МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Утверждено на заседании кафедры
«Прикладная математика и информатика»
24 января 2022 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой
_____М.В. Грязев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине (модулю)
«Волновая механика»

основной профессиональной образовательной программы
высшего образования – программы бакалавриата

по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

с направленностью (профилем)
Прикладная математика и информатика

Форма обучения: очная

Идентификационный номер образовательной программы: 010302-01-22

Тула 2022 год

Разработчик методических указаний

Родионова Г.А., доцент каф. ПМиИ, к.т.н., доцент

(ФИО, должность, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

Содержание

Лабораторная работа №1 Механические колебания
Лабораторная работа №2 Механические волны
Лабораторная работа №3 Уравнения плоской и сферической волн. Эффект Доплера
Лабораторная работа №4 Отражение волн от границ раздела (жидкостей)
Лабораторная работа №5 Общие задачи по дисциплине ВМ

Лабораторная работа №1

Тема: Механические колебания

Цель работы Научится решать задачи обязательного минимума по теме «Механические колебания»

Теоретическая справка: лекции 1-2

Темы по которым должны быть решены задачи:

1. Свободные колебания
   a. Свободные колебания при отсутствии сопротивления (простое гармоническое движение);
   b. Свободные затухающие колебания точки при сопротивлении, пропорциональном скорости;
   c. Влияние постоянной силы на свободные колебания точки.
2. Вынужденные колебания. Резонанс. Автоколебания.

Задачи к теме 1а

№1

Гармонические колебания точки определяются законом

$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$,

где A>0 – амплитуда колебаний

ω_0 >0 – круговая частота

α - начальная фаза.

Определить центр колебаний A_0, амплитуду A, круговую частоту, период T, линейную частоту ν в герцах и начальную фазу по следующим уравнениям движения

a) $x = -7\cos 12t$

b) $x = 4\sin\frac{\pi t}{20} - 3\cos\frac{\pi t}{20}$

c) $x = 2 - 4\sin(140t)$

d) $x = 6\sin^2(18t)$

e) $x = 1 - 4\cos^2\left(\frac{\pi t}{60}\right)$

№2

Частица совершает гармонические колебания вдоль оси Ox около положения равновесия $x = 0$. Частота колебаний $\omega_0 = 4c^{-1}$. В начальный момент времени координата частицы $x_0 = 25см$ и ее скорость $v_{x_0} = 100см/с$. Найти координату *x* и скорость v_x частицы через $t = 2{,}4c$ после начала движения.

№3

Висящий на вертикальной пружине груз С растягивает ее на величину x_{cm}. Пренебрегая сопротивлением среды, найти закон вертикальных колебаний груза, когда в начальный момент времени он находится на расстоянии h от положения равновесия и был отпущен без начальной скорости.

№4

Маятник колеблется в вертикальной плоскости около неподвижной горизонтальной оси. Выйдя в начальный момент из положения равновесия, он достигает наибольшего отклонения $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{16} рад$ через $\frac{2}{3} c$

Написать закон колебания маятника, считая, что он совершает гармонические колебания. В каком положении маятник будет иметь наибольшую угловую скорость, и чему она равна?

Задачи к темам 1b и 1c

№5

Затухающие колебания точки происходят по закону

$$x = a_0 exp(-bt) sin(\omega_1 t)$$

Найти

1. амплитуду смещения и скорость точки в момент времени t=0;
2. момент времени, когда точка достигает крайних положений.

№6

Тело совершает крутильные колебания по закону

$$\varphi = \varphi_0 exp(-bt) cos(\omega_1 t)$$

Найти

1. угловую скорость и угловое ускорение тела в момент t=0;
2. моменты времени, когда угловая скорость максимальна.

№7

Точка совершает затухающие колебания с частотой $\omega_1 = 25c^{-1}$. Найти коэффициент затухания b если в начальный момент скорость точки равна нулю, а ее смещение из положения равновесия в $\delta = 1{,}02$ раза меньше амплитуды.

№8

Период затухающих колебаний $T_1 = 1c$, логарифмический декремент затухания D=0,3, начальная фаза равна нулю. Смещение точки при $t = 2T_1$ составляет 5см. Запишите уравнения движения этого колебания.

№9

Амплитуда затухающих колебаний маятника за время t=2мин уменьшилось в два раза. Определить коэффициент затухания.

№10

Логарифмический декремент затухающих колебаний D=0,01. Определить число N полных колебаний маятника до уменьшения его амплитуды в три раза.

№11

Тело массой 100г, совершая затухающие колебания, за t=1мин потеряло 40% своей энергии. Определить коэффициент сопротивления η.

Задачи к теме 2

№12

Собственная частота ν_0 колебаний некоторой системы составляет 500 гц. Определить частоту ν_1 затухающих колебаний этой системы, если резонансная частота равна 499гц.

№13

Период T_1 затухающих колебаний системы составляет 0,2 с, а отношение амплитуд первого и шестого колебания равно 13. Определить резонансную частоту $\Omega_{рез}$ колебательной системы

№14

Гиря массой m=0,5кг, подвешенная на спиральной пружине жесткостью k=50 Н/м , совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $\eta = 0{,}5\,кг/с$. На верхний конец пружины действует вынуждающая сита, изменяющаяся по закону $F = 0{,}1\cos(\Omega t)H$. Определить для данной колебательной системы

1. коэффициент затухания b
2. резонансную амплитуду $A_{рез}$

№15

Шарик массой m может совершать незатухающие колебания около точки x=0 с собственной частотой ω_0. В момент t=0 , когда шарик находится в состоянии равновесия, к нему приложили вынуждающую силу $F_x = F_0 cos(\Omega t)$, совпадающую по направлению с осью x. Найти закон вынужденных колебаний шарика x(t)

№16

Найти разность фаз β между смещением и вынуждающей силой при резонансе смещения, если собственная частота колебаний $\omega_0 = 50c^{-1}$ и коэффициент затухания $b = 5{,}2c^{-1}$

Порядок выполнения

1. Студент получает свой вариант у преподавателя (набор из 3х задач)
2. Решения задач приводятся полностью со всеми математическими выкладками и с объяснением получения используемых формул.
3. Решения приводятся как численные, так и в виде графиков зависимости от времени, если она существует для результатов данной задачи.
4. Работа оформляется по установленным правилам (обложка, цель, постановка задачи, подробное решение, графики)

Литература

Лабораторная работа №2

Тема :Механические волны
Цель работы Научится решать задачи обязательного минимума по теме «Механические волны»

Теоретическая справка: лекции 3-4

Темы по которым должны быть решены задачи:

3. Уравнение плоской и сферических волн.
4. Волновое уравнение.
    a. Волновое уравнение плоской волны
    b. Скорость упругих волн в твердой среде.
    c. Скорость продольных волн в газах и жидкостях.
    d. Поперечная волна в натянутой упругой струне.
5. Энергия упругой волны

№1

Показать, что общее решение волнового уравнения для плоской волны, распространяющейся параллельно оси Ox, имеет вид $\xi = \xi_1 \cdot \left(\mathrm{t} - \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{c}}\right) + \xi_2 \cdot \left(t + \frac{x}{c}\right)$, где ξ_1 и ξ_2 -произвольные функции координаты x и времени t.

№2

В среде распространяется плоская незатухающая гармоническая волна. Найти среднюю объемную плотность полной энергии колебаний $\langle \mathrm{w} \rangle$, если в любой точке среды объемная плотность энергии равна w_0 через одну шестую периода колебаний после прохождения максимума смещения.

№3

Точечный изотропный источник упругих волн мощности P находится в центре круглого полого цилиндра радиуса R и высоты h. Найти средний по времени поток энергии, падающий на боковую поверхность цилиндра, полагая, что его стенки полностью поглощают волны, т.е. нет отражений.

№4

Найти мощность P точечного изотропного источника упругих волн, если на расстоянии r от него интенсивность волны равна I и коэффициент затухания волны γ.

№5

Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, по закону $\xi = A\cos(\omega t)$, а другой его коней жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от менее плотной среды, определить характер колебаний в любой точке среды.

№6

Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, по закону $\xi = A\cos(\omega t)$, а другой его коней жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, определить характер колебаний в любой точке среды.

№7

Труба, длина которой $L = 1$метр, заполнена воздухом и открыта с одного конца. Принимая скорость волны 340м/с, определите, при какой наименьшей частоте в трубе будет возникать стоячая волна.

№8

Найти число возможных собственных колебаний столба воздуха в трубе, частота которых меньше 1250Гц, если

- труба закрыта с одного конца
- труба открыта с обеих концов

Длина трубы 0,85 метра. Скорость волны 340м/с. Считать, что открытые концы трубы являются пучностями смещений.

№9

Найти частоту ν_1 основного тона струны, натянутой силой $F = 6kH = 6000H$. Длина струны 0,8 м, ее масса $m = 0{,}03$кг

Лабораторная работа №3

Тема: Уравнения плоской и сферической волн. Эффект Доплера

Задача №1

Уравнение незатухающих колебаний имеет вид:

$$\xi_0 = 10\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad см$$

Найти уравнение волны, если скорость распространения колебаний $c = 300$ м/с. Написать уравнение колебаний для точки, находящейся на расстоянии *l=600 м* от источника колебаний, а также уравнение колебаний для точек волны в момент времени *t=4с* после начала колебаний.

Задача №2

Уравнение незатухающих колебаний имеет вид

$$\xi_0 = 4\cos(600\pi t) \quad см$$

Найти смещение точки от положения равновесия, находящейся на расстоянии *l=75см* от источника колебаний, для момента времени *t=0,01с* после начала колебаний. Скорость распространения колебаний *с=300м/с*.

Задача №3

Уравнение незатухающих колебаний имеет вид

$$\xi_0 = \cos(2{,}5\pi t) \quad см$$

Найти смещение ξ от положения равновесия, скорость *v* и ускорение точки *w* находящейся на расстоянии *l=20 м* от источника колебаний, для момента времени *t=1с* после начала колебаний. Скорость распространения колебаний *с=100м/с*.

Задача №4

Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, отстоящих на расстояниях $l_1=10$ *м* и $l_2=16$*м* от источника колебаний. Период колебаний *T=0,04с*. Скорость распространения колебаний *с=300м/с*.

Задача №5

Найти смещение ξ от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l = \frac{\lambda}{12}$ *см*, в момент $t = \frac{T}{6}$. Амплитуда колебаний *A=0,05 м*.

Задача №6

Смещение ξ от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстоянии $l = 4\ см$, в момент $t = \frac{T}{3}$, равно половине амплитуды А. Найти длину λ бегущей волны.

Задача №6

Плоская звуковая волна распространяется вдоль оси Ох. Коэффициент затухания волны $\gamma = 0{,}023 м^{-1}$. В точке x_1=0 уровень громкости L_1=*60 дБ.* Найти

- уровень громкости на расстоянии в точке с координатой *x=50м.*
- координату *x* точки, в которой звук уже не слышен

Задача №7

На расстоянии r_1=*20м* от точечного изотропного источника звука уровень громкости L_1=*30 дБ.* Пренебрегая затуханием волны, найти

- уровень громкости L_2 на расстоянии r_2=*10м* от источника
- расстояние от источника, на котором звук не слышен

Задача №8

На расстоянии r_1=*100м* от точечного изотропного источника звука, частотой 200Гц уровень громкости *L=50 дБ.* Порог слышимости на этой частоте соответствует интенсивности звука I_0=0,10 нВт/м^2. Коэффициент затухания звуковой волны $\gamma = 5 \cdot 10^{-4} м^{-1}$. Найти звуковую мощность источника

Задача №9

Два поезда идут навстречу друг другу со скоростями u_1=*20м/с* и u_2=*15м/с.* Первый поезд

Дает гудок с частотой $\nu_0 = 600 Гц$. Найти частоту ν колебаний звука, который слышит пассажир второго поезда

- перед встречей поездов
- после встречи поездов

Скорость распространения звука в воздухе *c=340м/с.*

Задача №10

Два поезда идут навстречу друг другу со скоростями с одинаковой скоростью. Какова должна быть их скорость, чтобы частота свистка одного из них, слышимого на другом, изменилась в 9/8 раз.

Скорость распространения звука в воздухе *c=340м/с.*

Задача №11

Локомотив, движущийся со скоростью 120 км/ч, дает гудок длительностью t_0=*5с.* Найти продолжительность гудка для неподвижного относительно полотна дороги наблюдателя, если локомотив

- приближается к нему
- удаляется от него

Скорость распространения звука в воздухе *c=330м/с*.

Задача №12

Неподвижный источник испускает звук частоты ν_0. Найти частоту звука, отраженного от стенки, которая удаляется от источника с постоянной скоростью *u*. Скорость звука *c*. Считаем, что $c >> u$.

Лабораторная работа № 4

Тема: отражение волн от границ раздела (жидкостей)

Задача: пусть плоская звуковая волна падает на плоскую границу раздела Z=0 двух жидкостей под углом θ в плоскости XOZ

Плотность сред обозначим ρ_1 и ρ_2 и скорость звука в них c_1 и c_2

1) Построить графики для коэффициента отражения и прохождения волн: V(θ) и W(θ)
2) Найти $\theta_{критическое}$

Варианты:

№ варианта	1 среда	2 среда
1	азот	Вода
2	Воздух	Вода
3	Водород	Морская вода
4	Вода	Нефть
5	Спирт	Нефть
6	Вода	Бензин
7	Кислота	нефть
8	гелий	Нефть

наименование	Плотность ρ г/см^3	Скорость с м/с
Азот	$1.25049 * 10^{-3}$	333.6
Воздух	$1.293* 10^{-3}$	299.704
Гелий	$0.17846* 10^{-3}$	970
Вода	$1000 * 10^{-3}$	1440
Спирт	0.789	1177
Кислота (соляная)	1.19	1520
Бензин	0.75	1170
Нефть	0.85	1390
водород	$0.089882* 10^{-3}$	1270
Морская вода	1.03	1500

Проанализировать полученные результаты.

Лабораторная работа №5

Тема: Общие задачи по дисциплине ВМ
Теоретическая справка: лекции 1-6.

Задача №1

Ползун движется по прямолинейной направляющей с ускорением

$$w_x = -\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) \qquad \frac{м}{сек^2}$$

Найти уравнение движения ползуна, если его начальная скорость

$$v_{0x} = 2\pi \quad \frac{м}{сек}$$

а начальное положение совпадает со средним положением ползуна, принятым за начало координат.

Задача №2

Тело весом P находится на наклонной плоскости, составляющей с вертикалью угол β. К телу прикреплена пружина, жесткость которой k. Пружина параллельна наклонной плоскости. Найти уравнение движения тела, если в начальный момент оно было прикреплено к концу нерастянутой пружины и ему была сообщена начальная скорость v_0, направленная вниз по наклонной плоскости. Начало координат взять в положении статического равновесия.

Задача №3

Тело *M*, масса которого равна m, находится на гладкой горизонтальной плоскости. К телу прикреплена пружина жесткости k, второй конец которой прикреплен к шарниру O_1. Длина недеформированной пружины равна $l_0; \quad OO_1 = l$. В начальный момент тело *M* отклонено от положения равновесия *O* на конечную величину *OM=a* и отпущена без начальной скорости. Определить скорость тела в момент прохождения положения равновесия.

Задача №4

Груз весом 1,96 Н подвешен на пружине, коэффициент жесткости которой равен $k = 19{,}6 \ \frac{Н}{м}$. На груз действует возмущающая сила

$F_{воз} = 1{,}96 \cdot 10^{-3} sin 14t \quad Н$ и сила сопротивления $F_{сх} = -49\dot{x} \quad Н$.

Определить сдвиг фаз вынужденных колебаний и возмущающей силы.

Задача №5

Точка участвует одновременно в двух гармонических взаимно перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями:

$x = 3\cos 2\omega t \text{ см}$

$y = 4\cos\left(2\omega t + \pi\right) \text{см}$

Определите уравнение траектории точки и начертите ее с нанесением масштаба.

Задача №6

Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями:

$x = A\sin(\omega t) \text{ см}$

$y = B\cos\left(\omega t\right) \text{см}$

Определите уравнение траектории точки и начертите ее на плоскости xOy с указанием направления движения точки по этой траектории

Задача №7

В однородной упругой среде распространяется волна

$\xi = A\cos(\omega t - kx)$

Изобразите для момента $t = 0$:

1. график зависимости от x величин $\xi, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial x}$
2. направление скорости частиц среды в точках, где $\xi = 0$, если волна продольная.
3. направление скорости частиц среды в точках, где $\xi = 0$, если волна поперечная
4. примерный график распределения плотности среды $\rho(x)$ для продольной волны.

Задача №8

В однородной среде распространяется плоская упругая волна вида

$\xi = n\exp(-\gamma x)\cos(\omega t - kx)$.

Длина волны λ известна.

Найти разность фаз колебаний в точках, где амплитуды смещения частиц среды отличаются друг от друга на η процентов.

Задача №9

В однородной среде с плотностью ρ установилась стоячая волна $\xi = a\cos(kx)\cos(\omega t)$.

Найти выражение для объемной плотности потенциальной энергии.

Задача №10

В однородной среде с плотностью ρ установилась стоячая волна $\xi = a\cos(kx)\cos(\omega t)$.

Найти выражение для объемной плотности кинетической энергии.

Задача №11

Неподвижный источник испускает монохроматический звук. К нему приближается стенка со скоростью $u = 0{,}33 м/сек$. Скорость звука в среде $c = 330 м/сек$. Как и на сколько процентов изменяется длина волны звука при отражении от стенки?