}{5+\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}}=\frac{3+0+0}{5+0+0}=\frac{3}{5},$$ старшая степень $m=4$, делится на x^4.

$$б)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{9n^4-2n^3+2}+4\sqrt[3]{8n^3+21}}{\sqrt[4]{n^4-3}+2\sqrt{4n^4+9n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{n^4\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+4\cdot\sqrt[3]{n^3\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^4\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{n^4\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2\cdot\sqrt{\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+4n\cdot\sqrt[3]{\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{n\cdot\sqrt[4]{\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2n^2\cdot\sqrt{\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{\left(9-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^4}\right)}+\frac{4}{n}\cdot\sqrt[3]{\left(8+\frac{21}{n^3}\right)}}{\frac{1}{n}\cdot\sqrt[4]{\left(1-\frac{3}{n^4}\right)}+2\cdot\sqrt{\left(4+\frac{9}{n^3}\right)}}=\frac{3\cdot\sqrt{9-0+0}+0\cdot\sqrt[3]{8+0}}{0\cdot\sqrt[4]{1-0}+2\cdot\sqrt{4+0}}=\frac{9}{4}$$

(неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$, старшая степень $m = 2,$ делится на n^2).

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x+7}\,\right]=\left[\infty\cdot(\infty-\infty)\right]=$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\left[\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+4x-7}\,\right]\cdot\left[\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}\,\right]}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\left(x^2+4x+5-x^2-4x+7\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(3x+1)\cdot 12}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2+4x-7}}\left(\frac{:x}{:x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{12\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{x^2}}} = \frac{12\cdot 3}{1+1} = 18.$$

<u>Пример 1.2.</u> Если $P(x)$ и $Q(x)$ – целые многочлены $x,$ $P(a)\neq 0$ или $Q(a)\neq 0,$ то предел рациональной дроби P/Q при $x\to a$ находится непосредственно. Если же $P(a)=Q(a)=0$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$), то дробь P/Q рекомендуется сократить один или несколько раз на $(x-a)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)\left(x^3+x^2+x-3\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

<u>Пример 1.3.</u> Одним из примеров нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt[3]{5-x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)} =$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{9-5-x}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{1}{3+\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{1-\sqrt[3]{5-x}}\cdot\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{\left(1-\sqrt[3]{5-x}\right)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{1-5+x}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)}{x-4}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 4}\left(1+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{(5-x)^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}(1+1+1)=-\frac{1}{2}.$$

б) $$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(x^2-7x-8\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x-8)(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\frac{1}{9\cdot 12}=\frac{1}{108}.$$

<u>Пример 1.4.</u> При вычислении пределов во многих случаях используют «первый замечательный предел»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

следствием которого являются пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arxtgx}{x}=1.$$

а) $$\lim_{x\to 0}\left[ctg^2 3x-ctg^2 5x\right]\cdot\frac{tg^2 4x\cdot\arcsin^2 x}{x^2}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{cos^2 3x}{sin^2 3x}-\frac{cos^2 5x}{sin^2 5x}\right]\cdot\frac{\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2\cdot 16x^2\cdot\left(\frac{arcsin x}{x}\right)^2\cdot x^2}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}16x^2\cdot\left[\frac{cos^2 3x}{sin^2 3x}-\frac{cos^2 5x}{sin^2 5x}\right]\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg4x}{4x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{arcsin x}{x}\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{cos^2 3x\cdot 16x^2}{\left(\frac{sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 9x^2}-\frac{cos^2 5x\cdot 16x^2}{\left(\frac{sin 5x}{5x}\right)^2\cdot 25x^2}\right]\cdot 1^2\cdot 1^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{16}{9}cos 3x-\frac{16}{25}cos^2 5x\right]=\frac{16}{9}\cdot 1-\frac{16}{25}\cdot 1=\frac{256}{225}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 2x\cdot\sqrt{1-cos 4x}}{x^2\cdot arcsin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2\cdot 4x^2\cdot\sqrt{2 sin^2 2x}}{x^2\cdot\left(\frac{arcsin 3x}{3x}\right)\cdot 3x}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg2x}{2x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}\,sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sqrt{2}\left(\frac{sin 2x}{2x}\right)\cdot 2x}{3x}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

<u>Пример 1.5.</u> При вычислении предела выражения, содержащего тригонометрические функции, когда $x\to a$ и $a\neq 0,$ рекомендуется предварительно провести замену $x-a=y.$

$$\lim_{x\to 3}\frac{cos\frac{\pi\cdot x}{6}}{x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=(x-3=y,\ y\to 0 \text{ при } x\to 3)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{cos\frac{\pi\cdot(y+3)}{6}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot cos\left(\frac{\pi\cdot y}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\pi}{6}\cdot sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}}=$$

$$=-\frac{\pi}{6}\lim_{y\to 0}\frac{sin\frac{\pi\cdot y}{6}}{\frac{\pi\cdot y}{6}}=-\frac{\pi}{6}\cdot 1=-\frac{\pi}{6}.$$

<u>Пример 1.6.</u> При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=c$ необходимо иметь в виду, что

1) если существуют конечные пределы $A=\lim\limits_{x\to a} f(x),\ B=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x),$ то $c=A^B\ \ (A>0);$

2) если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\neq 1,\ \ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\pm\infty,$ то вопрос о нахождении предела c решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1,\ \ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty,$ то следует воспользоваться «вторым замечательным пределом»: $\lim\limits_{x\to a}\left(1+g(x)\right)^{\frac{1}{g(x)}}=e,$ где $g(x)\to 0$ при $x\to a$ и $e=2{,}718\ldots$.

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty}=\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}}=0,\ \text{т.к.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}=\frac{3}{2},\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=-\infty.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{x+3}=4^3=64,\ \text{т.к.}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)\cdot 4=4,$$
$$\lim_{x\to 0}(x+3)=3.$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{2x}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}\cdot\frac{7}{3x-6}\cdot 2x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{14x}{3x-6}}=e^{14/3}.$$

г) $$\lim_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{3}{x-3}}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to 3}\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{3}{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left\{\left[1+(6-2x)\right]^{\frac{1}{6-2x}}\right\}^{\frac{(6-2x)\cdot 3}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{18-6x}{x-3}}=e^{-6}.$$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

<u>Определение 2.1.</u> Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,$ то функция $f(x)$ называется бесконечно малой в окрестности точки $x = a$ (при $x \to a$).

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть также бесконечно малая при $x \to a$.

<u>Определение 2.2.</u> Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$ и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c,$ где c – некоторое число, отличное от нуля, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$, если $c = 0,$ то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$.

Бесконечно малая $f(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с $g(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g^n(x)} = c, \qquad 0 < |c| < +\infty.$$

<u>Пример 2.1.</u> При $x \to 0$ определить порядок малости функции $tgx - sinx$ относительно x.

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx - sinx}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx\left(\dfrac{1}{cosx} - 1\right)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx(1 - cosx)}{x^n\, cosx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2sinx \cdot sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^n\, cosx} = \lim_{x\to 0} \frac{4sin^3 \dfrac{x}{2} \cdot cos\dfrac{x}{2}}{x^n\, cosx} = 4\lim_{x\to 0} \frac{sin^3 \dfrac{x}{2}}{x^n} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{cos\dfrac{x}{2}}{cosx} =$$

$$= 4\lim_{x\to 0} \frac{sin^3 \dfrac{x}{2}}{x^n} \cdot 1 = 4\lim_{x\to 0} \frac{sin^3 \dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n \cdot 2^n} = \frac{4}{2^n} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sin^3 \dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n}.$$

Этот предел будет равен константе $c \neq 0$ при $n = 3,$ следовательно, функция $tgx - sinx$ имеет порядок малости $n = 3$ относительно x при $x \to 0$.

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

<u>Пример 2.2.</u> Определить порядок малости относительно x при $x \to 0$ суммы $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}$.

Слагаемое $\sqrt[3]{x^2}$ имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x, а слагаемое $\sqrt{x^3}$ – порядок $\frac{3}{2}$, следовательно, сумма имеет порядок малости $\frac{2}{3}$ относительно x при $x \to 0$.

<u>Определение 2.3.</u> Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$: $f(x) \sim g(x)$.

Например, при $x \to 0$ будем иметь:

$$sin x \sim x, \quad tgx \sim x, \quad arcsin x \sim x, arctgx \sim x,$$

$$ln(1+x) \sim x, \quad cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \cdot ln a \ (a \neq 1).$$

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить эквивалентными им величинами.

<u>Пример 2.3.</u>

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{3^{4tg^2x} - 5^{3arcsin^2 3x}}{3sin^2 4x + 7arctg^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3^{4tg^2x} - 1\right) - \left(5^{3arcsin^2 x} - 1\right)}{3\cdot(4x)^2 + 7\cdot(x)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4tg^2 x \cdot ln3 - 3arcsin^2 3x \cdot ln5}{55x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4\,ln3\cdot x^2 - 3\,ln5\cdot(3x)^2}{55x^2} =$$

$$= \frac{4\,ln3 - 27\,ln5}{55}.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4arcsin2x}{3tg8x}\right)^{\frac{ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4\cdot 2x}{3\cdot 8x}\right)^{\frac{3x}{x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{ln(3-5x) - ln(3+7x)}{2sinx} = \lim_{x\to 0}\frac{ln\left[3\left(1-\frac{5}{3}x\right)\right] - ln\left[3\left(1+\frac{7}{3}x\right)\right]}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{ln3 + ln\left(1-\frac{5}{3}x\right) - ln3 - ln\left(1+\frac{7}{3}x\right)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{3}x - \frac{7}{3}x}{2x} = -2.$$

Определение 2.4. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$.

Подобно тому, как .то сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

Пример 2.4. Пусть $x\to\infty$. Определить порядок бесконечно большой $f(x)=\dfrac{x^5}{x+2}$ по сравнению с x.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^5}{x+2}:x^n\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^n(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}+x^n\cdot 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^{n+1}}=1$$

при $n=4$.

Определение 2.5.

1) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x\to\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{c\cdot x^{\alpha}}=1$, где c и α – константы, тогда функция $y=cx^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x\to\infty$.

2) Пусть функция $f(x)$ – бесконечно большая или бесконечно малая при $x\to a$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{c\cdot(x-a)^{\alpha}}=1$, где c и α – константы, тогда функция $y=c(x-a)^{\alpha}$ называется асимптотикой или асимптотически эквивалентной функции $f(x)$ при $x\to a$.

Пример 2.5.

а) Найти асимптотику (асимптотическое представление) функции $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to\infty$.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\sim\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\cdot x^{1/2}},$$

следовательно, асимптотикой функции $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ при $x\to\infty$ является функция $\dfrac{1}{2}x^{-1/2}$; $c=\dfrac{1}{2}$; $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

б) Найти асимптотику функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ при $x\to 1$.

При $x\to 1$ функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ является бесконечно большой:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{3(1-x)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}(1-x)^{1/3}}.$$

Асимптотикой в данном случае является функция $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}(1-x)^{-1/3}$.

в) Найти асимптотику функции $f(x)=x^3-3x+2$ при $x\to 1$.

В данном случае при $x\to 1$ функция $f(x)$ является бесконечно малой;

$$f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\sim 3(x-1)^2.$$

Получаем асимптотику $y=3(x-1)^2$; $c=3$; $\alpha=2$.

3. Непрерывность функции.

Определение 3.1. Если $x<a$ и $x\to a,$ то условно пишут $x\to a-0,$ аналогично, если $x>a$ $x\to a,$ то $x\to a+0$. Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ называют соответственно пределом слева функции $f(x)$ в точке a и пределом справа функции $f(x)$ в точке a (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство: $f(a-0)=f(a+0)$.

Определение 3.2. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке a, если

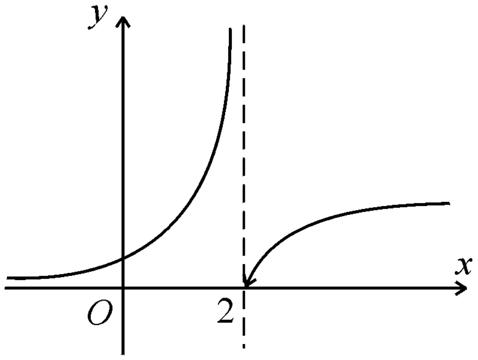
1) она определена в этой точке;
2) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются точками разрыва.

Пример 3.1.

а) Найти точки разрыва функции $y=3^{\frac{1}{2-x}}$, пределы слева и справа в этих точках, сделать схематический чертеж.

Функция $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ имеет разрыв в точке $x = 2,$ т.к. она в этой точке не определена. При этом:



$$\lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

б) Найти точки разрыва и величину скачка в этих точках функции

$$y = \frac{2^{\frac{1}{x+3}} + 4x - 8}{2^{\frac{1}{x+3}} + 4}.$$

Точкой разрыва данной функции является точка $x = -3,$ т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to -3-0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = \frac{2^{-\infty} - 12 - 8}{2^{-\infty} + 4} = \frac{0 - 20}{0 + 4} = -5;$$

$$\lim_{x\to -3+0} \frac{2^{1/(x+3)} + 4x - 8}{2^{1\backslash(x+3)} + 4} = 1,$$ т.к. при $x \to -3 + 0$ имеем:

$$2^{1/(x+3)} + 4x - 8 \sim 2^{1/(x+3)}; \qquad 2^{1/(x+3)} + 4 \sim 2^{1/(x+3)}.$$

Величина скачка $\Delta = 1 - (-5) = 6.$

в) Найти точки разрыва, величину скачка Δ и построить график функции

$$y = \begin{cases} -3x, & x \le 0 \\ 4\sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ x^2 + 1, & \dfrac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

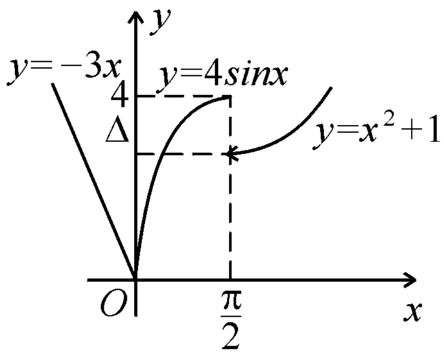
Данная функция непрерывна для $x \in (-\infty;\ 0) \cup \left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2};\ +\infty\right).$

Исследуем только точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{2},$ т.к. в них меняется аналитическое выражение функции.

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}(-3x) = 0; \qquad \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}(4\sin x) = 0;$$

$f(0) = -3x\big|_{x=0} = 0,$ следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(4\sin x) = 4; \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\sin\frac{\pi}{2} = 4;$$



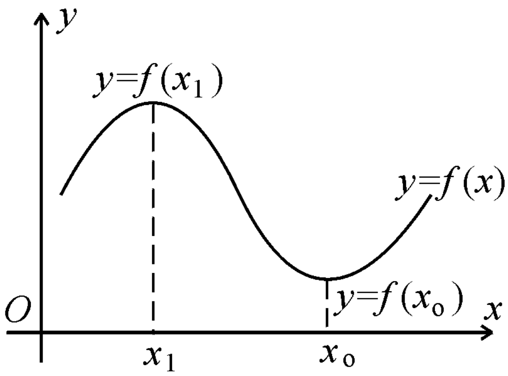
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\left(x^2+1\right) = \frac{\pi^2}{4}+1 = 3{,}467,$$ следовательно, точка $x = \frac{\pi}{2}$ – точка разрыва. Величина скачка

$$\Delta = 4 - \left(\frac{\pi^2}{4}+1\right) = 3 - \frac{\pi^2}{4} \approx 0{,}533.$$

§ 1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек $x_1,\ x_2$, принадлежащих данному интервале (отрезку), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ при $a < x < b$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a;\ b]$.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (промежутков монотонности). Эти промежутки ограничены критическими точками x (где $f'(x) = 0$ или же $f'(x)$ не существует).



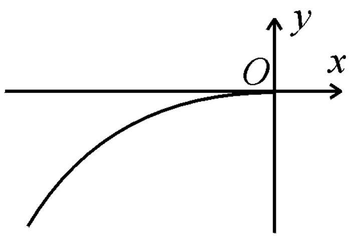
Если существует такая двусторонняя окрестность точки x_o, что для всякой точки $x \neq x_o$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_o)$, то точка x_o называется точкой минимума функции $y = f(x)$, а число $f(x_o)$ – минимумом функции $y = f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_1$ некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то x_1 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, а $f(x_1)$ – максимумом функции. Точка минимума или максимума функции называется ее точкой экстремума, а минимум или максимум функции – экстремумом функции. Если x_o – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_o) = 0$ или же $f'(x_o)$ не существует (*необходимое условие существования экстремума*). Обратное утверждение не верно: точки, в которых $f'(x_o) = 0$ или $f'(x_o)$ не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$.

Достаточный признак существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ следующий: если существует такая окрестность $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ критической точки x_o, что $f'(x) > 0$ при $x_o - \delta < x < x_o$ и $f'(x) < 0$ при $x_o < x < x_o + \delta$, то x_o – точка максимума функции $f(x)$; если же $f'(x) < 0$ при $x_o - \delta < x < x_o$ и $f'(x) > 0$ при $x_o < x < x_o + \delta$, то x_o – точка минимума функции $f(x)$.
Если, наконец, найдется такое положительное число δ, что $f'(x)$ сохраняет неизменный знак при $x_o - \delta < x < x_o + \delta$, то точка x_o не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Наименьшее (*наибольшее*) *значение* непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a; b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a; b]$.

Пример 1.1. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции
$$y = x \cdot \sqrt{-5x}.$$

Область существования: $-5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0.$



Находим критические точки:

$$y' = \sqrt{-5x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{-5x}} \cdot (-5) = \sqrt{-5x} - \frac{5x}{2\sqrt{-5x}} =$$

$$= \frac{-10x - 5x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{-15x}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3 \cdot (-5x)}{2\sqrt{-5x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{-5x} \geq 0.$$

При $x \leq 0$ функция всегда возрастает и принимает наибольшее значение в критической точке $x = 0$: $y(0) = 0$.

Пример 1.2. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции
$$y = \sqrt[3]{(x+1)(2-x)^2}.$$

Область существования: $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Находим критические точки:

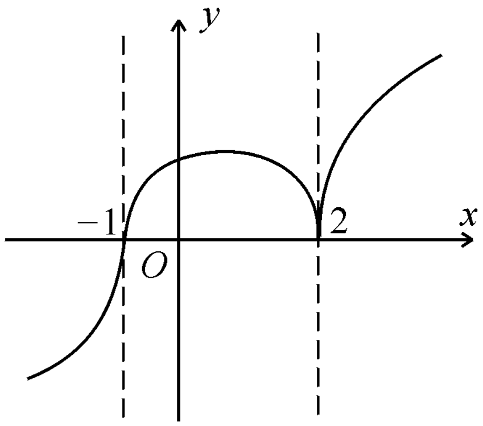
$$y' = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x)(x+1)}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{(2-x)(2-x-2x-2)}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)^4}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}},$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,$

y' не существует $\Rightarrow x_2 = -1;\ x_3 = 2.$ Получили три критические точки.

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ +\infty)$
y'	+	не сущ.	+	0	–	не сущ.	+
y	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$\lim_{x\to 2+0} y'(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = +\infty; \quad \lim_{x\to 2-0} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(2-x)}} = -\infty.$$



$$\lim_{x\to 1-0} y'(x) = \lim_{x\to 1+0} y'(x) = +\infty.$$

Так как $y'(x) = k,$ где $k -$ угловой коэффициент касательной, то при $x = -1$ и $x = 2$ касательная к графику функции перпендикулярна оси Ox.

$y(-1) = 0; \quad y(0) = \sqrt[3]{4}; \quad y(2) = 0.$

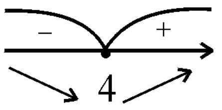
Пример 1.3. Найти глубину открытого бассейна с квадратным дном и объемом 256 м^3 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Пусть $a -$ сторона квадрата основания, $h -$ глубина бассейна;

$$a^2 h = 256 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{256}{h}, \quad a = \frac{16}{\sqrt{h}}, \quad h > 0;$$

$$S = S_{бок} + S_{дна} = 4ah + a^2 = 4\cdot\frac{16}{\sqrt{h}}\cdot h + \frac{256}{h} = 64\sqrt{h} + \frac{256}{\sqrt{h}} = F(h);$$

$$F'(h) = \frac{64}{2\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32}{\sqrt{h}} - \frac{256}{h^2} = \frac{32h^{3/2} - 256}{h^2} = \frac{32}{h^2}\left(h^{3/2} - 8\right);$$



$F'(h)=0 \;\Rightarrow\; h^{3/2}=8; \quad h=4$. При $h=4$ величина $F(h)=S$ будет наименьшей.

<u>Пример 1.4.</u> Две прямые железные дороги AA_1 и BB_1 перпендикулярны друг к другу и пересекаются в пункте C, причем $AC=800$ км и $BC=700$ км. Из пунктов A и B по направлению к C одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно 80 км/ч и 60 км/ч. Через сколько часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим ?

Отметим положение поездов в момент $t>0$ точками K и M.

$AK=80t; \quad BM=60t;$

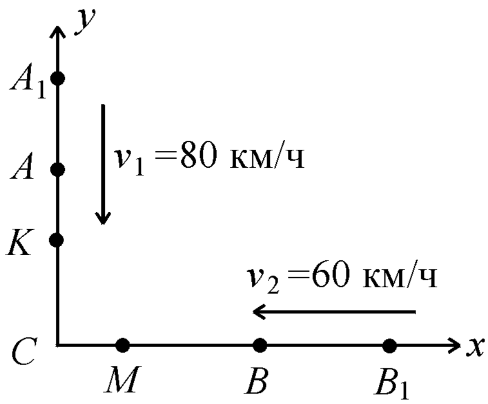
$CK=AC-AK=800-80t;$

$CM=CB-BM=700-60t;$

$(KM)^2=(CK)^2+(CM)^2=$

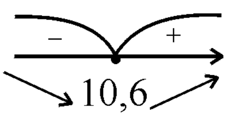
$=(800-80t)^2+(700-60t)^2;$ KM минимально, если минимальна величина

$(KM)^2=F(t)=(800-80t)^2+(700-60t)^2;$



$F(t)=2(800-80t)\cdot(-80)+2(700-60t)\cdot(-60)=$

$=-128000+12800t-84000t+7200t=20000t-212000=0; \quad t=10{,}6;$



$t=10{,}6$ – точка минимума функции $F(t)$. Через $10{,}6$ часов после отправления расстояние между поездами будет наименьшим.

§ 2. АСИМПТОТЫ

Если точка $(x;\ y)$ непрерывно перемещается по кривой $y=f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

Если существует число a такое, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-k_1x\right]=b_1$, то прямая $y=k_1x+b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная асимптота*).

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k_2$ и $\lim\limits_{x\to-2}\left[f(x)-k_2x\right]=b_1$, то прямая $y=k_2x+b_2$ будет асимптотой (*левая наклонная асимптота*).

График функции $y=f(x)$ не может иметь более одной правой и более одной левой асимптоты.

Пример 2.1. Найти асимптоты и построить график функции

$$y=2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}.$$

Область существования: $x\neq1.$

Ищем вертикальные асимптоты.

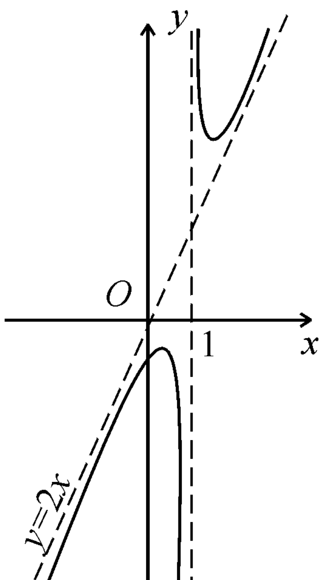
Функция имеет разрыв в точке $x=1,$ т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to1-0}\left(2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}\right)=2+\frac{3\cdot1}{-0}=2-\infty=-\infty;$$

$$\lim_{x\to1+0}\left(2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}\right)=2+\frac{3\cdot1}{+0}=2+\infty=+\infty;$$

следовательно, $x=1$ – вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты в виде $y=kx+b.$



$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\left(2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}\right)=$$

$$=2+0=2;\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[2x+\frac{3\cos(x-1)}{x-1}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3\cos(x-1)}{x-1}=0.$$

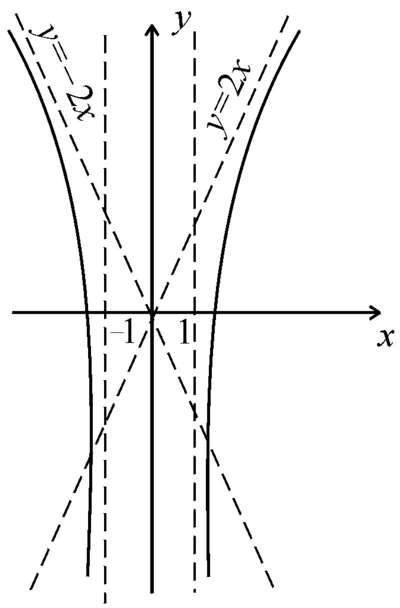
Следовательно, при $x\to\pm\infty$ существует асимптота $y=2x.$

Пример 2.2. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}.$

Область существования: $x^2-1>0;\quad x^2>1;\quad x>1$ и $x<-1.$

$$y=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}};\quad y(-x)=\frac{2(-x)^2-9}{\sqrt{(-x)^2-1}}=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}\quad\Rightarrow\quad y(x)=y(-x),$$

следовательно, данная функция четная, и можно построить ее график только при $x>1,$ а затем отразить его симметрично относительно оси Oy.



$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2-9}{+0}=-\infty\quad\Rightarrow\quad x=1-$$

вертикальная асимптота при $x\to 1+0.$

Пусть $x\to 1+\infty.$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9}{x^2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{9}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=2.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9-2x\cdot\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x^2-9\right)^2-4x^2\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(2x^2-9+2x\cdot\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-32x^2+81}{x^3\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(2-\frac{9}{x^2}+2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=0.$$

При $x\to+\infty$ получаем асимптоту $y=2x$. График данной функции пересекает ось Ox при $2x^2-9=0,$ т.е. в точках $x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Пример 2.3. Найти асимптоты и построить график функции

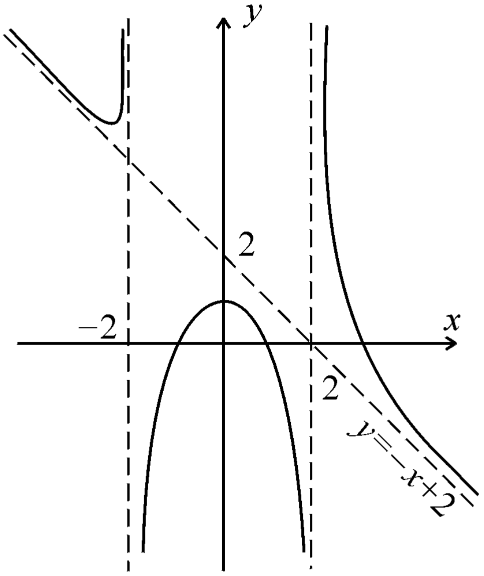
$$y=\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}.$$

Область существования: $4-x^2\neq 0\quad\Rightarrow\quad x\neq 2$ и $x\neq -2$.

В точках $x_1=-2$ и $x_2=+2$ функция терпит разрыв, т.к. в них она не определена.

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{-8-8+6+2}{-0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -2+0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{-8-8+6+2}{+0}=-\infty;$$



$x=-2$ – вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{8-8-6+2}{+0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}=\frac{8-8-6+2}{-0}=+\infty;$$

$x=2$ – вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x\to\pm\infty$ ищем в виде: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2-3x+2}{x\left(4-x^2\right)}=$$

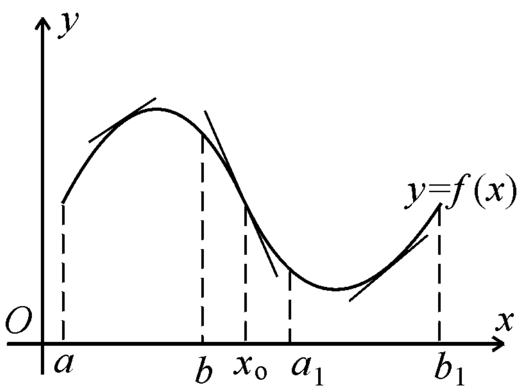
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{1}{-1}=-1;\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x^2-3x+2}{4-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+x+2}{4-x^2}=2.$$

При $x\to\pm\infty$ получаем асимптоту $y=-x+2$.

§ 3. НАПРАВЛЕНИЕ ВОГНУТОСТИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Говорят, что график дифференцируемой функции $y=f(x)$ *вогнут вниз* на интервале $(a;\ b)$ (*вогнут вверх* на интервале $(a_1;\ b_1)$), если при $a<x<b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при $a_1<x<b_1$ выше) касательной, проведенной в любой точке интервала $(a;\ b)$ (или интервала $(a_1;\ b_1)$).



Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y=f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства

$$f'(x)<0\qquad \left(f'(x)>0\right).$$

Точка $\left(x_o,\ f\left(x_o\right)\right)$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба.* Для абсциссы точки перегиба x_o

графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_o) = 0$ или $f''(x_o)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками* 2-*го рода.* Критическая точка 2-го рода x_o является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_o - \delta < x < x_o$ и $x_o < x < x_o + \delta$, где δ – некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

Пример. Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба кривой $y = e^{-x^2}$.

Имеем: $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = \left(4x^2 - 2\right)e^{-x^2}$. Приравняв вторую производную к нулю, найдем критические точки второго рода: $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Эти точки разбивают всю область существования функции $(-\infty;\ +\infty)$ на три интервала.

x	$\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	–
y	$\cup$	перегиб	$\cap$	перегиб	$\cup$

Получили: кривая вогнута вверх при $x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$ и вогнута вверх при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ – точки перегиба.

□ 4. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

При построении графика функции следует, прежде всего, найти область существования этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области существования. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются): четность, периодичность и т.д.

Далее нужно найти точки разрыва, асимптоты, точки экстремума функции, точки перегиба и т.д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции.

Пример 4.1. Провести полное исследование и построить график функции $y = x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Область существования: $x \in (-\infty; \quad +\infty)$.

$y(x) \neq y(-x) \Rightarrow$ функция общего вида.

Так как функция определена при всех x, и у нее нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x+2)^2} = +\infty,$$ следовательно, наклонных асимптот также нет.

Исследуем функцию по первой производной.

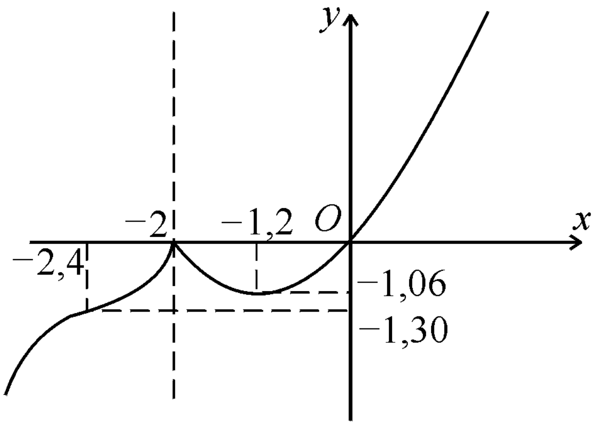
$$y' = \left[x \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}\right] = (x+2)^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{-1/3} = \frac{3(x+2)+2x}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{5x+6}{\sqrt[3]{x+2}}.$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 6 = 0, \quad x = -1{,}2;$

y' не существует $\quad \Rightarrow \quad x + 2 = 0, \quad x = -2.$

x	$(-\infty; \ -2)$	-2	$(-2; \ -1{,}2)$	$-1{,}2$	$(-1{,}2; \ +\infty)$
y'	+	не сущ.	–	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

$y_{max} = y(-2) = 0$ (касательная в этой точке перпендикулярна оси Ox).



$y_{min} = y(-1{,}2) = -1{,}2 \cdot \sqrt[3]{0{,}64} \approx -1{,}06$

(касательная в этой точке параллельна оси Ox).

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = \left[\frac{5x+6}{(x+2)^{2/3}}\right] = $$

$$= \frac{5 \cdot \sqrt[3]{x+2} - (5x+6) \cdot \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

$$= \frac{15(x+2) - (5x+6)}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}} = \frac{10x+24}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

$y'' = 0$ при $x = -2{,}4$; y'' не существует при $x = -2$.

x	$(-\infty;\ -2{,}4)$	$-2{,}4$	$(-2{,}4;\ -2)$	-2	$(-2;\ +\infty)$
y''	$-$	0	+	не сущест.	+
y	$\cap$	перегиб	$\cup$		$\cup$

$$y_{перегиба} = y(-2{,}4) = -2{,}4 \cdot \sqrt[3]{(-2{,}4)^2} \approx -1{,}30; \qquad y(0) = 0.$$

Пример 4.2. Провести полное исследование и построить график функции $y = \left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^2$.

Область существования: $x \neq -2$.

$y(x) \neq y(-x) \;\Rightarrow$ функция общего вида.

$x = -2$ − точка разрыва, т.к. в ней функция не определена.

$$\lim_{x\to 2-0}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \left(\frac{4+1}{-0}\right)^2 = +\infty; \qquad \lim_{x\to 2+0}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = \left(\frac{4+1}{+0}\right)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow \; x = 2$ − вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты при $x \to \pm\infty$ ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2 = 4.$$

При $x \to \pm\infty$ получаем асимптоту $y = 4$.

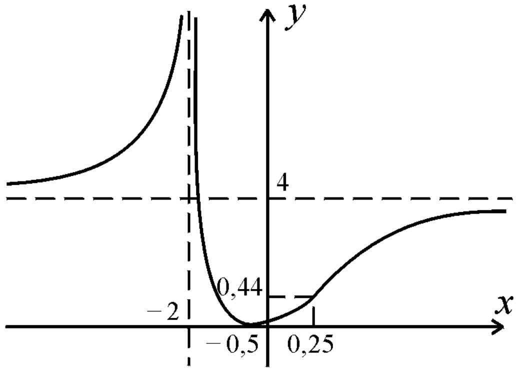
Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = 2\cdot\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)\cdot\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{6(2x+1)}{(x+2)^2};$$

$y' = 0 \;\Rightarrow\; 2x+1 = 0,\;\; x = -0{,}5;$

y' не существует $\;\Rightarrow\; x = -2$.

x	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ -0{,}5)$	$-0{,}5$	$(-0{,}5;\ +\infty)$
y'	+	$-$	0	+
y	$\nearrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$



$y_{min} = y(-0{,}5) = 0.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = 6 \cdot \frac{2(x+2)^3 - 3(x+2)^2 \cdot (2x+1)}{(x+2)^6} =$$

$$= 6 \cdot \frac{2(x+2) - 3(2x+1)}{(x+2)^4} = \frac{6(1-4x)}{(x+2)^4};$$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 4x = 0; \quad x = 0{,}25;$

y'' не существует $\quad \Rightarrow \quad x = -2.$

x	$(-\infty;\ -2)$	$(-2;\ \ 0{,}25)$	$0{,}25$	$(0{,}25;\ \ +\infty)$
y''	$+$	$+$	0	$-$
y	$\cup$	$\cup$	перегиб	$\cap$

$$y_{перегиба} = y(0{,}25) = \left(\frac{1{,}5}{2{,}25}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

<u>Пример 4.3.</u> Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \frac{e^{x-3}}{x-3}.$$

Область существования: $x - 3 \neq 0; \quad x \neq 3.$

$y(x) \neq y(-x)$ − функция общего вида.

В точке $x = 3$ функция терпит разрыв, т.к. в ней она не определена.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 3-0} \frac{e^{x-3}}{x-3} &= -\infty, \\ \lim_{x \to 3+0} \frac{e^{x-3}}{x-3} &= +\infty \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = 3 \ - \text{ вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

1) $x \to +\infty,$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2 - 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{\left(x^2 - 3x\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3}}{2x - 3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{(2x-3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{2} = +\infty,$$ следовательно, при $x \to +\infty$

наклонных асимптот нет.

2) $x \to -\infty,$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2-3x} = \frac{0}{+\infty} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x-3} = 0,$$

при $x \to -\infty$ получаем асимптоту $y = 0$.

Исследуем функцию по первой производной.

$$y' = \left(\frac{e^{x-3}}{x-3}\right)' = \frac{e^{x-3}\cdot(x-3) - e^{x-3}}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-3-1}{(x-3)^2} = e^{x-3}\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2},$$

$y' = 0 \;\Rightarrow\; x - 4 = 0,\; x = 4;$ $\qquad y'$ не существует $\;\Rightarrow\; x = 3.$

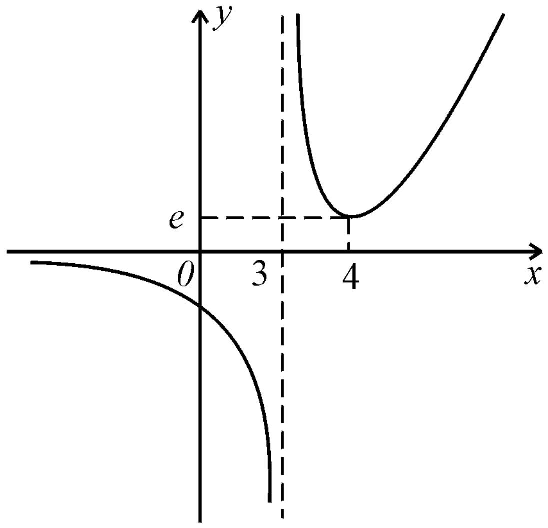
x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ 4)$	4	$(4;\ +\infty)$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$y_{min} = y(4) = e \approx 2{,}72.$

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = e^{x-3}\cdot\frac{x-4}{(x-3)^2} + e^{x-3}\cdot\frac{(x-3)^2 - (x-4)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{e^{x-3}}{(x-3)^2}\cdot\frac{x^2-7x+12-x+5}{x-3} = \frac{e^{x-3}\cdot\left(x^2-8x+17\right)}{(x-3)^3}; \qquad y'' \neq 0;$$



y'' не существует $\Rightarrow$ $x = 3.$

x	$(-\infty;\ 3)$	$(3;\ \ +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

$$y(0) = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \approx -,02.$$

<u>Пример 4.4.</u> Провести полное исследование и построить график функции $y = ln\dfrac{x+6}{x} - 1.$

Область существования: $\dfrac{x+6}{x} > 0.$

$x > 0,\ \ x < -6.$

Функция общего вида.

$$\lim_{x\to -6-0}\left[ln\frac{x+6}{x} - 1\right] = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = -6 \ - \text{ вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x\to -+0}\left[ln\frac{x+6}{x} - 1\right] = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = -0 \ - \text{ вертикальная асимптота.}$$

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b.$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ln\dfrac{x+6}{x} - 1}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[ln\frac{x+6}{x} - 1\right] = -1.$$

При $x \to \pm\infty$ получаем асимптоту $y = -1.$

Исследуем функцию по первой производной.

x	$(-\infty;\ \ -6)$	$(0;\ \ +\infty)$
y'	$-$	$-$
y	$\searrow$	$\searrow$

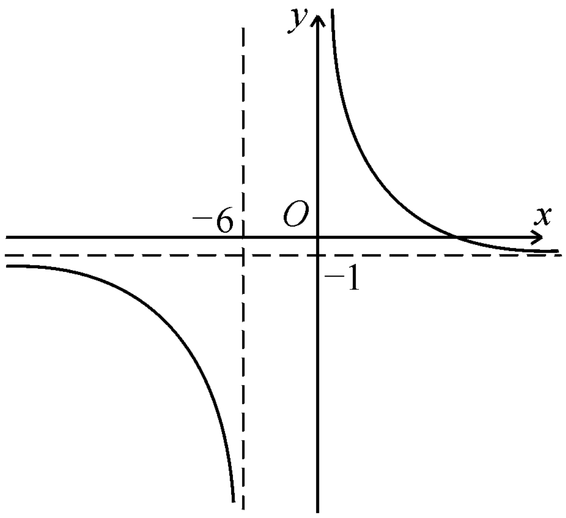
$$y' = \frac{x}{x+6}\cdot\frac{x-x-6}{x^2} = \frac{-6}{x(x+6)} \neq 0.$$

Экстремумов у функции нет.

Исследуем функцию по второй производной.

$$y'' = -6 \cdot \frac{-(x+6+x)}{x^2(x+6)^2} = \frac{6(2x+6)}{x^2(x+6)^2} = \frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2};$$

$y'' = 0 \;\Rightarrow\; x+3=0;\quad x=-3$ – не входит в область существования.



x	$(-\infty;\ -6)$	$(0;\ +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

Точек перегиба нет.

$$ln\frac{x+6}{x} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{6}{e-1};$$

$$y\left(\frac{6}{e-1}\right) = 0.$$