МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой
__________________________М.В. Грязев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических (семинарских) занятий по дисциплине (модулю)
«Вариационное исчисление и оптимальное управление»

основной профессиональной образовательной программы высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Горбачев Д.В., профессор каф. ПМиИ, д.ф.-м.н.

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание) *(подпись)*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Занятие 1. Изопериметрическая задача. Дифференциальные уравнения вариационного исчисления 4

Занятие 2. Решение простейших задач вариационного исчисления . . 7

Занятие 3. Решение вариантов простейшей задачи. Задачи о минимальной поверхности и распространении лучей света 9

Занятие 4. Решение простейших векторных задач. Задачи со старшими производными 13

Занятие 5. Задачи на достаточные условия экстремума 16

Занятие 6. Решение задач Больца 17

Занятие 7. Решение изопериметрических задач 18

Занятие 8. Решение задач с подвижными границами и дифференциальными связями 20

Занятие 9. Решение задач Лагранжа 21

Занятие 10. Решение задач оптимального управления 24

Занятие 11. Решение вариационных задач прямыми методами 27

Список литературы 28

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Вариационное исчисление и оптимальное управление» является изучение теории экстремальных задач вариационного типа, знакомство с численными методами их решения и приложениями.

Задачами освоения дисциплины являются:

— изучение теории и методов решения вариационных задач;

— освоение численных методов решения простейших вариационных задач;

— знакомство с прикладными задачами вариационного типа.

Занятие 1

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.1. Введение

Предлагаются задачи вариационного исчисления и оптимального управления для практических занятий. Теорию и примеры решений задач см. в конспекте:

Горбачев Д.В. Конспект лекций по дисциплине «Вариационное исчисление и оптимальное управление». — Тула, 2013.

Также много задач с указанием физического смысла и подробными примерами решений имеются в следующих источниках:

Краснов М.Л.. Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. 2-е изд., испр. — М.: УРСС, 2002;

Галеев Э.М., *Тихомиров В.М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи. — М.: Эдиториал УРСС, 2000; см. также список литературы к конспекту лекций.

Отметим, что многие авторы обозначают неизвестные функции через $y(x)$. Мы придерживаемся обозначения $x(t)$.

1.2. Предварительные сведения

Изопериметрическая задача. Среди всех замкнутых плоских кривых фиксированной длины (периметра) найти кривую, ограничивающую наибольшую площадь.

Я. Штейнера было предложено элегантное решение, состоящее из следующих простых утверждений:

1) искомая кривая выпуклая;

2) любая хорда, делящая периметр искомой кривой пополам, делит площадь пополам;

3) все хорды, делящие периметр искомой кривой пополам, пересекаются в одной точке и равны. Отсюда следует, что искомая кривая — окружность.

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений, встречающихся в ВИ

Далее $x(t)$ — неизвестная функция, x', x'' и т. п. — ее производные.

1. $x'' = 0, \quad x(0) = 0,\; x(1) = 1;$
2. $x'' + x = 2\cos t, \quad x(0) = x(\pi/2) = 0;$
3. $x'' - x = 2\operatorname{sh} t, \quad x(0) = 0,\; x(2) = 2\operatorname{ch} 2;$
4. $t^2x'' + 2tx' - 12x = 0, \quad x(0) = 0,\; x(1) = 1;$
5. $x\sqrt{1 + x'^2} = C$, где C — произвольная постоянная;
6. $\sqrt{x}\,\sqrt{1 + x'^2} = C;$
7. $x^{(4)} - 24x = 0;$
8. $\begin{cases} x_1'' + x_2 = 0, \\ x_2'' + x_1 = 0, \end{cases} \; x_1(0) = x_2(0) = 0,\; x_1(1) = -x_2(1) = \operatorname{sh} 1;$
9. Найти производную по T от функции

$$f(T) = T^2 + \int\limits_{-T}^{T} (T - t)x(t)\,dt + x(-T).$$

Занятие 2

РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Найти экстремали в следующих задачах.

1. $\int\limits_1^2 (x'^2 + 2xx' + x^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(1) = 1,\ x(2) = 0;$

2. $\int\limits_0^\pi (x'^2 - x^2 + 4x\cos t)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = x(\pi) = 0;$

3. $\int\limits_0^1 (x'^2 + x^2 + 4x\,\mathrm{sh}\,t)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1;$

4. $\int\limits_0^1 (t^2x'^2 + 12x^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = -1;$

5. $\int\limits_0^1 (e^x + tx')\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 2.$

Принцип Гамильтона в простейшем случае. Пусть точка с массой m может двигаться по оси x, причем в процессе движения в момент времени t на точку действует сила $f(x,t)$. В начальном и конечном положениях

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Тогда закон $x(t)$ движения точки удовлетворяет уравнению Ньютона

$$mx'' = f(x,t).$$

Обозначим $U(x,t) = -\int\limits_{x_0}^{x} f(y,t)\,dy$ — потенциал силового поля, $T = \dfrac{mx'^2}{2}$ — кинетическую энергию точки. Тогда уравнение Ньютона можно записать в виде

$$-\frac{d}{dt}T_{x'} - U_x = 0.$$

Поскольку U не зависит от x', а T — от x, то последнее уравнение можно записать в виде

$$-\frac{d}{dt}L_{x'} + L_x = 0,$$

где $L(t, x, x') = T - U$ — функция Лагранжа механической системы (в данном случае состоящей из одной точки). Пришли к уравнению Эйлера для функционала $\int\limits_{t_0}^{t_1} L\,dt$, называемого в механике действием.

Таким образом, дифференциальный закон движения Ньютона равносилен следующему: если заданы начальное и конечное состояния системы, то среди всех законов движения реализуется закон, отвечающий допустимой экстремали действия. В этом состоит принцип Гамильтона в простейшем случае.

Линейный осциллятор. В этом случае $f = -kx$, где k — коэффициент упругости. Считая, что в начальный момент $x(0) = 0$ получаем, что $U = \frac{kx^2}{2}$ и $L = \frac{1}{2}(mx'^2 - kx^2)$.

Задача. Найти экстремали для линейного осциллятора.

Занятие 3

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТОВ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ. ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И РАСПРОСТРАНЕНИИ ЛУЧЕЙ СВЕТА

Пример 1. Рассмотрим задачу о наименьшем сопротивлении потоку. Она заключается в определении формы твердого тела вращения, испытывающего при движении в потоке газа наименьшее противодействие. Длина тела l, радиус основания r. Эта задача называется аэродинамической задачей Ньютона.

Решение. Пусть тело получается вращением кривой $x(t)$ вокруг оси t, $x(0)$, $x(l) = r$, причем производная x' достаточно мала (т. е. тело имеет малую кривизну). Если считать, что плотность газа мала и молекулы отражаются от поверхности тела зеркально, то формализованная постановка задачи следующая: найти

$$\int_0^l {x'}^3 x\,dt \to \min, \quad x(0) = 0,\ x(l) = r.$$

Интегрант $L = L(x, x') = {x'}^3 x$ не зависит явно от t. Необходимое условие — интеграл энергии

$$x' L_{x'} - L = \mathrm{const} \ \Leftrightarrow\ x' \cdot 3{x'}^2 x - {x'}^3 x = C \ \Leftrightarrow\ 2{x'}^3 x = C.$$

Отсюда находим, что $x^{4/3} = C_1 t + C_2$ и $x = (\mathrm{C}_1 t + C_2)^{3/4}$. Из граничных условий следует, что $C_1 = r^{4/3}/l$, $C_2 = 0$.

Ответ. $\widehat{x} = r\left(\frac{t}{l}\right)^{3/4}$.

Точное решение аэродинамической задачи Ньютона без предположения малости кривизны тела будет найдено в разделе оптимального управления.

Пример 2. Рассмотрим задачу о минимальной поверхности вращения. Рабочий на токарном станке вытачивает детали. Длина детали $2T_0$, радиусы оснований ξ_0. Какую форму должны иметь детали, чтобы на их покраску пошло наименьшее количество краски?

Предполагается, что необходимое количество краски пропорционально площади боковой поверхности тела. Поскольку деталь является телом вращения, то имеем эквивалентную постановку задачи: найти тело вращения заданных размеров с наименьшей площадью боковой поверхности.

Решение. Пусть тело получено вращением кривой $x(t)$ вокруг оси t, $x(\pm T_0) = \xi_0$. Тогда площадь его боковой поверхности (без учета оснований) равна

$$S = 2\pi \int\limits_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+x'^2}\, dt.$$

Минимизируя эту величину, приходим к задаче ВИ

$$\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+x'^2}\, dt \to \min, \quad x(\pm T_0) = \xi_0.$$

Интегрант $L = L(x, x') = x\sqrt{1+x'^2}$ не зависит явно от t. Необходимое условие экстремума — интеграл энергии

$$x'L_{x'} - L = \mathrm{const} \;\Leftrightarrow\; \frac{-x}{\sqrt{1+x'^2}} = C \;\Rightarrow\; x = C_1\sqrt{1+x'^2}\,,$$

где $C_1 = -C$. Положим $x' = \operatorname{sh} p$, где p — параметр. Тогда

$$x = C_1 \operatorname{ch} p, \quad dx = C_1 \operatorname{sh} p\, dp,$$

$$dt = \frac{dx}{x'} = C_1\, dp \;\Rightarrow\; t = C_1 p + C_2.$$

Отсюда

$$x(t) = C_1 \operatorname{ch} \frac{t - C_2}{C_1}.$$

Поскольку гиперболический косинус — четная функция, то из граничного условия $x(\pm T_0) = \xi_0$ находим, что $C_2 = 0$. Чтобы найти константу C_1 воспользуемся граничным условием $x(T_0) = \xi_0$:

$$C_1 \operatorname{ch} \frac{T_0}{C_1} = \xi_0.$$

Положим $a = T_0/C_1$. Тогда решение задачи

$$\widehat{x}(t) = \xi_0 \frac{\operatorname{ch}(at/T_0)}{\operatorname{ch} a},$$

где константа a находится из уравнения

$$\frac{\operatorname{ch} a}{a} = \frac{\xi_0}{T_0}, \quad a > 0. \tag{3.1}$$

Полученное трансцендентное уравнение не всегда имеет решения. Чтобы это показать исследуем функцию $f(a) = \dfrac{\operatorname{ch} a}{a}$ при $a > 0$. Ее производная равна

$$f'(a) = \frac{\operatorname{ch} a}{a}\Big(\operatorname{th} a - \frac{1}{a}\Big).$$

Уравнение $\operatorname{th} a = 1/a$ при $a > 0$ имеет единственное решение a_*, в чем легко убедится, если изобразить на одном графике функции $\operatorname{th} a$ и $1/a$. Приближенно $a_* \approx 1.2$. Таким образом, $f'(a) < 0$ при $a \in (0, a_*)$ и $f'(a) > 0$ при $a > a_*$. Значит функция f до точки a_* убывает, а потом возрастает, причем $f(+0) = f(+\infty) = +\infty$. В точке a_* функция $f(a)$ при $a > 0$ имеет глобальный минимум, приближенно равный $f(a_*) \approx \approx 1.5$.

Таким образом, окончательно получаем, что уравнение (3.1) имеет решение, если отношение $\xi_0/T_0 \geqslant f(a_*) \approx 1.5$. Причем если неравенство строгое, то имеется два решения $a_1 < a_* < a_2$, из которых только первое соответствует минимуму в задаче. При $\xi_0/T_0 < f(a_*)$ решений в задаче нет. В этом случае экстремальное тело вырождается в пару дисков радиуса ξ_0, скрепленных по центру осью длиной $2T_0$.

Распространение света в неоднородной среде. Рассмотрим задачу о путях, по которым распространяется свет в плоской неоднородной среде.

Если путь задается функцией $x(t)$ с началом в точке (t_0, x_0) и концом в (t_1, x_1), а мгновенная скорость света в точке (t, x) равна v, то время, затрачиваемое светом, равно

$$T = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{v(t, x)}\, dt$$

(эта формула выводится точно так же, как в задаче о брахистохроне). Отметим, что величина $n = A/v$, где A — некоторая физическая постоянная, называется оптической плотностью среды (чем плотность выше, тем меньше скорость света).

Ферма сформулировал принцип, согласно которому свет распространяется по путям, на которых время T принимает экстремальное значение. Это означает, что форма пути является допустимой экстремалью в задаче

$$T \to \text{extr}, \quad x(t_j) = x_j.$$

Таким образом, получаем, что если скорость $v \sim \sqrt{x}$, то свет начинает распространяется по брахистохронам, т. е. криволинейно.

Проверим, что в оптически-однородной среде ($v = \text{const}$) свет распространяется по прямым. В этом случае

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + x'^2}\, dt \to \text{extr}\,.$$

Здесь интегрант $L = \sqrt{1 + x'^2}$ не зависит явно от t и x, следовательно, в качестве необходимого условия экстремума можно использовать интеграл импульса:

$$L_{x'} = \text{const} \ \Leftrightarrow \ \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = C \ \Leftrightarrow \ x' = C_1 \ \Rightarrow \ x = C_1 t + C_2.$$

Решим также следующую задачу. Найти пути распространения света в среде (например, атмосфере), плотность которой $n \sim 1/x$, т. е. $v \sim x$:

$$T = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{x}\, dt \to \text{extr}, \quad x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1.$$

Решение этой задачи объясняет такие известные оптические явления, как мираж (когда становится видно, что происходит за линией горизонта) и «оптическая лужа» (когда на горячем сухом темном асфальте видно отражение неба).

Занятие 4

РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ. ЗАДАЧИ СО СТАРШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Найти экстремали в задачах.

1. $\int\limits_0^1 ({x_1'}^2 + {x_2'}^2 - 2x_1x_2)\,dt \to \text{extr}$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = \operatorname{sh} 1$, $x_2(1) = -\operatorname{sh} 1$.

2. $\int\limits_0^{\pi/2} (x''^2 - x'^2)\,dt \to \text{extr}$, $x(0) = x'(0) = 1$, $x(\pi/2) = \pi/2$, $x'(\pi/2) = 0$.

3. Длинная стальная линейка закреплена на плоскости (t, x) в точках $(1, 1)$ (под углом $45°$) и $(2, -1)$ (под углом $-45°$). В какой точке она будет иметь горизонтальную касательную.

4. Выписать уравнение Эйлера–Остроградского и найти экстремали в следующей задаче:

$$I(x) = \iint\limits_B \left(\left(\frac{\partial x}{\partial t_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t_2}\right)^2 - \lambda x^2\right) dt_1\,dt_2 \to \text{extr}, \quad x\big|_S = 0,$$

где B — единичный круг, $S = \partial B$ — единичная окружность.

Задачи на самостоятельное решение.

1. $\int\limits_0^{e-1} (t+1)^k x''^2\,dt \to \text{extr}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x(e-1) = e$, $x'(e-1) = 2$, $k = -1, 0, 1$.

2. $\int\limits_0^a x^\alpha \sqrt{1 + x'^2}\,dt \to \text{extr}$, $x(0) = 0$, $x(a) = a$, $\alpha = 1, -1, 0$.

Пример билета на простейшие задачи

1. $\int\limits_0^1 (x'^2 + x^2 + 4x\operatorname{sh} t)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = -1,\ x(1) = 0.$
2. $\int\limits_0^1 (x''^2 - 24tx)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = x'(0) = 0,\ x(1) = \dfrac{1}{5},\ x'(1) = 1.$
3. $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{\sqrt{1+x'^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 1,\ x\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Разбор типичных ошибок

На примере билета.

1. $\int\limits_0^1 (x'^2 + x^2 + 4x \operatorname{sh} t)\, dt \to \text{extr}, \quad x(0) = -1,\ x(1) = 0.$

2. $\int\limits_0^1 (x''^2 - 24tx)\, dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x'(0) = 0,\ x(1) = \dfrac{1}{5},\ x'(1) = 1.$

3. $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{\sqrt{1 + x'^2}}{x}\, dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1,\ x\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Занятие 5

ЗАДАЧИ НА ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Исследовать задачи.

1. $\int\limits_0^{\pi/2} (x'^2 - x^2 + 4x\cos t)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = x(\pi/2) = 0.$

2. $\int\limits_0^{3\pi/2} (x'^2 - x^2 - 4x\sin t)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = x(3\pi/2) = 0.$

3. $\int\limits_0^1 (x'^2 + 3x^2)e^{2t}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 1,\ x(1) = e.$

4. $\int\limits_0^1 (x'^3 + 4x'^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1.$

Занятие 6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ БОЛЬЦА

1. Найти первую вариацию функционала

$$B(x) = \int_0^1 (x'^2 + x^2)\, dt + x^2(0) - 2x(1).$$

2. $\displaystyle\int_0^{e-1} (t+1)x'^2\, dt + 2x(0)(x(e-1)+1) \to \mathrm{extr}.$

3. $\displaystyle\int_0^1 (x_1'x_2' + x_1x_2)\, dt + x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0) \to \mathrm{extr}.$

4. На расстоянии l от глаза наблюдателя находится точечный источник света. Между глазом и источником по центру перпендикулярно оси источник–глаз находится бесконечная полупрозрачная пластина шириной $h < l$ и оптической плотностью $n = a/r$, где r — расстояние от центра пластины. Оптическая плотность среды вне пластины постоянна и равна n_0. Источник зажигают. Спрашивается, через какое время наблюдатель узнает об этом.

Задачи на самостоятельное решение.

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x'^2 - x^2 - 2x)\, dt + 2(-1)^k x^2(0) - x^2(\pi/2) \to \mathrm{extr}.$

6. $\displaystyle\int_0^1 e^{(-1)^k x} x'^2\, dt + 4(-1)^k e^{x(0)} + 32e^{-x(1)} \to \mathrm{extr}.$

Здесь $k = 0, 1$.

Занятие 7

РЕШЕНИЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. $\int\limits_0^1 (x'^2 + x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 xe^t\,dt = \dfrac{e^2+1}{4},\ x(0) = 0,\ x(1) = e.$

2. $\int\limits_0^1 x'^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = 1,\ \int\limits_0^1 tx\,dt = 0,\ x(0) = x(1) = 0.$

3. Пример многомерной изопериметрической задачи. Решим задачу

$$\int\limits_0^1 ({x_1'}^2 + {x_2'}^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 (x_1 + x_2)\,dt = \frac{3}{4},\ \int\limits_0^1 tx_1\,dt = \frac{1}{5},$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = x_2(1) = 1.$$

Решение. Лагранжиан

$$L = \lambda_0({x_1'}^2 + {x_2'}^2) + \lambda_1(x_1 + x_2) + \lambda_2 t x_1,$$

необходимое условие — система уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dt}L_{x_1'} + L_{x_1'} = 0, \\ -\dfrac{d}{dt}L_{x_2'} + L_{x_2'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda_0 x_1'' + \lambda_1 + \lambda_2 t = 0, \\ -2\lambda_0 x_2'' + \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_0 x_1'' = \lambda_2 t + \lambda_1, \\ 2\lambda_0 x_2'' = \lambda_1. \end{cases}$$

1. Если $\lambda_0 = 0$, то из второго уравнения системы следует, что $\lambda_1 = 0$, а из первого — $\lambda_2 = 0$. Все множители Лагранжа — нули. Этого не может быть.

2. Положим $\lambda_0 = 1/2$. Тогда общее решение системы уравнений Эйлера:

$$x_1 = \frac{\lambda_2 t^3}{6} + \frac{\lambda_1 t^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad x_2 = \frac{\lambda_1 t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

Из граничных условий $x_1(0) = x_2(0) = 0$ находим, что $C_2 = C_4 = 0$. Из условий в точке 1 и изопериметрических условия находим оставшиеся константы:

$$x_1(1) = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\lambda_2}{6} + \frac{\lambda_1}{2} + C_1 = 1, \quad x_2(1) = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\lambda_1}{2} + C_3 = 1,$$

$$\int\limits_0^1 (x_1 + x_2)\,dt = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \frac{\lambda_2}{24} + \frac{\lambda_1}{6} + \frac{C_2}{2} + \frac{\lambda_1}{6} + \frac{C_3}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\int\limits_0^1 t x_1\,dt = \frac{1}{5} \;\Rightarrow\; \frac{\lambda_2}{30} + \frac{\lambda_1}{8} + \frac{C_1}{3} = \frac{1}{5}.$$

Решая эту систему, получаем $\lambda_2 = 6$, $\lambda_1 = 0$, $C_1 = 0$, $C_3 = 1$.

Задачи на самостоятельное решение.

4. $\displaystyle\int\limits_1^{2k} t^k x'^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_1^{2k} t^{k-1} x\,dt = 1,\ x(1) = 0,\ x(2k) = k.$

5. $\displaystyle\int\limits_{-k}^{k} x\,dt \to \max, \quad \int\limits_{-k}^{k} \sqrt{1 + x'^2}\;dt = \pi k,\ x(\pm k) = 0.$

Здесь $k = 1, 2, 3$.

Занятие 8

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Примеры задач.

1. $\int\limits_0^1 (x'^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(1) = 0.$

2. $\int\limits_0^T x'^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ T + x(T) + 1 = 0.$

3. $\int\limits_0^T x'^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ (T-1)x^2(T) + 2 = 0.$

4. $\int\limits_0^T \frac{\sqrt{1+x'^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 1,\ x(T) = T - 1.$

5. Найти расстояние от точки $(1,0)$ до эллипса с полуосями 3 и 2.

6. $\int\limits_0^1 (x''^2 - 24tx)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = x'(0) = 0,\ x(1) = 1/5,\ x'(1) = 1.$

7. $\int\limits_1^e (t+1)tx''^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(1) = 0,\ x'(1) = 1,\ x(e) = e,\ x'(e) = 2.$

Занятие 9

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛАГРАНЖА

1. $\int\limits_0^\pi x'^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^\pi x\sin t\,dt = 1,\ x(0) = 0.$
2. $\int\limits_0^T x'^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^T x\,dt = \frac{1}{3},\ x(T) = 1.$
3. $\int\limits_0^\pi (x''^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x'(0) = x'(\pi) = 0,\ x(\pi) = 1.$
4. $\int\limits_0^1 (x''^2 + x'^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0,\ x(1) = \operatorname{sh} 1,\ x'(1) = \operatorname{ch} 1.$
5. $T \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^T x''^2\,dt = 1,\ x(0) = x'(0) = 0,\ x'(T) = 1.$
6. $x'(1) \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x''^2\,dt = 4,\ x(0) = x'(0) = x(1) = 0.$

Пример билета контрольной работы

1. $\int\limits_0^1 x'^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0)=1,\ x(1)=0.$

2. $\int\limits_0^1 (x^{(3)})^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0,\ x(1)=1,\ x'(1)=$ $=3,\ x''(1)=6.$

3. $\int\limits_0^1 (x'^2-x)\,dt - \dfrac{x^2(1)}{2} \to \mathrm{extr}\,.$

4. $\int\limits_0^1 x'^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt=0,\ x(0)=1,\ x(1)=0.$

Разбор типичных ошибок

На примере билета.

1. $\int\limits_0^1 x'^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0)=1,\ x(1)=0.$

2. $\int\limits_0^1 (x^{(3)})^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0,\ x(1)=1,\ x'(1)=$ $=3,\ x''(1)=6.$

3. $\int\limits_0^1 (x'^2 - x)\,dt - \dfrac{x^2(1)}{2} \to \mathrm{extr}\,.$

4. $\int\limits_0^1 x'^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = 0,\ x(0)=1,\ x(1)=0.$

Занятие 10

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Примеры задач.

1. $\int\limits_0^1 x'^2\,dt \to \mathrm{extr},\quad \int\limits_0^1 tx\,dt = 0,\ x(0) = 1.$

2. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin t\,dt \to \mathrm{extr},\quad |x'| \leqslant 1,\ x(\pm\pi) = 0.$

3. $\int\limits_0^4 (x'^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr},\quad |x'| \leqslant 1,\ x(4) = 0.$

4. $T \to \min,\quad |x''| \leqslant 2,\ x(-1) = 1,\ x(T) = -1,\ x'(-1) = x'(T) = 0.$

5. $T \to \min,\quad |x''| \leqslant 1,\ x'(0) = 1,\ x(0) = x(T) = x'(T) = 0.$

6. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \max,\quad \int\limits_0^1 \sqrt{1 + x'^2}\,dt = 2,\ |x'| \leqslant 1,\ x(0) = 1.$

Задача о мягкой посадке. Космический аппарат движется по прямолинейной траектории, перпендикулярной поверхности небесного тела. Требуется мягко посадить аппарат, затратив минимум топлива:

$$m_0 - m(T) \to \max,$$

$$x'' = \frac{ku}{m} - \gamma,\ m' = -u,\ x(0) = x_0 > 0,\ x'(0) = v_0,\ m(0) = m_0.$$

Пример билета контрольной работы

1. $\int\limits_{-4}^{0} (x'^2 + x)\, dt \to \text{extr}, \quad |x'| \leqslant 1,\ x(-4) = 0.$
2. $T \to \min, \quad 0 \leqslant x'' \leqslant 1,\ x(0) = 2,\ x'(0) = -1,\ x(T) = x'(T) = 0.$

Разбор типичных ошибок

На примере билета.

1. $\int\limits_{-4}^{0} (x'^2 + x)\, dt \to \text{extr}, \quad |x'| \leqslant 1,\ x(-4) = 0.$

2. $T \to \min, \quad 0 \leqslant x'' \leqslant 1,\ x(0) = 2,\ x'(0) = -1,\ x(T) = x'(T) = 0.$

Занятие 11

РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПРЯМЫМИ МЕТОДАМИ

1. Пример задачи на применение прямых методов:

$$\int_0^1 (x'^2 - x^2 + 2tx)\,dt \to \min, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Использовать две системы координатных функций: $(1-t)t^k$, $\sin(\pi k t)$. Сравнить с точным решением.

2. Пример задачи для самостоятельного решения:

$$\int_0^1 t^2(x'^2 + x^2)\,dt \to \min, \quad x(0) = 0,\ x(1) = \operatorname{sh} 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. М.*, *Тихомиров В. М.*, *Фомин С. В.* Оптимальное управление. 3-е изд., испр. и доп. — М.: Физматлит, 2007. — 408 с.
2. *Алексеев Е. Р.*, *Чеснокова О. В.* Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. — М.: NT Press, 2006. — 496 с.
3. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1988. — 549 с.
4. *Галеев Э. М.*, *Тихомиров В. М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 320 с.
5. *Гиндикин С. Г.* Рассказы о физиках и математиках. 4-е изд., испр. — М.: МЦНМО, 2006. — 464 с.
6. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. — М.: Высшая школа, 2005. — 335 с.
7. *Дьяконов В. П.* Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. — М.: СОЛОН-Пресс, 2006. — 720 с.
8. *Краснов М. Л.* Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. 2-е изд., испр. — М.: УРСС, 2002. — 176 с.
9. *Крылов О. В.* Метод конечных элементов и его применение в инженерных расчетах. — М.: Радио и связь, 2002. — 104 с.
10. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4: Методы оптимизации уравнения в частных производных, интегральные уравнения / Под ред. А. В. Ефимова. 2-е изд., перераб. — М.: Эдиториал УРСС, 1990. — 304 с.
11. *Тимофеев Ю. К.* Вариационное исчисление в оптимальном управлении. — Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т., 2002. — 93 с.
12. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. 5-е изд. — М.: Эдиториал УРСС, 2002. — 320 с.